Záróvizsga kérdések a matematikus szakon
(törzsanyag)
2006 június

1. Differenciálszámítás. (Differenciálható függvény, derivált. Differenciálás normált terekben. Függvénydiszkusszió. Szélsőérték. Inverz és implicit függvények tételei. Többváltozós függvények szélsőértéke.)

2. Integrálelmélet. (Az absztrakt Lebesgue-integrál, Beppo-Levi, Fatou és Lebesgue tétele. Radon-Nikodym tétel, Riesz-Fischer tétel. Abszolút folytonos függvények.)
Mérték- és integrálelmélet R^n-ben. (Jegorov, Luzin tétele. Reguláris mérték, a Lebesgue- és Stieltjes mérték. Fubini-tétel.) Numerikus integrálás.

3. A funkcionálanalízis fontosabb alaptételei (Banach–Hanh tétel, Banach–Steinhaus tétel, nyílt leképezés-tétel, zárt gráf tétel – alkalmazásokkal együtt. Gyenge topológia. Banach-Alaoglu-tétel.)

4. Topologikus terek (Topologikus terek és folytonos leképezések, térkonstrukciók. Topológiák generálása, altér és szorzattér topológizálása, szétválasztási tulajdonságok, kompaktság, összefüggőség. Normális terek, Uriszon és Tietze tételei.)
Metrikus terek (Teljesség. Banach-féle fixponttétel és alkalmazásai. Baire-féle kategória tétel. Metrizációs tétel. Kompakt halmazok metrikus terekben.)

5. Teljesen folytonos (kompakt) operátorok elmélete. (Alaptulajdonságok, Fredholm-féle alternatíva tétel.)
Folytonos lineáris operátorok Hilbert térben. (Korlátosság és folytonosság. Riesz-féle reprezentációs tétel (folytonos lineáris funkcionál esetén). Adjungált operátor, önadjungált, unitér és normális operátorok.)

6. Közönséges differenciálegyenletrendszerek. (Egzisztencia- és unicitási tételek. A megoldás folytonos függősége az egyenlete alakjától, a kezdeti értékektől, paraméterektől.)
Lineáris differenciálegyenletek és rendszerek. (Egzisztencia- és unicitástételek, alaprendszer, alapmátrix, a megoldás előállítása, konstansvariálás. Exponenciális mátrix, konstans együtthatós rendszer.)
Közönséges differenciálegyenletek stabilitása és aszimptotikus stabilitása. Az ezekre vonatkozó szükséges és elégséges feltételek. Kezdeti érték feladatok numerikus kiszámítása.

7. Parciális differenciálegyenletek. (Disztribúciók. Klasszikus és általánosított Cauchy feladat hullámegyenletre és parabolikus egyenletre. Szoboljev terek. Klasszikus és általánosított peremérték feladat elliptikus egyenletekre, sajátérték probléma. Vegyes feladat hiperbolikus és parabolikus egyenletre.

8. Trigonometrikus sorfejtések. Speciális ortogonális polinomok. (Klasszikus konvergenciaelmélet.)
Általános ortogonális sorok konvergencia- és szummábilitási elmélete.

9. Komplex változós függvények. (Elemi függvények, folytonosság, differenciálhatóság, Cauchy–Riemann egyenletek. Komplex függvény integrálása, Cauchy-féle alaptétel és Cauchy-féle integrálformulák.)

Komplex változós függvények. (Egész függvények, Liouville tétel. Az algebra alaptétele. Laurent-sor, Taylor-sor, reziduum tétel.)

10. Algoritmusok bonyolultsága. (Számítási modellek, véges automaták, Turing-gépek, eldönthetőség, tár és idő.)

11. Kombinatorika. (Gráfok, leszámlálások, König-tétel, Ramsey-tétel, extremális problémák.)

12. Halmazelmélet. (Naív és axiómatikus felépítés, számosságok, rendszámok, kofinalitás. Kiválasztási axióma és vele ekvivalens tételek.)
    Matematikai logika. (Elsőrendű nyelvek, teljességi és nemteljességi tételek, modellelmélet, rekurzióelmélet.)

13. Csoportelmélet. (A csoport fogalma, izomorfia, permutációcsoportok, Cayley-tétel. A véges Abel-csoportok alaptétele. Feloldhatóság. Sylow-tételek. Csoportreprezentációk.)

14. Gyűrű- és testelmélet. (Gyűrű, részgyűrű, ideál, integritástartomány, modulus, test fogalma. Speciális gyűrűk, egyértelmű prímfaktorizáció főideálgyűrűkben. Testbővítések, algebrailag zárt test.)

15. Hálóelmélet. (Részben rendezett halmazok, hálók, speciális hálók. Boole-algebra, Stone-tétel, teljes hálók. Ultraszorzat.) Kategóriák és funktorok. Univerzális algebrák. Birkhoff-ttel.

16. Számelmélet. (Alaptétel, kongruenciák, Euler–Fermat tétel, Wilson tétel, számelméleti függvények, négyzetes maradék, primitív gyök. Prímszámtétel.)

17. Lineáris algebra (Lineáris terek, lineáris transzformációk. Kvadratikus alakok. Sajátérték, sajátvektor. Karakterisztikus polinom. Cayley-Hamilton-tétel. Euklidészi vektorterek, skaláris szorzat. Ortogonalizálás. Ortogonális, unitér, szimmetrikus és önadjungált mátrixok. Jordán-féle normálalak.) Sajátértékek numerikus kiszámítása.

18. Valószínűségszámítás. (Valószínűségeloszlások, függetlenség. Valószínűségi változók várható értéke, magasabb momentumok. Konvergenciafajták, kapcsolataik. Borel–Cantelli lemmák. Nagy számok gyenge törvényei. Független összeg konvergenciája. Nagy számok erős törvényei. Gyenge konvergencia, karakterisztikus függvény. Centrális határeloszlás tétel. Iterált logaritmus tétel.)

19. A feltételes várható érték fogalma. Tulajdonságai. A feltételes valószínűség, feltételes eloszlás. Martingálok. Martingál konvergencia (1 valószínűségű, ill. L_p-beli).

20. Görbe- és felületelmélet Euklideszi terekben. (Görbe paraméterezése, alapmennyiségek, Frenet-féle apparátus. görbék és hiperfelületek görbületi viszonyai. Felület paraméterezése, Gauss-féle főmennyiségek. Felületi pontok osztályozása. Főirányok. Geodetikusok.)

21. Differenciálható sokaságok. (A differenciáltopológia alapfogalmai: leképezesek, függvénycsírák, érintőtér. Vektormezők, sima vektormező integrálása. Tenzorok. Differenciálformák integrálása. Lineáris konnexiók. Általános Stokes tétel.)

22. Projektív geometria. (Projektív terek és projektív transzformációk, kettősviszony.

Az egyenes és a sík projektívitásai, involúciók. Pappos tétel, Desargues tétel. Másodrendű alakzatok. Véges geometriák.)

23. Hiperbolikus geometria. (A geometria axiómatikus megalapozása. A párhuzamossági axióma szerepe a Hilbert-féle axiómarendszerben. A Bolyai-féle geometria Beltrami-Cayley-Klein modellje. Poincaré-féle modell. Hiperbolikus síkgeometria projektív modellje.)
24. Geometriai transzformációk és csoportjaik. (Az euklidészi sík és tér izometriái. Diszkrét csoportok, szabályos poliéderek és szimetriacsoportjaik. Affin terek morfizmusai. Szemieuklidészi vektorterek morfizmusai. Witt-tétel, Cartan-Dieudonné-tétel.)
25. Függvények közelítése, Lagrange–Hermite interpoláció. Spline interpoláció. Egyenletrendszerek numerikus megoldási módszerei.
26. Matematikai statisztika. (Tapasztalati becslések, Glivenko–Cantelli tétel. Elégségesség, Fisher-féle információ. Pontbecslések és tulajdonságaik. Momentum módszer, maximum likelihood módszer. Bayes-becslés. Hipotézisvizsgálat. Normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák. Többdimenziós normális eloszlás. Nemparaméteres próbák.)
27. Operációkutatás. (Lineáris egyenlőtlenség-rendszerek. Farkas-lemma. Carathéodory-tétel. Kúp, poliéder, politóp. Lineáris program, dualitástételek. Teljes unimoduláris mátrixok, egészértékűség. Neumann-féle minimax tétel. Maximális folyam – minimális vágás tétel. Minimális költségű folyam.)
28. Algebrai topológia. (Fundamentális csoport. alkalmazások: dimenzióinvariancia. Differeciálható sokaságok közötti leképezések fokszáma, Sündisznó tétel. Borsuk–Ulam tétel. Felületek. Fedőterek, univerzális fedőtér. 2-adrendű kompakt felületek osztályozása.)