A 2004. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

október 29. — november 8.

1. Egy X topologikus tér $L(X)$ Lindelöf-száma az a legkisebb λ végtelen számosság, amelyre igaz, hogy X minden nyílt lefedéséből kiválasztható legfeljebb λ számosságú részfedés. Bizonyítandó, hogy ha X olyan M_1-tér, amelyben minden nem-megszámlálhatóan végtelen halmaznak van kondenzációs pontja, akkor $L(X) = \sup L(A)$, ahol A az X szeparábilis zárt alterein fut végig.
(A $H \subseteq X$ részhalmaz kondenzációs pontján olyan $x \in X$ pontot értünk, amelynek minden környezete H-nak nem-megszámlálhatóan végtelen sok pontját tartalmazza.)

2. Jelölje $t(G)$ a G gráf teljes négyszögeinek számát és $e_G(S)$ a G gráfban az S ponthalmaz által feszített élek számát. Legyenek G_1 és G_2 egy közös V ponthalmazon értelmezett (egyszerű) gráfok, $|V| = n$, és tegyük fel, hogy bármely $S \subseteq V$ halmazra $|e_{G_1}(S) - e_{G_2}(S)| \leq n^2/1000$. Bizonyítandó, hogy $|t(G_1) - t(G_2)| \leq n^4/1000$.

3. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $c > 0$ konstans, hogy minden $n \geq 3$-ra létezik olyan n pontú síkgráf, amelyet akárhogy rajzolunk le egyenes élekkel a síkba, mindig lesz két olyan éle, melyek hosszának aránya legalább cn.

4. Adjuk meg azokat a teljesen multiplikatív és nemnegatív $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvényeket, amelyekre teljesül, hogy valahányszor $a, b \in \mathbb{Z}$ és $b \neq 0$, akkor léteznek q és r egészek úgy, hogy $a = qb + r$ és $f(r) < f(b)$.

5. Legyen G nem feloldható véges csoport és $\varepsilon > 0$. Mutassuk meg, hogy van olyan pozitív egész k és olyan $w \in F_k$ szó, melybe k darab, G-n egyenletes eloszlású független változót helyettesítve $w = 1$ valószínűsége kisebb, mint ε. (Itt F_k a k elem által szabadon generált csoport.)

6. Igaz-e, hogy ha $F \subset [0,1]$ nulla Lebesgue-mértékű perfekt halmaz, akkor a $C^1[0,1]$ térben mindenütt sűrű halmazt alkotnak azok a függvények, amelyeknek F-re való megszorítása injektív?
(A $[0,1]$ intervallumon folytonosan differenciálható valós függvények $C^1[0,1]$ terében a topológiát a

$$d(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x) - g'(x)|$$

metrika definiálja.)

7. Legyen K olyan centrálszimmetrikus zárt halmaz az
$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$
gömbfelületen, amely az $S^2 \setminus K$ bármely két átellenes pontját elválasztja. Igazoljuk, hogy minden pozitív ε-hoz van olyan páratlan fokú homogén P polinom, hogy a
$$Z(P) = \{(x, y, z) \in S^2 : P(x, y, z) = 0\}$$
halmaznak K-tól vett Hausdorff-távolsága kisebb, mint ε.

8. Igazoljuk, hogy minden $0 < \delta < 2\pi$ számhoz létezik olyan $m \geq 1$, hogy ha n tetszőleges pozitív egész, és az egységkörvonalra eső $z_1, \ldots,$ z_n komplex számokra $z_1^\nu + \ldots + z_n^\nu = 0$ teljesül minden $1 \leq \nu \leq m$ egész kitevő mellett, akkor az egységkörvonal minden δ hosszúságú íve tartalmazza a $z_1, \ldots, z_n$ számok valamelyikét.

9. Legyen F sima (azaz C^∞), zárt felület. Egy $f : F \to \mathbb{R}^2$ folytonos leképezést nevezzünk *majdnem-immerziónak*, ha létezik egy γ sima, zárt, beágyazott (nem feltétlenül összefüggő) görbe F-ben, melyen kívül az f sima és maximális (azaz 2) rangú, és minden $p \in \gamma$ pontra létezik p körül, illetve $f(p)$ körül olyan (x, y), illetve (u, v) lokális koordinátarendszer, melyekben e pontok az origónak felelnek meg, és az f leképezés az $(x, y) \mapsto (u, v)$, $u = |x|$, $v = y$ alakot ölti.
Milyen génuszú sima, zárt, összefüggő, irányítható F felületeknek létezik olyan majdnem-immerziójuk a síkba, melynél a γ görbe összefüggő komponenseinek száma adott n pozitív egész?

10. Legyen $\mathcal{N}_p$ egy p dimenziós standard normális vektor, és tetszőleges $a \in \mathbb{R}^p$ vektorra jelölje $H_p(a)$ az $E|\mathcal{N}_p + a|$ várható értéket. Bizonyítsuk be, hogy $p > 1$ esetén
$$H_p(a) = (p-1) \int_0^\infty H_1\left(\frac{|a|}{\sqrt{1+r^2}}\right) \frac{r^{p-2}}{(1+r^2)^{\frac{p}{2}}} dr.$$

A megoldások benyújtásának határideje 2004. november 8-a, 12 óra. Ha a versenyző az egyetemi tananyagban nem szereplő ismeretre támaszkodik, akkor az állítás pontos kimondása és pontos hivatkozás szükséges. További információ a `http://www.cs.elte.hu/~schw04` honlapon található.

A megoldásokat 2004. november 9-én, kedden 16 órakor az ELTE lágymányosi déli épületének (1117 Bp. Pázmány Péter sétány 1/c) 1–820 számú Hajós György termében megbeszéljük. Minden érdeklődőt szívesen látunk. Jó munkát kíván

a Versenybizottság