A 2008. évi Schweitzer Miklós Emlékverseny feladatai
október 22 - november 3.

1. Adott egy $\mathcal{H} \subset P(X)$ halmazrendszer az X alaphalmazon, valamint egy $\kappa > 0$ számosság úgy, hogy bármely $x \in X$-et kevesebb, mint κ darab $\mathcal{H}$-beli halmaz tartalmaz. Bizonyítandó, hogy létezik X-nek olyan $f : X \to \kappa$ színezése, amiben minden nemüres $A \in \mathcal{H}$-nak van „egyedi" pontja, azaz olyan $x \in A$, amelyre bármely $x \neq y \in A$ esetén $f(x) \neq f(y)$.

2. Legyen $t \geq 3$ egész és $1 \leq i < j \leq t$ esetén legyen $A_{ij} = A_{ji}$ az n elemű X halmaz tetszőleges részhalmaza. Igazoljuk, hogy létezik olyan $1 \leq i < j \leq t$, amelyre

$$\left|(X \setminus A_{ij}) \cup \bigcup_{k \neq i,j} (A_{ik} \cap A_{jk})\right| \geq \frac{t-2}{2t-2} n.$$

3. Egy G páros gráfot az $\{x_1, \ldots, x_n\}$ és $\{y_1, \ldots, y_n\}$ csúcsokon (azaz az élek $x_i y_j$ alakúak) szelídnek nevezünk, ha semelyik $x_i y_j x_k y_l$ útjára ($i, j, k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$) sem teljesül, hogy $j < l$, de $i + j > k + l$.

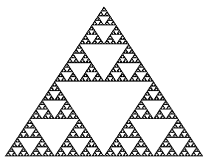
Határozzuk meg az olyan α valós számok infimumát, melyekhez létezik olyan $c = c(\alpha) > 0$ konstans, hogy bármely szelíd gráfra $e \leq c \cdot n^{\alpha}$, ahol n a csúcsszám fele, és e az élek száma.

4. Legyen A az S_n szimmetrikus csoport egy részcsoportja, és G normálosztó A-ban. Mutassuk meg, hogy ha G tranzitív, akkor $|A : G| \leq 5^{n-1}$.

5. Legyen A a természetes számok végtelen részhalmaza, és jelöljük $\tau_A(n)$-nel az n szám A-beli osztóinak a számát. Konstruáljunk olyan A halmazt, amire $\sum_{n \leq x} \tau_A(n) = x + O(\log\log x)$, és mutassuk meg, hogy nincs olyan A halmaz, ahol a fenti képletben a hibatag $o(\log\log x)$.

6. Meg lehet-e adni úgy köröket a síkon, hogy minden egyenes legalább 1-et, de legfeljebb 100-at messen közülük?

7. Legyen $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ olyan folytonos függvény, amelyre $f(x) = f(x+1)$ minden x-re, legyen továbbá $t \in [0, 1/4]$. Bizonyítandó, hogy van olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy az $f(x-t)$-ből az $f(x+t)$ pontba mutató vektor merőleges az $f(x)$-ből $f(x+1/2)$-be mutató vektorra.



8. Legyen S az ábrán látható Sierpinski háromszög. Mit tudunk mondani az S-en értelmezett tipikus folytonos valós függvény $f^{-1}(y)$ szinthalmazainak Hausdorff dimenziójáról? (Egy tulajdonság akkor teljesül az S-en értelmezett tipikus folytonos valós függvényre, ha az e tulajdonsággal nem rendelkező függvények halmaza első Baire kategóriájú a folytonos $S \to \mathbb{R}$ függvények metrikus terében a szuprémum normával.)

9. Adott $\alpha > 0$ mellett tekintsük a $\{|z| < 1\}$ egységkörben értelmezett, reguláris, sehol sem eltűnő $f(z)$ függvényeket, amelyekre $f(0) = 1$, $\Re z \frac{f'(z)}{f(z)} > -\alpha$ $(|z| < 1)$. Mutassuk meg, hogy közülük a $g(z) = \frac{1}{(1-z)^{2\alpha}}$ függvény értékkészlete tartalmazza az összes többi értékkészletét! A $g(z)$ függvénynek azt a reguláris ágát tekintjük, amelyikre $g(0) = 1$.

10. Jelölje V az $\mathbb{R}^3$ nem kollineáris rendezett vektorpárjainak halmazát, H pedig az $\mathbb{R}^3$ origón átmenő egyeneseinek a halmazát. Igaz-e, hogy bármely $f : V \to H$ folytonos függvényhez létezik olyan $g : V \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ folytonos függvény, amire $g(v) \in f(v)$ minden $v \in V$ esetén?

11. Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ (nem feltétlenül független) normális eloszlású valószínűségi változók, amelyekre $E\xi_j = 0$, $E\xi_j^2 \le 1$, $1 \le j \le n$. Bizonyítsuk be, hogy $E\left(\max_{1\le j\le n} \xi_j\right) \le \sqrt{2\log n}$.

- **Figyelem!!! Fontos új információ:** Az elmúlt évek tapasztalatai alapján a verseny folyamán a `www.bolyai.hu/schweitzer.html` honlapon található linken folyamatosan közzétesszük a feladatok szövegével kapcsolatban felmerülő esetleges pontosításokat, javításokat.

  A feladatokkal kapcsolatos észrevételeket a `ruzsa@renyi.hu` címre kérjük küldeni.

- A megoldások benyújtásának határideje 2008. november 3-án déli 12 óra. A megoldásokat a Bolyai János Matematikai Társulat helyi tagozatánál kell benyújtani (ahol a titkár az átvétel időpontját igazolja), vagy ezen időpontig ajánlottan postára kell adni a versenybizottság címére:

  Ruzsa Imre, Rényi Intézet

  1053, Budapest, Reáltanoda u. 13-15. / 1364 Pf. 127.

- Ha a versenyző az egyetemi tananyagban nem szereplő ismeretre támaszkodik, akkor az állítás pontos kimondása és pontos hivatkozás szükséges. További információ a `www.bolyai.hu/schweitzer.html` honlapon található.

- A megoldásokat 2008 november 7-én, pénteken 14 órakor az ELTE lágymányosi déli épületének (1117 Bp. Pázmány Péter sétány 1/c) 0-222-es termében megbeszéljük. Minden érdeklődőt szívesen látunk.

- A verseny eredményhirdetésére december 19-én, pénteken 14 órakor kerül sor a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet nagytermében (1053 Bp. Reáltanoda u. 13-15, I. em).

  Jó munkát kíván

  a Versenybizottság.