A 2010. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

2010. október 22. - november 2.

1. Legyen p prím. Jelölje $N(p)$ azon x egész számok számát, melyekre $1 \le x \le p$ és

$$x^x \equiv 1 \pmod{p}.$$

Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan $c < 1/2$ és $p_0 > 0$ számok, hogy

$$N(p) \le p^c,$$

amennyiben $p \ge p_0$.

2. Legyen G megszámlálhatóan végtelen, d-reguláris, összefüggő, csúcstranzitív gráf. Mutassuk meg, hogy G-ben van teljes párosítás.

3. Egy n elemű alaphalmazon legfeljebb hány különböző $A_1, \ldots, A_t$ részhalmaz adható meg úgy, hogy bármely $1 \le i < j < k \le t$ esetén $A_i \cap A_k \subseteq A_j$?

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $n \ge 2$ és $I_1, I_2, \ldots, I_n$ főideálok egy egységelemes, kommutatív gyűrűben úgy, hogy bármely nemüres $H \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén $\sum\limits_{h \in H} I_h$ is főideál, akkor

$$I_2 I_3 I_4 \ldots I_n + I_1 I_3 I_4 \ldots I_n + \cdots + I_1 I_2 \ldots I_{n-1}$$

szintén főideál.

5. Adottak a síkon a $v_1, \ldots, v_n$ és $w_1, \ldots, w_n$ vektorok a következő tulajdonságokkal: minden $1 \le i \le n$-re $|v_i - w_i| \le 1$, valamint minden $1 \le i < j \le n$ esetén $|v_i - v_j| \ge 3$ és $v_i - w_i \ne v_j - w_j$. Igazoljuk, hogy a $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ és $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ halmazokra a $V + (V \cup W)$ összeghalmaz elemszáma legalább $cn^{3/2}$ valamely univerzális $c > 0$ konstansra.

6. Létezik-e olyan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, melyre minden $d \in \mathbb{R}$ esetén $g_{m,d}(x) = f(x, mx + d)$ szigorúan monoton nő $\mathbb{R}$-en, ha $m \ge 0$, és egyetlen nem üres nyílt intervallumon sem monoton, ha $m < 0$?

7. Van-e olyan $a_n \ge 0$, ℓ^2-beli sorozat, melyre

$$\sum_{n \ge 1} \Big(\sum_{k \ge 1} \frac{a_{kn}}{k} \Big)^2 = +\infty \ ?$$

8. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ véges Lebesgue mértékű, összefüggő nyílt halmaz, és $u : D \to \mathbb{R}$ harmonikus függvény. Mutassuk meg, hogy vagy u konstans, vagy pedig majdnem minden $p \in D$ -re az

$$f'(t) = (\mathrm{grad}\ u)(f(t)), \quad f(0) = p$$

kezdetiérték-problémának nincsen (mindenütt differenciálható) $f : [0, \infty) \to D$ megoldása.

9. Minden M m-dimenziós, zárt C^∞ sokasághoz rendeljünk hozzá egy $G(M)$, $2m$-dimenziós, zárt C^∞ sokaságot a következőképpen. Ágyazzuk be M-et valamilyen $\mathbb{R}^q$ euklideszi térbe. Jelölje $\mathbb{RP}^q$ a q-dimenziós valós projektív teret. A $G(M) \subseteq M \times \mathbb{RP}^q$ sokaság az olyan (x, e) párokból áll, amelyekre $x \in M \subseteq \mathbb{R}^q$, és az $e \subseteq \mathbb{R}^{q+1} = \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$ egydimenziós lineáris altér benne van a $T_xM \subseteq \mathbb{R}^q \subset \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$ érintőtér és a $(0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{q+1}$ vektor által kifeszített $(m + 1)$-dimenziós lineáris altérben. Bizonyítsuk be, hogy ha N egy n-dimenziós zárt C^∞ sokaság, akkor $P = G(M \times N)$ és $Q = G(M) \times G(N)$ kobordánsak, azaz létezik egy $(2m + 2n + 1)$-dimenziós kompakt, peremes C^∞ sokaság, amelynek pereme P és Q diszjunkt uniója.

10. Tekintsük a $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ teret a szorzattopológiával (ahol $\{0, 1\}$ diszkrét tér). Legyen $T : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ a bal-eltolás, azaz $(Tx)(n) = x(n + 1)$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Megadható-e véges sok Borel-halmaz: $B_1, \dots, B_m \subset \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ úgy, hogy a

$$\{T^i(B_j) \mid i \in \mathbb{N}, 1 \le j \le m\}$$

halmazrendszer által generált σ-algebra egybeesik a Borel-halmazok rendszerével?

11. Az X és Y valós értékű véletlen változók maximálkorrelációja az $f(X)$ és $g(Y)$ változók korrelációjának szuprémuma az olyan f és g Borel mérhető, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeken, amelyekre $f(X)$ és $g(Y)$ véges szórású. Legyen U a $[0, 2\pi]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, valamint n és m pozitív egészek. Számítsuk ki $\sin(nU)$ és $\sin(mU)$ maximálkorrelációját.

A megoldások beadásának határideje **2010. november 2. (kedd), déli 12 óra.** A megoldásokat a Bolyai János Matematikai Társulat helyi tagozatánál kell benyújtani (ahol a titkár az átvétel időpontját igazolja), vagy ezen időpontig ajánlottan postára kell adni a versenybizottság címére:

Ruzsa Imre, MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet
1364 Budapest, Pf. 127.

Ha a versenyző az egyetemi tananyagban nem szereplő ismeretre támaszkodik, akkor az állítás pontos kimondása és pontos hivatkozás szükséges. További információ a `www.bolyai.hu/hu/schweitzer.html` oldalon található.

A megoldásokat 2010. november 3-án, szerdán 16 órakor az ELTE lágymányosi déli épületének (1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/c) 1-820 Hajós György termében megbeszéljük. Minden érdeklődőt szívesen látunk.

A verseny eredményhirdetésére 2010. december 17-én, pénteken 14 órakor kerül sor az MTA Rényi Intézet (1053 Budapest, Reáltanoda u. 13-15) nagytermében.

A verseny során felmerülő megjegyzések, javítások a `www.renyi.hu/~verseny` oldalon érhetőek el.

Jó munkát kíván

a Versenybizottság.