Véletlen gráfok

Backhausz Ágnes
Eötvös Loránd Tudományegyetem és
MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

2016. december 2.

Miért foglalkoznak a kutatók matematikával?

Michael Harris: Mathematics without apologies (2015)

Miért foglalkoznak a kutatók matematikával?

Michael Harris: Mathematics without apologies (2015)

- jó / hasznos

Miért foglalkoznak a kutatók matematikával?

Michael Harris: Mathematics without apologies (2015)

- jó / hasznos
- igaz /logikai következtetéseken alapul

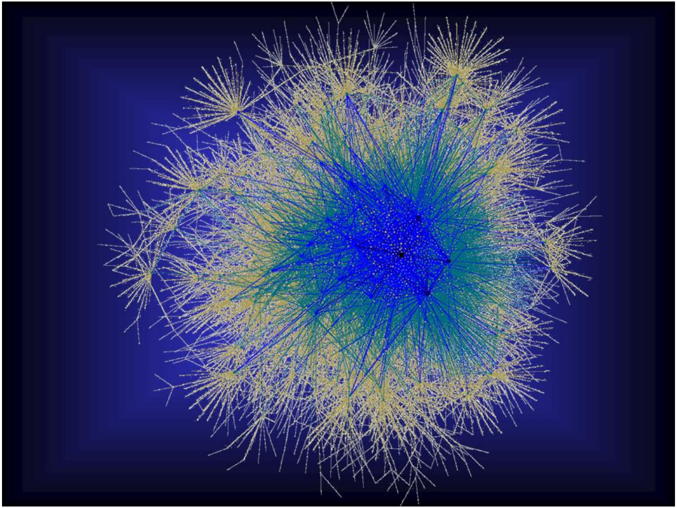
Without apologies

Miért foglalkoznak a kutatók matematikával?

Michael Harris: Mathematics without apologies (2015)

- jó / hasznos
- igaz /logikai következtetéseken alapul
- szép

Nagy hálózatok



Forrás: http://math.cornell.edu/∼mec (Ross Richardson)

Nagy hálózatok

Példák valós hálózatokra

- társadalmi hálózatok (pl. online közösségi hálózatok)

Nagy hálózatok

Példák valós hálózatokra

- társadalmi hálózatok (pl. online közösségi hálózatok)
- információs hálózatok (telefon, internet, www)

Nagy hálózatok

Példák valós hálózatokra

- társadalmi hálózatok (pl. online közösségi hálózatok)
- információs hálózatok (telefon, internet, www)
- biológiai hálózatok

Nagy hálózatok

Példák valós hálózatokra

- társadalmi hálózatok (pl. online közösségi hálózatok)
- információs hálózatok (telefon, internet, www)
- biológiai hálózatok

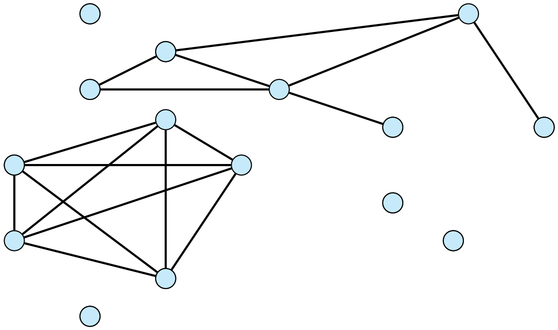
Kérdések

- előrejelzés: hogyan fog fejlődni, hogyan reagál külső hatásokra
- mennyiségi leírás: összefüggő komponensek, szomszédok száma
- múltbeli fejlődés: a kialakulás folyamata
- működés: információterjedés

Gráfok

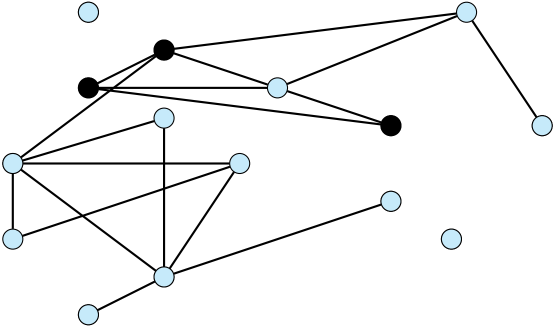
Gráf: csúcsok és élek

$G = (V, E)$, ahol V véges halmaz, $E \subseteq V \times V$.



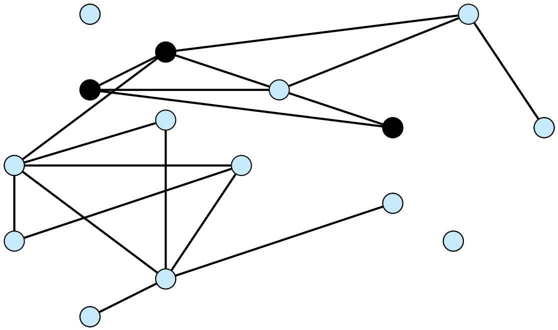
Sűrű véletlen gráfok

Erdős–Rényi-gráf: bármely két csúcsot függetlenül, p valószínűséggel kötünk össze egymással.



Sűrű véletlen gráfok

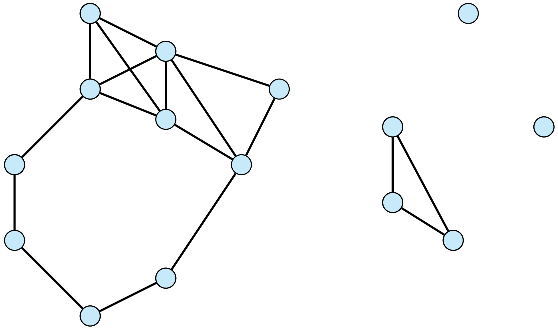
Erdős–Rényi-gráf: bármely két csúcsot függetlenül, p valószínűséggel kötünk össze egymással.



Kérdés: mennyi a valószínűsége, hogy három véletlenszerűen kiválasztott csúcs háromszöget alkot?

Geometriai véletlen gráfok

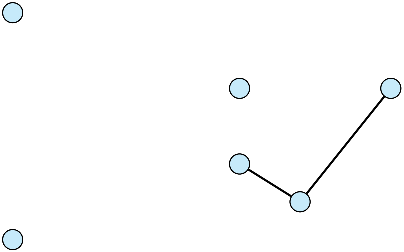
Véletlenszerűen választjuk ki a csúcsok helyét a síkon, majd azokat kötjük össze, melyek adott távolságnál közelebb vannak egymáshoz.



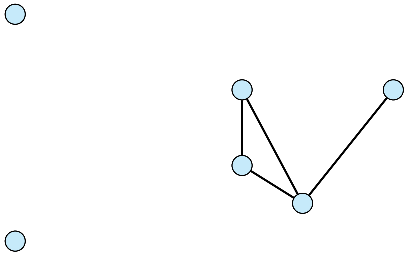
Kérdés: mekkorák az összefüggőségi komponensek?

Motiváció: bluetooth hálózatok (Broutin, Lugosi, Devroye, 2013)

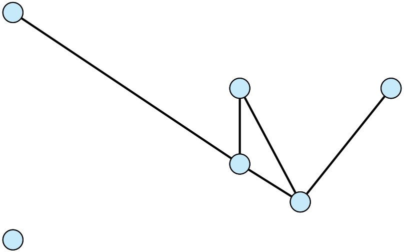
Időben fejlődő véletlen gráfok

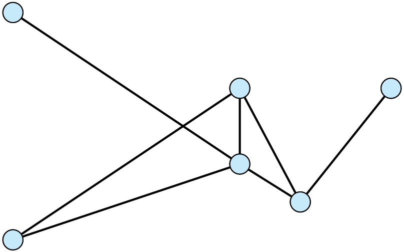


Időben fejlődő véletlen gráfok



Időben fejlődő véletlen gráfok

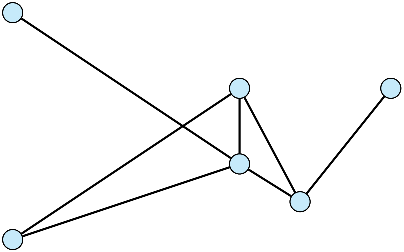




Időben fejlődő véletlen gráfok

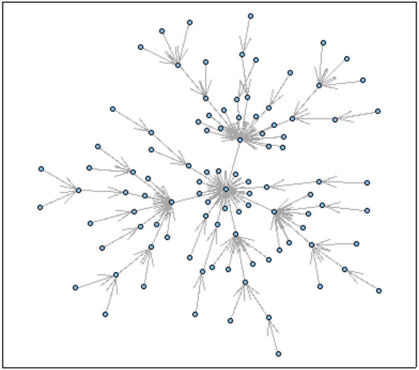
A több szomszéddal rendelkező csúcsok általában nagyobb valószínűséggel kapnak új éleket: *preferential attachment*.

Például: Barabási–Albert-gráf (1999); az új csúcs szomszédját a szomszédok számával arányos valószínűséggel választjuk ki.



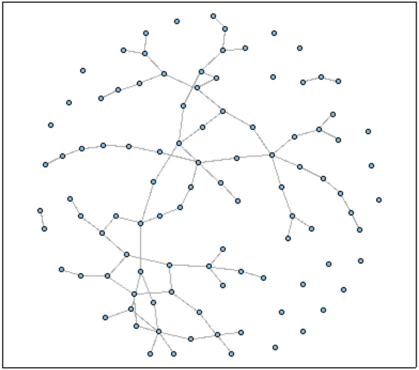
Kérdés: meg tudjuk-e becsülni a 10 fokú csúcsok arányát, ha csak lokálisan figyelhetjük meg a gráfot?

Időben fejlődő véletlen gráfok: preferential attachment



Forrás: `http://cneurocvs.rmki.kfki.hu/igraphbook`

Időben fejlődő véletlen gráfok vs. Erdős–Rényi-gráf



Forrás: `http://cneurocvs.rmki.kfki.hu/igraphbook`

Véletlen reguláris gráfok

- n csúcs, minden csúcsnak d szomszédja van – válasszunk az összes ilyen gráf közül egyet véletlenszerűen

Véletlen reguláris gráfok

- n csúcs, minden csúcsnak d szomszédja van – válasszunk az összes ilyen gráf közül egyet véletlenszerűen
- a legrövidebb kör hossza nagyjából $\log n$, azaz ha n elég nagy, csak nagyon kis valószínűséggel fordul elő 1000-nél rövidebb kör

Véletlen reguláris gráfok

- n csúcs, minden csúcsnak d szomszédja van – válasszunk az összes ilyen gráf közül egyet véletlenszerűen
- a legrövidebb kör hossza nagyjából $\log n$, azaz ha n elég nagy, csak nagyon kis valószínűséggel fordul elő 1000-nél rövidebb kör
- ennek a gráfsorozatnak a limesze a végtelen fa, ahol minden csúcsnak d szomszédja van