

A szappanhártyák és szappanbuborékok geometriája

Csikós Balázs

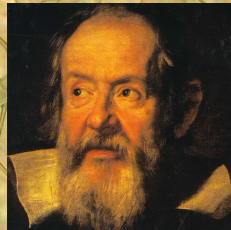


ELTE TTK Matematikai Intézet

Nyílt Nap, 2017.12.01.

„A természet nagy könyvében csak az tud olvasni, aki ismeri azt a nyelvet, amelyen e könyv írva van, és az a nyelv: a matematika.”

Galileo Galilei (1564-1642)



Ki ne fújt volna már szappanbuborékot?



...még ha nem is ekkorát.



Miért válnak gömb alakúvá a buborékok?



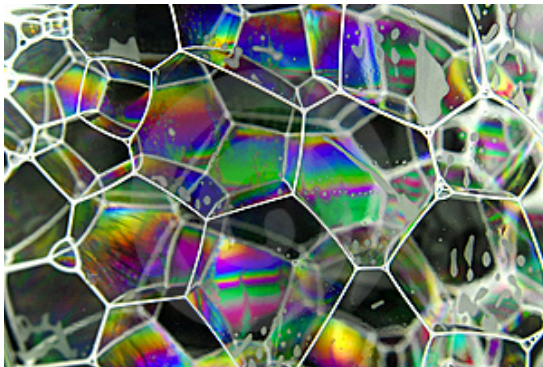
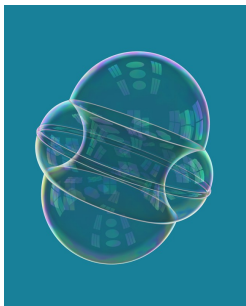
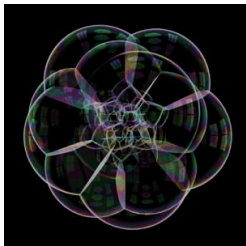
Létezhetnek-e más stabil buborékformák?



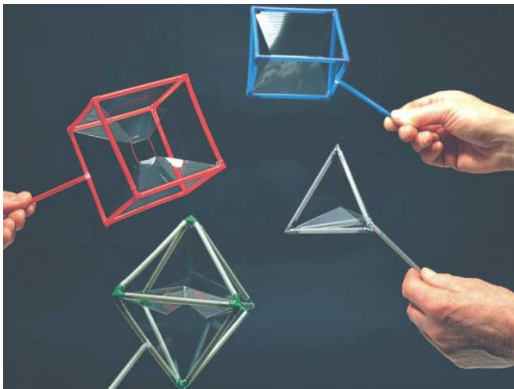
A vízbe lehet gyűrű alakú buborékot fújni,
de van-e gyűrű alakú szappanbuborék?



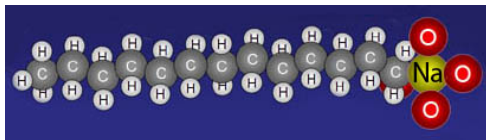
Milyen alakzatok jöhetnek létre a buborékok összetapadásából?



Milyen alakú szappanhártya feszülhet ki egy adott drótvázra?

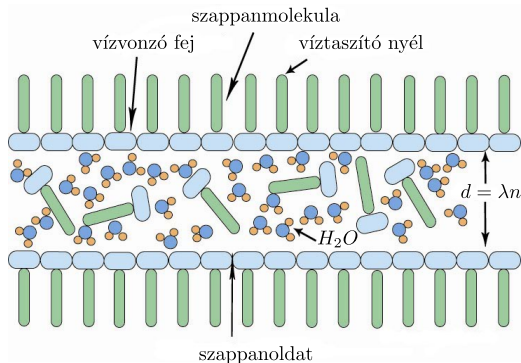


A szappanhártya molekuláris felépítése



Szappanmolekula szerkezete:

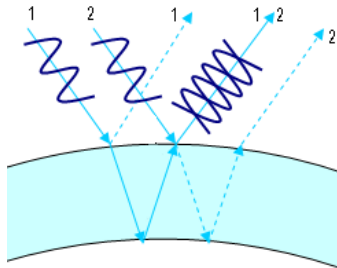
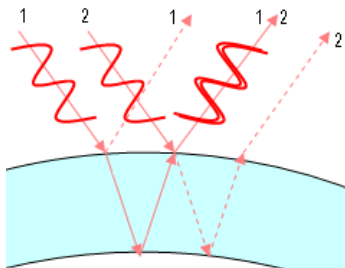
- hosszú víztaszító szénhidrogén lánc
- egyik végén egy vizet vonzó fejjel



Szappanhártya szerkezete:

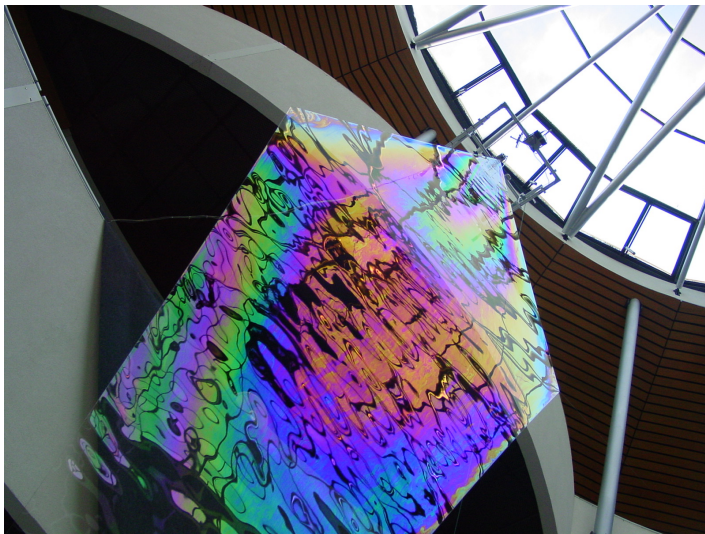
- két réteg szappanmolekula közti szappanoldat
- a hártya összetartó ereje, hogy a **víztaszító szénhidrogén láncok** vonzódnak egymáshoz.

Fényinterferencia a szappanhártyán



Az elsődlegesen és másodlagosan visszavert fénysugarak a hullámhosszuktól (színüktől) függően felerősítik, vagy kioltják egymást.

Fényinterferencia a szappanhártyán

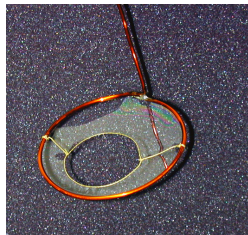


Óriás filmhártya (10mx3m, Grenoble, Franciaország)

A felszínminimalizálás kísérleti igazolása

Tétel

Ha egy szappanhártya mindkét oldalán azonos a levegő nyomása, akkor egyensúlyi helyzetben a hártya olyan alakot vesz fel, melynek felszínét kis elmozdulásokkal nem lehet tovább csökkenteni.

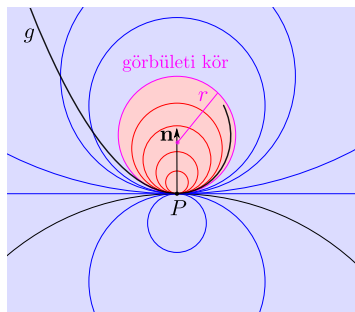


Tétel (Izoperimetrikus egyenlőtlenség)

Az euklideszi síkon azonos hosszúságú egyszerű zárt görbék közül a kör határolja a legnagyobb területű síkrészt.

A minimálfelületek differenciálgeometriai jellemzése

Síkgörbék görbülete egy pontban



- Színezzük a g görbét P -ben érintő köröket pirosra vagy kékre attól függően, hogy P körüli *kicsi* ívük a görbének melyik oldalára esik.
- A piros és kék köröket elválasztó kör a görbe **P -beli görbületi**, vagy **simuló köre**.
- A görbületi kör r sugara a **görbületi sugár**.

- A görbületi sugár

$$\kappa = (\pm) \frac{1}{r}$$

reciproka a g görbe P -beli **görbülete**.

- A $(\pm)$ előjel egy P -beli $\mathbf{n}$ normálvektor (önkényes) választásától függ. Az előjel akkor $+$, ha a simuló kör az érintőnek abba a félsíkjába esik, ahova az $\mathbf{n}$ mutat.

A minimálfelületek differenciálgeometriai jellemzése

Felületek átlaggörbülete egy pontban



Tétel (Leonhard Euler (1707-1783))

Tetszőleges felület egy P pontjában az n felületi normális körül egy síkot forgatva a sík és a felület metszéspontjának P -beli előjeles görbülete „szinuszosan” változik.

Definíció

- A normálmetszetek görbületének minimális és maximális $\kappa_1 \leq \kappa_2$ értékei a felület P pontbeli **főgörbülete**.
- A főgörbületek $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ számtani közepe a felület **átlaggörbülete** a P pontban.

Tétel

Egy felület felszínét akkor és csak akkor nem tudjuk úgy csökkenteni, hogy a felületet egy kicsi tartományon belül deformáljuk, ha a felület átlaggörbülete 0.

Tétel

Egy egyensúlyban lévő szappanhártya átlaggörbülete arányos a két oldalán mérhető légnyomás különbségével.

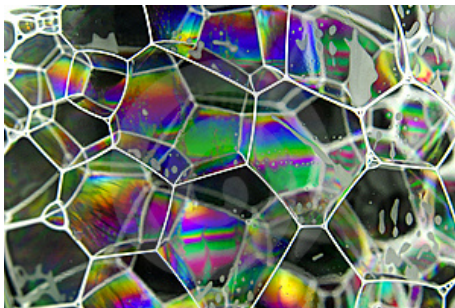
Következmény

A szappanbuborékok sima felületdarabjai állandó átlaggörbületű felületek.

Minimálfelületek néhány érdekes tulajdonsága

- A minimálfelületek minden pontja nyeregpont.
- A minimálfelületek analitikusak, ezért bármely kicsi darabjuk a teljes felületet meghatározza.
- A minimálfelület két oldalára rakott azonos vastagságú rétegek azonos térfogatúak.

Milyen szingularitásai lehetnek egy szappanhabnak?



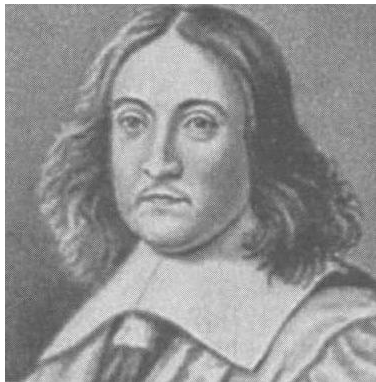
Tétel

Az *elágazási élek* mentén mindig pontosan 3 sima felületdarab találkozik, egymást 120° -os szögben metszve.

Következmény

Egy *csomópontba* mindig 4 él fut be. Az egy csúcsban találkozó élek érintő egységvektorai egy szabályos tetraéder csúcsaiba mutatnak.

A Fermat-Torricelli probléma



Pierre de Fermat (1601-1665)



Evangelista Torricelli(1608-1647)

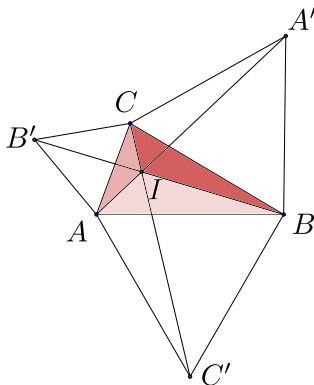
Fermat egy Torricellihez írt levelében vetette fel az alábbi problémát:

Hol helyezkedik el a síkon az a pont, melynek egy háromszög csúcsaitól mért távolságainak összege minimális?

Az izogonális pont

A problémára Torricelli több megoldást is adott. A megoldás a háromszög **izogonális pontja**, ha a háromszög szögei 120° -nál kisebbek, egyébként a háromszög tompaszögű csúcsa.

Egy háromszög izogonális pontja az az I pont a háromszög belsejében, melyből az oldalak egyenlő, 120° -os szög alatt látszanak.

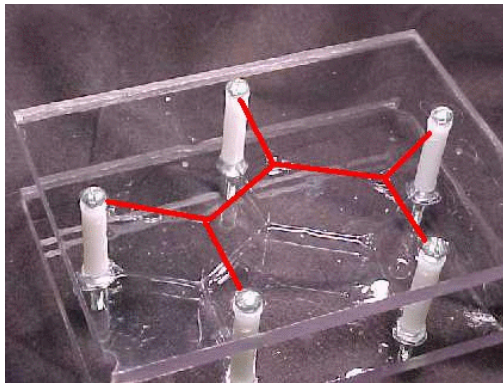
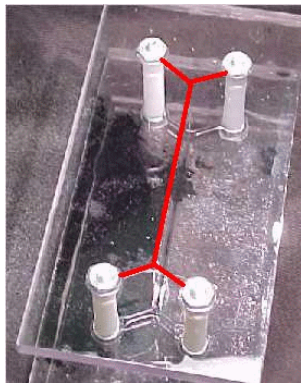


Hogyan lehet n pontot a síkon a lehető legrövidebb úthálózattal összekötni?

- Általában nem elég a pontokat szakaszokkal összekötni, új csomópontokat is be kell vezetni.
- Minden új csomópontba három él fut be, egymással 120° -os szöget bezárva.
- Az utak grájában nem lehet kör. (Tehát egy fa gráf.)

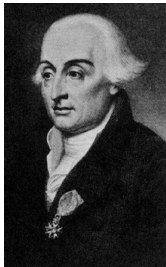
Hogy nézhet ki egy ilyen, úgynevezett **Steiner-fa**, és hogyan kaphatunk n adott pontot összekötő minimális Steiner-fákat?

Steiner-fák keresése szappanoldattal

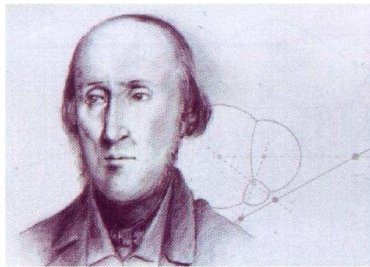


Tétel

Egy állandó átlaggörbületű zárt felület a térben csak gömb lehet.



Joseph Louis Lagrange (1736-1813)



Joseph Plateau (1801-1883)

Plateau-probléma

Igaz-e, hogy minden térbeli drótváz határol egy minimális felszínű felületet?

Tétel (J. Douglas, T. Radó)

Egy egyszerű zárt térgörbe mindig határol egy minimálfelületet, (melyen előfordulhat elágazási él, és önátmetszés).

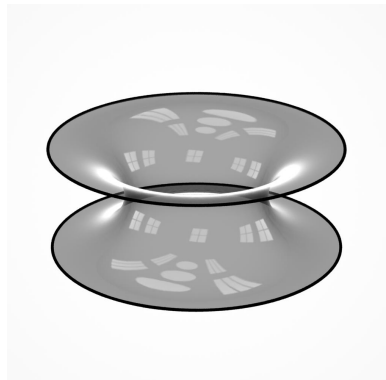


Jesse Douglas (1897-1965)

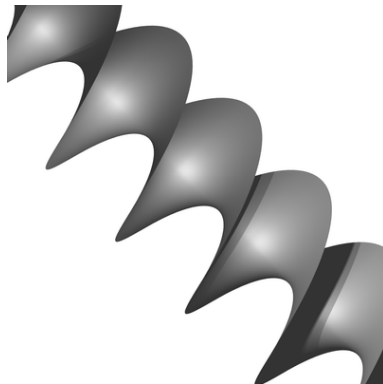


Radó Tibor (1895-1965)

Néhány nevezetes minimálfelület



katenoid (láncfelület)

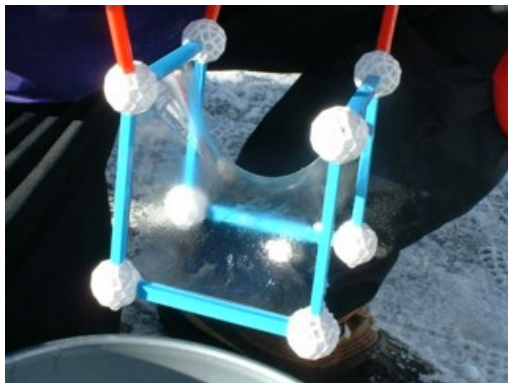


helikoid (csigalépcső)

Jean Baptiste Meusnier (1754-1793)

Néhány nevezetes minimálfelület

A Scherk-féle minimálfelület



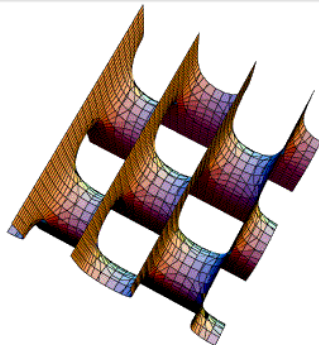
Ferdinand Scherk (1798-1885)

Néhány nevezetes minimálfelület

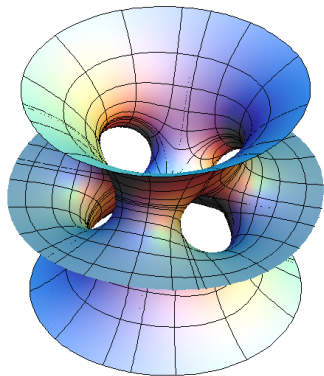
A Scherk-féle minimálfelület

Tétel (Schwarz-féle tükrözési elvek)

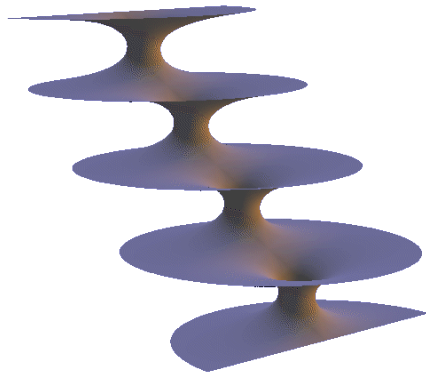
- *Ha egy minimálfelület egy darabja tartalmaz egy egyenes szakaszt, akkor analitikus folytatása tartalmazza az egyenesre vonatkozó tükröképét.*
- *Ha egy összefüggő minimálfelület egy síkot derékszögben metsz, akkor analitikus folytatása tartalmazza a síkra vonatkozó tükröképét.*



Néhány nevezetes minimálfelület



Costa-féle felület



Riemann-féle minimálfelület

Minimálfelületek az építészetben



Köszönöm a figyelmet!

