Törtek újraszámolva

A prezentáció feladatai

1. Feladat.
Egy rugalmas, a végtelenségig nyújtható szalag végeire felírtunk két számot; balról jobbra a-t, és b-t.
Ez a szalag alapállapota (vagy 1. állapota).
A szalag következő állapotát úgy kapjuk, hogy a szalagot megnyújtjuk, és a korábbi számok meghagyása mellett a szalagon lévő bármely két szomszédos szám közé odaírjuk az összegüket.
(*pl. Ha a szalagon a kezdőállapotban* $a = 2; b = 6$ *szerepelt, akkor a második állapotban* $2; 8; 6$, *a harmadik állapotban* $2; 10; 8; 14; 6$ *lesz.*)
Ha a szalag alapállapota: $\boxed{a = 0; b = 1}$, illetve $\boxed{a = 1; b = 1}$...

a) ...add meg a szalagok első/második/harmadik/negyedik állapotát!

b) ...mennyi lesz a szalag n-dik állapota esetén a számok összege!

c) ...hány darab 3-as/7-es/(*) 2019-es lesz legfeljebb a szalagon?

2. Feladat. Mikkamakka a Négyszögletű Kerekerdő egyik sarkában áll (az ábrán a $(0; 0)$-val jelölt pontban). A szálerdőben összesen 80 darab fa van; 1-1 minden olyan rácspontban, melynek mindkét koordinátája 0 és 8 közé eső nemnegatív egész. Mikkamakka kezdetben észak felé (a $(0; 8)$-cal jelölt fa irányába) néz, majd lassan elfordul kelet felé (a $(8; 0)$-val jelölt fa irányába).

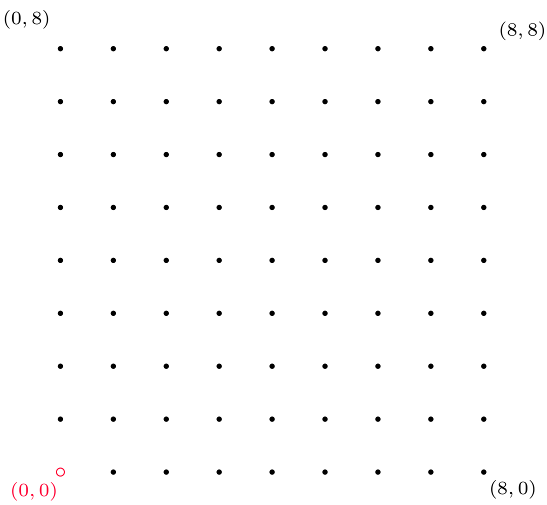
a) Összesen hány fát számolhat meg eközben Mikkamakka?

b) Írjuk fel a megszámolt fák koordinátáit abban a sorrendben, amilyen sorrendben Mikkamakka megszámolja őket.

c) Jelöljük a $(0; 0)$ pontot O-val; míg a látott fákat (a megpillantásuk sorrendjében) $P_1; P_2; ...; P_n$-nel. Mekkora az $OP_1P_2P_3P_4...P_{n-1}P_n$ sokszög területe? Mit tapasztalsz ha megrajzolod a sokszöget?

(*A fákat és Mikkamakkát is tekintsük pontszerűeknek.*)

*a**) (*) Ha 8×8 helyett $n \times n$-es négyzet alakú az erdő (és n nagy), akkor a fák hanyadrészét látjuk?



3. Feladat.

a) Véletlenszerűen kiválasztok két a, b számot az $1; 2; 3; ...; 8$ számok közül. (A számok lehetnek egyenlőek.) Mekkora annak az esélye, hogy az $\frac{a}{b}$ tört nem egyszerűsíthető?

b) (*) Mit mondhatunk ha az a, b számokat az $1; 2; ...; n$ számok közül választjuk véletlenszerűen (és n "nagy")?

4. Feladat. Adjunk meg minél gyorsabban olyan törteket, amelyek $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ közé esnek!

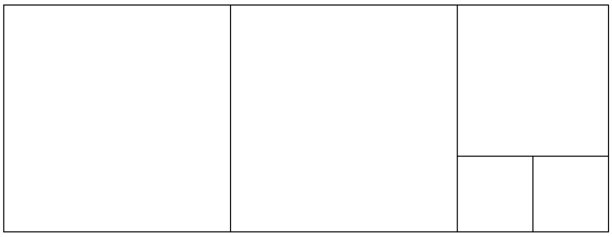
a) $\frac{a}{b} = \frac{5}{7}; \frac{c}{d} = \frac{3}{4}$ *b*) $\frac{a}{b} = \frac{5}{18}; \frac{c}{d} = \frac{3}{11}$ *c*) $\frac{a}{b} = \frac{4}{7}; \frac{c}{d} = \frac{5}{9}$ *d*) $\frac{a}{b} = \frac{8}{13}; \frac{c}{d} = \frac{13}{21}$

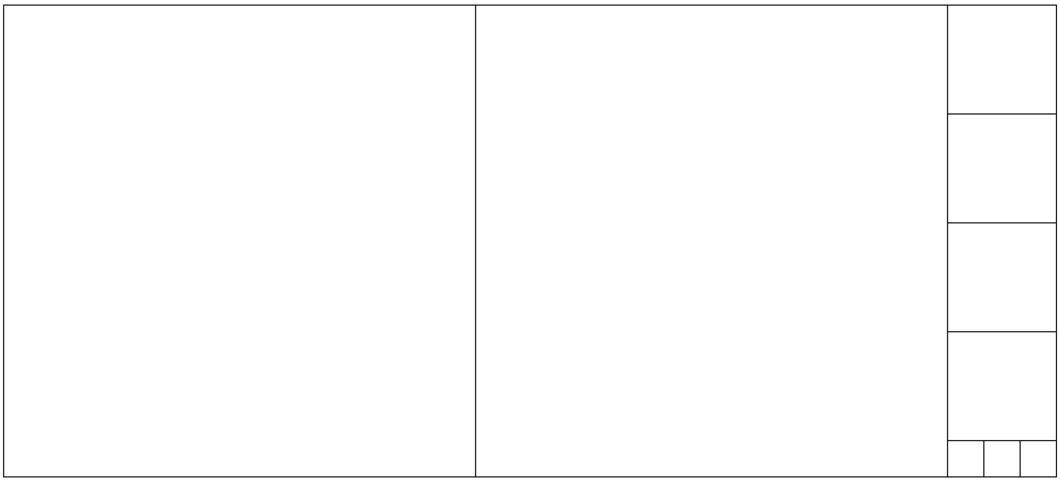
Adjuk meg a fenti tulajdonságú törtet úgy, hogy a nevezője a lehető legkisebb legyen!

---

5. Feladat.

a) Egy téglalapot az ábrákon látható módon négyzetekre osztottunk. Valamennyi négyzet oldalhossza egész szám. Mekkorák az eredeti téglalapok oldalhosszai az egyes esetekben, ha azok a lehető legkisebbek.





b) Egy 358×97-es méretű téglalapot a fenti módon négyzetekre osztunk.
(*Mindig a még le nem fedett legbaloldalabbi; és az ilyenek közül a legfelső "részét" fedjük le a lehető legnagyobb olyan négyzettel, amelynek oldalai párhuzamosak az eredeti téglalapéval. Ezt a felosztást a továbbiakban* ***euklideszi-felosztás****nak hívom.*)
Hány darab illetve hányféle négyzetet kapunk a felosztás során?

c) Az első ábrán 5 kisebb négyzet látható. Mekkora legyen a kiinduló téglalapom mérete, ha azt szeretném, hogy a megrajzolt ábra szintén 5 kisebb négyzetet tartalmazzon? Hány megoldás van? Mi a válasz, ha azt szeretném, hogy n darab kisebb négyzet legyen a rajzon?

---

6. Feladat. (*****) Egy négyzetet valamely oldalával párhuzamos vágással két téglalapra osztottunk. Igazoljuk, hogy a következő két eset közül pontosan az egyik teljesül:

- vagy egyik téglalap sem osztható fel véges sok kisebb négyzetre,
- vagy mindkettő felosztható véges sok kisebb négyzetre, és a két téglalap (*előző feladatbeli*) euklideszi-felosztása azonos darab kisebb négyzetből áll.

7. Feladat. (Hiperbináris partíciók)
Adott az $1; 2; 4; 8; ...; 2^k; ...$ súlyokból két teljes készlet és egy olyan kétkarú mérleg, amelynek egyik serpenyőjébe a súlyokat kell tennünk, míg a másikba a lemérendő tárgyat.

a) Hányféleképpen lehet lemérni az m tömegű tárgyat?

b) (*) Hány olyan páros tömegű tárgy van, amelyet pontosan 100-féleképpen lehet lemérni?

(*Az azonos tömegű súlyokat tekintsük azonosnak.* $m = 5$ *esetén:* $(4 + 1; 2 + 2 + 1)$ *két jó mérés van.*).

---

8. Feladat. (Stern kétatomos sorozata, Calkin-Wilf fa)
Jelölje a_n azt, hogy az előző feladatnál az n tömegű tárgyat hányféleképpen lehet lemérni (és a_0 legyen 1), valamint legyen $p_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ $(n > 0)$.

a) Add meg az $a_{2^k}; a_{2^k+1}; a_{2^k+2}; ...; a_{2^{k+1}-1}$ számok maximumát! Mely indexre veszi fel ezt a maximumot a sorozat?

b) Mit mondhatunk a p_n sorozat elemeiről?

További feladatok

A feladatsor és a prezentáció elektronikusan elérhetőek az alábbi címen
`http://matek.berzsenyi.hu/tanarok/sztranyak/`

---

9. Feladat. (Farey törtek)
American Mathematics Competition [**AMC**] 12B 2018 Problem 17
A p és q olyan pozitív egészek, melyekre $\dfrac{5}{9} < \dfrac{p}{q} < \dfrac{4}{7}$ és q a lehető legkisebb. Mekkora a $q - p$ különbség?

(A) 7 **(B)** 11 **(C)** 13 **(D)** 17 **(E)** 19

---

10. Feladat. [**AMC**] 10B 2016 Problem 25
Legyen $f(x) = \sum_{k=2}^{10} (\lfloor kx \rfloor - k\lfloor x \rfloor)$. Hány különböző értéket vehet fel $f(x)$, ha $x \geq 0$? ($\lfloor r \rfloor$ az r egész része.)

(A) 32 **(B)** 36 **(C)** 45 **(D)** 46 **(E)** végtelen sokat

---

11. Feladat. KöMaL B3323
Keressük meg azt a legbővebb intervallumot, amelyben $\dfrac{19}{99}$ a legkisebb nevezőjű tört.

---

12. Feladat. Az összes olyan tovább nem egyszerűsíthető törtet, melyre a számláló és a nevező szorzata kisebb, mint 2019 felsoroljuk növekvő sorrendben. Igazold, hogy bármely két szomszédos $\dfrac{a}{b}$ és $\dfrac{c}{d}$ tört esetén $|bc - ad| = 1$.

---

13. Feladat. Igazoljuk, hogy egy $\dfrac{1}{n}$ hosszúságú nyílt intervallum legfeljebb $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$ darab olyan racionális számot tartalmazhat, amelynek nevezője legfeljebb n.

---

14. Feladat. Skandináv Matematika Olimpia (Nordic Math Olimpyad) 2011 Q4
Mutassuk meg, hogy tetszőleges $n \geq 2$ esetén az olyan $\dfrac{1}{ab}$ alakú törtek esetén, ahol a és b relatív prímek, $a < b \leq n$ és $a + b > n$ az ilyen törtek összege $\frac{1}{2}$.

---

15. Feladat. (*) Az $\{a_k\}$ sorozat tagjai:$a_0 = 1; a_1; a_2; ...; a_n; a_{n+1} = 1$ (az első, és az utolsó kivételével) 1-nél nagyobb pozitív egészek, és teljesül rájuk a következő oszthatóság: $a_k | a_{k-1} + a_{k+1}$ $(0 < k < n + 1)$.

a) Legfeljebb hány darab 2019-es lehet a sorozat tagjai között?

b) Mennyi a $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{a_i \cdot a_{i+1}}$ összeg pontos értéke?

16. Feladat. (két Pell egyenletre vezető példa)
A szórakozott matematikaprofesszor elindult hazafele. Mikor az utca elejére ért rájött, hogy elfelejtette a saját házszámát. Ebben az utcában csak az egyik oldalon voltak házak, a számozásuk 1-gyel kezdődött és egyesével növekedett. A professzor emlékezett rá, hogy legalább 200 és legfeljebb 500 ház van az utcájukban, továbbá arra is, hogy a háza az utca numerikus középpontjában áll, azaz a házszámoknak az utca elejétől a házig vett összege megegyezik a háztól az utca végéig vett házszámok összegével.
Segíts a professzornak kideríteni, melyik házban lakik!

---

17. Feladat. Egy bizonyos pozitív egész n-től egy nála nagyobb egész m-ig összegezve a pozitív egész számokat azt tapasztaltuk, hogy az összeg azonos az $n \cdot m$ szorzattal:

$$n + (n+1) + (n+2) + ... + (m-1) + m = n \cdot m$$

a) Add meg n, m első három lehetséges értékét!

b) (*) Adj meg további két lehetséges értéket!

c) (*) Igazold, hogy végtelen sok lehetséges n, m pár kielégíti a feladat feltételeit!

---

18. Feladat. (Nehezebb feladatok)
British Math Olimpyad 2005
Jelölje S a racionális számok olyan részhalmazát, melyre a következők teljesülnek:
$\frac{1}{2} \in S$, valamint ha $x \in S$, akkor $\frac{1}{x} \in S$ és $\frac{x}{x+1} \in S$
Mutassuk meg, hogy S az összes 0 és 1 közötti racionális számot tartalmazza.

---

19. Feladat. 2002. évi Kürschák matematikaverseny 2. feladata
Tekintsük a Fibonacci-számok $f_1 = f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \geq 3)$ rekurzióval meghatározott sorozatát. Tegyük fel, hogy az a és b pozitív egész számokra az $\frac{a}{b}$ tört az $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ és $\frac{f_{n+1}}{f_{n-1}}$ törtek egyikénél kisebb, másikánál nagyobb. Mutassuk meg, hogy $b \geq f_{n+1}$.

---

20. Feladat. Harvard–MIT Mathematics Tournament (final) 2015 Problem 2
Legyenek m és n $(m \geq n)$ pozitív egészek és S azon (a, b) relatív prím pozitív egész számpárok halmaza, melyekre $a, b \leq m$ és $a + b > m$.
Minden ilyen $(a, b) \in S$ esetén legyen az (u, v) nemnegatív egész számpár az $au - bv = n$ egyenlet (u, v) megoldásai közül az, amelyre v a minimális. Jelölje $I(a; b)$ a nyílt $\left(\frac{v}{a}; \frac{u}{b}\right)$ intervallumot.
Mutassuk meg, hogy $I(a, b) \subseteq (0, 1)$ teljesül bármely $(a, b) \in S$ esetén; valamint tetszőleges adott $\alpha \in (0, 1)$ irracionális szám pontosan n darab különböző $(a, b) \in S$ pár esetén esik $I(a, b)$-be.

---

21. Feladat. IMO Shortlist 2013, Number Theory 7
Legyen ν pozitív irracionális szám, és m pozitív egész. Az (a, b) pozitív egészekből álló számpárt jónak hívjuk, ha

$$a \lceil b\nu \rceil - b \lfloor a\nu \rfloor = m.$$

A jó (a, b) párt kiválónak hívjuk, ha sem $(a - b, b)$, sem $(a, b - a)$ nem jó számpár.
Mutassuk meg, hogy a kiváló párok száma megegyezik m pozitív osztóinak összegével.