

# NYILATKOZAT

Név: Jónás Bence

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika

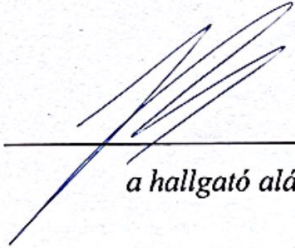
NEPTUN azonosító: BVW5H5

Szakdolgozat címe:

Korreláció stressz teszt; matematika a "Londoni Bálna" típusú botrány elkerülésére

A szakdolgozat szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022.03.30.



---

a hallgató aláírása

# KORRELÁCIÓ STRESSZ TESZT; MATEMATIKA A "LONDONI BÁLNA" TÍPUSÚ BOTRÁNY ELKERÜLÉSÉRE

Szakdolgozat

Készítette: Jónás Bence  
Témavezető: Dr. Márkus László  
egyetemi docens

MATEMATIKA BSc



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2021

# Tartalomjegyzék

|                                                                      |           |
|----------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Bevezetés</b>                                                  | <b>1</b>  |
| <b>2. Faktoranalízis, Főkomponens analízis</b>                       | <b>3</b>  |
| 2.1. Faktor analízis . . . . .                                       | 3         |
| 2.1.1. Faktormodell és a kovariancia mátrix . . . . .                | 3         |
| 2.1.2. Korrelációs mátrix . . . . .                                  | 5         |
| 2.2. Főkomponens analízis . . . . .                                  | 6         |
| <b>3. Gazdaságtudományi definíciók</b>                               | <b>8</b>  |
| <b>4. Stressz teszt és a korreláció</b>                              | <b>11</b> |
| 4.1. Korreláció parametrizálása . . . . .                            | 12        |
| 4.1.1. Lineáris regresszió, OLS . . . . .                            | 13        |
| 4.2. VaR meghatározása . . . . .                                     | 15        |
| 4.3. Mahalanobis távolság, avagy a legrosszabb szenárió kiválasztása | 16        |
| 4.4. Hitel-nemteljesítési csereügylet értékének számítása . . . . .  | 18        |
| 4.5. Egyes szeletek árazása . . . . .                                | 21        |
| <b>5. London Whale</b>                                               | <b>23</b> |
| 5.1. Korrelációs stressz teszt . . . . .                             | 23        |
| 5.2. Eredmények . . . . .                                            | 25        |

## Ábrák jegyzéke

|    |                                                                    |    |
|----|--------------------------------------------------------------------|----|
| 1. | Főkomponens analízis vizuális megjelenítése [2]                    | 7  |
| 2. | VaR $\alpha$ kvantilis mellett [6]                                 | 10 |
| 3. | OLS technika alkalmazása [12]                                      | 14 |
| 4. | 2011.márc.01-2012.ápr.12-ig a kalibrált paraméterek változásai [9] | 25 |

## Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Márkus Lászlónak, hogy a szakdolgozatom megírása során folyamatosan segítette munkámat és számomra nehezebben megérthető témákat, próbálta minél egyszerűbben és érthetően elmagyarázni.

# 1. Bevezetés

A "Londoni Bál" néven elhíresült kereskedő 2012-ben 6,2 milliárdos dolláros veszteséget realizált a JPMorgan Chase & Co. számára, viszont ugyanabban az évben, ez a probléma nem akadályozta meg attól a bankot, hogy az év végén közel 21,3 milliárd dolláros rekordnyereséget könyveljen el. A fő probléma, viszont abban jelentkezett, hogy a bank megsértette az értékpapírtörvényeket és beleegyezett, hogy több mint 1 millió dollár bírságot fizet az államnak és az amerikai szenátus egy elbíráló jelentést írt róluk és a bank vezérigazgatójának pedig pénz megvonással kellett szembenéznie.

Az 2. fejezetben betekintést nyerünk, faktoranalízis világába, hogyan írhatóak fel és csökkenthetőek a változóink egy-egy kisebb látens változóba (faktorokba). Feltárjuk, hogy hogyan írható fel egy probléma faktormodell alakban a kovariancia mátrix segítségével, majd ugyanezen problémát megfogalmazzuk, korrelációs mátrix segítségével is. Ebben a fejezetben még egy faktoranalízishez közel álló változók számának csökkenését eredményező módszert is bemutatunk, mely a főkomponens analízis. A főkomponens analízist sokszor párhuzamba állítják a faktoranalízissel és sokan úgy is vélik, hogy a főkomponens analízis a faktoranalízis osztályába tartozik.

A 3. fejezetben, néhány fontosabb gazdasági fogalmat, definíciót ismertetünk, mely a továbbiakban elengedhetetlen a probléma megértésében és egy érdekes lemmát is bebizonyítunk a  $VaR$ -al kapcsolatban.

Ezután a 4. általánosan bevezetjük a korrelációs stresszteszteket ezek előnyeit és hátrányait. Majd a LIBOR market modell segítségével, a korrelációs mátrix értékeinek a meghatározására bevezetünk egy paraméteres megadási módot és egyszerű úgynevezett OLS módszert mutatunk a paraméterek becslésére. A továbbiakban a portfólió kockázatának kiszámítására adunk egy variancia-kovariancia megközelítést, majd a számunkra legjobb paraméterek kiválasztására bevezetjük a Mahalabonis-távolságot. Ezt követően ismertetjük a hitel-nemteljesítési csereügylet definícióját majd ennek a kiszámítását és végül a portfólióban található eszközök egyes szeleteinek az értékét határozzuk meg. A szakdolgozat során sokszor a szakszavaknak az angol megfelelőit

használjuk, mivel ezek szerves részét képezik a pénzügyi szakzsargonnak.

Az utolsó 5 fejezetben pedig, az előző fejezetekben, mutatott módszereket, számításokat alkalmazzuk a "London Whale" portfólión és ezek alapján vonunk le következtetést, hogy a korrelációnak, milyen nagy szerepe van a pénzügyi kereskedésben és egyes eszközök szemmel nem látható, látens változói, milyen nagy hatással vannak a piaci ármozgások alakulására.

## 2. Faktoranalízis, Főkomponens analízis

A fejezetben előforduló, fogalmak, témák leírásához a [1] könyvet dolgozzuk fel, mely betekintést enged a faktoranalízis és a főkomponens analízis világába.

A faktor - és főkomponens analízis a többdimenziós statisztikai módszerek közé tartoznak. Mindkettő eljárás célja a változók számának csoportosítása, majd ezek csökkentése, redukálása. Azt gondoljuk, hogy egy-egy változékonyságminta, valamilyen nem megfigyelhető, a háttérben meghúzódó látens változók másnéven faktorok hatásának az eredményeként áll elő. Ezek a faktorváltozók.

A faktorok segítségével a megfigyelt változók változékonysága leírható, így csak a faktorokat megtartva, információvesztés nélkül tudjuk redukálni a változóinknak a számát, vagyis az adatstruktúránk dimenzióját.

**2.1. Példa.** *Kosárlabdázók adatai: kosárlabda IQ, pályafutás időtartama, vertikális emelkedés, 60 méteres sprint ideje, meccsenkénti dobott pontok átlaga, pályán töltött idő, asszisztok száma. Vannak olyan adatok melyeket több változóval is lehet mérni. Néhány adatot, mint például, dobott pontok átlaga, pályán töltött idő, asszisztok száma, tudunk egy-egy külön faktorban is megfigyelni, mint például az adott játékos hasznossága. Így tudunk alkotni különböző faktorokat akár több változó összevonásával.*

### 2.1. Faktor analízis

#### 2.1.1. Faktormodell és a kovariancia mátrix

A faktor analízis (Factor analysis, azaz FA) célja a változók közötti korrelációs minták összegzése. A változóinkat a faktorok lineáris kombinációjával, akarjuk kifejezni. Úgy gondoljuk, hogy a faktorok a háttérben meghúzódó látens folyamatokat összegeznek. Ezek a látens folyamatok, faktorok segítségével kifejezve a változóinkat jelentősen tudjuk csökkenteni, a változók számát.

**2.1. Definíció.** *Legyen  $p$  a változóink száma  $(X_1, X_2, \dots, X_p)$ ,  $n$  pedig vál-*



tozónként a megfigyelések száma. Legyen  $k$  a faktorok száma. A faktorok és a változók számára igaz, hogy  $k < p$  szigorúan. Így kapott két mátrix  $X := \mathbf{R}^{p \times n}$  a változók mátrixa,  $F := \mathbf{R}^{k \times n}$  a faktorok mátrixa.

Ekkor a faktormodell egyenlete: (feltéve,  $E(X_i) = 0 \forall i$ )

$$X = DF + \epsilon \quad (2.1)$$

Ahol  $D := \mathbf{R}^{p \times k}$  a factorsúlyok mátrix,  $\epsilon := \mathbf{R}^{p \times n}$  az idoszinkratikus komponens, másnéven a zajnak a mátrixa.

Az előbbi definícióban feltettük, hogy minden változó várható értéke 0. Ha nem így lett volna akkor az adott változóhoz tartozó átlaggal centrálunk.

Továbbá a következő feltételek teljesülnek:

- $F$  mátrix oszlopai, azaz a faktorok korrelálatlanok.
- $DF$  és  $\epsilon$  korrelálatlanok.
- $D(F_i) = 1 \forall i$
- $Cov(F) = \mathbf{I}$ , ahol  $\mathbf{I}$  az identitás mátrix, és a  $Cov$  a kovariancia mátrix

Ekkor:

$$\Sigma_X = Cov(DF + \epsilon) = DCov(F)D^T + Cov(\epsilon) = DD^T + Cov(\epsilon) \quad (2.2)$$

Az előbbi egyenlet, jól mutatja, hogy a faktor analízisnek a célja a szórásmátrix reprezentálása kisebb dimenziószámmal, de ez a felbontás nem feltétlen létezik, mivel  $k > n$  szigorúan.

A faktormegoldás, nem feltétlen egyértelmű, hiszen legyen  $T := \mathbf{R}^{k \times k}$  forgatás mátrix, ekkor:

$$\begin{aligned} TT^T &= I \\ \Sigma_X &= DTT^T D^T = Cov(\epsilon) = DD^T + Cov(\epsilon) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Könnyen látszik a (2.2) és a (2.3) egyenlőségek segítségével, hogy mivel  $T$  ortogonális mátrix ezért  $F_T = TF$  is faktor tulajdonságú mátrix lesz és így a megoldás nem egyértelmű.

### 2.1.2. Korrelációs mátrix

Eddig csak a kovariancia mátrixsal foglalkoztunk, viszont a gyakorlatban sokszor inkább a korreláció mátrixot használják, mivel könnyebben értelmezhető mint a kovariancia mátrix által adott kovariancia táblázat.

Néhány definíció mielőtt a korrelációs mátrixos módszert röviden tárgyaljuk:

**2.2. Definíció.** *Kölcsönös korreláció (intercorrelation): korreláció vizsgálata a változók egy csoportja és a független változók között*

**2.3. Definíció.** *Legyen  $X, Y, Z$  véges szórású valószínűségi változók. Ekkor  $X, Y$  parciális kovarianciája  $Z$  ismeret mellett:*

$$\text{cov}(X, Y|Z) = E[(X - E(X|Z))(Y - E(Y|Z))] \quad (2.4)$$

A következő definíció előtt még ismertetjük a  $X$ -re vett feltételes szórásnégyzetet adott  $Z$  valószínűségi változó mellett.

$$\begin{aligned} D^2(X|Z) &= \text{cov}(X, X|Z) \\ D(X|Z) &= \sqrt{D^2(X|Z)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

**2.4. Definíció.** *A parciális korreláció, a parciális kovariancia és a feltételes szórások hányadosaként áll elő:*

$$\text{corr}(X, Y|Z) = \frac{\text{cov}(X, Y|Z)}{D(X|Z)D(Y|Z)} \quad (2.6)$$

Legyenek ismét  $X_1, X_2, \dots, X_p$  a változóink, és  $F_1, F_2, \dots, F_m$  pedig a faktorok. Minden  $X_i$  és  $X_j$  párra olyan faktorokat akarunk találni, hogy amikor elhagyjuk ezeket akkor a változók között a parciális korreláció 0. Az alapötlet a modell mögött, hogy úgy keresünk faktorokat, hogy ha ezeket a faktorokat kivonjuk akkor ne maradjon kölcsönös korreláció bármely  $X_i$  és  $X_j$  pár között, mivel a faktorok maguk fogják magyarázni a kölcsönös korrelációt. Ez jelenti azt, hogy bármely kettő elemre,  $(X_i)$ ,  $(X_j, \dots, X_p)$  függetlenek az  $F_1, F_2, \dots, F_m$  faktorok függvényében.

Miután kiszámítottuk a korrelációs mátrixot, a faktorsúlyok számítása következik. Ebben az esetben a faktor modell a következő egyenlettel írható fel:

$$R = PCP^T + U^2 \quad (2.7)$$

- ahol  $R$  a megfigyelt változók közötti korrelációs együtthatók mátrixa
- $P$  a faktorsúlyok mátrixa
- $C$  a faktorok korrelációs mátrixa
- $U^2$  pedig a zaj korrelációs mátrixa ami általában egy diagonális mátrix

Most, hogy áttekintettük a faktoranalízis alapjait kimondhatjuk a faktor analízis egy nagyon fontos tételét melyet R.J.Rummel jegyzett fel:

**2.1. Tétel.** *Legyen  $X_1, X_2, \dots, X_p$  valószínűségi változók, legyen  $F_1, F_2, \dots, F_m$  a faktorok. Legyen  $R := \mathbf{R}^{m \times m}$  a faktorokkal csökkentett változók korrelációs mátrixa, legyen  $U^2 := \mathbf{R}^{m \times m}$  faktorokkal csökkentett változók korrelált zaja,  $F := \mathbf{R}^{m \times p}$  a faktor súlyok mátrixa. Ekkor teljesül a következő egyenlet:*

$$R - U^2 = FF^T \quad (2.8)$$

Az egyenlet bal oldala, reprezentálja a közös részek korrelációs mátrixát. Amikor viszont kivonjuk belől a zajt, akkor a közös varianciát kapjuk vissza. Lényegében az egyenlet leírja, hogy mely közös faktorok lineáris kombinációja az adott változó.

A faktor analízis hasznosságát és alkalmazhatóságát az is mutatja, hogy sok tudományterületen használják főleg ott ahol nagy mennyiségű adattal dolgoznak. Ilyen területek, pszichometria, viselkedés- és társadalomtudomány, a szociológia, a marketing és az operációkutatás is.

## 2.2. Főkomponens analízis

A főkomponens analízis (Principal Component Analysis, azaz PCA) a változók közötti variancia, mintákat összegzi. A faktor analízis egy speciális esetének is tekinthető. A módszer lényege, hogy adott egy adastruktúra, melynek

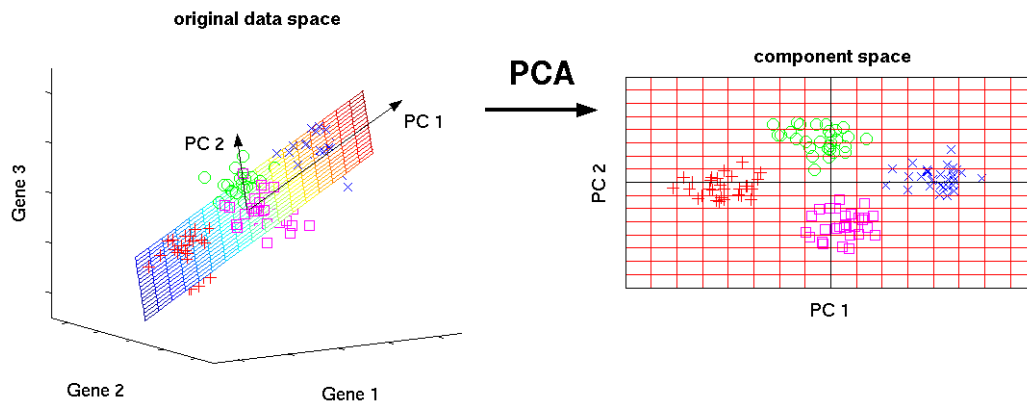
változói között valamilyen kapcsolatot tudunk felfedezni, célunk a dimenziószám csökkentése, miközben a varianciát lehetőleg jobban megtartsuk.

Bizonyos változóknak a megfigyelések során a szórásuk igen kicsi, vagyis elhanyagolható, ezeket a változókat nem tekinthetjük jellemzőnek és akár el is hagyhatjuk, ha tudjuk melyek ezek, de általában nem egy-egy változó szórása kicsi hanem több lineáris kombinációja. Ezek a fontos változók, illetve azok melyek szórása nagy, mivel ezek nem hagyhatóak el.

Általában a  $X_1, \dots, X_N$  minta egy  $N$  dimenziós teret feszít ki, mely nem ortogonális bázis. Az adatainkat egy új,  $Y_1, \dots, Y_N$  ortogonális bázisban akarjuk felírni melynek a varianciája, azaz össz-hossznégyszere megegyezik az eredetiével. Az új bázisnak egy  $Y_i$  eleme az  $X_1, \dots, X_N$  változók lineáris kombinációjaként áll elő. Ha megkaptuk az új bázisunkat mely  $Y_1, \dots, Y_N$  ezekből az utolsó párat elhagyhatjuk, mivel a varianciájuk kicsi így nem lényegesek.

Az első főkomponens meghatározásánál vagyis az új bázis megtalálásánál a célunk, maximalizálni a változók lineáris kombinációjának szórását és csökkenteni a dimenziószámot.

Az ábra vizuálisan is szemlélteti, hogyan is csökkenti a dimenziószámot a Főkomponens analízis.



1. ábra. Főkomponens analízis vizuális megjelenítése [2]

### 3. Gazdaságtudományi definíciók

A fejezetben azokat a gazdasági definíciókat ismertetjük melyek a továbbiakban előfordulnak. Ezeket a definíciókat [3],[4] illetve [5] források alapján gyűjtöttem össze.

**3.1. Definíció.** *Értékpapír alatt olyan pénzügyi terméket (részvény, kötvény, befektetési jegy) értünk, amely vételár ellenében szabadon átruházható. Az államkincstár bocsátja ki.*

**3.2. Definíció.** *A bázispont a pénzügy területén használatos aritmetikai egység, a százalékpont  $1/100$ -ad része. A bázispont leggyakoribb célja a százalékban kifejezett adatok különbségének megadása. Általában a pénzügyi eszközök értékének, kamatának változását szokás bázispontban kifejezni.*

**3.3. Definíció.** *A diverzifikáció egy befektetői magatartás, amely a portfólió kockázatának csökkenésére irányul, mégpedig a portfólióban szereplő értékpapírok számának növelésével.*

**3.4. Definíció.** *A portfólió kifejezés többféle értelemben használható, legtágabb értelmezésben vagyonszerkezet, azoknak a befektetéseknek az együttese, amely adott magánszemély, vagy cég tulajdonát képezi, de értelmezhető úgy is, mint kötvények, részvények együttese, amelyet egy befektetésnek lehet tekinteni.*

**3.5. Definíció.** *Hozamnak nevezünk egy pénzügyi terméken elért nyereséget/vesztiséget.*

**3.6. Definíció.** *A pénzpiacokon az index bizonyos értékpapírok vagy az adott piacon jegyzett összes értékpapír értékének átfogó változásainak mutatója. Az index olyan, mint egy portfólió, melyben az egyes értékpapírokat piaci jelentőségük alapján súlyozzák.*

**3.7. Definíció.** *Az értékpapírok névértéke az a pénzösszeg, amelyet az adott papíron feltüntetnek. Részvények esetében névértéknek nevezzük, a teljes jegyzett tőkéből való részesedés mértékét határozza meg.*

**3.8. Definíció.** *A fedezeti stratégia az értékpapírok vásárlásának és tartásának gyakorlata a portfólió kockázatának csökkentése érdekében. Sikeres végrehajtás esetén a fedezeti stratégiák csökkentik a bizonytalanságot és a befektetésben kockáztatott tőke összegét anélkül, hogy negatívan befolyásolnák a potenciális hozamrátát.*

**3.9. Definíció.** *Legyen  $\xi$  egy valószínűségi változó, és  $\alpha \in (0, 1)$ . Ekkor a  $\xi$  az  $\alpha$  - kvantilise*

$$q_\alpha(\xi) = \sup\{\gamma | F_\xi(\gamma) < \alpha\} \quad (3.1)$$

és

$$q^\alpha(\xi) = \inf\{\gamma | F_\xi(\gamma) > \alpha\} \quad (3.2)$$

a  $\xi$  felső kvantilise.

*Ha egy portfólió profitját leíró változó egy valószínűségi mezőn és  $\alpha \in (0, 1)$ , akkor  $\xi$  alsó  $\alpha$  - VaR (Value at Risk) értéke:*

$$VaR_\alpha(\xi) = -q_\alpha(\xi), \quad (3.3)$$

és felső  $\alpha$  - VaR értéke:

$$VaR^\alpha(\xi) = -q^\alpha(\xi) \quad (3.4)$$

**3.1. Megjegyzés.** *A veszteségekhez pozitív kockázatot rendelünk ezért szerepel a VaR képletében negatív előjel.*

**3.2. Megjegyzés.** *A felső és az alsó VaR értéke abszolút folytonos eloszlások esetében megegyezik. Viszont diszkrét eloszlások esetében a kvantilis nem feltétlen egyértelmű ezért kell külön definiálni a felső és az alsó VaR-t.*

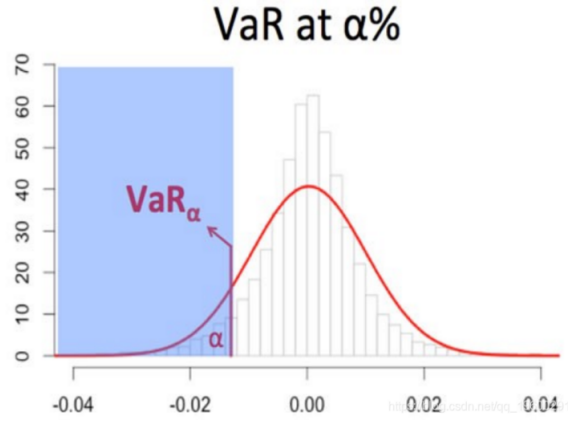
Alább egy érdekes lemmát ismertetünk ami kapcsolatot teremt a felső és az alsó VaR között.

**3.1. Lemma.**

$$q^\alpha(\xi) = -q_{1-\alpha}(-\xi) \quad (3.5)$$

és

$$q_\alpha(\xi) = -q^{1-\alpha}(-\xi) \quad (3.6)$$

2. ábra. VaR  $\alpha$  kvantilis mellett [6]

**Bizonyítás:** A kvantiliseket fordított relációjelek segítségével is betudjuk vezetni az alábbi módon

$$q_\alpha(\xi) = \inf\{\gamma | F_\xi(\gamma) \leq \alpha\},$$

$$q^\alpha(\xi) = \sup\{\gamma | F_\xi(\gamma) \geq \alpha\}$$

Az  $F_\xi(\gamma) = P(\xi < \gamma)$  módon definiált eloszlásfüggvényt helyettesítsük az  $F_\xi^*(\gamma) = P(\xi \leq \gamma)$  eloszlásfüggvénnyel ami az eredeti eloszlásfüggvény jobbról folytonos változata. A helyettesítés után a  $q_\alpha(\xi)$  és a  $q^\alpha(\xi)$  értéke nem változik.

$$\begin{aligned} q^\alpha &= \inf\{\gamma | F_\xi(\gamma) > \alpha\} \\ &= \inf\{\gamma | P(-\xi \geq -\gamma) < 1 - \alpha\} \\ &= -\sup\{-\gamma | P(-\xi \geq -\gamma) < 1 - \alpha\} \\ &= -\sup\{\gamma | F_{-\xi}^*(\gamma) < 1 - \alpha\} \\ &= -q_{1-\alpha}(-\xi) \end{aligned}$$

□

## 4. Stressz teszt és a korreláció

Ebben a fejezetben [7],[8] és[9] forrásokat dolgoztam fel a [9] cikkben stressz tesztheinkhez egy faktor modelles megközelítést alkalmazunk. Egy faktor modellt építünk fel a korreláció segítségével. A korrelációs mátrix megalkotásánál figyelembe kell vennünk a különböző kockázati tényezőket is, melyek befolyásolhatják az eszközeink közötti korrelációt, mivel a korreláció igen érzékeny a különböző gazdasági eseményekre.

A stressz teszt egy számítógépes kockázatkezelési eszköz, melyet a különböző intézmények, bankok, befektetési szakemberek egy adott portfólió ellenálló képességének felmérésére használnak, jövőbeni pénzügyi szituációkkal ellenben. Ezek a pénzügyi szituációk lehetnek világgazdasági válságok vagy egy-egy adott részvényt piacon a részvényekhez tartozó cégek csődje.

2006-ban törvénybe foglalta a Bázeli Bankfelügyeleti Bizottság, hogy a bankoknak, biztosítania kell, hogy elegendő tőke álljon rendelkezésre a stressz-tesztek eredményeinek fedezésére.

A különböző eszközöket és befektetéseket kezelő vállalatokat, mint például a J.P. Morgan Chase. a stresszteszteket az adott portfóliókockázatának meghatározására, majd ezeket az eredményeket a különböző veszteségek mérsékléséhez használják fel, szükséges fedezeti stratégiák bevezetésére és a portfóliókat diverzifikálják.

A portfóliokezelők saját stressztesztelő programokat használnak, hogy az általuk kínált eszközök mennyire ellenállnak a piac viszontagságainak. Ilyen program például Moody's Analytics, CCAR és a Dodd-Franklin Act (DFAST) stressz tesztje.

A stresszteszteknek többféle típusba tudjuk sorolni:

- A Történelmi Stressz teszteléskor egy korábban megtörtént válság alapján futtatjuk a szimulációinkat. Ilyen például az 1999-2000-es technikai buborék vagy a 2008-as nagy gazdasági világválság.
- A Hipotetikus Stressz tesztelés egy válság átvészelésére összpontosít, mint egy földrengés elleni stressz teszt vagy egy háború kirobbanása.



- Szimulált Stressz tesztek között az egyik legerterjedtebb a Monte Carlo-szimuláció. Ez a típusú stressz tesztelés specifikus változók mellett, különböző eredményű valószínűségek modellezésére használjuk.

A következőkben néhány előnyét és hátrányát ismertetjük a stressz teszteknek.

- **Előnyök:** Segít a kockázatok felismerésében és ezáltal a cégek jobb portfólió terveket tudnak előállítani. Bankok vagy adott értékpapírok erősségeire vagy éppen gyengeségeire rávilágít.
- **Hátrányok:** Rejtett költségekkel és kedvezőtlen következményekkel járhat.

A következő fejezetben elkezdjük építeni a faktor modellt a stressz teszthöz a korrelációkat parametrizáljuk és adott paramétereinkre egyszerű becslést adunk, a lineáris regresszió segítségével.

#### 4.1. Korreláció parametrizálása

Legyen  $C \in n \times n$  a korrelációs mátrixunk mely  $n$  darab pénzügyi eszközünk hozamainak a korrelációját tartalmazza. A korrelációs mátrixunk az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

- Szimmetrikus mátrix
- $\forall i, j = 1, \dots, n$  párra igaz, hogy  $c_{i,j} \in [-1, 1]$
- $\forall i = j$  párra igaz hogy  $c_{i,j} = 1$

A [9] alapötlete, hogy a korreláció, mint paraméter meghatározására használjuk a *LIBOR* market modell paraméter meghatározását az eszközök között. A *LIBOR* modell a kamatláb modellek közé tartozik, erről a modellekről ez a szakdolgozat nem ad részletes leírást, [11] könyvben tudunk részletesen olvasni .

Azt a meghatározást használjuk, hogy a  $C$  mátrix elemei felírhatóak a következő képpen a *LIBOR* modell szerint.

$$c_{ij} = e^{-\beta|i-j|} \quad (4.1)$$

Ahol  $\beta > 0$  paraméterünk, és az  $i, j$  pár reprezentálja a lejáratidőket. Mivel ha két eszköz között nő a lejáratidő akkor a korreláció ezzel arányosan csökken, ez a tény könnyen meggondolható.

Legyen  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^m)$  a faktorainkat tartalmazó vektor, ezek a faktorok magukban foglalják a következő látens folyamatokat: lejáratidő, index sorozatok, befektetési besorolás mértéke, kockázati mérték ...

A faktorok és a 4.1 alapján a következő módon tudjuk felírni a korrelációt egy-egy pénzügyi eszközök között:

$$c_{ij} = e^{\beta_1|x_i^1-x_j^1|+\beta_2|x_i^2-x_j^2|+\dots+\beta_m|x_i^m-x_j^m|} \quad (4.2)$$

Ahol  $k = 1, \dots, m \ \forall B_k > 0$ . Ezeket a paramétereket, a stressz teszthez szükséges szenárió kiválasztásánál fogjuk megválasztani ezzel a későbbiekben foglalkozunk. Ezen paraméterek becslésének legegyszerűbb módja a lineáris regresszió OLS módszer használata az  $-\ln(c_{ij})$  transzformált korreláción.

#### 4.1.1. Lineáris regresszió, OLS

A lineáris regresszió magyarázó változók és válasz változók közötti lineáris kapcsolatot elemzi. Az adott válasz változó változékonyságát szeretnénk megmagyarázni a magyarázó változókkal az alábbi modell segítségével:

$$Y = B_0 + B_1 * X_1 + \dots + B_k * X_k + \epsilon \quad (4.3)$$

Ahol  $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)$  a válasz változó vektora és  $\mathbf{X}_i = (x_{1,i}, \dots, x_{n,i})$  a magyarázó változó  $i$ -edik vektora,  $B_0 \in \mathbf{R}$  az úgy nevezett intercept, a  $B_1, \dots, B_k \in \mathbf{R}$  regressziós együtthatók,  $\epsilon$  pedig, a már faktoranalízisnél látott zaj.

Az adott  $\mathbf{B} = (B_0, B_1, \dots, B_k)$  együtthatókat szeretnénk becsülni. Amennyiben az megfigyeléseink függetlenek egymástól akkor a legkisebb négyzetes becsléssel (Ordinary least squares, OLS) könnyen tudjuk meghatározni a  $B$  vektor értékeit.

$$(Y - XB)^T(Y - XB) = \|Y - XB\|^2 \quad (4.4)$$

A 4.4 egyenletből tudjuk származtatni a következő becslést az együtthatókra:

$$B'_{OLS} = (X^T X)^{-1}(X^T Y) \quad (4.5)$$

Az alább egy ábrán is szemléltetjük, az OLS módszert .



3. ábra. OLS technika alkalmazása [12]

Az OLS módszert alkalmazva a transzformált korreláción már könnyen meghatározható a  $\mathbf{B}$  vektor értékei. A történelmi adatainkat használjuk mint  $\mathbf{Y}$  válasz változóink, minél több ilyen  $\mathbf{B}$  lehetséges együttható meghatározásával a későbbiekben könnyen tudjuk majd kalibrálni a stresszteszthez használható együtthatókat.

## 4.2. VaR meghatározása

Az előző fejezetben bevezettük a  $VaR$  definícióját a következőekben a portfólió kockázatának kiszámítására egy variancia-kovariancia közelítést alkalmazunk. A közelítés a következőképpen néz ki.

$$VaR_\alpha = -N_{1-\alpha} \cdot V_0 \cdot (\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w})^{\frac{1}{2}} \quad (4.6)$$

Ahol  $N_{1-\alpha}$  jelöli a normális eloszlás  $(1 - \alpha)$  kvantilisét,  $V_0$  jelöli a portfóliónak az aktuális piaci értékét,  $\mathbf{w}$  a portfólió súlyának a vektor, azaz a különböző eszközökhöz tartozó súlyokat tartalmazza,  $\sigma$  pedig a portfólióban szereplő eszközöknek a kovariancia mátrixa, amelynek a főátlójában a különböző pénzügyi eszközök szóránégyzetét találjuk. A stressz teszthez szükségünk lesz a  $VaR$ -ban megjelenő  $\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}$  portfólió varianciájára.

A stressztesztekhez kikell választani egy szenáriót, amiben teszteljük a portfóliónkat de mielőtt rátérnénk a kiválasztásra előtte definiáljuk ezeket a szenáriókat. Ehhez bevezetünk egy valószínűségi változót, mely legyen  $\Psi$ . A stresszszenárió meghatározásához a faktorainkat két nagy halmazba soroljuk. Egy úgynevezett ("core") mag faktorok csoportjába és egy ("pheripheral") faktorok csoportjába.

Legyen  $\Psi_l$  azon  $j < m$ ,  $j$  elemű csoport melyben azon faktorok együtthatói vannak melyekre hat a stressz szenárió és legyen  $\Psi_f$  azon  $m - j$  amelyekre nem közvetlenül hat a stressz szenárió. Feltételezzük, hogy a faktorok homogének, például  $\forall \Psi_k = \Psi$   $k = 1, \dots, m$  ahol a faktor együtthatóinak változását jelölje  $\Delta \Psi$ , ekkor ezen változások együttes eloszlása normális eloszlású  $N(0, \rho_\Psi^2)$ . Emellett a feltétel mellett teljesül a következő tétel:

**4.1. Tétel.**  $\mathbf{E}(\Delta \Psi_f | \Delta \Psi_l) = \Sigma_{fl} \Sigma_l^{-1} \Delta \Psi_l$  ahol  $\Sigma_{fl}$  és  $\Sigma_l$  a kovariancia és variancia mátrixa  $\Delta \Psi_f$  és  $\Delta \Psi_l$ .

A következőekben látni fogjuk, hogy a korrelációs változások együtt járnak a szórások váltoásaival vagyis ha valamilyen eszköznek a szórása változik akkor korreláció is változni fog.

### 4.3. Mahalanobis távolság, avagy a legrosszabb szenárió kiválasztása

Ebben a fejezetben azzal a kérdéssel fogunk foglalkozni, hogy az adott szenáriók közül amelyben vizsgáljuk a portfóliónk stabilitás, ezek közül melyik a legrosszabb forgatókönyv számunkra. Ezen szenáriók egy előre megadott tartományon belül vizsgáljuk. Ehhez az egyik legkézenfekvőbb megoldás a Mahalanobis távolság, amely egy  $P$  pont és egy  $D$  eloszlás közti távolságát méri.

Ennek több dimenziós megfelelője, hogy adott egy véletlenszerűen generált normális eloszlású vektorunk majd ennek a távolságát vesszük az átlagtól. A távolság bevezetésének szükségességét az indokolja, hogy a több dimenziós térben, két pont távolsága, korrelálatlan változók esetében egyértelmű, viszont esetünkben a változóink korrelációban állnak egymással, ezt a problémát oldja meg a Mahalanobis távolság.

**4.1. Definíció.** Legyen  $x_A, x_B$  egy-egy változó vektora, ekkor:

$$D(\text{Mahalanobis}) = \sqrt{(x_B - x_A)^T \cdot C^{-1} \cdot (x_B - x_A)} \quad (4.7)$$

Ahol  $C$  a kovariancia mátrix.

A Mahalanobis távolság ezzel ekvivalens definíciója amellyet mi is használni fogunk, az átlagot használja.

**4.2. Definíció.** Legyen  $x_i$  a változó vektorunk és  $\bar{x}$  a vektorunk átlaga ekkor:

$$D(\text{Mahalanobis}) = \sqrt{(x_i - \bar{x})^T \cdot C^{-1} \cdot (x_i - \bar{x})} \quad (4.8)$$

Ahol  $C$  a kovariancia mátrix.

Legyen  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)^T$  véletlen vektorunk, ezen változókat a 4.2 egyenletünkéből vett paraméterek, melynek a várható értéke az adott vektor átlaga  $\mathbf{E}(\beta) = \bar{\beta}$  és ezen vektor kovariancia mátrixa  $\Sigma_\beta$ . Ezen feltételek mellett a 4.8 definícióba beírva a következő képletet kapjuk.

$$D(\beta) = \sqrt{(\beta - \bar{\beta}) \cdot \Sigma_{\beta}^{-1} \cdot (\beta - \bar{\beta})} \quad (4.9)$$

Ahogy már a fejezet elején említettük számunkra a legrosszabb forgatókönyv megállapítása szükséges, vagyis azt a távolságot keressük, ami egy bizonyos paramétertől kisebb vagy egyenlő távolságra helyezkedik el. Ez precízebben megfogalmazza olyan  $\beta'$  keresünk amely maximalizálja a  $Var$ -t egy adott  $c$  korlát mellett:

$$\beta' = \arg \max_{\beta: D^2(\beta) \leq c} Var_{\alpha}(\beta) \quad (4.10)$$

Az előbbi egyenletben használjuk  $D^2(\beta)$  eloszlást. Legyen  $\beta \sim N(\bar{\beta}, \Sigma_{\beta})$  ekkor 4.9 négyzetre emelve egy Khí-négyzet eloszlást követ, vagyis  $D^2(\beta) \sim \chi^2(k)$ .

Ha az 4.10 egyenletünkbe behelyettesítjük 4.6 egyenletet akkor könnyen észrevehetjük, hogy a maximalizálás nem függ az  $\alpha$ -tól, hanem a feladatunk leszűkül a variancia mátrix maximalizálására.

Ekkor ha bevezetjük  $\sigma = \sqrt{diag(\Sigma(\beta))}$  mátrixot melynek a főátlójában  $\beta$  vektorhoz tartozó szórások tartoznak akkor a szenárió kiválasztására alkalmazott maximalizálási probléma a következő képpen írható fel:

$$\begin{aligned} \beta' &= \arg \max_{\beta: D^2(\beta) \leq c} \mathbf{w}^T \Sigma(\beta) \mathbf{w} \\ &= \arg \max_{\beta: D^2(\beta) \leq c} \mathbf{w}^T (\sigma C(\beta) \sigma) \mathbf{w} \\ &= \arg \max_{\beta: D^2(\beta) \leq c} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j c_{ij}(\beta) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ezen maximum érték megtalálásához, a Lagrange-féle multiplikátor módszer tudjuk alkalmazni melyet [13] szakdolgozat, példákkal együtt részletez. A mi esetünkben a maximalizálandó feladat 4.10 az adott 4.9 távolság függvényében. Ekkor az egyenlet a következő képpen alakul:

$$\mathcal{L} = \mathbf{w}^T (\sigma C(\beta) \sigma) \mathbf{w} + \lambda ((\beta - \bar{\beta})^T \Sigma_{\beta}^{-1} (\beta - \bar{\beta}) - c) \quad (4.12)$$

Ekkor a fentiek alapján mielőtt a deriválást végre hajtanánk a következő alakban írhatuk fel:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j c_{ij}(\boldsymbol{\beta}) + \lambda \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\beta_i - \bar{\beta}_i)(\beta_j - \bar{\beta}_j) s_{ij} - c \right) \quad (4.13)$$

Ahol  $s_{ij} \in \Sigma_{\boldsymbol{\beta}} \quad \forall i, j = 1, \dots, m$ .

Ekkor a különböző szerinti deriváltak így alakulnak behelyettesítve  $c_{ij}$  helyére 4.2.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_l} = \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j e^{-\sum_{k=1}^m \beta_k |x_i^k - x_j^k|} + 2\lambda \sum_{j=1}^m (\beta_j - \bar{\beta}_j) s_{lj} = 0 \quad l = 1, \dots, m \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\beta_i - \bar{\beta}_i)(\beta_j - \bar{\beta}_j) s_{ij} - c = D^2(\boldsymbol{\beta}) - c = 0 \quad (4.15)$$

#### 4.4. Hitel-nemteljesítési csereügylet értékének számítása

Mielőtt elkezdjük ismertetjük, a CDS számolási módját mely időben változik, megismerkedünk a swap ügylet és a CDS definíciójával, majd közelítést adunk a CDS szerződés értékének kiszámítására.

**4.3. Definíció.** *A swap ügylet valamely pénzügyi eszköz - általában deviza, értékpapír vagy kamat - cseréjére vonatkozó olyan összetett megállapodás, amely általában egy azonnali és egy határidős adásvételi ügyletből, illetve több határidős ügyletből tevődik össze és általában jövőbeni pénzáramlások cseréjét vonja maga után.*

**4.4. Definíció.** *A hitel-nemteljesítési csereügylet angolul Credit Default Swap (CDS), egyfajta biztosítási swap ügylet. A CDS vásárlója a CDS felárát fizeti meg CDS kiírójának, aki viszont vállalja, hogy ha a mögöttes termék esetén nem fizetésre kerülne sor, akkor a mögöttes termék névértékét kifizeti a CDS vásárlója részére.*

A következőekben csak mint CDS hivatkozunk hitel-nemteljesítési csereügyletre, és ennek a definíciónak jobban megértése érdekében alább egy példával szemléltetjük, hogy mi is az a CDS.

**4.1. Példa.** *Magyarország CDS felára [14] honlap alapján 2022 május elején 115 pont közelében mozog. Ez azt jelenti, ha kötünk egy CDS szerződést, hogy biztosítani szeretnénk befektetésünket ezt évi 1.15%-os díj mellett tehetjük meg. Például 10 millió eurós állampapír portfólió esetén, minden évben 1.15%-ot azaz (ha az évek során változik a bázispont akkor változik a fizetési kötelezettség értéke) 150000 eurót fizetünk 5 éven keresztül. Abban az esetben ha nemfizetésre kerülne sor akkor a CDS kiírója a befektetés névértékét vagyis a 10 millió eurót fizeti meg nekünk.*

A fenti példában szereplő vásárló, a kiíró felé tett fizetési folyamatot premium leg-nek nevezzük, amikor pedig a CDS kiírója fizetési kötelezettségét teljesíti azt pedig protection leg-nek nevezzük. Azt a CDS felárat amely a premium leg és a protection leg értékét kiegyenlíti fair CDS felárnak nevezzük. Azért így angollal vegyítve definiáljuk a fogalmakat mivel a magyarban nem találhatók meg lefordítva ezek a fogalmak vagy pedig a fordítás során jelentésük nagyon torzulna.

A következőekben legyen  $r > 0$  a kockázatmentes kamatláb amit konstansnak tekintünk az egyszerűség kedvéért. Legyen a nemteljesítés valószínűsége  $P(t, T)$  ahol  $t$  az adott időpillanattól  $T$  időpillanatig. Legyen  $s(t, T)$  fair CDS spread-nek a  $t$  időpillanatban  $T$  futamidővel. A CDS-nek a piaci értékét kezdetben tekintsük 0-nak.

Legyen adott a CDS szerződés mely a  $t$  időpillanatban lép érvénybe, akkor a  $t$  időpillanatban a szerződés kockázatmentes értéke számítható a premium leg és a protection leg különbségével. Ha kezdetben 0-nak tekintjük a CDS értékét akkor a következő módon írható fel a képlete:

$$0 = s(t, T) \int_t^T e^{-r(u-t)} (1 - P(t, u)) du - (1 - R) \int_t^T e^{-r(u-t)} P(t, du) \quad (4.16)$$

Átrendezve azt az egyenletet kapjuk, hogy



$$\frac{s(t, T)}{1 - R} = \frac{\int_t^T e^{-r(u-t)} dP(t, u)}{\int_t^T e^{-r(u-t)} (1 - P(t, u)) du} \quad (4.17)$$

Egy létező CDS pozíció valós értékét, egy másik ellentétes CDS pozíció értékével tudjuk kifejezni. A következőkben a CDS szerződés futamideje legyen  $T$  és névértéke 1\$ és egy  $0 \leq t$  időpillanattól kezdve érvényes a CDS. Az adott  $t$  időpillanatban a pozíció értéke a következő képpen adható meg, az előző egyenlet segítségével.

$$\begin{aligned} V_t &= s(0, T) \int_t^T e^{-r(u-t)} (1 - P(t, u)) du - (1 - R) \int_t^T e^{-r(u-t)} dP(t, u) \\ &= (s(0, T) - s(t, T)) \int_t^T e^{-r(u-t)} (1 - P(t, u)) du \\ &= (s(0, T) - s(t, T)) RPV01(t, T) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Az RPV01 meghatározza a kockázatos értékét a bázis pontnak. A következőkben azt feltételezzük, hogy a nemteljesítési valószínűségek állandó a kockázati értéke. Legyen ez  $\lambda_t > 0$ . A 4.17 egyenlet bal oldala pont a credit spread (hitelfelár) képlete. Az egyenlet bal oldalala, pedig maga a kockázati érték vagyis.

$$\frac{s(t, T)}{1 - R} = \lambda_t$$

Ekkor RPV01 a következő módon írható fel

$$RPV01(t, T) = \int_t^T e^{-(r+\lambda_t)(u-t)} du = \int_t^T e^{-(r+\frac{s(t, T)}{1-R})(u-t)} du \quad (4.19)$$

A következőkben a hozam értékét kell kiszámítanunk, amely szükséges lesz a VaR számításához ezt első-rendű Taylor-közelítéssel könnyen megtudjuk adni spread változások segítségével  $\Delta s = s(t, T) - s(t-1, T)$

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_t - V_{t-1} \approx \frac{\partial}{\partial s} V_{t-1} \cdot \Delta s = \\ &= -RPV01(t-1, T) \cdot \Delta s + (s(0, T) - s(t-1, T)) \frac{\partial}{\partial s} RPV01(t-1, T) \cdot \Delta s \end{aligned} \quad (4.20)$$

A következőekben mivel az egyenletben az második tag ha rövid időváltozásokat nézünk akkor elhanyagolhatóan kicsi ezért az egyszerűség kedvéért az érték változás meghatározásának közelítése az alábbi egyenletre redukálódik.

$$\Delta V \approx -RPV01(t-1, T) \cdot \Delta s \quad (4.21)$$

#### 4.5. Egyes szeletek árazása

A következőekben különböző credit index tranche-knek a fair spread-eit fogjuk kiszámolni melyek majd  $\beta$  paraméterek meghatározásában fognak segíteni "London Whale" portfólióval kapcsolatban.

**4.5. Definíció.** *A tranche-k (magyarul porció vagy szelet), az értékpapírok egy csoportjából létrehozott szegmensek, melyeket kockázat, lejáratidő és egy jellemzők szerint osztanak csoportokba. Ezek a csoportokat tudják értékesíteni a befektetők. Az ilyen csoportok és ezek kisebb részei is értékesíthetők de különböző kockázattal, hozamokkal és lejáratidőkkel kell számolnia a befektetőnek.*

Az adott index tranche jelenértékét az alábbi módon tudjuk kiszámolni ahol  $K_1$  azon pont/szint mely felett a CDS kiírója kompenzálja a veszteségeket és  $K_2$  pontig/szintig, általában ezeket a szinteket százalékban adják meg. Legyen  $U(K_1, K_2)$  a kereskedés megkezdésekor fizetett előzetes ár,  $S(K_1, K_2)$  a folyamatosan fizetett ár,  $Z(t) = e^{-rt}$  a  $t$  időpillanatban adott diszkontláb és legyen  $Q(t, K_1, K_2)$  a tranche túlélési valószínűsége, vagyis, hogy a tranche a nehéz piaci körülményeket túléli. Ekkor a jelenérték képlete a következőképpen alakul.

$$PV(K_1, K_2) = U(K_1, K_2) + S(K_1, K_2) \int_0^T Z(t)Q(t, K_1, K_2) dt - \int_0^T Z(t)(-dQ(t, K_1, K_2))$$

Az egyenlet első integrálja az RPV01-et fejezi ki míg a második derivált pedig, a premium leg-et. A fenti képletben ha az előzetes spread-et 0-nak

tekintjük, vagyis nincs szükség előzetes fizetésre és fair spread-nek tekintjük az ügyletet akkor a feladat  $Q(t, K_1, K_2)$  a tranche túlélési függvényének kiszámítására redukálódik a  $t \in [0, T]$  intervallumon.

A túlélési valószínűségek kiszámításához már az előző fejezetben használt kockázati értékkel vett egyenlőséget használjuk, ami  $\lambda = s/(1 - R)$  ekkor a valószínűség a következő képpen írható fel  $Q_t = e^{-\lambda t}$  és így a kockázatos bázispontok kiszámítása az alábbi egyenlettel írható fel.

$$\int_0^T Z(t)Q(t, K_1, K_2) dt = \int_0^T e^{-r+\lambda} dt = \frac{1 - e^{-(r+\lambda)T}}{r + \lambda} \quad (4.22)$$

## 5. London Whale

Ebben a fejezetben az eddig leírt fejezetekben levezetett képleteket, tételket és állításokat használjuk a Londoni Bálna nevezetű botrányra levetítve. A portfólió két nagy hitel eszköz családon alapszik az egyik CDX ami egy amerikai eszközcsalád míg iTraxx egy európai eszközcsalád. Ezen belül ,mind az CDX mind az iTraxx olyan eszközöket tartalmaz, mint például befektetési minőséget elért kötvények és az úgynevezett High Yield kötvényeket. A High Yield kötvények magasabb kockázatú de magas hozamot is ígérnek, de általában nemteljesítésüknek nagy a valószínűsége, míg a befektetési minőséget elért kötvények biztosabban nyújtanak hozamot az ezeket vásárlóknak.

Az eleinte használt stratégia, amit alkalmaztak egy úgy nevezett fedezeti stratégia volt, amiben a high yield kötvényeket abból finanszírozták, hogy eladták a befektetési minőségű kötvényeket. Ezzel a hozamot a megfelelő szinten tartották, de a portfólió ezáltal erősen érzékeny volt a különböző korrelációs változásokra. Későbbi döntésnek sem a kockázatos eszközöket csökkentették a portfólióban hanem először a hozam szintet tartották, majd emellett lassan csökkentették a kockázatos eszközök számát. Vagyis a stratégiák cserlégetése során, nem vették figyelembe a korrelációs változásokat.

### 5.1. Korrelációs stressz teszt

Az adott portfóliónak, mint legtöbbször egy gazdasági elemzés során a történelmi adatokat tudjuk felhasználni mint támpontok és ezek segítségével, valamilyen becslést számolunk ki, különböző valószínűségek segítségével. Az adott számolásokhoz használt adatbázisok titkosítva vannak így ezek mellyekkel dolgozni tudnánk nem elérhetőek. A következőekben [9] cikkben kapott eredményeket fogjuk felhasználni.

A portfólió analíziséhez a 2012. március. 23-ai, adatokat fogjuk használni, mellyek a piac zárásakor álltak rendelkezésünkre.

A faktoranalízis során használt faktoraink a jelen esetben a következők lesznek:futamidő, index sorozat ,befektetési fokozat, CDX vagy itraxx, index

vagy tranche. A különböző eszközeinket ebbe az 5 faktorba tudjuk leredukálni. Ekkor a 4.2 egyenlet a következő képpen írható fel:

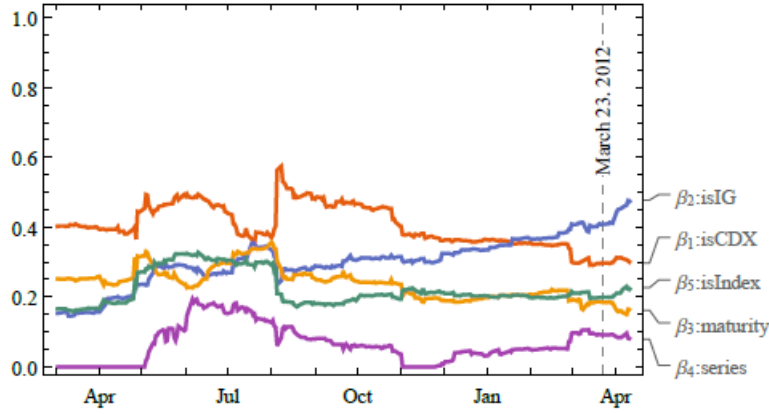
$$c_{ij} = \exp(\beta_1 |isCDX_i - isCDX_j| + \beta_2 |isIG_i - isG_j| + \beta_3 |futamido_i - futamido_j| + \beta_4 |sorozat_i - sorozat_j| + \beta_5 |isIndex_i - isIndex_j|)$$

Azért, hogy a kalibrált  $\beta$  becslék, összehasonlíthatóak legyenek, a fentebbi képletben távolságokat kifejező méréseket lenormáltuk.

Bármely  $t$  időpillanatban a  $\beta$  paramétereket a 250 credit spread segítségével történik vagyis a grafikonon az előző 250 credit spread segítségével kalibráljuk a becsült paramétereket. A napi paramétereket a 2011. március. 1-től 2012. április 12-ig vett adatokat segítségével kalibráljuk. Az összesen 117 pénzügyi eszközből álló portfóliónak a 2021 március 23-ai kalibrált becsült paraméterei  $\beta = (0.35, 0.37, 0.21, 0.05, 0.20)^T$ . Ezeket a paramétereket naponként tudjuk megadni mely nekünk jellemzi a korreláció a különböző faktoraink között és ezek alapján különböző megállapításokat tudunk tenni a látens változóink között. A 4 ábrán láthatjuk, hogy a vizsgált időszak során, a befektetési besorolások és a CDX vagy itraxx nem állnak erős lineáris függésben egymással, viszont a fő korrelációs különbségeket CDX vagy itraxx faktor okozza.

Az adott portfóliónknak a kockázatát a 4.6 képlet segítségével fejezzük ki. Feltételezzük, hogy a portfólió változásai közelíthetők a hitelfelárak által adott elsőrendű Taylor-sorral és hitelfelár hozamainkat normális eloszlásúnak feltételezzük, emiatt a portfólió kockázatát a variancia foglalja magába. Az  $i$ . CDS pozícióját az alábbi módon határozzuk meg: legyen  $s_{i,t}$  a fair spread a  $t$  időpillanatban,  $A_i$ , legyen a névleges értéke és  $RPV01_{i,t}$  pedig a kockázatos bázispont a  $t$  időpillanatban. Ezen számolások részletei a 4.4-es fejezetben találhatóak meg.

Ekkor a  $t$  időpillanatban a portfólió értéke a következő módon adható meg



4. ábra. 2011.márc.01-2012.ápr.12-ig a kalibrált paraméterek változásai [9]

$$V_t = \sum_{i=1}^n V_{i,t} \approx \sum_i A_i RPV01_{i,t} (s_{i,0} - s_{i,t})$$

Ezek alapján ekkor a portfólió hozama a következő módon közelíthető:

$$\begin{aligned} \Delta V &\approx - \sum_i A_i RPV01_{i,t-1} \Delta s_i = - \sum_i A_i RPV01_{i,t-1} \frac{\Delta s_i}{s_{i,t-1}} s_{i,t-1} \\ &= - \left( \sum_j A_j RPV01_{j,t-1} \right) \sum_i w_i r_i \end{aligned}$$

Ahol a  $w_i = \frac{A_i RPV01_{i,t-1}}{\sum_j A_j RPV01_{j,t-1}}$  jelöli, a portfólióban a súlyát a  $CDS_i$ -nek az  $r_i = \frac{\Delta s_i}{s_{i,t-1}} s_{i,t-1}$ . Ekkor az adott pozíciónak a  $t - 1$  időpillanatban az értéke  $V_{t-1} = \sum_j A_j RPV01_{j,t-1}$ .

## 5.2. Eredmények

A JPMorgan befektetési bank 2012. március 23-án szüntette be az adott portfólióval történő kereskedelmet. A portfóliónak a kockázati értékeinek a kiszámításához a különböző adatokat a Markit oldalán érhetőek el, melyek titkosítottak. A korrelációs modell meghatározásához és a hozamoknak az eloszlásának kalibrálásához a történelmi adatok segítségével tudunk pontos

képet nyújtani. A portfólió ezen a napon nettó 153,34 billió dollárnyi névleges értékkel rendelkezett. A  $VaR$  számításai alapján 99% szint mellett az 1 napos kockáztatott érték közel 339,32 millió dollár ami kétszer akkora, mint amit a JPMorgan jelentett be. Ezt a számot használjuk a következőekben viszonyítási alapként. Ezek utána a 4.3 fejezetben használt Mahalanobis-távolság segítségével megállapítjuk a portfólió számára a legrosszabb szenáriót és ennek segítségével nézzük meg a kockáztatott értéket. A legrosszabb  $\beta$  kiszámításához különböző numerikus módszerek alkalmazhatóak. Ha a 99% kvantilis mellett vizsgáljuk a napos  $VaR$ -t akkor könnyen láthatjuk hogy a legrosszabb esetben a kockáztatott érték közel 381,08 millió dollár-t éri el, amely közel 12,31% növekedést jelent az általunk kiszámolt alapesethez képest. Ha nem korlátozzuk a paramétereket ez esetben, a Mahalanobis-távolság tekintetében az egy napos  $VaR$  közel 620,96 millió dollárnyi változást eredményez, mely 83,01%-kal tér el a viszonyítási alaphoz képest.

A fentebb látható eredmények tükröben a korrelációs stressz teszt, kulcsfontosságú támpont lehetett volna a JPMorgan kockázatkezelésének, hogy a portfólió kockázatait megfelelőbben tudta volna értékelni.

## Hivatkozások

- [1] Tutorials in Quantitive Methods for Psychology, An Gie Yong, Sean Pearce, A Begginer's Guide to Factor Analysis: Focusing on Ecploratory Factor Analysis, 2003. Vol. 9(2), p. 81-83
- [2] [http://www.nl pca.org/figq\\_pca\\_principal\\_component\\_analysis.png](http://www.nl pca.org/figq_pca_principal_component_analysis.png)
- [3] Kurtán Lajos, Piacgazdaságtan, ELTE Eötvös kiadó, Budapest, 2003.
- [4] Gáll József, Pap Gyula, Bevezetés a hasznosság alapú portfólió-menedzsmentbe, mobiDIÁK könyvtár, Debrecen, 2004.
- [5] Varga-Haszonits István, Kockázati Mértékek Instabilitása, ELTE, 2009.
- [6] [https:imgs.developpaper.com/imgs/1222988002-26a45979942d44dbé\\_fix732.png](https:imgs.developpaper.com/imgs/1222988002-26a45979942d44dbé_fix732.png)
- [7] <https:g/www.investopedia.com/terms/s/stresstesting.asp>
- [8] Carol Alexander, Elizabeth Sheedy, Developing a stress testing framework basod on market risk models, (2007.máj.29)
- [9] Natalie Packham, Fabian Woebbeking, A Factor-Model Approach for Corre-lation Scenarios and Correlation Stress Testing (2019.jan.28)
- [10] <https://www.investopedia.com/terms/s/stresstesting.asp>
- [11] Brace, A., Gatarek, D. et Musiela, M. (1997): "The Market Model of Interest Rate Dynamics", Mathematical Finance, 7(2), 127-154.
- [12] <https://novustat.com/wp-content/uploads/2019/03/5-ols-regression-regression-line-and-residuals.png>
- [13] Nemesné Jónás Nikolett, Lagrange-féle multiplikátor módszer és alkalmazása, 2017, 6-9
- [14] <https://www.assetmacro.com/hungary/credit-default-swaps-cds/hungary-cds/>