

NYILATKOZAT

Név: Dankó Dorottya

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

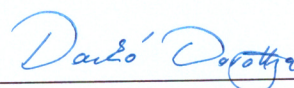
NEPTUN azonosító: C98APX

Szakdolgozat címe:

Gráfok lerajzolása megadott hosszúságokkal

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022.05.25.



a hallgató aláírása

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Dankó Dorottya

**GRÁFOK LERAJZOLÁSA MEGADOTT
HOSSZÚSÁGOKKAL**

Szakdolgozat

Matematika BSc, alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Damásdi Gábor

Számítógéptudományi Tanszék



ELTE
EÖTVÖS LORÁND
TUDOMÁNYEGYETEM

Budapest, 2022

Köszönetnyilvánítás

Hatalmas köszönettel tartozom mindenk előtt témavezetőmnek, Damásdi Gábornak, aki ötleteivel, gyakori, részletes ellenőrzésekkel és tanácsaival komoly segítséget adott a szakdolgozat elkészítésében. Köszönöm a családomnak, hogy végig mellettem álltak ebben az időszakban és az egyetemi éveim alatt. Végül pedig köszönöm vőlegényemnek, hogy mindig számíthattam rá, amikor technikai problémákba ütköztem a dokumentum szerkesztése közben.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	4
1.1. Definíciók, alapfogalmak	4
2. Egész távolságok, egység- és valós távolságok	7
2.1. Egész távolságok	7
2.2. Egységtávolság gráfok	10
2.2.1. Hadwiger-Nelson problémakör	11
2.3. A háromszög-egyenlőtlenség általánosítása	13
3. Páratlan távolságok	16
3.1. A négycsúcsú teljes gráf	16
3.2. A háromosztályú Turán-gráf	18
3.2.1. A páratlan egész távolságok maximális száma a sík csúcshalmazain	18
3.2.2. A páratlan távolság gráfok kromatikus száma	19
3.2.3. Kerékgráfok	23
4. Háromszögelések	25
4.1. A háromszögelések élszáma	25
4.2. Heawood tétele	26
Összegzés	31

1. fejezet

Bevezetés

A dolgozatomban gráfok lerajzolásával fogok foglalkozni. Ez pontosabban megfogalmazva a következőket jelenti: egy G gráf csúcsait feleltessük meg a sík egyes pontjaival és legyenek a gráf élei a pontokat összekötő egyenes szakaszok a síkon. Ezt nevezzük a G gráf egy *lerajzolásának*. Fontos megjegyezni, hogy ez a fogalom nem egyezik a síkbarajzolás fogalmával, utóbbinál ugyanis nem engedjük meg az élek keresztezését, a lerajzolásnál viszont igen. Ha a lerajzolt gráfok éleinek euklideszi hosszát vizsgáljuk, az sok érdekes kérdést vet fel. Legyen D egy számhalmaz. Keressük azokat a gráfokat, amelyek lerajzolhatók úgy, hogy az élhosszai D -ből kerülnek ki. A D halmaz lehet véges vagy végtelen, lehet például az egész számok halmaza vagy csak az 1-et tartalmazó halmaz is, a mi esetünkben legtöbbször viszont a páratlan egész számok halmazát fogja jelenteni. A dolgozatomban ezt a problémakört fogom megvizsgálni.

1.1. Definíciók, alapfogalmak

A dolgozat középpontjában gráfok állnak, ezért bevezetünk most néhány jelölést. Legyen G gráf, ekkor $V(G)$ jelöli G csúcsainak a halmazát, $E(G)$ pedig az élhalmazát. A G gráf csúcsszámát $|V(G)|$, élszámát pedig $|E(G)|$ jelöli. Ha $v, w \in V(G)$ csúcsok, akkor jelölje $e_{v,w}$ a v és w között futó élt. Egy v csúcs fokszámát jelölje $\deg(v)$.

A továbbiakban néhány, a téma körüljárásához fontos fogalmat fogunk definiálni.

1.1.1. Definíció (Kromatikus szám). Jelölje $\chi(G)$ színeknek azt a minimális számát, amelyek a G gráf csúcsainak olyan színezéséhez szükségesek, ahol megköveteljük, hogy

minden szomszédos csúcspár különböző színű legyen. Ekkor $\chi(G)$ -t a G gráf *kromatikus számának* nevezzük.

1.1.2. Definíció (Síkbarajzolható gráf). Azt mondjuk, hogy egy G gráf *síkbarajzolható*, ha lerajzolható a síkban úgy, hogy a csúcsokat pontok reprezentálják, az éleket pedig folytonos, önmagukat nem metsző görbék és az élek csak a végpontjaikban metszik egymást.

1.1.3. Definíció (Tartomány). Egy síkbarajzolható gráf *tartománya* egy olyan kör, aminek a belseje nem tartalmaz élt vagy pontot.

1.1.4. Definíció (Euler-gráf). *Euler-körnek* nevezzük egy G gráfban egy olyan zárt élsorozatot, amely minden G -beli élt pontosan egyszer tartalmaz. Ha egy gráf tartalmaz Euler-kört, *Euler-gráfnak* nevezzük.

1.1.5. Definíció (Egész távolság gráf). Azokat a gráfokat, amelyek lerajzolhatók úgy, hogy az élhosszai az egész számok halmazából kerül ki, *egész távolság gráfoknak* nevezzük.

1.1.6. Definíció (Egységtávolság gráf). *Egységtávolság gráfnak* nevezzük azokat a gráfokat, amelyek lerajzolhatók úgy, hogy az éleket egység hosszú szakaszokkal ábrázoljuk.

1.1.7. Definíció (Páratlan távolság gráf). *Páratlan távolság gráfnak* nevezzük azokat a gráfokat, amelyek lerajzolhatók úgy, hogy az éleket páratlan egész hosszúságú szakaszok reprezentálják.

1.1.8. Definíció (k -osztályú gráf). Legyen k pozitív egész. Azokat a G gráfokat, amelyek csúcsai k db független halmazra partícionálhatók, *k -osztályú gráfoknak* nevezzük.

1.1.9. Definíció (Turán-gráf). Legyenek m és n pozitív egészek, $T_m(n)$ a következő tulajdonságokkal rendelkező gráf:

1. $|V(T_m(n))| = n$
2. $T_m(n)$ m -osztályú
3. minden $v, w \in V(T_m(n))$ -re v és w között él fut pontosan akkor, ha v és w különböző csúcsosztályokban vannak
4. bármely két osztály méretének eltérése legfeljebb 1.

Ekkor $T_m(n)$ -t egyenletes teljes m -osztályú gráfnak, más néven m -osztályú *Turán-gráfnak* nevezzük.

1.1.10. Megjegyzés. Adott m és n mellett csak egy olyan gráf létezik, amire a definícióban felsorolt tulajdonságok teljesülnek, tehát $T_m(n)$ egyértelmű.

2. fejezet

Egész távolságok, egység- és valós távolságok

2.1. Egész távolságok

Harborth [1] a síkbarajzolható gráfok élhosszait kutatta. A Fáry-tétel kimondja, hogy minden síkbarajzolható gráf lerajzolható úgy, hogy az éleket egyenes szakaszok reprezentálják. Ekkor felvetődik az a kérdés, hogy milyen élhosszakkal lehet így síkbarajzolni a gráfokat.

2.1.1. Sejtés (Harborth-sejtés). *Minden síkbarajzolható gráf síkbarajzolható úgy, hogy éleit egyenes, egész euklideszi hosszúságú szakaszok reprezentálják.*

Harborth sejtése mai napig egy nyitott kérdés, de vannak gráfosztályok, amikre igazolt, hogy teljesül a Harborth-sejtés.

2.1.2. Tétel. *Legyen G egy olyan gráf, ami a következő két művelet ismétlésével üres gráffá szűkíthető:*

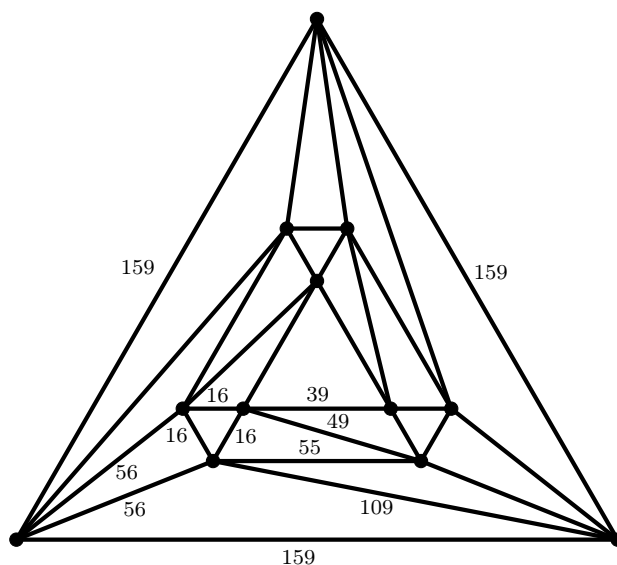
- 1. egy legfeljebb 2 fokszámú csúcs törlése*
- 2. egy 3 fokszámú csúcsot helyettesítünk egy olyan éllel, ami két szomszédja között fut.
(Ha már létezik ilyen él, akkor csak töröljük a 3 fokszámú csúcsot.)*

Ekkor G -re teljesül a Harborth-sejtés, vagyis ha G síkbarajzolható, akkor lerajzolható egész élhosszakkal anélkül, hogy az élei metszenék egymást.

A [2.1.2](#) Tétel miatt a következő gráfosztályokra teljesül a Harborth-sejtés:

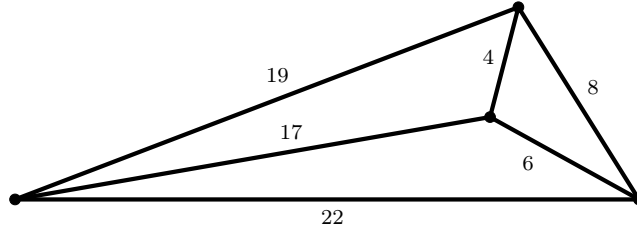
- síkbarajzolható páros gráfok
- a síkbarajzolható (2,1)-ritka gráfok, vagyis azok a síkbarajzolható gráfok, amelyeknek bármely nemüres, n -csúcsú részgráfja legfeljebb $2n - 1$ élt tartalmaz
- azok a síkbarajzolható gráfok, amelyekben minden csúcs foka legfeljebb 4 és vagy tartalmaznak részgráfként egy gyémántgráfot (melyet úgy kapunk, hogy K_4 -ből elhagyunk egy élt), vagy nem négyszeresen élösszefüggők
- a külsíkgráfok, vagyis olyan gráfok, amik síkbarajzolhatók úgy, hogy minden csúcsuk szomszédos a nem korlátos tartománnyal.

Nem csak olyan gráfokra teljesül a Harborth-sejtés, amikre alkalmazható az [2.1.2](#) Tétel. Mára sok bonyolultabb gráfot sikerült egész távolságokkal síkbarajzolni. Erre látható egy példa a [2.1](#) Ábrán.



2.1. ábra. Az ikozaéder gráf lerajzolása egész távolságokkal

Ugyan sok pozitív eredmény létezik a Harborth-sejtéshez, fontos megjegyezni, hogy a probléma korántsem triviális. Az [2.2](#) Ábrán látható K_4 egész távolságokkal való síkbarajzolása, ami mutatja, hogy egyszerűbb gráfoknál is gondolkodást jelent már ilyen síkbarajzolást találni.



2.2. ábra. K_4 síkbarajzolása egész élhosszakkal

Egész távolságokkal való lerajzolhatósággal kapcsolatos a következő tétel is, amelyet Erdős és Anning bizonyított be 1945-ben [2].

2.1.3. Tétel (Erdős-Anning tétel). *Egy végtelen méretű ponthalmazban csak akkor lehet páronként bármely két pont távolsága egész, ha azok egy egyenesre esnek.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy három általános helyzetű (nem egy egyenesre eső) ponthoz csak véges sok olyan pont rajzolható, ami mindháromtól egész távolságra esik. Jelölje A , B és C a három általános helyzetű pontot és jelölje $d(,)$ az euklideszi távolságot. Legyen δ a három távolság maximuma. Legyen X egy A -tól, B -tól és C -től különböző pont, ami mindhárom ponttól egész távolságra fekszik. Az ABX háromszögre felírható a háromszög egyenlőtlenség:

$$|d(A, X) - d(B, X)| \leq d(A, B) \leq \delta.$$

Mivel minden távolság egész, ezért $|d(A, X) - d(B, X)| \in \mathbb{Z}$, ebből következik, hogy a különbség abszolút értéke csak $\delta + 1$ különböző értéket vehet fel.

Azok a pontok a síkon, amelyeknek az A -tól és B -tól vett távolságainak különbségének abszolút értéke adott, egy hiperbolára esnek, tehát fel tudunk rajzolni $\delta + 1$ db hiperbolát az A és B pontokhoz, ezeken helyezkedhet el X . Hasonlóan az A , C illetve a B , C pontpárokhoz is rajzolhatunk $\delta + 1$ hiperbolát, ennek a három hiperbolacsaládnak a metszetein lehet X . Két, különböző pontpárhoz tartozó hiperbola legfeljebb négy pontban metszi egymást, emiatt az A , B és a B , C pontpárokhoz tartozó két hiperbolacsalád legfeljebb $4(\delta + 1)^2$ pontban metszi egymást, tehát legfeljebb ennyi olyan pont létezik a síkon, ami mind A -tól B -től és C -től egész távolságra esik. Mivel ez véges, ezzel beláttuk az Erdős-Anning tételt. $\square$

2.1.4. Megjegyzés. A bizonyításban alkalmazott érvelés nem zárja ki azt az esetet, amikor minden pont egy egyenesre esik, ugyanis ekkor minden pontpárhoz tartozik egy

elfajult hiperbola, tehát olyan hiperbola, ami két félegyenest alkot, és ezek egy egyenesre esnek. Ezekre nem teljesül az, hogy két különböző pontpárhoz tartozó hiperbola legfeljebb négy pontban metszi egymást, hanem lehet végtelen sok metszéspont is, ha az egyik félegyenes tartalmazza a másikat.

Vegyük észre, hogy a gráfok racionális élhosszakkal történő lerajzolhatósága szoros összefüggésben áll az egész távolságokkal való lerajzolhatósággal, ugyanis ha egy véges G gráfot racionális élhosszakkal le tudunk rajzolni, akkor a nevezők legkisebb közös többszörösével felskálázva csupa egész élhosszakot kapunk. Erdős és Ulam megoldatlan problémája ezért összefüggésbe hozható az egész távolság gráfokkal.

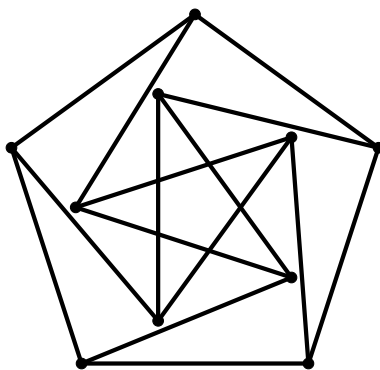
2.1.5. Feladat (Erdős-Ulam probléma). *Létezik-e a síkon olyan sűrű pontthalmaz, melyben a pontok páronkénti távolsága racionális szám?*

Ha a sejtésben megfogalmazott pontthalmaz létezne, akkor az azt jelentené, hogy minden síkbarajzolható gráf síkbarajzolható racionális élhosszakkal, tehát egész élhosszakkal is. Ebből következne a Harborth-sejtés. Azonban az Erdős-Ulam problémában megfogalmazott sűrű pontthalmaz létezése nem szükséges feltétele a Harborth-sejtésnek. Ma azt tartják legvalószínűbbnek, hogy az Erdős-Ulam problémában megfogalmazott pontthalmaz nem létezik, de a Harborth-sejtés igaz. A Harborth-sejtéshez már sok gráfot sikerült egész távolságokkal síkbarajzolni, viszont kevés olyan pontthalmaz ismert, amire teljesül, hogy minden páronkénti távolság racionális. Például nem ismert még olyan, nyolc pontból álló halmaz, amire teljesül, hogy minden páronkénti távolság racionális és általános helyzetűek, azaz semelyik három pont nem esik egy egyenesre, semelyik négy pont nincs egy körön. Ezzel a kérdéssel Kurz és szerzőtársai [3] foglalkoztak, cikkükben megmutatták, hogyan találtak hét általános helyzetű pontot, amelyek távolsága racionális és említést tesznek arról, hogy nyolc pontból álló hasonló halmazt még nem sikerült konstruálniuk. Ez szemlélteti, hogy egy ilyen sűrű, végtelen pontthalmaz létezésének bizonyítása mennyire nehéz feladat.

2.2. Egységtávolság gráfok

Egységtávolság gráfoknak nevezzük az egység-hosszú élekkel lerajzolható gráfokat, ahol az élek keresztezése megengedett. Ha nem engedjük meg az élek keresztezését, akkor *gyufa-gráfokról* beszélünk. Az elnevezés onnan ered, hogy az ilyen gráfokat úgy is lehet ábrázolni,

hogy gyufákat rakunk le egy sík felületre úgy, hogy két gyufa ne keresztezze egymást. A 2.3 Ábrán látható, hogy a Petersen-gráf egységtávolság gráf, azonban nem gyufagráf, hiszen nem síkbarajzolható.



2.3. ábra. A Petersen-gráf mint egységtávolság gráf

Fontos megjegyezni azonban, hogy léteznek olyan gráfok is, amik síkbarajzolhatók és egységtávolság gráfok, ám mégsem gyufagráfok. Ez akkor fordulhat elő, ha nincs olyan lerajzolása a gráfnak, ami egyben síkbarajzolás is és minden él egység-hosszú. Erre látható egy példa a 2.4 Ábrán.

Az egységtávolság gráfok maximális élszámának problémáját Erdős vetette fel.

2.2.1. Feladat (Erdős-féle egységtávolság probléma). *Jelölje $f(n)$ az n -csúcsú egységtávolság gráfok eleinek maximális számát. Milyen becsléseket tudunk adni $f(n)$ -re?*

Erdős [4] talált egy alsó becslést, aminek a nagyságrendje $O(n^{\frac{1+c}{\log \log(n)}})$. A legjobb felső becslés Szemerédi, Spencer és Trotter [5] nevéhez fűződik, ők látták be, hogy $f(n) \leq O(n^{\frac{4}{3}})$.

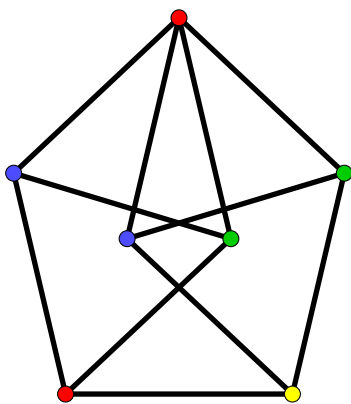
2.2.1. Hadwiger-Nelson problémakör

2.2.2. Definíció. Legyen G^1 az az egységtávolság gráf, aminek a csúcsai a sík pontjai és két csúcs között pontosan akkor fut él, ha az azoknak megfelelő pontok egymástól egységnyi távolságra esnek a síkon.

Minden egységtávolság gráf G^1 -nek részgráfja, ezért ha meg tudnánk határozni G^1 -nek a kromatikus számát, akkor azzal az összes egységtávolság gráf kromatikus számára kapnánk egy felső becslést. Bizonyított az az érdekes tény is, hogy ha sikerülne találni egy felső

becslést minden véges egységtávolság gráf kromatikus számára, akkor az $\chi(G^1)$ -nek is felső becslése lenne. $\chi(G^1)$ -et szokás *a sík kromatikus számának* is nevezni. Az egységtávolság gráfok kromatikus számára épülő kérdéskört Hadwiger-Nelson problémakörnek nevezzük.

A sík kromatikus számára többféle becslés is létezik. Nem nehéz konstruálni olyan egységtávolság gráfot, aminek a kiszínezéséhez legalább négy szín kell. Erre jó példa a Moser Spindle nevű gráf, ami az [2.4](#) Ábrán látható. 2018-ban de Grey [\[6\]](#) talált példát olyan egységtávolság gráfra is, ami nem 4-színezhető. Az 1581 csúcsból álló egységtávolság gráfról számítógép segítségével látta be, hogy a kromatikus száma 5.



2.4. ábra. A Moser Spindle: síkbarajzolható egységtávolság gráf, ami nem gyufagráf és nem 3-színezhető

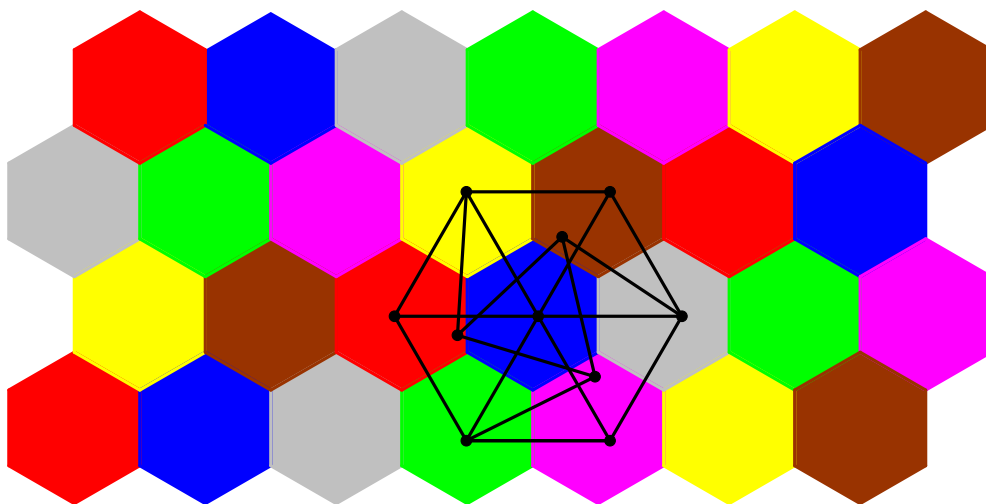
Az egységtávolság gráfok kromatikus számára ismert egy könnyen belátható felső becslés is.

2.2.3. Tétel. *Minden egységtávolság gráf 7-színezhető.*

Bizonyítás vázlat. Osszuk a síkot szabályos hatszögekre úgy, hogy minden szabályos hatszög átmérője azonos, egy 1-nél valamivel kisebb szám, és a szemközti oldalak távolságának a kétszerese legyen nagyobb, mint 1. Ekkor ha egy egységtávolság gráfot lerajzolunk, akkor bármely két szomszédos csúcs különböző hatszögbe esik. Színezzük, ki a hatszögeket hét színnel úgy, hogy két azonos színű hatszög távolsága mindig 1-nél nagyobb legyen. Ekkor ha minden csúcsot olyanra színezzük, amilyen színű hatszögbe esik, egy jó 7-színezését kapjuk az egységtávolság gráfnak. $\square$

A [2.2.3](#) Tétel bizonyításában alkalmazott konstrukciót szemlélteti a [2.5](#) Ábra. A rajta

látható egységtávolságot Golomb gráfnak nevezzük.



2.5. ábra. Az egységtávolság gráfok 7-színezhetősége

Tehát az alsó és a felső becslések már közel állnak egymáshoz, de pontosan még mindig nem ismerjük a sík kromatikus számát.

2.3. A háromszög-egyenlőtlenség általánosítása

Legyenek d_1, d_2 és d_3 adott, nemnegatív valós számok. Létezik-e olyan $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ ponthármas a síkon, amelyekre $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| = d_1$, $\|\mathbf{p} - \mathbf{r}\| = d_2$ és $\|\mathbf{q} - \mathbf{r}\| = d_3$ (ahol $\|\mathbf{x}\|$ jelöli az $\mathbf{x}$ vektor euklideszi (2-es) normáját)? A kérdés ekvivalens azzal, hogy a teljes hármas gráf lerajzolható-e úgy, hogy az élei d_1, d_2 és d_3 hosszúak. Erre nem nehéz a válasz, hiszen ha teljesül rájuk a háromszög-egyenlőtlenség mindhárom esete, akkor igen. Vagyis, ha $d_1 + d_2 \geq d_3$ és $d_2 + d_3 \geq d_1$ és $d_1 + d_3 \geq d_2$, akkor K_3 lerajzolható úgy, hogy az élei pont d_1, d_2 és d_3 hosszúak.

Vegyük azt az esetet, hogy hat adott távolsághoz keresünk a térben egy tetraédert, amelynek élhosszai pont az adott távolságok. Ekkor már nem elégséges feltétel, hogy bármely három, egy oldal éleit meghatározó távolságra teljesüljenek a háromszög-egyenlőtlenségek. A következő tétel Matoušek [7] könyvének a 7. fejezetében jelent meg, ennek a segítségével szükséges és elégséges feltételt fogunk adni a fent felvázolt a problémára.

2.3.1. Tétel. *Legyenek d_{ij} nemnegatív valós számok, ahol $i, j = 0, 1, \dots, n$, $d_{ij} = d_{ji}$ minden i, j párra és $d_{ii} = 0$ minden i -re. Ekkor létezik $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^n$, amikre $\|\mathbf{p}_i -$*

$\|\mathbf{p}_j\| = d_{ij}$ minden i -re és j -re akkor és csak akkor, ha $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitív szemidefinit mátrix, ahol

$$g_{ij} = \frac{d_{0i}^2 + d_{0j}^2 - d_{ij}^2}{2}.$$

A bizonyításhoz szükségünk lesz a következő lineáris algebrai állításra.

2.3.2. Állítás. Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix pontosan akkor pozitív szemidefinit, ha létezik olyan $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$.

Bizonyítás. Ha $\mathbf{A} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$, akkor minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ -re $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{X} \mathbf{x})^T \mathbf{X} \mathbf{x} = \|\mathbf{X} \mathbf{x}\|^2 \geq 0$, tehát $\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit.

A másik irány bizonyításához felhasználjuk azt a tényt, hogy minden szimmetrikus, valós, négyzetes mátrix diagonalizálható, azaz léteznek olyan $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nonszinguláris és $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonális mátrixok, amelyekre $\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{T}$. Ekkor a $\mathbf{D}$ átlójában pont $\mathbf{A}$ -nak a sajátértékei vannak. Ráadásul az is teljesül, hogy $\mathbf{T}$ ortogonális, azaz $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$, tehát $\mathbf{A}$ felírható $\mathbf{T}^T \mathbf{D} \mathbf{T}$ alakban. Legyen $\mathbf{R} = \sqrt{\mathbf{D}}$, vagyis $\mathbf{R}$ az a diagonális mátrix, amelynek az átlójában az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeinek a négyzetgyökei vannak. $\mathbf{R}$ is valós mátrix lesz, mivel $\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, tehát a sajátértékei mind nemnegatívak. Legyen $\mathbf{X} = \mathbf{R} \mathbf{T}$. Ekkor valóban teljesül, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$. $\square$

Ezzel készen állunk arra, hogy belássuk az [2.3.1](#) Tételt.

Az [2.3.1](#) Tétel bizonyítása. Először a szükségességet látjuk be, azaz ha $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^n$ adottak és $d_{ij} = \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|$, akkor $\mathbf{G}$ pozitív szemidefinit.

Legyenek $\mathbf{x}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0$, ahol $i = 1, 2, \dots, n$. Ekkor a koszinusz tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \frac{1}{2}(\|\mathbf{x}_i\|^2 + \|\mathbf{x}_j\|^2 - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2) = g_{ij}.$$

Tehát $\mathbf{G}$ az $\mathbf{x}_i$ vektorok Gram-mátrixa, tehát felírható $\mathbf{G} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$ alakban, emiatt $\mathbf{G}$ pozitív szemidefinit.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy $\mathbf{G}$ pozitív szemidefinit. Ekkor fel tudjuk írni $\mathbf{G} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$ alakban, ahol $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Legyen $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^n$ az $\mathbf{X}$ mátrix i -edik oszlopa, ahol $i = 1, 2, \dots, n$ és legyen $\mathbf{p}_0 = \mathbf{0}$. Ekkor a fenti számítás megfordítását alkalmazva kapjuk, hogy $\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| = d_{ij}$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. $\square$

Ezzel tehát megoldást kaptunk arra a problémára, hogy mikor rajzolható le $n + 1$ pont adott távolságokkal $\mathbb{R}^n$ -ben. Ha kevesebb dimenzióban keressük az $n + 1$ pont ábrázolását, akkor használhatjuk a [2.3.1](#) Tétel alábbi általánosítását.

2.3.3. Tétel. *Legyenek d_{ij} nemnegatív valós számok, ahol $i, j = 0, 1, \dots, n$, $d_{ij} = d_{ji}$ minden i, j párra és $d_{ii} = 0$ minden i -re és legyen $k \leq n \in \mathbb{N}$ adott. Legyen $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a következő mátrix:*

$$g_{ij} = \frac{d_{0i}^2 + d_{0j}^2 - d_{ij}^2}{2}.$$

Ekkor létezik $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^k$, amelyekre $\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| = d_{ij}$ minden i -re és j -re akkor és csak akkor, ha a $\mathbf{G}$ mátrix pozitív szemidefinit és $\mathbf{G}$ rangja legfeljebb k .

Az [2.3.1](#) Tétel bizonyításában alkalmazott gondolatmentetet és a [2.3.3](#) Tételben leírt általánosítást többször is fel fogjuk használni a dolgozat további fejezeteiben.

3. fejezet

Páratlan távolságok

3.1. A négycsúcsú teljes gráf

A szakdolgozat középpontjában a páratlan élhosszakkal lerajzolható gráfok karakterizációjának vizsgálata fog állni, innentől tehát ezt fejtem ki.

Ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy mely gráfokat tudjuk páratlan élhosszakkal ábrázolni a síkon, természetes megközelítése a problémának az, ha először a kis csúcsszámú gráfok lerajzolásával próbálkozunk. A legfeljebb kétcsúcsú egyszerű gráfok esete triviális, ezeket mindig le tudjuk rajzolni páratlan élhosszakkal. A teljes hármas gráf is lerajzolható, hiszen bármely három pozitív számra, melyekre teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek, létezik olyan három pont a síkon, melyek páronkénti távolságai éppen az adott számok. A négycsúcsú gráfok esete viszont már kevésbé egyszerű. A következő tétel mutatja, hogy már négy pont is elég ahhoz, hogy belássuk, hogy nem minden gráf rajzolható le páratlan egész távolságokkal, hiszen K_4 jó ellenpélda. Az alábbi bizonyítás Matoušek [7] könyvében, a 6. fejezetben található és a 2.3.1 Tétel bizonyításában bemutatott általános módszert használja két dimenzióban, négy pontra.

3.1.1. Tétel. *Nincs olyan négy pont a síkon, hogy közülük bármely két pont távolsága páratlan egész.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy létezik négy olyan pont a síkon, melyek közül bármely két pont távolsága páratlan egész. Feltehető, hogy az egyik pont az origó, a másik hármat pedig jelölje $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$. Az indirekt feltevés szerint ekkor $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$, $\|\mathbf{c}\|$, $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$,

$\|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|$ és $\|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|$ mindegyike páratlan egész.

Legyen $\mathbf{B}$ a következő mátrix:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{a}; \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{a}; \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{a}; \mathbf{c} \rangle \\ \langle \mathbf{b}; \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{b}; \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{b}; \mathbf{c} \rangle \\ \langle \mathbf{c}; \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{c}; \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{c}; \mathbf{c} \rangle \end{bmatrix}$$

A koszinusz-tétel alkalmazásával kapjuk a következő egyenlőséget:

$$2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2\|\mathbf{a}\|^2 & \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 & \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|^2 \\ \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 & 2\|\mathbf{b}\|^2 & \|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 - \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|^2 \\ \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|^2 & \|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 - \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|^2 & 2\|\mathbf{c}\|^2 \end{bmatrix}$$

Vegyük észre, hogy minden m páratlan egész számra $m^2 \equiv 1 \pmod{8}$ teljesül. Tehát $2\mathbf{B} \equiv \mathbf{R} \pmod{8}$, ahol

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Mivel $\det(\mathbf{R}) = 4$, ezért $\det(2\mathbf{B}) \equiv 4 \pmod{8}$. (Ahhoz, hogy ezt belássuk, alkalmazzuk mindkét mátrixra a determináns kiszámítására vonatkozó Sarrus-szabályt és figyeljük meg, hogy a két felbontásban szereplő, egymásnak megfelelő tagok kongruensek modulo 8.) Abból, hogy $\det(2\mathbf{B}) \not\equiv 0 \pmod{8}$ az következik, hogy $\mathbf{B}$ determinánsa sem lehet 0, tehát a $\mathbf{B}$ mátrix sorai függetlenek, vagyis $\text{rang}(\mathbf{B}) = 3$.

Vegyük a $\mathbf{B}$ mátrixnak a következő felbontását: $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

ahol $\mathbf{A}$ elemei az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ megfelelő koordinátáit jelöli. Egy mátrixszorzással ellenőrizhető, hogy ez tényleg $\mathbf{B}$ -nek egy felbontása. Tudjuk, hogy $\text{rang}(\mathbf{A}) \leq 2$, mivel $\mathbf{A}$ sorainak száma 2. Mivel két mátrix szorzatának rangja legfeljebb a két mátrix rangjainak a maximuma lehet, azt kapjuk, hogy $\text{rang}(\mathbf{B}) \leq 2$. Ezzel ellentmondásra jutottunk, tehát beláttuk a tétel állítását. $\square$

3.2. A háromosztályú Turán-gráf

Láttuk, hogy a négycsúcsú teljes gráf nem rajzolható le páratlan távolságokkal. Ebből következik, hogy ha egy G gráf részgráfként tartalmazza K_4 -et, akkor G nem rajzolható le páratlan élhosszakkal. Felmerül ekkor a kérdés, hogy mennyi lehet egy n -csúcsú gráf maximális élszáma, ha azt szeretnénk, hogy ne tartalmazza részgráfként K_4 -et.

3.2.1. Tétel (Turán-tétel). *Legyen G egy n -csúcsú gráf, amely nem tartalmazza részgráfként a négycsúcsú teljes gráfot. Ekkor*

$$|E(G)| \leq \frac{n^2}{3} + \frac{r(r-3)}{6}$$

ahol $r \in \{1, 2, 3\}$, $n \equiv r \pmod{3}$. G élszáma pontosan akkor éri el a felső korlátot, ha G a háromosztályú Turán-gráf.

3.2.1. A páratlan egész távolságok maximális száma a sík csúcshalmazain

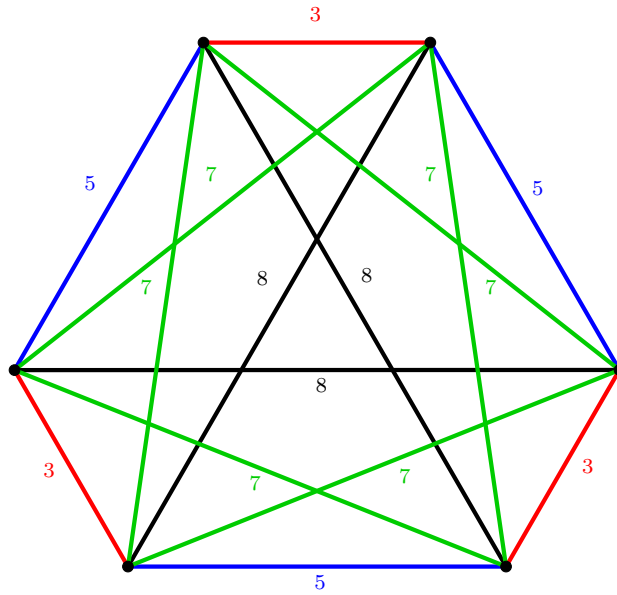
A Turán-tétel mutatja, hogy ha egy n -csúcsú gráf lerajzolható páratlan élhosszakkal, akkor annak élszáma nem lehet nagyobb $T_3(n)$ élszámánál. A következő tétel mutatja, hogy $T_3(n)$ élszáma alsó becslést is ad az n -csúcsú páratlan távolság-gráf maximális élszámára, ezért ez lesz a maximum érték.

3.2.2. Tétel. *Jelölje $f(n)$ a páratlan távolságok maximális számát a síkon egy n méretű csúcshalmazban. Ekkor*

$$f(n) = \frac{n^2}{3} + \frac{r(r-3)}{6}$$

ahol $r \in \{1, 2, 3\}$, $n \equiv r \pmod{3}$.

A fenti tételt Piepmeyer [8] bizonyította be. Harborth, Kemnitz és Möller [9] konstrukcióját felhasználva megmutatta, hogy minden n -re az n -csúcsú Turán-gráf lerajzolható páratlan távolságokkal. Harborth, Kemnitz és Möller a cikkükben felső becslést kerestek az egész távolságú pontthalmazok minimális átmérőjére, ahol az átmérő a páronkénti távolságok maximumát jelenti. A becslésük helyességének bizonyítására használtak egy olyan konstrukciót, ahol szabályos háromszögeket forgattak egy kör középpontja körül úgy, hogy minden csúcs egy kör körvonalára kerüljön és teljesüljön, hogy a páronkénti távolságok egészek.



3.1. ábra. A konstrukció alkalmazása

A [3.1](#) Ábrán a Harborth, Kemnitz és Möller-féle konstrukció egyik kis csúcsszámú esete látható. Ez egy hat csúcsból álló hamaz, amiben minden páronkénti távolság egész. Piepmeyer ezeket úgy használta fel, hogy megmutatta, hogy a paraméterek megfelelő választása esetén a páratlan távolságok pont a Turán-gráfot adják. A [3.1](#) Ábrán látható példán 12 páratlan távolság szerepel. A színes élek jelölik a páratlan távolságokat, az azonos színű élek hossza megegyezik. Tehát a színes élek által meghatározott részgráf pont $T_3(6)$.

Ezzel tehát láttuk, hogy minden n pozitív egészre $T_3(n)$ lerajzolható páratlan távolságokkal. Ezt az észrevételt a későbbiek során még többször fel fogjuk használni. Mivel minden n -csúcsú 3-színezhető gráf $T_3(3n)$ -nek részgráfja, könnyen látható a következő állítás.

3.2.3. Állítás. *Minden 3-színezhető gráf lerajzolható páratlan távolságokkal.*

3.2.2. A páratlan távolság gráfok kromatikus száma

Láttuk, hogy van összefüggés a gráfok kromatikus száma és páratlan távolságokkal való lerajzolhatósága között. Az egységtávolság gráfok esetén azt is tudjuk, hogy létezik felső becslés a kromatikus számra. Ennek mintájára hasznos lenne, ha páratlan távolság gráfokra is találnánk egy hasonló állítást. Ehhez először vezessünk be egy jelölést.

3.2.4. Definíció. Legyen G^{odd} az a páratlan távolság gráf, melynek csúcsai a sík pontjaival feleltethetők meg és két csúcs között pontosan akkor fut él, ha az azoknak megfelelő pontok távolsága a síkon páratlan egész.

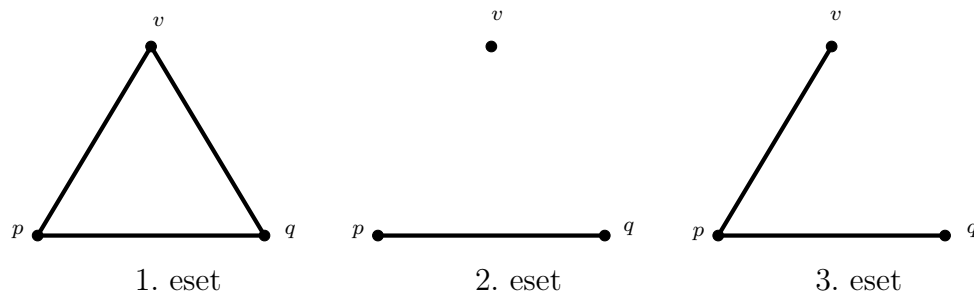
Vegyük észre, hogy minden páratlan távolság gráf G^{odd} -nak részgráfja. A kérdés tehát az, hogy létezik-e $n \in \mathbb{N}$, hogy $\chi(G^{odd}) < n$. Az ilyen típusú problémákat megközelíthetjük úgy, hogy megpróbálunk nagy kromatikus számú páratlan távolság gráfokat konstruálni. Piepmeyer ötlete a [3.2.2](#) Tétel bizonyítására azon alapszik, hogy egy egész távolságokkal rendelkező csúcshalmazból veszi a páratlan távolságokat. Ezzel sikerült megtalálnia egy n méretű csúcshalmazon belüli páratlan távolságok maximális számát. A következőkben megmutatjuk, hogy ez az ötlet nem alkalmazható nagy kromatikus számú gráfok konstrukciójára.

A következő állítás bizonyítása a 2018-as Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny negyedik feladata volt.

3.2.5. Állítás. *Legyen P véges pontthalmaz a síkon, amelyben bármely két pont távolsága egész szám és G az a gráf, amelynek csúcshalmaza P , és két csúcs között pontosan akkor fut él, ha azok távolsága páratlan. Ekkor G 3-színezhető.*

Bizonyítás. Ha P -ben bármely két csúcs közötti távolság páros, akkor G -ben nincsenek élek, tehát G 3-színezhető.

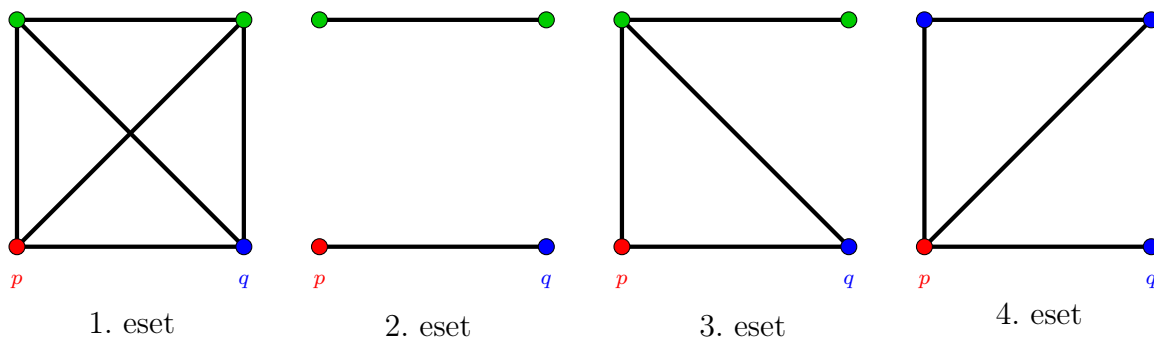
Ha G -nek van éle, akkor legyen p és q két olyan csúcs P -ben, amelyek távolsága páratlan. Legyen $v \in V(G) \setminus \{p, q\}$. A v csúcs p -hez és q -hoz képest háromféleképpen helyezkedhet el. Első eset: v páratlan távolságra van p -től és q -től is. Második eset: v mindkét csúcstól páros távolságra fekszik. Harmadik eset: v az egyik csúcstól páros, a másiktól páratlan távolságra fekszik. Ebben az esetben p és q szerepe felcserélhető, most jelöljük p -vel azt a csúcsot, ami páratlan távolságra fekszik v -től.



3.2. ábra. A csúcsok elhelyezkedésének esetei

Nézzük hogyan tudjuk kiszínezni ezt a csúcshármaszt G -ben. Nyilvánvaló, hogy p és q különböző színnel rendelkezik, legyen p színe piros és q legyen kék. Az 1. esetben v -nek muszáj a 3. szint adni, legyen ez most zöld. A 2. esetben legyen v színe szintén zöld. A 3. esetben v színe legyen a piros és a kék közül az, amelyikkel nincs összekötve, tehát a [3.2](#) Ábrán szereplő 3. esetben a kék színt kapja, ha pedig q -val lenne szomszédos, akkor pirosra színeznénk.

Belátjuk, hogy ez egy megfelelő színezés, vagyis hogy nincs két olyan csúcs G -ben, amik között fut él és azonos színt kaptak. Tegyük fel, hogy valahogy mégis találtunk ilyet. Ekkor p és q színezése rendben van, hiszen a konstrukcióban ezt figyelembe vettük. Tehát csak két másik csúcs lehet, amik azonos színt kaptak és fut közöttük él. Nézzük, ezek hogyan helyezkedhetnek el p -hez és q -hoz képest. Fontos megjegyezni, hogy a [3.3](#) Ábrán látható 4. eset itt is két esetet foglal magába, p és q szerepe felcserélhető.



3.3. ábra. A rossz színezés esetei

Továbbra is pontosan ott húztunk élt két csúcs közé, ahol azoknak a távolsága páratlan egész. A hiányzó élek esetén tehát a két csúcs páros távolságra esik egymástól. Belátjuk, hogy nem létezik négy olyan csúcs a síkon, melyek a fenti négy eset bármelyikének

megfelelő paritású távolságra helyezkednek el egymástól. Mivel csak a paritásokra van szükségünk, a 3. és 4. eset valójában ugyanaz. Korábban beláttuk, hogy az 1. eset nem fordulhat elő, hiszen a [3.1.1](#) Tétel pont ezt mondja ki. A többi eset bizonyítása is hasonló ötleten alapszik, a [2.3.1](#) Tétel bizonyításának egy speciális esetét fogjuk alkalmazni.

Legyen a p csúcs az origó, a q végpontú vektort jelölje $\mathbf{c}$, a másik két csúcsban végződő vektorok pedig legyenek $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$. Definiáljuk a $\mathbf{B}$ és $\mathbf{A}$ mátrixokat úgy, ahogy a [3.1.1](#) Tétel bizonyításában, tehát $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$, ahol $\mathbf{A}$ rangja 2, tehát $\mathbf{B}$ rangja is legfeljebb 2. A célunk most is az, hogy belássuk, hogy $\mathbf{B}$ determinánsa nem nulla, hiszen abból következik, hogy $\mathbf{B}$ rangja 3, ezzel ellentmondásra jutunk. A $2\mathbf{B}$ mátrixot felírhatjuk a koszinusz-tétel alkalmazásával úgy, ahogy a [3.1.1](#) Tétel bizonyításában látható. Vizsgáljuk meg a [3.3](#) Ábrán látható 2. esetben a $2\mathbf{B}$ mátrix determinánsának nyolcas maradékát.

$$\begin{aligned} \det(2\mathbf{B}) &= 8\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2\|\mathbf{c}\|^2 \\ &\quad - 2\|\mathbf{a}\|^2(\|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 - \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|^2)^2 \\ &\quad - 2\|\mathbf{b}\|^2(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|^2)^2 \\ &\quad - 2\|\mathbf{c}\|^2(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2)^2 \\ &\quad + 2(\|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 - \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|^2)(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2)(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|^2) \end{aligned}$$

Mivel ebben az esetben a és b hossza páros, a nyolcas maradékot figyelve néhány tag kiesik.

$$\begin{aligned} \det(2\mathbf{B}) &\equiv -2\|\mathbf{c}\|^2(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2)^2 \\ &\quad + 2(\|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 - \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|^2)(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2)(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|^2) \\ &\quad (\text{mod } 8) \end{aligned}$$

Mivel $\|\mathbf{c}\|^2$ és $\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2$ páratlan, és páratlan számok négyzetének nyolcas maradéka 1, ezért az első tag kongruens -2-vel modulo 8. Vizsgáljuk meg a másik tagot:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 - \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|^2 &\equiv 1 \pmod{4} \\ \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 &\equiv 3 \pmod{4} \\ \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|^2 &\equiv 1 \pmod{4} \end{aligned}$$

Ezért a második tag nyolcas maradéka 6. Azt kaptuk, hogy $\det(2\mathbf{B}) \equiv 4 \pmod{8}$, tehát a $\mathbf{B}$ mátrix determinánsa nem nulla, ezzel a 2. esetben is ellentmondásra jutottunk, tehát ez az elrendezés sem létezhet.

A [3.3](#) Ábra 3. és 4. esetei közül elég belátni az egyiket, ezek ugyanis paritás szempontjából nem különböznek. Most vizsgáljuk meg $\det(2\mathbf{B})$ -nek a négyes maradékát a 4. esetben, tehát ahol $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ hossza páratlan és $\mathbf{a} - \mathbf{c}$, $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ hossza páros.

$$\det(2\mathbf{B}) \equiv \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \pmod{4}$$

Emiatt az utolsó esetben sem nulla a determináns, tehát itt is ellentmondásra jutottunk. Ezzel beláttuk, hogy a konstrukcióval jó 3-színezést adtunk, tehát a tételt bebizonyítottuk. $\square$

Ezzel beláttuk, hogy a fenti konstrukció nem használható nagy kromatikus számú gráfok létrehozásához. Sajnos nagyon keveset tudunk G^{odd} kromatikus számáról. Ahogy az [2.2.1](#) Fejezetben olvasható, tudjuk, hogy $\chi(G^1) \geq 5$, és mivel $G^1 \subset G^{odd}$, ebből következik, hogy G^{odd} kiszínezéséhez is szükség van legalább öt színre. Ezen kívül még Steinhardt és Bukh [\[10\]](#) foglalkozott a kérdéssel, belátták a következő állítást.

3.2.6. Tétel. *G^{odd} nem színezhető ki véges sok színnel úgy, hogy minden, adott színhez tartozó pontosztály mérhető halmaz legyen.*

Ha viszont nem követjük meg a pontosztályok mérhetőségét, akkor nem tudjuk, hogy kell-e végtelen sok szín a páratlan távolság gráf kiszínezéséhez.

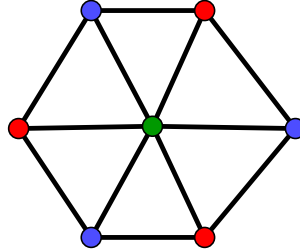
3.2.3. Kerékgráfok

A továbbiakban egy speciális gráfcsoportot fogunk vizsgálni és ezek páratlan távolsággal történő lerajzolhatóságát.

3.2.7. Definíció (Kerékgráf). Legyen W_n az a gráf, amelyet úgy kapunk, hogy egy n csúcsú kör összes pontját egy új csúccsal kötjük össze. Ekkor W_n -t az $n + 1$ csúcsú kerékgráfnek nevezzük.

3.2.8. Megjegyzés. A kerékgráfokat egy másik módon is szokták definiálni, ahol a W_n jelölésben n a kerékgráf csúcsszámát jelöli, tehát W_n az $n - 1$ hosszú kör és egy új csúcs által konstruált kerékgráfot jelenti. Sokszor ez a módszer kényelmesebb lehet, a mi esetünkben viszont a [3.2.7](#) Definícióban bevezetett jelölés használata a célravezetőbb.

Vegyük észre, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ -re W_{2k} 3-színezhető. Ez könnyen adódik a páros csúcs-számú körök 2-színezhetőségéből. A [3.4](#) Ábrán láthatunk erre egy példát.



3.4. ábra. W_{2k} 3-színezhetősége

Ezzel a [3.2.3](#) Állítás miatt beláttuk, hogy minden páros n -re W_n lerajzolható páratlan távolságokkal.

Vizsgáljuk meg W_{2k+1} esetét, ahol $k \in \mathbb{N}$. Mivel W_3 izomorf K_4 -gyel, ezért a [3.1.1](#) Tétel pont azt mondta ki, hogy W_3 nem páratlan távolság gráf. Rosenfeld és Tien [\[11\]](#) látta be, hogy W_5 sem rajzolható le páratlan távolságokkal. Cikkükben felmerült a következő kérdés: Igaz-e, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ -re W_{2k+1} nem páratlan távolság gráf? A kérdésre Damásdi [\[12\]](#) adott választ, amikor belátta a következő tételt.

3.2.9. Tétel. *Ha n páratlan egész, akkor W_n nem rajzolható le páratlan távolságokkal.*

4. fejezet

Háromszögelések

4.1. A háromszögelések élszáma

Ebben a fejezetben egy újabb speciális síkgráf-osztállyal fogunk foglalkozni.

4.1.1. Definíció (Háromszögelés). Azokat a gráfokat, melyeket síkba lehet rajzolni úgy, hogy minden tartomány (beleértve a nem korlátos tartományt is) egy háromszögnek feleljen meg a síkon, háromszögeléseknek nevezzük.

4.1.2. Tétel. *Egy $n \in \mathbb{N}$ csúcsú síkbarajzolható gráf élszáma pontosan akkor maximális, ha izomorf egy n csúcsú háromszögeléssel.*

A [4.1.2](#) Tétel mutatja, hogy miért érdekesek számunkra a háromszögelések, ugyanis ha a maximális élszámú síkbarajzolható gráfok lerajzolhatóságáról belátunk valamit, akkor az egy erős állítás lesz. Például ha a Harborth-sejtést sikerülne igazolni háromszögelésekre, akkor abból következne az állítás minden síkgráfra. A bizonyításhoz szükségünk lesz Euler formulájára.

4.1.3. Tétel (Euler-formula). *Ha G összefüggő síkgráf, akkor $n - m + t = 2$, ahol $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$ és t jelöli a tartományok számát.*

A [4.1.2](#) Tétel bizonyítása. Egy síkbarajzolt gráf élei bővíthetők, ha nem minden tartománya háromszög, ugyanis ha maradt még olyan tartomány, ami egy legalább négy csúccsal rendelkező kör, akkor egy átló behúzásával a gráf továbbra is síkbarajzolt marad, az élszámát pedig eggyel megnöveltük. Ezzel beláttuk, hogy ha egy gráf nem háromszögelés,

akkor nem maximális élszámú, tehát az egyik irány kész.

Ha minden tartomány háromszög, akkor az Euler-formulában bevezetett jelöléseket alkalmazva $m = \frac{3t}{2}$, hiszen minden tartományt pontosan három él határol, és minden él két tartomány határán fekszik, ezért kell osztani 2-vel. Ezzel az Euler-formula háromszögelésekre vonatkoztatott változata a következő lesz:

$$\frac{t}{2} = n - 2$$

Tehát háromszögelések esetében a csúcsszámmal ki lehet fejezni a tartományok számát, majd abból az élszámot:

$$t = 2(n - 2); \quad m = \frac{3t}{2} \implies m = 3(n - 2)$$

Azt kaptuk, hogy ha adott egy háromszögelésnek a csúcsszáma, akkor annak az élszámát is tudjuk. Mivel egy n -csúcsú síkbarajzolt gráf csak akkor lehet maximális élszámú, ha háromszögelés, és az n -csúcsú háromszögeléseknek megegyezik az élszáma, beláttuk a tétel állítását. $\square$

4.2. Heawood tétele

Szorosan kapcsolódnak ehhez a témához a [3.2.3](#) Alfejezetben tárgyalt kerékgráfok, ugyanis minden nemtriviális háromszögelés tartalmaz részgráfként kerékgráfokat. Ha veszünk például egy tetszőleges csúcsot a háromszögelésben és annak a szomszédait, az ezek által kifeszített részgráf pont egy kerékgráf lesz. Innen könnyen adódik egy elégséges feltétel ahhoz, hogy egy háromszögelés nem páratlan távolság gráf, ugyanis elég találni egy páratlan foksámú csúcsot a háromszögelésben, az egy páratlan kerékgráfot feszít ki, a [3.2.9](#) Tétel miatt nem lehet páratlan élhosszakkal lerajzolni azt a részgráfot, tehát az egész gráfot sem. Ezzel tehát beláttuk, hogy egy háromszögelés nem lehet páratlan-távolság gráf, ha tartalmaz páratlan foksámú csúcsot.

Hasonlóan, ha egy háromszögelés minden csúcsának foksáma páros, akkor minden kerékgráf, amit ő részgráfként tartalmaz, 3-színezhető, tehát páratlan távolság gráf. Ez még sajnos nem elég ahhoz, hogy az egész gráf 3-színezhetőségét vagy a páratlan távolságokkal való lerajzolhatóságát belássuk. A következő tétel viszont segítségünkre lehet még.

4.2.1. Tétel. *Egy G gráf Euler-gráf pontosan akkor, ha minden csúcsának foksáma páros.*

Ebből tehát adódik, hogy azok a háromszögelések, amik nem tartalmaznak páratlan fokszámú csúcsot, tartalmaznak Euler-kört. Ezeket a gráfokat *Euler-háromszögeléseknek* nevezzük.

4.2.2. Tétel (Heawood-tétel). *Az Euler-háromszögelések 3-színezhetők.*

Heawood tételéből és a [3.2.3](#) Állításból következik, hogy az Euler-háromszögelések lerajzolhatók páratlan távolságokkal, ezért a továbbiakban némi előkészítés után a Heawood-tétel bizonyítása fog következni egy erősebb állítás belátása révén.

4.2.3. Definíció (Közel-háromszögelés). *Közel-háromszögelésnek* nevezzük azokat a gráfokat, amelyek síkbarajzolhatók úgy, hogy a korlátos tartományai háromszögeknek felelnek meg a síkon.

Ha egy közel-háromszögelésnek van Euler-köre, akkor azt euléri közel-háromszögelésnek nevezzük. Mivel a közel-háromszögeléseknek részhalmaza a háromszögelések halmaza, ezért a Heawood-tételnél erősebb állítás a következő, amit Tsai és West látott be [\[13\]](#).

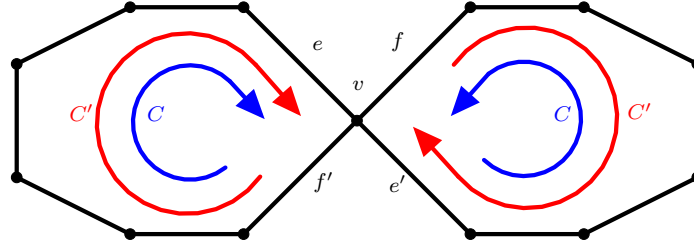
4.2.4. Tétel. *Minden euléri közel-háromszögelés 3-színezhető.*

A bizonyításhoz először egy fogalmat kell tisztázni. Egy Euler-körben metszésnek nevezzünk négy olyan e, e', f, f' élt, amelyek egy közös v csúccsal szomszédosak, és az Euler-körben e után e' következik, f után pedig f' , és a gráf síkbarajzolásában $\{e, e'\}$ felváltva szerepel $\{f, f'\}$ -vel a v csúcsnál. Ha egy Euler-körben nincs metszés, akkor azt egy nemmetsző Euler-körnek nevezzük.

4.2.5. Lemma. *Minden síkbarajzolható Euler-gráfnak van nemmetsző Euler-köre.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy G egy olyan síkbarajzolható Euler-gráf, aminek nincsen nemmetsző Euler-köre. Válasszuk ki G Euler-körei közül azt, amelyikben a metszések száma minimális, jelöljük ezt a kört C -vel.

Tegyük fel, hogy e, e', f és f' metszést alkot a v csúcsban úgy, hogy e után e' , f után pedig f' következik C -ben. Fordítsuk meg C -nek azt a részét, ami e' és f közé esik. Jelöljük ezt a módosított Euler-kört C' -vel. Ekkor C' -ben e után f következik és e' után f' , tehát a v csúcsban ezt a metszést megszüntettük. Ezt a lépést szemlélteti a [4.1](#) Ábra.



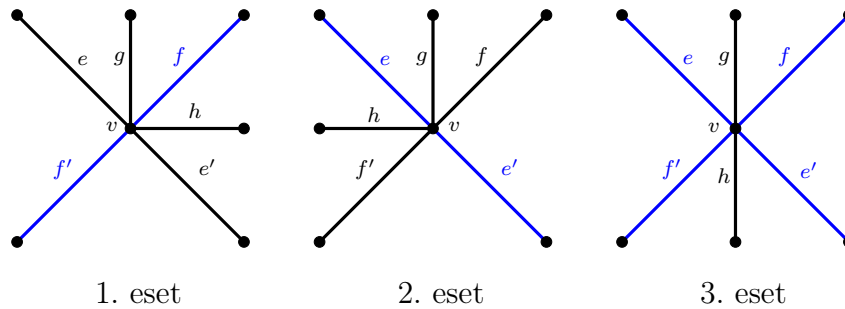
4.1. ábra. Az Euler-kör módosítása

Azt állítom, hogy C' metszéseinak száma szigorúan kisebb, mint C metszéseinak száma. Ehhez elég csak a v -beli metszéseket vizsgálni, mivel minden másik pontban változatlan az élpárok elhelyezkedése az Euler-körön. Ha v -ben létrejött egy új metszés, akkor az tartalmazza $\{e, f\}$ és $\{e', f'\}$ valamelyikét. Tegyük fel, hogy az új metszés $\{e, f\}$ -et tartalmazza (hasonló érvelés használható szimmetrikusan $\{e', f'\}$ -re is). Jelöljük g -vel és h -val azt a két élt, ami $\{e, f\}$ -fel metszést alkot C' -ben. Ezek közül az egyik él e és f között helyezkedik el a v csúcsot körüljárva, tegyük fel, hogy ez g . Ekkor három eset van:

Első eset: h f és e' között helyezkedik el. Ekkor $\{g, h\}$ metszést alkotott C -ben $\{f, f'\}$ -vel, tehát a metszések száma nem változott.

Második eset: h f' és e között helyezkedik el. Ekkor C -ben $\{e, e'\}$ -vel alkotott metszést ez az élpár, szintén változatlan a metszések száma.

Harmadik eset: h e' és f' között helyezkedik el. Ekkor $\{g, h\}$ metszést alkotott C -ben mind $\{e, e'\}$ -vel, mind $\{f, f'\}$ -vel, tehát összességében eggyel csökkent a metszések száma.



4.2. ábra. Az újonnan létrejött metszés három esete

Ezzel beláttuk, hogy C' -ben szigorúan kevesebb metszés van, mint C -ben, de mivel C -t minimálisnak választottuk, ellentmondásra jutottunk. □

4.2.6. Definíció. Egy síkbarajzolt gráf *külső élei* illetve *külső csúcsai* azok az élek illetve csúcsok, amelyek a nem korlátos tartományhoz tartoznak.

4.2.7. Lemma. *Minden euléri közel-háromszögelés éleinek száma hárommal osztható.*

Bizonyítás. A korlátos tartományok száma szerinti teljes indukciót fogunk alkalmazni. Az élek nélküli euléri közel-háromszögelésre teljesül az állítás. Legyen G egy élekkel rendelkező euléri közel-háromszögelés és legyen F egy olyan korlátos tartomány, ami tartalmaz külső élt. Legyen G' az a gráf, amit úgy kapunk, hogy G -ből kitöröljük F -nek mindhárom élt. Ekkor G' néhány, kevesebb tartományból álló euléri közel-háromszögelés nem összefüggő uniója, ezért erre alkalmazhatjuk az indukciós feltételt, tehát G' élszáma hárommal osztható. Mivel $|E(G)| = |E(G')| + 3$, azt kaptuk, hogy G élszáma is 3-mal osztható. $\square$

4.2.8. Definíció. Egy gráf C körének *részköre* az az élsorozat, ami egy csúcs kétszeri érintése közé esik a C körön végighaladva.

4.2.9. Lemma. *Egy euléri közel-háromszögelés nemmetsző Euler-körének bármely rész-körének élszáma hárommal osztható.*

Bizonyítás. Legyen C a G euléri közel-háromszögelés nemmetsző Euler-köre és legyen C' részköre C -nek. A C' által bezárt tartományok száma szerinti teljes indukciót fogunk használni.

Ha csak egy tartomány van C' belsejében, akkor az egy háromszög, tehát az éleinek száma 3. Legyen $H \subset G$ az a részgráf, amely tartalmazza C' -t és G -nek azokat a csúcsait és éleit, amelyek C' belsejében vannak. Ha C' magában foglalja az egész H -t, akkor mivel C' egy kör és H egy háromszögelés része, következik, hogy H egy euléri közel-háromszögelés, tehát az Euler-körének, C' -nek az élszáma hárommal osztható.

Különben C -nek van olyan része, ami bejárja a $H \setminus C'$ -beli csúcsokat. Ez csak úgy történhet, ha C belép C' belsejébe. Legyen v a C' első és egyben utolsó csúcsa. C beléphet C' belsejébe a v csúcsnál vagy H bármely olyan külső csúcsánál, amit C' legalább kétszer jár be. Mivel C' nemmetsző, C -nek bármely ilyen része ugyanannál a csúcsnál lép ki H belsejéből, ahol belépett. Emiatt tehát H -nak minden külső csúcsa, tehát az összes csúcsa páros fokszerű. Ebből következik, hogy H egy euléri közel-háromszögelés, tehát az élszáma hárommal osztható.

Mivel C -nek minden olyan része, ami H belsejét fedi le, ugyanannál a csúcsnál lép ki, ahol belépett, ezért ezek a részek is részkörei C -nek, ráadásul kevesebb tartományt ölelnek körül, mint C' , tehát az indukciós feltevés miatt ezek élszáma hárommal osztható. C' élszámát megkaphatjuk úgy, hogy H élszámából kivonjuk a H belsejét bejáró részkörök élszámainak összegét. A kisebbítendő és a kivonandó is hárommal osztható, ezért $|E(C')|$ is az, ezzel a lemmát bebizonyítottuk. $\square$

Az utóbbi három lemma felhasználásával nem nehéz bebizonyítani a 4.2.4 Tételt, amiből következik a Heawood-tétel.

A 4.2.4 Tétel bizonyítása. Legyen G egy euléri közel-háromszögelés és C a nemmetsző Euler-köre. C -n végighaladva színezzük ki minden csúcsot úgy, hogy az 1, 2, 3 színeket ciklikusan ismétljük. Ha egy olyan csúcshoz érkezünk, amit már kiszíneztünk, azzal C -nek egy részkörét zárjuk be. A 4.2.9 Lemma miatt ennek a hossza hárommal osztható, tehát ugyanaz a szín következik, mint amit már hozzárendeltünk. Ezzel a konstrukcióval tehát G -nek egy jó 3-színezését kaptuk, mert az Euler-kör minden élén végimentünk és minden élre teljesül, hogy a két végpontja különböző színű. Ezzel beláttuk, hogy G 3-színezhető. $\square$

A Heawood-tétellel tehát azt kaptuk, hogy egy háromszögelés pontosan akkor rajzolható le páratlan távolságokkal, ha minden csúcsának páros a fokszáma, azaz ha van Euler-köre.

Összegzés

A dolgozatban gráfok egy adott halmazból kikerülő élhosszakkal való lerajzolásának problémakörét vizsgáltuk meg. Először az egész élhosszakkal lerajzolható gráfokat tárgyaltuk, a [2.1](#) Fejezetben kimondtuk a Harborth-sejtést, röviden bemutattunk néhány eddigi eredményt és felvázoltunk még néhány, egész távolság gráfokkal kapcsolatos problémát. A [2.2](#) Fejezetben egységtávolság és gyufagráfokra, ezekkel kapcsolatos tételekre, feladatokra mutattunk példákat, majd a [2.2.1](#) Alfejezetben az egységtávolság gráfok kromatikus számára épülő kérdéskört, a Hadwiger-Nelson problémakört ismertettük. Majd a [2.3](#) Fejezetben tettünk egy kis kitekintést és bemutattunk egy tételt, ami a háromszög-egyenlőtlenséget terjeszti ki d dimenzióba és n pontra. Az itt bemutatott bizonyítás ötletét kétszer is felhasználtuk a [3](#) Fejezetben.

A dolgozat [3](#) és [4](#) Fejezetei a páratlan távolság gráfokat tárgyalja. Először megmutattuk a [3.1](#) Fejezetben, hogy a négycsúcsú teljes gráf nem rajzolható le páratlan távolságokkal, majd a [3.2](#) Fejezetben mutattunk a páratlan élhosszakkal való lerajzolhatóságra elégséges feltételt és akadályt. A [3.2.1](#) Alfejezet fő eredménye az volt, hogy megmutattuk, hogy a 3-színezhető gráfok lerajzolhatók páratlan élhosszakkal majd a [3.2.2](#) Alfejezetben tovább tárgyaltuk a páratlan távolság gráfok kromatikus számával kapcsolatos eddigi ismereteinket. Ezután a [3.2.3](#) Alfejezetben megismerkedtünk a kerékgráfokkal és ebben a speciális gráfosztályban szükséges és elégséges feltételt adtunk a páratlan távolságokkal való lerajzolhatóságra. A [4](#) Fejezet a háromszögelésekről szólt. Először a [4.1](#) Fejezetben megmutattuk, hogy a háromszögelések élszáma maximális az adott csúcsszámú síkgráfok halmazán, majd a [4.2](#) Fejezetben bebizonyítottuk Heawood tételét, ezzel karakterizációt adtunk arra, hogy egy háromszögelés mikor lehet páratlan távolság gráf.

Irodalomjegyzék

- [1] *A. Kemnitz and H. Harborth*: Plane integral drawings of planar graphs. *Discrete Math.* 236, No. 1–3, 191–195 (2001)
- [2] *N. H. Anning and P. Erdős*: Integral distances. *Bull. Am. Math. Soc.* 51, 598–600 (1945)
- [3] *S. Kurz, L. C. Noll, R. Rathbun, C. Simmons*: Constructing 7-clusters. *Serdica J. Comput.* 8, No. 1, 47–70 (2014)
- [4] *P. Erdős*: On sets of distances of n points. *Am. Math. Mon.* 53, 248–250 (1946)
- [5] *J. Spencer, E. Szemerédi and W. T. Trotter*: Unit distances in the Euclidean plane. Academic Press, London, 293–303 (1984)
- [6] *A. D. N. J. de Grey*: The chromatic number of the plane is at least 5. *Geombinatorics* 28, No. 1, 18–31 (2018)
- [7] *J. Matoušek*, Thirty-three miniatures. Mathematical and algorithmic applications of linear algebra. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS) (2010)
- [8] *L. Piepmeyer*: The maximum number of odd integral distances between points in the plane. *Discrete Comput. Geom.* 16, No. 1, 113–115 (1996)
- [9] *H. Harborth, A. Kemnitz, M. Möller*: An upper bound for the minimum diameter of integral point sets. *Discrete Comput. Geom.* 9, No. 4, 427–432 (1993)
- [10] *J. Steinhardt*: On coloring the odd-distance graph. *Electron. J. Comb.* 16, No. 1, Research Paper N12, 7 (2009)
- [11] *M. Rosenfeld and N. L. Tien*: Forbidden subgraphs of the odd-distance graph. *J. Graph Theory* 75, No. 4, 323–330 (2014)

- [12] *G. Damásdi*: Odd wheels are not odd-distance graphs. Discrete Comput. Geom. (2021)
- [13] *M.-T. Tsai* and *D. B. West*: A new proof of 3-colorability of Eulerian triangulations. Ars Math. Contemp. 4, No. 1, 73–77 (2011)