NYILATKOZAT

Név: Lelkes Zoltán

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika

NEPTUN azonosító: DH05PH

Szakdolgozat címe:
Hidrodinamika komplex függvénytani módszerekkel

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022.05.30.

a hallgató aláírása

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Hidrodinamika komplex függvénytani módszerekkel

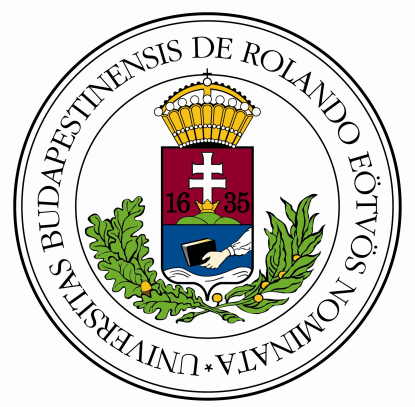
BSc Szakdolgozat

Lelkes Zoltán

Matematika BSc
Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Sigray István
ELTE Analízis Tanszék



Budapest, 2022

Köszöntenyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Sigray Istvánnak, aki amellett, hogy rendszeres konzultációkon tanácsaival, észrevételeivel és ötleteivel segítette a szakdolgozat létrejöttét, komplex függvénytan és hidrodinamika előadómként felkeltette a téma iránt az érdeklődésemet, nélküle nem születhetett volna meg ez a dolgozat.

Köszönettel tartozom továbbá családomnak, akik szeretete és támogatása úgyszintén elengedhetetlen volt nem csak a szakdolgozat megírásához, hanem az eddigi tanulmányaimhoz is.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **3**

2. Hidrodinamikai alapfogalmak **4**

2.1. Ideális áramlás 4

2.2. Fluxus 7

2.3. Iránymező 9

3. Áramvonalak lokálisan **13**

3.1. Hasonló áramlások 13

3.2. Pólusok és zérushelyek környezete 15

4. Áramvonalak globálisan **20**

4.1. Áramvonalak a Riemann gömbön 20

4.2. Körsorok mint áramvonalak 23

5. Numerikus közelítése az áramvonalaknak **27**

5.1. Hibabecslés 27

5.2. Áramvonalak kirajzolása MATLAB-ban 30

5.3. Nem ideális áramlások 34

6. Függelék **40**

1. Bevezetés

Ez a dolgozat a hidrodinamika egyik legalapvetőbb fogalmával az áramvonalakkal foglalkozik. Célunk, hogy megértsük első körben, hogy míly módon tudjuk a komplex függvénytan segítségével modellezni az ideális áramlásokat, és ezt használva hogyan tudunk az áramvonalak képének meghatározására egy differenciálegyenlet megoldásánál egyszerűbb módszert találni.

Arra jutunk majd, hogy egy holomorf függvény konjugáltja, (avagy egy antiholomorf függvény) ad meg olyan sebességvektormezőt, amelyhez ideális áramlás tartozik, és ez a holomorf függvény primitív függvényének képzetes részének szintvonalaiként állnak elő az áramvonalak.

A teljesség igánye nélkül tárgyalni fogjuk, először, hogy hogyan nézhet ki az áramlás lokálisan. Itt az derül ki, hogy az őt leíró függvény zérushelyei illetve pólusai környezetében egyszerű leírni az áramlást és rendre ezek foka illetve rendje és reziduuma alapján ekvivalencia osztályokat tudunk felállítani. Többnyire le is írjuk, hogy hogyan néz ki egy-egy ilyen ekvivalencia osztályba tartozó áramlás.

Ezek után kísérletet teszünk rá, hogy néhány egyszerű esetben az áravonalakat globálisan is meghatározzuk. Ehhez meggondoljuk, hogy hogyan néznek ki a Riemann-gömbön az áramvonalak, majd megmutatjuk, hogy bizonyos érteleben megkapható minden kör-és sugársor, mint áramvonal.

Ezek után tárgyaljuk az áramvonalak numerikus közelítésének egy kézenfekvő megközelítését, amit MATLAB-ban implementáltunk is.

Majd legvégül egy kis kitekintőként elgondolkozunk azon, hogy milyen esetekben nem kapunk ideális áramlást és miért, holott az áramvonalak nevezetes görbék. Illetve illusztráljuk, hogy mi mindent le lehet olvasni ránézésre az áramlást leíró függvényről az áramvonalakból.

2. Hidrodinamikai alapfogalmak

Először is néhány jelölést tisztázunk.

A továbbiakban a képzetes részt $\Im$-vel, a valós részt $\Re$-el fogjuk jelölni.

Egy pont ε sugarú környezetét $B(w,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z-w| < \varepsilon\}$-vel, ugyan ilyen sugarú pontozott környezetét $\dot{B}(w,\varepsilon) = B(w,\varepsilon) \setminus \{w\}$-vel jelöljük.

Amikor *const*-ot írunk, azt úgy kell érteni, hogy valamilyen tetszőleges, $\mathbb{C}$, vagy $\mathbb{R}$-beli konstansról van szó. Írni fogunk például olyat, hogy $\{\varphi(z)\colon z \in D, \Im(F(z)) = const\}$, ezt úgy kell érteni, hogy egy előre lerögzített konstans *const*-hoz tartozik egy ilyen halmaz.

2.1. Ideális áramlás

Az ideális folyadék áramlását szeretnénk komplex függvénytani módszerekkel jellemezni, ehhez a következő feltételekre lesz szükség. Először is, stacionárius áramlást vizsgálunk, azaz feltesszük, hogy időtől függetlenül egy adott pontban a sebesség állandó, és így az áramlást egy $D \subset \mathbb{R}^2$ kétdimenziós tartományon egy $(u,v)\colon D \to \mathbb{R}^2$ függvénnyel jellemezük, ami megadja a sebességvektormezőt.

Továbbá feltesszük, hogy a folyadék összenyomhatatlan és, hogy az áramlás örvénymentes. Ez a két feltevés azt fogja eredményezi, hogy az $f\colon D \to \mathbb{C}$, $f(x+iy) = u(x,y) - iv(x,y)$ képlettel megadott függvény holomorf a D tartományon (pontosabban az $\{x+iy|(x,y) \in D\}$ által megadott tartományon).

Először is ennek a bizonyításához fel kell tenni, hogy u és v folytonosan differenciálhatók legyenek.

Kezdjük most a forrás-és nyelőmentességgel. Ez azt jelenti, hogy ha $\tilde{f}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, akkor $\operatorname{div}(\tilde{f}) = 0$, ezt akarjuk levezetni.

Az $(x_0,y_0) \in D$ pontban vizsgáljuk azt, hogy egy tetszőleges kicsi $h \in \mathbb{R}$ esetén az (x_0,y_0) középpontú h oldalú kisnégyzetre mennyi a bele befolyó illetve a belőle kifolyó folyadék mennyisége a területre mérve, ennek a h^2-et szerese legyen I_h, tehát a folyadék összenyomhatatlansága azt jelenti, hogy $\lim_{h\to 0} \frac{I_h}{h^2} = 0$.

Mivel D nyílt, elég kicsi h-ra $[x_0-h, x_0+h] \times [y_0-h, y_0+h] \subset D$.

$$I_h = \int_{-h}^{h} -v(x_0+t, y_0+h)+u(x_0+h, y_0+t)+v(x_0+t, y_0+h)-u(x_0-h, y_0+t)\, dt$$

itt az (x_0-h, y_0-h) pontból indulva az óra járásával ellenkező sorrendben vesszük az oldalakat és integráljuk rajtuk a kifolyó mennyiséget, ha ez negatív akkor folyik be az adott ponton folyadék és mivel az integrál előjeles terület ez a képlet pont a kívánt mennyiséget adja meg.

Most felhasználva a Lagrange középérték tételt kapjuk, hogy $\exists \xi_1, \xi_2 \in [-h, h]$, hogy

$$I_h = 2h(v(x_0+\xi_1 - v(x_0+\xi_1, y_0-h)))+2h(u(x_0+h, y_0+\xi_2)-u(x_0-h, y_0+\xi_2))$$

továbbá $\exists \zeta_1, \zeta_2 \in [-h, h]$, hogy

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x_0+\zeta_1, y_0+\zeta_1) = \frac{v(x_0+\xi_1, y_0+h) - v(x_0+\xi_1, y_0-h)}{2h}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0+\zeta_2, y_0+\zeta_2) = \frac{v(x_0+h, y_0+\xi_2) - v(x_0-h, y_0+\xi_2)}{2h}$$

Ezeket összevetve kapjuk, hogy

$$I_h = 4h^2 \frac{\partial v}{\partial y}(x_0+\xi_1, y_0+\zeta_1) + 4h^2 \frac{\partial u}{\partial x}(x_0+\zeta_2, y+\xi_2)$$

Tehát abból, hogy, $\lim_{h\to 0} \frac{I_h}{h^2} = 0$ a tetszőlegesen választott $(x, y) \in D$ pontunkban egyrészt tényleg $\operatorname{div}(\tilde{f}) = 0$, másrészt

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{u}{x}(x_0, y_0)$$

Most rátérünk az örvénymentességre, ez is nagyon hasonló módon történik, ez azt jelenti, hogy $\operatorname{rot}(\tilde{f}) = 0$.

Jelölje Q_h, hogy mennyire forgatja meg a kis négyzetet az áramlás megint csak a területben mérve. Azaz a feltételünk az, hogy $\lim_{h\to 0} \frac{Q_h}{h^2} = 0$ Az előzőhöz hasonlóan egybevonva az oldalakon az integrálokat kapjuk, hogy

$$Q_h = \int_{-h}^{h} u(x_0+t, y_0-h)+v(x_0+h, y_0+t)-u(x_0+t, y+h)-v(x_0-h, y_0+t)\, dt$$

és megint csak $\exists \xi_1, \xi_2 \in [-h, h]$, hogy

$$Q_h = 2h(u(x_0+\xi_1, y_0-h)-u(x_0-\xi_1, y_0+h))+2h(v(x_0+h, y_0+\xi_2)-v(x_0-h, y+\xi_2))$$

továbbá $\exists \zeta_1, \zeta_2 \in [-h, h]$, hogy

$$Q_h = -4h^2 \frac{\partial u}{\partial y}(x_0 + \xi_1, y_0 + \zeta_1) + 4h^2 \frac{\partial v}{\partial x}(x_0 + \zeta_2, y_0 + \xi_2)$$

És megint csak abból, hogy $\lim_{h\to 0} \frac{Q_h}{h^2} = 0$ azt kapuk, hogy a tetszőlegesen választott $(x, y) \in D$ pontban teljesül, hogy egyrészt $\mathrm{rot}(\tilde{f}) = 0$, másrészt

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Tehát megkaptuk, hogy az $f(x+iy) = u(x, y) - iv(x, y)$ függvény holomorf. Másképp fogalmazva azt mondhatjuk, hogy az $\overline{(f(z))} = u(x, y)+iv(x, y)$ függvény antiholomorf, és habár valójában ez a függvény írja le az áramlás sebességvektor mezőjét, mivel mi a komplex függvénytan ezközeit szeretnénk használni f-el fogunk dolgozni. Ahhoz, hogy f holomorf legyen pedig csak annyira volt szükség, hogy az u és v függvények folytonosan differenciálhatóak legyenek.

2.1. Definíció (Áramvonal)**.** Az $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, ha $f(z_0) \neq 0$, meghatároz egy a z_0 ponton átmenő áramvonalat, ami egy olyan görbe, aminek van egy $\gamma\colon \mathbb{R} \to D$ paraméterezése ami a következő differenciálegyenlet rendszer (mivel ez valójában két egyenlet, egy a valós és egy a képzetes részére γ-nak) megoldása:

$$\begin{cases} \gamma'(t) = \overline{f(\gamma(t))} & \forall t \in \mathbb{R} \\ \gamma(0) = z_0 \end{cases}$$

Ha $f(z_0) = 0$, akkor z_0-at stagnációs pontnak nevezzük és nem tekintjük a $\gamma(t) = z_0$ konstans megoldást áramvonalnak.

Példa: Számoljuk ki az $f(z) = \frac{i}{z}$ áramvonalait. Most

$$\overline{f(x+iy)} = \frac{y}{x^2+y^2} - i\frac{x}{x^2+y^2}$$

Legyen $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, ezzel a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{y(t)}{x^2(t)+y^2(t)} \\ y'(t) = -\frac{x(t)}{x^2(t)+y^2(t)} \end{cases}$$

A továbbiakban elhagyjuk a t-ket. Most áttérve projektív koordinátákra:

$x = \cos(\varphi)r$

$y = \sin(\varphi)r$

És így $x^2 + y^2 = r^2$ miatt:

$(1)x' = \cos(\varphi)r' - \sin(\varphi)\varphi' r = \frac{\sin(\varphi)}{r}$

$(2)y' = \sin(\varphi)r' + \cos(\varphi)\varphi' r = -\frac{\cos(\varphi)}{r}$

Ezeket összevetve azt kapjuk, hogy

$(1)\cos(\varphi) + (2)\sin(\varphi)\colon \;\; r' = 0$

$-(1)\sin(\varphi) + (2)\cos(\varphi)\colon \;\; \varphi' r = -\frac{1}{r}$

Azaz összességében azt kaptuk, hogy egy adott z_0 ponton átmenő áramvonal

$$\gamma(t) = \cos\left(\arg(z_0) - \frac{t}{|z_0|^2}\right)|z_0| + i\sin\left(\arg(z_0) - \frac{t}{|z_0|^2}\right)|z_0|$$

hiszen $r = |z_0|$. Ez pedig azt jelenti, hogy az áramvonalak köröket járnak be, $\frac{1}{r^2}$ szögsebességgel.

2.2. Fluxus

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $\gamma\colon [a, b] \to D$ rektifikálható görbe és feltesszük, hogy egyszerű, vagy Jordan-görbe. Ekkor a fluxus a görbe bal partjáról a jobb partjára egységnyi idő alatt átfolyó folyadék mennyisége. Itt a jobb partot úgy értjük, hogy a görbén haladva a jobb kezünk felöli rész, a bal part pedig a bal kezünk felöli rész.

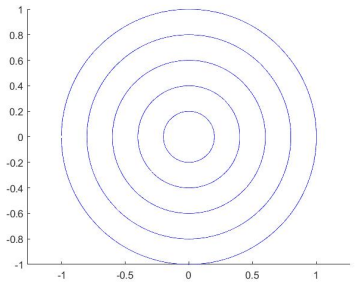
Feltehetjük továbbá, hogy a görbe ívhossz szerint van paraméterezve, azaz, hogy $|\gamma'(t)| = 1$. Ugyanis látszik, hogy a fluxus nem függ a görbe paraméterezésétől. Most a fluxust megadhatjuk egy integrál formájában:

$$\int_a^b \langle (u(\gamma(t)), v(\gamma(t))), \hat{\gamma}(t) \rangle \, dt = \int_a^b \Im(f(\gamma(t))\gamma'(t)) \, dt = \Im \int_\gamma f(z) \, dz$$

Ahol $\hat{\gamma}$ a görbe megfelelő irányba mutató normálvektora. Megjegyezzük, hogy ennek az integrálnak, ha a képzetes rész helyett valós részét vettük volna, akkor pont a γ menti cirkulációt kapjuk.

Ez megad nekünk egy új módszert az áramvonalak meghatározására, ugyanis az áramvonalak olyan görbék, amik minden részívén a fluxus 0. Azaz, hogyha meg tudjuk határozni az f primitív függvényét, F-et, akkor az áramvonalak előállnak, mint $\Im(F(z)) = const$ megoldása, ez viszont impliciten definiálja a görbét és nem ad rá paraméterezést.

Példa: Ha meg akarjuk ezzel a módszerrel határozni az $f(z) = \frac{i}{z}$ függvény által megadott áramvonalakat, akkor habár globális primitív függvényt nem tudunk adni, de az $\Im(z) \geq 0$ féltéren meg az $\Im(z) \leq 0$ féltéren meg tudjuk adni a primitív függvényeket, hiszen ezeken a tartományokon az argumentumot lehet egyértelműen értelmezni. $F(z) = i \ln(|z|) - \arg(z) + const$, és így az $\Im(F(z)) = \ln(|z|) = const$ egyenletből látszik, hogy az áramvonalakat az alsó és felső félsíkon is a $|z| = const$ egyenlet adja, azaz köröket jár be az áramvonal kapunk (1. ábra).



1. ábra. áramvonalak

Ha az áramvonalakat már ismerjük, akkor azt paraméterezve, mint $\gamma_0 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, majd megkomponálva egy $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénnyel egy szeparábilis egyenletre jutunk:

$$\gamma_0'(g(t))g'(t) = \overline{f(\gamma_0(g(t)))}$$

Ezt megoldva g-re kapjuk a $\gamma(t) = \gamma_0(g(t))$ paraméterezését az áramvonalnak, ami leírja a részecskék mozgását. Ha ívhossz szerint paramétereztünk eredetileg, akkor g pont a sebességet adja meg az adott pontban.

Tovább haladva tehát a korábbi példánkon, ha azt mondjuk, hogy a köröket mint re^{it} paraméterezzük, akkor azt az egyenletet kell megoldanunk, hogy

$$ire^{ig(t)}g'(t) = -\frac{ie^{ig(t)}}{r}$$

Innen pedig egyszerűsítések után azt kapjuk, hogy

$$g'(t) = -\frac{1}{r^2}$$

És ezzel megkaptuk a már korábban is látott paraméterezését az áramvonalaknak a kezdeti feltétel figyelembe vétele után.

2.3. Iránymező

Az már a korábbiakból látszik, hogy ha $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ nem konstans nulla függvény, akkor $g(z)f(z)$-hez is ugyanazok az áramvonalak tartoznak, feltéve, hogy ez a függvény is holomorf (ami viszont persze csak akkor lehet, ha $g(z)$ konstans, de ettől egyenlőre tekintsünk el). Viszont ebből az látszik, hogy az áramlás leírásához majdhogynem elég az iránymező megadása. Továbbá, ha az áramvonalakat átparaméterezzük ívhossz szerint, akkor a deriváltakból megkapjuk az iránymezőt. Tehát elviekben megkísérelhetjük f megkeresését, ha az áramvonalak adottak.

Legyen tehát

$$\rho(z) = \frac{\overline{f(z)}}{|f(z)|} = e^{-i\arg(f(z))}$$

az iránymező, ami a stagnációs pontok kivételével mindenhol értelmezve van D-ben.

Legyen továbbá

$$\vartheta(z) = -\arg(f(z)) = -\Im(\log(f(z)))$$

a logaritmus egy holomorf ágával az iránymező egy (nem stagnációs) pontjának kis környezetében. Ez folytonos és egyértelmű 2π többszörösétől, mint additív konstanstól eltekintve. Továbbá az is látszik, hogy ϑ egy lokálisan harmonikus függvény.

Mivel ϑ különböző értelmezései csak additív konstansban térnek el, a $\tilde{\vartheta}(x,y) = (\Re\vartheta(x+iy), \Im\vartheta(x+iy))$ függvény segítségével alább megadott függvény jól definiált, és egyenlő $-\log(f(z))$ deriváltjával.

$$h(x+iy) = \frac{\partial\tilde{\vartheta}}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial\tilde{\vartheta}}{\partial x}(x,y) = -\frac{f'(x+iy)}{f(x+iy)}$$

Most h ha D egyszeresen összefüggő és így f-nek nincs benne szingularitása, akkor mindenhol definiálva van h D-ben, kivéve azokat a helyeket, ahol f-nek zérushelye van. Ha pedig f-nek a z_0-ban k-szoros zérushelye van, akkor h-nak egyszeres pólusa van a z_0-ban, és a reziduum ott $-k$.

2.1. Állítás. Ha adott egy egyszeresen összefüggő D tartományban a ρ iránymező izolált pontoktól eltekintve, mint $\rho(z) = e^{i\vartheta(z)}$, ahol ϑ lokálisan harmonikus és a ϑ-ból a korábban ismertetett módon kapott h holomorf függvénynek a kivételes pontokban elsőrendű pólusa van negatív egész reziduumokkal, azokon kívül pedig D-ben mindenhol értelmezve van, akkor egy olyan $z_0 \in D$ pontot választva, ahol h értelmezve van az

$$f(z) = \rho(z_0)e^{-\int_{z_0}^{z} h(\zeta)\,d\zeta}$$

holomorf függvény olyan áramlást határoz meg, amelynek az iránymezője ρ (tetszőleges z_0-ból z-be menő úton integrálhatunk).

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy az $\int_{z_0}^{z} h(\zeta)\,d\zeta$ integrál értéke tényleg nem függ attól, hogy z_0-ból z-be milyen görbét választunk.

Ez abból látszik, hogy a reziduum-tétel szerint bármely két ilyen görbén is integrálunk, az eredmény csak $-2\pi i$ egy pozitív egész többszörösében tér, hiszen h reziduumai negatív egészek. Az pedig, hogy az integrál csak $-2\pi i$ egy többszöröse mint additív konstans erejéig van definiálva nem számít végső soron, hiszen csak egy $e^{-2\pi i} = 1$-szeres szórzót hoz be a képletbe.

Most az már látszik, hogy f jól van definiálva a D pontjaiban, kivéve a kivételes pontokat. Ezekben viszont megszüntethető szingularitása lesz, és ha w_0 a h-nak pólusa, akkor $\lim_{z\to w_0} f(z) = 0$.

Legyen ugyanis

$$H(z) = \int_{z_0}^{z} h(\zeta)\, d\zeta$$

Ez ugyan nincs jól definiálva, attól függően, hogy milyen görbe mentén integrálunk $2\pi i$ egy egész többszörösében eltérhet az integrál, de ez nem okoz gondot, ugyanis ahhoz hogy lássuk, hogy $\lim_{z\to w_0} f(z) = 0$ az kell, hogy

$$\lim_{z\to w_0} \Re H(z) = \infty$$

Ismert, hogy $\exists\, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorf, hogy $h(z) = -\frac{k}{z-w_0} + g(z)$, most

$$H(z) = \int_{z_0}^{z} -\frac{k}{\zeta - w_0}\, d\zeta + \int_{z_0}^{z} g(\zeta)\, d\zeta$$

Viszont $\lim_{z\to w_0} \int_{z_0}^{z} g(\zeta)\, d\zeta \in \mathbb{C}$, hiszen g holomorf, tehát minket az érdekel, hogy a következő $H^\star$ kifejezés valós részének mi a határértéke w_0-ban

$$H^\star(z) = \int_{z_0}^{z} -\frac{k}{\zeta - w_0}\, d\zeta$$

Ugyanakkor adott görbe mentén integrálva a logaritmusok értékeit megfelelően választva fennál, hogy

$$H^\star(z) = -k\log(z - w_0) + k\log(z_0 - w_0)$$

És mivel a log valós része már jól van definiálva, azt kapjuk, hogy

$$\lim_{z\to w_0} \ln(|z - w_0|) = \lim_{z\to w_0} \Re H^\star(z) = \lim_{z\to w_0} \Re H(z) = \infty$$

Tehát a kivételes pontokban f-nek tényleg zérushelyei lesznek.

Még azt kell megmutatni, hogy $\rho(z_0) = \frac{\overline{f(z)}}{|f(z)|}$. Mivel h-ból ϑ lokálisan már megkapható integrálással, ehhez a korábbiak alapján elég, hogy $h(z) = -\frac{f'(z)}{f(z)}$ és, hogy $f(z_0) = c\rho(z_0)$, hogy az integrálásnál bejövő szorzó ne forgassa el az iránymezőt, itt $c \in \mathbb{R}$, és ez nyilván teljesül $c = 1$ mellett. Most

tehát tekintsük a következő, az f-et definiáló képlet átrendezésével kapott egyenletet

$$-\int_{z_0}^{z} h(\zeta)\,d\zeta \equiv \log(f(z)) - \log(\rho(z_0)) \mod 2\pi i$$

És most mindkét oldalt deriválva kapjuk, hogy

$$h(z) = -\frac{f'(z)}{f(z)}$$

□

Ezzel egyrészt megmutattuk, hogy legalábbis egyszeresen összefüggő tartományokon tényleg elég az iránymező ismerete, de ez bizonyos szempontból trivialitás, lásd a 3.1-es megjegyzést. Másrészt viszont ennél sokkal többet mutattunk meg, hiszen egy módszert is kaptunk az áramlást megadó függvény megkeresésére.

Az, hogy D egyszeresen összefüggő legyen kellett is, ahhoz, hogy ez a módszer, működjön. Ugyanis ha ezt nem követeljük meg f nem lett volna jól definiálva, hiszen h-nak akkor lehetett volna olyan szingularitása, ami nincs D-ben és az integrálásnál nem támaszkodhattunk volna h izolált szingularitásainak ismeretére.

Emellett abban, hogy ϑ lokálisan harmonikus nyertünk egy viszonylag egyszerűen ellenőrizhető feltételt is arra, hogy mikor tartozhat egy iránymező ideális áramláshoz.

3. Áramvonalak lokálisan

Ennek a fejezetnek a célja, hogy képet kapjunk arról, hogy egy pont kis környezetében hogyan néznek ki az áramvonalak attól függően, hogy általános pont, pólus, vagy zérushely-e. Lényeges szingularitások környezetében jellemezni az áramlásokat reménytelen volna. A továbbiakban többnyire az érdekel minket, hogy mi az áramvonal képe és az kevésbé, hogy hogyan van paraméterezve. Tehát mostantól amikor áramvonalat mondunk akkor az szövegkörnyezet alapján néha úgy értendő, mint az áramvonal képe nem pedig a görbe maga.

3.1. Hasonló áramlások

Legyenek $D, D^\star \subset \mathbb{C}$ konform ekvivalens tartományok, $\varphi\colon D \to D^\star$ a konform bijekció ami ezt mutatja. Legyen D-n és $D^\star$-on egy-egy ideális áramlás, amelyet az $f : D \to \mathbb{C}$, illetve $g : D^\star \to \mathbb{C}$ függvények írnak le. Azt szeretnénk, hogy a φ leképezés olyan legyen, hogy az áramvonalakat (pontosabban az áramvonalk képét) egymásba viszi. Ehhez elégséges, hogy ha F az f, G pedig a g primitív függvénye lokálisan, akkor $F = G \circ \varphi$ legyen, hiszen ekkor az $\{z \in D\colon \Im(F(z)) = const\}$ áramvonalakat φ a

$$\{\varphi(z)\colon z \in D, \Im(F(z)) = const\} = \{w \in D^\star\colon \Im(G(w)) = const\}$$

áramvonalakba viszi. Az $F = G \circ \varphi$ összefüggést lederiválva kapjuk, hogy

$$f = (g \circ \varphi)\varphi'$$

Ez viszont annyiban nem tökéletes, hogy a részecskék mozgásának sebessége eltér a két tartományban.

3.1. Definíció (Hasonló áramlás)**.** A $D, D^\star \subset \mathbb{C}$ tartományokban értemezett $f(z)$ és $g(w)$ konjugáltjával adott vektomezők által meghatározott áramlásokat hasonlónak mondjuk, ha létezik egy $w = \varphi(z) : D \to D^\star$ konform leképezés, amire

$f(z) = g(\varphi(z))\varphi'(z)$

Egy konform leképezés lokálisan egy eltolás és egy forgatás kis hibával, ez biztosítja, hogy az áramlások tényleg nagyjából ugyanúgy nézzenek ki z és w körül.

3.1. Megjegyzés. Az nem szükséges a lokális hasonlóság ahhoz, hogy az áramvonalak ugyanúgy nézzenek ki, ugyanis például valós *const* esetén $f(z) = const \cdot g(z)$, akkor az áramvonalak pont ugyanazok lesznek. Persze itt az is igaz, hogy az áramvonalak pontosan akkor lesznek ugyanazok, ha a két függvény ily módon viszonyul egymáshoz, hiszen azon véges sok pont kivételével, ahol g nulla, az $\frac{f}{g}$ függvény holomorf, továbbá tisztán valós, hiszen az áramvonalak meghatározzák az f és g irányát minden pontban. Viszont a Cauchy-Riemann egyenletekből, ha egy holomorf függvény tisztán valós, akkor konstans. Továbbá mivel f és g folytonos és minden pont kivételével, ahol az egyik nulla konstans a hányadosuk, pontosan ugyanazokban a pontokban kell, hogy nullák legyenek.

Alternatívan úgy is gondolhatunk erre a képletre, hogy van az eredeti vektormező a D-n és a ϕ függvénnyel ezt leképezzük $D^\star$-ba, ekkor a z pontban a vektormező az $f(z)$ értéket veszi fel. Ez impliciten feltételez egy koordinátarendszert a z egy kis környezetében. Amikor alkalmazzuk a ϕ leképezést a z egy kis környezetében a koordinátarendszer $\phi'(z)$-al szorzódik (hiszen erre végülis mátrixként is gondolhatunk) azaz elforgatódik és megnyúlik és ezért van az, hogy ahogy ϕ-t alkalmazzuk minden pontban az ottani vektor értéke is megszorzódik $\phi'(z)$-vel.

3.2. Definíció (Lokális hasonlóság)**.** Két áramlást egy-egy pontjukban akkor mondunk lokálisan hasonlónak, ha a pontok alkalmas nyílt környezetére megszorítva azokat hasonlóak lesznek.

Ez a definíció viszont sajnos nem működik izolált szingularitási pontokban, hiszen azoknak az áramlás csak pontozott környezetében van értelmezve, az viszont nem egy tartomány és amúgy se lenne az $f = (g \circ \varphi)\varphi'$ képletnek értelme lényeges szingularitás esetén (ha pólus van mondhatnánk, hogy

$f\colon D \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$). Ezért aztán a precizitás kedvéért megfogalmazzuk a következő definíciót:

3.3. Definíció (Lokális hasonlóság szingulartiásoknál)**.** Azt mondjuk, hogy az f által leírt áramlás a z_0 pontban hasonló a g által leírt áramláshoz a w_0 pontban, ha $\exists \varepsilon, \delta > 0$, hogy $\exists \varphi\colon B(z_0, \varepsilon) \to B(w_0, \delta)$ konform leképezés, hogy $\varphi(z_0) = w_0$ és $\forall z \in \dot{B}(z_0, \varepsilon)\ \ f(z) = g(\varphi(z))\varphi'(z)$.

Érdemes megjegyezni, hogy ha veszünk egy $\varphi\colon \dot{B}(z_0, \varepsilon) \to D^\star$ konform leképezést, akkor az kiterjed $B(z_0, \varepsilon)$-ra és $\lim_{z \to z_0} \varphi(z) = w_0$ mellett, ha f-nek szingularitása volt z_0-ban, akkor $g(w) = f(\varphi^{-1}(w))(\varphi^{-1})'(w)$ esetén g-nek szingularitása lesz w_0-ban és az áramlások lokálisan hasonlóak lesznek.

Fontos észrevenni továbbá, hogy a lokális hasonlóság egy ekvivalencia reláció.

Az is látszik, hogy egy $f : D \to \mathbb{C}$ által leírt a D tartományon értelmezett áramlások esetén bármely két pont D-ben, ahol az f nem nulla, lokálisan hasonló, hiszen az áramvonalak az ilyen pontokban párhuzamos egyenesek konform képei.

3.1. Tétel (Lokális hasonlóság leírása)**.**

1) Ha f-nek a z_0-ban k-szoros zérushelye van, akkor az f a z_0 pontban akkor és csak akkor lokálisan hasonló a g-hez a w_0 pontban, ha g-nek w_0-ban k-szoros zérushelye van.

2) Ha f-nek a z_0-ban k-ad rendű pólusa van, akkor az f a z_0 pontban akkor és csak akkor lokálisan hasonló a g-hez a w_0 pontban, ha g-nek w_0-ban k-ad rendű pólusa van és $\operatorname{Res}_{w=w_0}(g(w)) = \operatorname{Res}_{z=z_0}(f(z))$.

Ennek a tételnek a bizonyítása, főleg a 2)-es esetnek hosszadalmas, megtalálható a [1]-ben.

3.2. Pólusok és zérushelyek környezete

Ebben a fejezetben a célunk az, hogy feltérképezzük, hogy egy adott pont kis környezetében hogyan néznek ki az áramvonalak. Ehhez először is feltesszük, hogy az adott pontban nincs lényeges szingularitás, ekkor ugyanis

reménytelen volna a helyzetünk. Ezt feltéve viszont tudjuk alkalmazni a 3.1. Tételt, hiszen ha két pont körül az áramlás lokálisan hasonló, az azt jelenti, hogy az áramvonalak egy konform leképezéssel, azaz elforgatással és egy eltolással egy kis hibatag erejéig, egymásba vihetők. Most tehát meg kell nézni, hogy hogyan néznek ki az áramvonalak egy n-szeres zérushely közelében, illetve egy n-szeres pólus közelében, ahol a reziduum $b \in \mathbb{C}$ lesz. Azt is feltehetjük továbbá, hogy a pont aminek a környezetében az áramvonalakra kíváncsiak vagyunk az a 0.

Másképpen fogalmazva elég leírni az áramvonalakat $f(z) = \frac{b}{z} + az^n$ esetén, ahol $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}, a \in \{0, 1\}, b \in \mathbb{C}$ tetszőleges (megengedhetnénk az $n = -1$-et is, de akkor nem mindig b lenne a reziduum). Most tehát a reziduum b lesz, ha $b = 0$ és $n > 0$, akkor n-szeres zérushely van, ha $b \neq 0$, akkor van legalább egyszeres pólusa f-nek a 0-ban.

Triviális megállapítása a következő:

3.1. Állítás ($n = 0$ eset)**.** Ha $f(z) = a$ valamilyen $a \in \mathbb{C}$ számra, akkor az áramvonalak párhuzamos, a irányvektorú egyenesek az egész síkban.

Most első körben megvizsgáljuk az $a = 0$, illetve $n = -2, b = 0$ eseteket.

3.2. Állítás ($a = 0$ eset)**.** Most legyen $b = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) és így $f(z) = \frac{\alpha+i\beta}{z}$. Ekkor, ha $\alpha = 0$, akkor az áramvonalak körök lesznek, ha $\beta = 0$, akkor egyenesek, egyébként pedig logaritmikus spirálokat kapunk (feltéve persze, hogy f nem azonosan 0).

Bizonyítás. 1)$\alpha = 0$

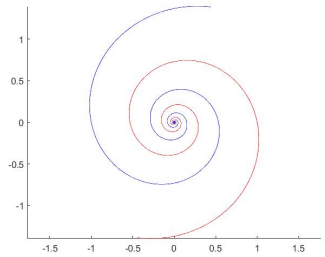
Ez az eset már szerepelt. A felső és alsó félsíkon a primitív függvény $F(z) = \beta(i \ln(|z|) - \arg(z)) + const$ alakú, ezeket összevetve látszik, hogy köröket kapunk.

2)$\beta = 0$

Most $f(z) = \frac{\alpha}{z}$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ Az alsó és felső féltérre is megint csak a primitív függvény hasonló alakot vesz fel: $F(z) = \alpha(\ln(|z|) + i \arg(z)) + const$, azaz az $\Im(F(z)) = const$ egyenelet $\alpha arg(z) = const$-ot adja, ami pont azt jelenti, hogy az áramvonalak félegyenesek lesznek.

3)$\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0$

Most $f(z) = \frac{\alpha+i\beta}{z}$, és így megint nézzük meg az alsó és a felső félsíkon a primitív függvényt, hogy az $\arg(z)$ egyértelműen értelmezhető legyen. Ekkor a primitív függvény $F(z) = (\alpha+i\beta)(\ln(|z|)+i\arg(z))+const$ alakú lesz, tehát az áramvonalk képét az adja meg, hogy $\Im(F(z)) = \beta\ln(|z|) + \alpha\arg(z) = c$, konstans $c \in \mathbb{C}$-re. Ezt átalakítva kapjuk, hogy $\ln(|z|) = \frac{c-\alpha\arg(z)}{\beta}$, most $z = re^{i\varphi}$ mellett azt kaptuk, hogy $r = e^{\frac{c-\alpha\varphi}{\beta}}$ ebben pedig felismerhetjük az logaritmikus spirál polárkoordinátás egyenletét. □



2. ábra. spirális áramvonalak $f(z) = \frac{0.2+i}{z}$

A 2. ábra demonstrál egy ilyen spirális áramvonalat, most β-át nagyobbnak választjuk, mint α, hogy sűrűbben kerülje meg a 0-t.

Valójában elég lenne az $a = 1$ esetet vizsgálni, de nem sokkal bonyolultabb az általános $a \neq 0$ esetben se leírni az áramvonalakat. Ezt meg is tesszük a következő állításban:

3.3. Állítás ($n = -2, b = 0$ eset)**.** Most legyen $a = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) és így $f(z) = \frac{\alpha+i\beta}{z^2}$. Ekkor az áramvonalak parabolikus körsort alkotnak (legalábbis, ha a 0 pontot hozzávesszük mindegyikhez, és a két félegyenest a 0-val együtt egy egyenesnek vesszük), ahol a hatványvonal irányvektora $\alpha + i\beta$.

Bizonyítás. Ekkor $F(z) = -\frac{a}{z} + const$ a primitív függvény. $\Im(F(z)) = c$ átalakítva $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) mellett

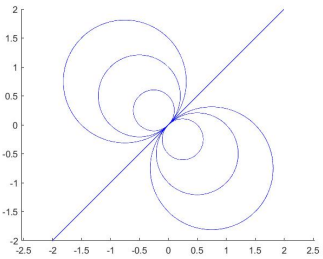
$$\frac{\alpha y - \beta x}{x^2 + y^2} = c$$

azaz ha $c \neq 0$, akkor $x^2 + y^2 = -\frac{\beta}{c}x + \frac{\alpha}{c}y$, és így

$$\left(x + \frac{\beta}{2c}\right)^2 + \left(y - \frac{\alpha}{2c}\right)^2 = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{4c^2}$$

ha $c = 0$, akkor az $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ egyenletet kapjuk.

Ezeket az egyenleteket összevetve látszik, hogy tényleg egy olyan parabolikus körsort kapunk, aminek a hatványvonala átmegy az $\alpha + i\beta$ ponton. □



3. ábra. parabolikus körsor $f(z) = \frac{1+i}{z^2}$

A többi esetben általában nem ilyen szép nevezetes alakzatokat kapunk, de ezeket is le tudjuk írni.

Ha $b = 0, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1, -2\}, a \neq 0$, akkor $f(z) = z^n$ és $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$. Most $z = re^{i\varphi}$ $(r \in \mathbb{R}, \varphi \in [0, 2\pi])$ mellett

$$\Im(F(z)) = \frac{r^{n+1}}{n+1}\sin((n+1)\varphi)$$

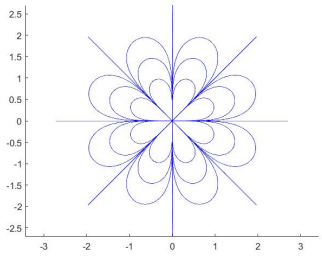
Az ebből már látszik, hogy ha $\varphi = \frac{k\pi}{n+1}$, akkor $\sin((n+1)\varphi) = 0$, és így az $2|n+1|$ darab $\frac{k\pi}{n+1}, k = 1, 2, \ldots, 2|n+1|$ irányú félegyenesek áramvonalak lesznek. Ezen túl nehéz volna többet megállapítani az áramvonalak képletéről, ezért inkább ábrákkal demonstráljuk ezeket (4. ábra).

Most tehát már csak az $f(z) = \frac{b}{z} + \frac{1}{z^n}$ leírása van hátra, ahol $n \in \mathbb{N}^+$.

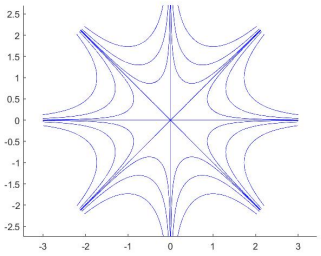
Itt

$$F(z) = -\frac{1}{(n-1)z^{n-1}} + b(\ln(|z|) + i\arg(z)) + const$$

azaz $b = \alpha + i\beta$ és $z = re^{i\varphi}$ mellet azt kapjuk, hogy



(a) lóhere szerű alakzatok $f(z) = \frac{1}{z^{-5}}$



(b) $n > 0$ eset: $f(z) = z^3$

4. ábra

$$\Im(F(z)) = \frac{sin((n-1)\varphi)}{(n-1)r^{n-1}} + \beta \ln(r) + \alpha\varphi = c$$

egyenlet adja az áramvonalakat, ahol $c \in \mathbb{C}$ konstans.

Ezen látszik, hogy ha r nagy, akkor $\frac{sin((n-1)\varphi)}{(n-1)r^{n-1}}$ kicsi, ezért aztán nagyjából a $\frac{b}{z}$ áramvonalait kapjuk meg. Viszont minket igazából az érdekel, hogy mi történik, hogyha az r kicsi. Erről nem tudunk nagyon többet mondani, mint, hogy $f(z) = \frac{b}{z} + \frac{1}{z^n}$-ben, ha z nagyon kicsi, akkor a sebességvektor irányát főleg $\frac{1}{z^n}$ adja meg, tehát inkább annak az áramvonalaira fog hasonlítani.

4. Áramvonalak globálisan

Ebben a fejezetben néhány speciális esetben megvizsgáljuk, hogy mit tudunk mondani az áramvonalakról globálisan. Emiatt pedig a fejezet további részében feltesszük, hogy a D tartomány, amin f holomorf az $\mathbb{C} \setminus \{w_0, w_1, \ldots, w_n\}$, ahol $\{w_0, w_1, \ldots, w_n\}$ a pólusok.

4.1. Áramvonalak a Riemann gömbön

Először is tisztázunk néhány fogalmat amit ebben a fejezetben fel fogunk használni. A továbbiakban ugyanis a végtelenbeli viselkedését egy holomorf függvénynek, az általa megadott áramlás viselkedésével akarjuk jellemezni. Tehát amikor azt mondjuk, hogy a végtelenben zérushelye vagy szingularitása van, az valamelyest el fog térni ezen fogalmak szokásos definíciójától (lásd [2, 34. oldal]).

Úgy gondolhatunk erre, hogy az áramlást a Riemann gömbön nézzük (a Riemann gömb az egység gömb $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$-ban, amire sztereografikusan vetítjük $\mathbb{C}$-t) , és akkor ott a kapott vektormező $\mathbb{R}^3$-ben S^2 minden pontjához egy a gömbfelületet érintő vektort rendel. Most a végtelen körüli viselkedést akarjuk vizsgálni de az is csak egy pont S^2-őn, nevezetesen a (0, 0, 1), tehát azt mondhatjuk, hogy a $g(z) = -\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})$ által megadott áramlás lokálisan hasonló az f által megadott áramláshoz a végtelenben. Itt gyakorlatilag elforgatjuk a Riemann gömböt az x-tengely (a $\mathbb{C}$ valós tengelye) körül 180 fokkal, úgy, hogy a végtelen a 0-ba kerüljön, hiszen $\frac{1}{z}$ fix pontjai az 1 és -1.

4.1. Definíció. Azt modnjuk, hogy az áramlásnak a végtelenben pólusa (zérushelye) van, hogyha a $-\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})$ függvénynek a nullában pólusa (zérushelye) van. Továbbá, a rezuduuma a végtelenben legyen úgy definiálva, mint $-\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})$ reziduuma a 0-ban.

4.1. Állítás. Az áramlásnak a végtelenben pontosan akkor van pólusa, hogy

$$\lim_{z \to \infty} z^2 f(z) = \infty$$

Bizonyítás. Ismert, hogy $-\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z})$ pontosan akkor van pólusa a nullában, ha $\lim_{z\to 0} -\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}) = \infty$. Ez pedig nyilván ekvivalens az állításban adott leírásával a végtelenbeli pólusnak. □

Ehhez hasonlóan a következő áll fent a zérushelyekre:

4.2. Állítás. Az áramlásnak a végtelenben pontosan akkor van zérushelye, hogyha

$$\lim_{z\to\infty} z^2 f(z) = 0$$

Ezekből az állításokból az is látszik, hogy egy $f\colon \mathbb{C}\cup\{\infty\} \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ racionális törtfüggvénynek mindig multiplicitással számolva kettővel több pólusa van, mint ahány zérushelye. Ugyanis az ilyen függvényeknél ha a $\mathbb{C}$ beli pólusok száma P, a $\mathbb{C}$-beli zérushelyek száma pedig Z, akkor a végtelenben $Z+2-P$-szeres zérushely lesz, ha ez pozitív, illetve ha ez negatív, akkor a végtelenben pólus lesz aminek ez a rendje.

Viszont az is igaz, hogy ha egy $f\colon \mathbb{C}\cup\{\infty\} \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ holomorfságának az a feltétele, hogy sehol se legyen lényeges szingularitás, viszont ekkor nem lehet semelyik pont körüli Laurent-sorában sem végtelen sok tag, hiszen az a végtelenben lényeges szingularitást eredményezne, tehát ez azt jelenti, hogy f valamilyen racionális törtfüggvény.

Amikor a továbbiakban azt mondjuk, hogy egy áramvonal zárt a Riemann gömbön, hogyha vagy periodikus vagy pedig ha a végtelenben nincs se szingularitás se zérushely és fennál, hogy $\lim_{t\to\infty}\gamma(t) = \lim_{t\to-\infty}\gamma(t) = \infty$.

4.3. Állítás (Áramvonalak torlódási pontjainak leírása)**.** Tegyük fel, hogy a reziduum mindenhol tisztán képzetes. Ekkor ha a $\gamma(t)$ áramvonal $t\to\infty$ esetén egy $z_0 \in D$ ponthoz torlódik, akkor $z_0 = \lim_{t\to\infty}\gamma(t)$ és $f(z_0) = 0$, vagy pedig az áramvonal periodikus.

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy ha a reziduum mindenhol tisztán képzetes, akkor tudjuk $\Im(F(z))$-t globálisan értelmezni, mint

$$\Im(F(z)) = \Im\int_w^z f(z)\,dz$$

valamilyen rögzített w-re. Ugyanis nem függ, hogy milyen rektifikálható görbén megyünk w-ból z-be, hiszen ha veszünk két görbét, majd összefűzzük az elsőt a második negáltjával, akkor az így kapott Γ görbe zárt lesz, tehát $\int_\Gamma f(z)\,dz$ előáll, mint $f(z)$ Jordan-görbéken vett integráljának összege, amik viszont a reziduum tétel miatt mind valósak, tehát a két görbén az f integráljának képzetes része egyenlő.

Megjegyezzük, hogy ha γ periodikus, akkor bármely pontjához torlódik, ahogy $t \to \infty$.

Most ha γ nem periodikus feltesszük, hogy $\lim_{t\to\infty} \gamma(t)$ nem létezik. Ekkor z_0-nak van olyan környezete, amelybe végtelen sokszor belép és amelyből minden alkalommal ki is lép az áramvonal, az egy ilyen környezetbeli szakaszaira az áramvonalnak mostantól a szegmenseiként fogok hivatkozni. Legyen most w_0, és w_1 két különböző szegmensen úgy, hogy van lokális primitív függvény $B(z_0, \varepsilon)$-ban és $q_0, w_1 \in B(w_0, \varepsilon)$, ilyenek nyilván vannak. Most tudjuk, hogy a korábban vett globális értelemben $\Im(F(w_0)) = \Im(F(w_1))$, ugyan akkor a lokális primitív függvénynek w_0 és w_1 különböző szintvonalán van, tehát

$$\Im \int_{w_0}^{w_1} f(z)\,dz \neq 0$$

ez pedig ellentmondás.

Ha $\lim_{t\to\infty} \gamma(t)$ létezik, akkor a határérték nem lehet nem stagnációs pont, hiszen az rajta van egy áramvonalon és arra az áramvonalra ez nem teljesül. □

4.4. Állítás. Ha f minden szingularitása pólus (vagy megszüntethető, de akkor feltesszük, hogy megszüntettük) és a reziduuma mindenhol tisztán képzetes, beleértve a végtelent is, akkor kétféle áramvonal van. Azok amik zártak a Riemann gömbön, vagy azok amikre fennál, hogy $\lim_{t\to\infty} \gamma(t)$ és $\lim_{t\to-\infty} \gamma(t)$ is zérushely vagy legalább másodrendű szingularitás.

Bizonyítás. Az elsőrendű pólusok közelében az áramvonalak lokálisan körökhöz hasonlóak 3.1 szerint. Továbbá 4.3 szerint ha egy áramvonal torlódik

egy ponthoz, ahol f értelmezve van, akkor stagnációs ponthoz torlódik, vagy pedig periodikus.

Mivel a Riemann gömb kompakt (és metrikus, tehát sorozat-kompakt) ezért lesz konvergens részsorozat tehát kell, hogy legyen torlódási pont. Most mivel az elsőrendű pólusok közelében az áramvonalak körökhöz hasonlóak lokálisan, így hozzájuk bizonyosan nem torlódhat áramvonal.

Ezeket összevetve kapjuk az állítást. □

Ebből következik, hogy ha minden reziduum tisztán képzetes és nincs lényeges szingularitás, akkor az áramvonalak zártak, kivéve véges sokat amik pólusok és vagy zérushelyek között mennek.

4.2. Körsorok mint áramvonalak

Korábban láttuk, hogy parabolikus körsor megkapható mint egy áramlás (3.3. Állítás). Felmerülhet tehát a kérdés, hogy vajon elliptikus és hiperbolikus körsort is elő tudunk-e állítani. Az a válasz, hogy igen, továbbá azt is megállapíthatjuk, hogy azon f függvények esetén alkotnak az áramvonalak körsorokat vagy sugársorokat, amelyeknek multiplicitással számolva pontosan két pólusuk van, nincs zérushelyük, illetve a reziduumuk mindenütt vagy tisztán képzetes, vagy pedig tisztán valós (itt mindig beleértve a végtelent is).

Először adunk egy újabb bizonyítást arra, hogy miért kapunk parabolikus körsort az $f(z) = \frac{1}{z^2}$ esetén, hogy lássuk, hogy erre a függvényre hogyan alkalmazható az ötlet, amit a hiperbolikus és elliptikus körsorok előállításánál használni fogunk.

4.2. Definíció. Az $f\colon \mathbb{C}\cup\{\infty\} \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}$, $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ alakú függvényeket, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ és $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, lineáris törtfüggvényeknek nevezzük.

A lineáris törtfüggvények két fontos tulajdonsága, hogy kögyeneseket (az-az köröket és egyeneseket) kögyenesekbe visznek és szögtartók minden pontban a pólus kivételével (ha van).

4.5. Állítás. Az $f(z) = \frac{1}{z^2}$ áramvonalai a 0 stagnációs ponttal kiegészítve parabolikus körsort alkotnak.

Bizonyítás. Az áramvonalakat az $\Im(-\frac{1}{z}) = const$ egyenlet adja meg. Itt tehát valójában az áramvonalakat a komplex sík vízszintes egyeneseinek az $\frac{1}{z}$-re vett ősképe adja meg. (Hiszen a vízszintes egyeneseken konstans a képzetes rész.)

Mivel $\frac{1}{z}$ lineáris törtfüggvény, azt rögtön megállapíthatjuk, hogy az áramvonalak körök és vagy egyenesek lesznek. $\frac{1}{z}$ inverze önmaga, tehát azt kell megvizsgálni, hogy hova viszi a vízszintes egyeneseket. Az $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$-ent nyilván önmagába viszi, továbbá $\infty \mapsto 0$, tehát mivel ezek az egyenesek a végtelenben metszik csak egymást a képeik mind csak a 0-ban metszik majd egymást.

Az is látszik, hogy körök lesznek, hiszen $0 \mapsto \infty$ és így mivel $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kivételével nem mennek át a 0-n így a képeik sem mennek át ∞-en. Azt, hogy a középpontjaik mind egy egyenesen vannak, ami merőleges a valós egyenesre ezekből az információkból már ugyan láthatjuk, de úgy is eljuthatunk erre a következtetésre, hogy az $\Im(z) = const$ egyenesek merőlegesek a képzetes tengelyre, így annak a képére is, de a képzetes tengely képe önmaga, így minden kör középpontja a képzetes tengelyen kell, hogy elhelyezkedjen. □

Ezt a gondolatmenetet tovább általánosíthatjuk:

4.6. Állítás. Ha f egy lineáris törtfüggvény deriváltjaként áll elő ($f(z) = \frac{ad-bc}{c^2z^2+2cdz+d^2}$), akkor egy sugársort vagy parabolikus körsort alkotnak az áramvonalak.

Bizonyítás. Vizsgáljuk ugyanis a végtelen képét (a $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ inverzére nézve: $\phi^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz-a}$). Ha $\infty \mapsto \infty$ (azaz $c = 0$), akkor párhuzamos sugársort kapunk, tényleg: $f(z) = \phi'(z) = \frac{a}{d}$ konstans. Ha $\infty \mapsto c$ valamilyen $c \in \mathbb{C}$-re, akkor az előző állításban ismertetett gondolatmenetet használva látjuk, hogy tényleg parabolikus körsort kapunk. □

4.7. Állítás. Ha $f(z) = \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}$, akkor hiperbolikus körsort kapunk, melynek az alappontja (ahol a körök metszik egymást) a és b.

Bizonyítás. Most lokálisan

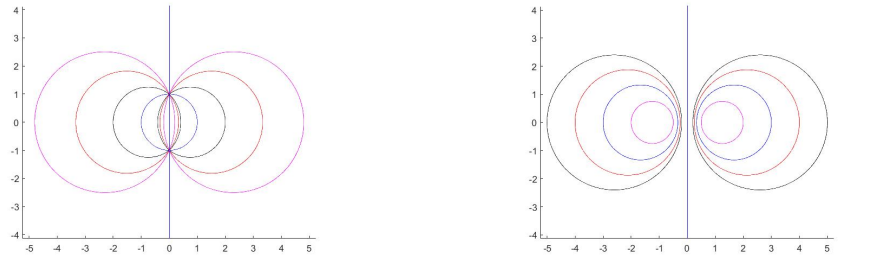
$$F(z) = \ln(|z-a|) + i\arg(z-a) - \ln(|z-b|) - i\arg(z-b)$$

azaz

$$\Im(F(z)) = \arg(z-a) - \arg(z-b) = \arg(\frac{z-a}{z-b}) = const$$

Tehát ha $\phi(z) = \frac{z-a}{z-b}$, akkor a 0-n átmenő egyenesek ősképei hiperbolikus körsort alkotnak, hiszen a $\phi^{-1}(0) = a$ és $\phi^{-1}(\infty) = b$ pontokban metszik egymást, és mivel $a, b \in \mathbb{C}$ ezek körök kellenek, hogy legyenek, kivéve az a-n és b-n átmenő egyenest, ami a valós tengely ősképe. (Két egyenes már nem lehet az ősképek között, mert nem metszhetnék egymást pontosan két pontban.)

Valójában az áramvonalak a 0 végpontú (nyílt) félegyenesek ősképei, de ha egy ilyen félegyeneshez hozzávesszük a 0-t és a negáltját a kapott egyenes ősképe az ezekhez tartozó két áramvonal és egy stagnációs pont uniója, ami egy kör (vagy esetleg egy egyenes) megfelelően elrendezve, de alapból is csak ilyen értelembe véve alkotnak hiperbolikus körsort az áramvonalak. □



(a) hiperbolikus körsor $f(z) = \frac{2}{z^2+1}$

(b) elliptikus körsor $f(z) = \frac{2i}{z^2-1}$

5. ábra

Megjegyezzük, hogy csak ilyen alakúak lehetnek azon függvények, amikhez hiperbolikus körsor tartozik (tehát $f(z) = \frac{\alpha}{z-a} - \frac{\alpha}{z-b}$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$, hiszen egy valós konstanssal szorzás csak az áramlás sebességét befolyásolja).

Ugyanis az alappontok pontosan két elsőfokú pólust adnak valós reziduumokkal és másutt pólus már nem is lehet (ez már leszűkíti a lehetőségeket $\frac{az+b}{z^2+cz^d}$ alakú függvényekre) de nem lehet zérushely sem, hiszen akkor a végtelenben is lenne pólus. És ha belegondolunk abba, hogy a hiperbolikus körsor hogyan néz ki a Riemann gömbön, akkor világos, hogy a végtelenben nincs pólus.

4.8. Állítás. Ha $f(z) = \frac{i}{z-a} - \frac{i}{z-b}$, akkor elliptikus körsort kapunk, melynek pontkörei az a-ban és b-ben vannak.

Bizonyítás. Az elliptikus körsorok előállnak, mint hiperbolikus körsorok 'konjugáltjai'. Két körsor konjugált, hogyha bármely két elemük merőlegesen metszi egymást. Most láthatjuk, hogy mivel $if(z)$ parabolikus körsort ad meg, így $f(z)$ elliptikusat fog megadni.

Gyalogosabb (de nem kevésbé geometriai) módon is elmondjuk azért, mert ez is tartogat érdekes észrevételeket. Most lokálisan

$$F(z) = i\ln(|z-a|) - \arg(z-a) - i\ln(|z-b|) + \arg(z-b)$$

azaz a

$$\Im(F(z)) = \ln\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = const$$

képlet adja meg az áramvonalakat. Viszont ekkor pont olyan pontokat keresünk, amik a-tól és b-től vett távolságának aránya állandó, azaz pont az a és b pontokhoz tartozó Apollonios-köröket kapjuk (lásd [3, 372. oldal]), amik a két ponttal, mint pontkörrel, valamint az összekötő szakaszuk felezőmerőlegesével együtt elliptikus körsort alkotnak. (Azt nagyon egyszerű látni hogy tényelg kögyenesek az áramvonalak, azaz, hogy az Apolloniosi-körök valóban körök vagy egyenesek lesznek, mert a 0 középpontú koncentrikus körök $\phi(z) = \frac{z-a}{z-b}$-re vett ősképei.) □

5. Numerikus közelítése az áramvonalaknak

5.1. Hibabecslés

Szeretnénk most kísérletet tenni az áramvonalak numerikus közelítésére. Erre a legkézenfekvőbb módszer talán, hogy úgy közelítjük a $\gamma\colon (0,T) \to \mathbb{C}$ áramvonal szakaszt, hogy szimuláljuk, hogy merre menne egy a $\gamma(0) = z_0$ pontba lerakott papírhajó, ha a víz áramlását az $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorf függvény konjugáltja írja le. Ahhoz, hogy a papírhajó útját szimuláljuk, azt mondjuk, hogy egy kis $h = \frac{T}{N}$ idő elteltével körülbelül a $z_0 + h\overline{f(z_0)}$. Vezessük be a következő jelölést: $t_n = t + nh$. Továbbá z_n jelölje a $\gamma(t_n)$ közelítését. Most tehát azt mondhatjuk, hogy

$z_n = z_{n-1} + h\overline{f(z_{n-1})}$, ahol $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$

Ez pedig valójában a numerikus analízisben ismert Euler-módszer, komplex függvényekkel felírva. Vizsgáljuk tehát a szokásos lokális és globális hibákat, rendre:

$g_n = \frac{\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})}{h} - \overline{f(\gamma(t_{n-1}))}$

$e_n = \gamma(t_n) - z_n$

5.1. Tétel (Stabilitási becslés)**.** Ha $\exists\delta$, hogy $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ esetén $|e_i| < \delta$ és $K = \bigcup_{z\in\Gamma} \overline{B(z,\delta)} \subset D$, ahol $\overline{B(z,\delta)}$ a z-nek a δ sugarú zárt környezete és $\Gamma = \{\gamma(t) : t \in (0,T)\}$, akkor $\exists C \geq 0$, hogy $\forall n = 0, 1, ..., N$ esetén

$$|e_n| \leq Ch \sum_{k=0}^{n} |g_k|$$

Bizonyítás. Definíció szerint: $\gamma(t_n) = \gamma(t_{n-1}) + h\overline{f(\gamma(t_{n-1}))} + hg_{n-1}$

Ezt összevetve a becslésünkkel:

$z_n = z_{n-1} + h\overline{f(z_{n-1})}$

Azt kapjuk, hogy

$$e_n = e_{n-1} + h(\overline{f(\gamma(t_{n-1}))} - \overline{f(z_{n-1})}) + hg_{n-1}$$

Azaz

$$|e_n| \leq |e_{n-1}|+h|\overline{f(\gamma(t_{n-1}))}-\overline{f(z_{n-1})}|+h|g_{n-1}| = |e_{n-1}|+h|f(\gamma(t_{n-1}))-f(z_{n-1})|+h|g_{n-1}|$$

Most legyen Ekkor ha $M = \max\{|f'(z)| : z \in K\}$ (itt lehet maximumot venni, hiszen K zárt), akkor mivel a tételben feltettük, hogy $|e_{n-1}| < \delta$, azaz $|\gamma(t_{n-1}) - z_{n-1}| < \delta$, ezért

$$|f(\gamma(t_{n-1}))-f(z_{n-1})| = |\int_{\gamma(t_{n-1})}^{z_{n-1}} f'(z)\,dz| \leq \int_{\gamma(t_{n-1})}^{z_{n-1}} |f'(z)|\,dz \leq M|\gamma(t_{n-1})-z_{n-1}|$$

(itt nem számít, hogy milyen rektifikálható görbe megy $\gamma(t_{n-1})$-ból z_{n-1}-be, feltéve, hogy $\overline{B(\gamma(t), \delta)}$-án belül halad). Ebből kapjuk, hogy

$$|e_n| \leq (1 + Mh)|e_{n-1}| + h|g_{n-1}|$$

Ezt az összefüggést ismételve kapjuk, hogy

$$|e_n| \leq (1 + Mh)^n h \sum_{k=0}^{n-1}(1 + Mh)^{n-k}|g_k| \leq (1 + Mh)^n h \sum_{k=0}^{n-1} |g_k|$$

Most $C = e^{MT} \geq (1 + Mh)^n$, ahol $T = N \cdot h$ az időmennyiség amire γ-át kirajzoltuk, választással teljesül a tétel állítása. □

Most már csak $|g_n|$ becslése van hátra ahhoz, hogy tudjunk valamit mondani ezen megközelítés hibájáról.

Legyen $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ és $z_n = (x_n, y_n)$, most x-re, y-re külön-külön felírjuk a Lagrange-középérték tételt:

$x(t_n) = x(t_{n-1}) + hx'(t_{n-1}) + \frac{h^2}{2}x''(\mu)$

$y(t_n) = y(t_{n-1}) + hy'(t_{n-1}) + \frac{h^2}{2}y''(\eta)$

Most $|x''(\mu)| \leq |\gamma''(\mu)|$ és $|y''(\eta)| \leq |\gamma''(\eta)|$ miatt azt mondhatjuk, hogy

$g_n \leq h \max_t |\gamma''(t)|$

Összevetve ezt az előző eredményünkkel, azt kaptuk, hogy

$$|e_n| \leq C \left(h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \max_t |\gamma''(t)| \right) \leq C \cdot h^2 \cdot n \max_t |\gamma''(t)| \leq h \cdot C \cdot T \cdot \max_t |\gamma''(t)|$$

Továbbá a $\left(\overline{\gamma'(t)}\right)' = f(\gamma(t))' = f'(\gamma(t))\gamma'(t) = f'(\gamma(t))\overline{f(\gamma(t))}$, azaz

$$\gamma''(t) = \overline{f'(\gamma(t))} f(\gamma(t))$$

tehát ebből azt kapjuk, hogy

$$|e_n| \leq h \cdot C \cdot T \cdot \max_t |\overline{f'(\gamma(t))} f(\gamma(t))|$$

Azaz azt mondhatjuk, hogy $|e_n| = O(h)$ minden $n = 0, 1, \ldots, N$-re.

5.1. Állítás. Ha $\{\gamma(t) : t \in (0, T)\} \subset D$, akkor elég kicsi h választása mellett $\exists C$, hogy $\forall n = 0, 1, ..., N$ esetén

$$|e_n| \leq Ch \sum_{k=0}^{n} |g_k|$$

Bizonyítás. Mivel $T < \infty$ az nyilván teljesül, hogy elég kicsi δ esetén $K = \bigcup_{z \in \Gamma} \overline{B(z, \delta)} \subset D$, hiszen D tartomány és így nyílt is, tehát minden pont belső pont. Most elég kicsire választva δ-t, elérjük, hogy e_n elég kicsi legyen h választásával.

Legyen a továbbiakban

$$M = \max_t |\overline{f'(\gamma(t))} f(\gamma(t))|$$

Teljes indukciót használunk:

Nyilván $|e_0| < \delta$, hiszen $e_0 = 0$.

Most ha $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ esetén $|e_i| < \delta$, akkor

$$h < \frac{\delta}{C \cdot T \cdot M}$$

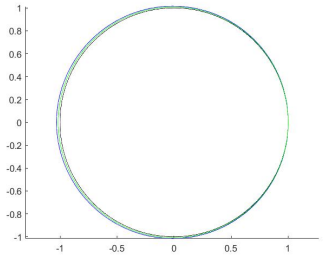
mellett a korábbi megállapításaink alapján

$$|e_n| \leq h \cdot C \cdot T \cdot M < \delta$$

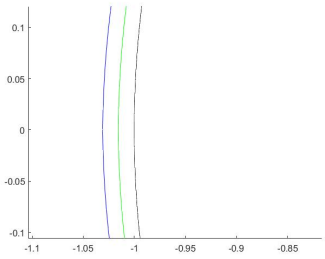
Azaz a tétel feltétele elég kis h mellett tényleg elérhető $\forall n \in \{1, \ldots, N\}$.

□

Ezt a hibabecslést demonstrálja a 6. ábra, itt is $f(z) = \frac{i}{z}$, viszont egész pontosan azt csináljuk, hogy egyszerre indulunk el f és $-f$ szerint is és megállunk amikor összeérünk, ezzel szebb ábránk lesz. Most ugyan tényleg csak annyi szerepet játszik, hogy két irányba indulunk el egyszerre, hogy megfelezi a hibát, ha az áramvonal azonban egy spirál lenne például, akkor ha csak f-szerint rajzolnánk ki, az áramvonal z_0 előtti részéből semmit se látnánk.



(a) a feketével rajzolt 1 sugarú kört közelítjük



(b) $h_{blue} = 0.02$, $h_{green} = 0.01$

6. ábra. látható, hogy a h felezésével, a hiba is feleződik

Egy további szép tulajdonsága ennek a függvénynek, hogy γ'' mindig merőleges γ'-re, ezért aztán a hibák összeadódnak. Hogyha például $f = \frac{1}{z}$-t választottuk volna, akkor az áramvonalak félegyenesek lennének, és a kirajzolt áramvonalak pontosan megegyeznének a valódi áramvonalakkal, a hibák csak annyit mutatnának, hogy valamelyest más sebességgel járnánk be őket.

5.2. Áramvonalak kirajzolása MATLAB-ban

A korábban leírt megközelítését az áramvonalak numerikus kirajzolásának MATLAB-ban meg is valósítottuk, az összes korábbi ábra ennek a programnak a segítségével készült. Most tehát ismertetjük, hogy a gyakorlatban hogyan lehet megvalósítani ezt a megközelítését az áramvonalak kirajzolásának. Habár ez egy nagyon kézenfekvő módszer jól illusztrálja a probléma nehezen kezelhetőségét, hogy mennyi kisebb-nagyobb akadály merült fel a

megvalósítás közben.

Itt most nyilván egy törött vonalat rajzolunk ki mint áramvonal: a z_{n-1} és z_n közti szakaszok összességét.

Első körben azt kell észre vennünk, hogy ha azt akarjuk látni, hogy hogyan néz ki egy áramvonal, ami átmegy egy adott ponton, akkor nem elég f szerint haladni, úgyszintén el kell indulnunk $-f$ szerint is, mint ahogy azt már korábban megállapítottuk (a rövidség kedvéért azt fogjuk mondani, hogy két irányban haladunk).

Most ha már eldöntöttük, hogy egyszerre indulunk két irányba egy adott kezdőpontból, akkor a következő felmerülő kérdés, hogy mikor álljunk meg, hiszen az áramvonalak $(-\infty, \infty) \to \mathbb{C}$ függvények, nincs egy természetesen adódó megállási időpont. Kézenfekvő, hogy limitáljuk a megtett lépések számát, hiszen a futásidőt mindenképpen limitálni szeretnénk, főleg ha egymásután több áramvonalat is ki akarunk rajzolni, mint általában. De egy ilyen erős korlátot úgy érdemes állítani, hogy lehetőleg ne befolyásolja az outputot, inkább csak vészfékként funkcionáljon. Most tehát meggondoljuk, hogy milyen megállási feltételeket érdemes még tenni.

Hogyha az áramvonal zárt, akkor elég egy periódusnyit bejárni (avagy félfél periódust f és $-f$ szerint), utána úgyis ugyanazon az úton mennénk végig újra és újra amin már egyszer végig mentünk. Viszont sajnos azt, hogy egy áramvonal periodikus-e nem tudjuk egyszerűen eldönteni. Az, hogy összeérjünk ahogy két irányban haladunk nem történik meg a gyakorlatban szinte soha, hiszen a hibák, ha nem oltják ki egymást akkor azt eredményezik, hogy hiába kéne összeérnünk, ez nem fog megtörténni. Azt gondolhatnánk például, hogy amikor körök az áramvonalak, akkor a két irányban ugyanannyit fogunk hibázni. De sajnos még ebben az esetben se lesz többnyire soha, hogy pont ugyan azon a ponton lennénk valamilyen időpillanatban, hiszen a lépéseink hossza miatt lehet, hogy pont két lépés közben találkoznánk (és mivel a z_n-ek meghatározásához teljesen fölösleges lenne kiszámolni a z_{n-1} - z_n szakaszok pontjait, így azt se tudjuk megmondani, hogy metszik-e egymást az ilyen szakaszok). De a helyzet még sokkal rosszabb, hiszen ha véletlen össze

is érnénk, akkor se tudjuk garantáltan azt mondani, hogy az áramvonal periodikus, hiszen lehet, hogy csak az történt, hogy a hibák szerencsétlenül adódtak össze.

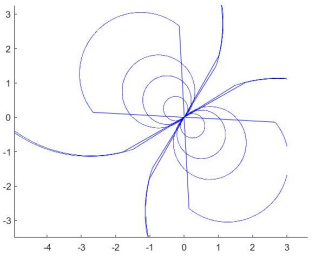
Ez a kis gondolatmenet is jól illusztrálja, hogy a legfontosabb kérdés az, hogy mikor álljunk le. Egyrészt inputként kérünk majd egy function handle-t, ami egy megállási feltételt ad annak a függvényében, hogy éppen hol vagyunk (ugyan az a függvény lesz érvényes a két irányra). Ez főleg arra van szánva, hogy egy a felhasználó által megadott kereten belül maradjunk. Ezzel az inputtal még nem lehetne megoldani a periodikus áramvonalak kérdését, hiszen ehhez nem elég csak az épp aktuális helyzetünket ismerni. Továbbá az, hogy egy kereten belül maradunk nem jelenti még azt, hogy ne tudnánk végtelen sokáig menni, hiszen ha egy spirál az áramvonal, vagy egy zérushelyhez tart, akkor pont ez történik.

A periodikus áramvonalak kérdését úgy oldjuk meg, hogy inputként kérünk egy elfogadható hibaértéket, és azt mondjuk, hogy ha a két irányban haladva ennél közelebb kerülnek a pontok egymáshoz, akkor úgy tekintjük, hogy az áramvonal periodikus. Ha ez az érték elég kicsi, akkor ez a hiba általában nem is látszik, ha nem nagyít bele az ember az ábrába. Itt még fontos megjegyezni, hogy az első néhány lépésben el kell ettől a leállási feltételtől tekinteni, hiszen ugyan abból a pontból indulunk két irányba, tehát az első pár lépésben szinte biztos, hogy elég közel leszünk.

Ezek a feltételek a megtett lépések számának korlátozásával együtt már az esetek többségében szép ábrákat eredményez. Valamelyest meglepő módon még a 2. ábrán látható spirált is szépen ki lehet így rajzolni. Azért mondhatjuk, hogy meglepő, mert ahogy közeledünk ebben az esetben a 0-beli pólushoz egyre-egyre nő f értéke, tehát arra gondolhatnánk, hogy egy idő után valahogy kilő az áramvonal és ugrik egyet. De ehelyett ebben az esetben inkább nem is közelíti meg annyira a 0-t, hogy valami ilyesmi történjék, hanem stabilizálódik egy nagyon kis sugarú körben, amíg el nem éri a lépések száma a felső korlátot.

Ezzel ellentétben viszont a parabolikus körsorok kirajzolásánál (3. ábra)

valamivel többre van szükség ahhoz, hogy mutatós ábrát kapjunk. Itt ugyanis tényleg megtörténik a korábban leírt ugrás az áramvonalakban, ha túl közel kerülünk a pólushoz.

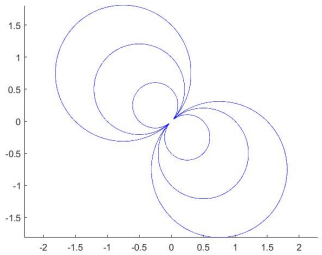


7. ábra. ugrás az áramvonalban $f(z) = \frac{10+10i}{z^2}$

Ezt illusztrálja a 7. ábra, itt nagyon szépen látszik, hogy ahogy közel érünk a pólushoz f megugrik.

Megjegyezzük, hogy itt azért záródik végül be az ugrás után az áramvonal, mert f szimmetrikus és mi pont a szimmetriatengelyéről indultunk, tehát pont szimmetrikusan viselkedett az ugrás mindkét irányban.

A 3. ábra elkészítéséhez tehát be kellett vezetni még egy leállási feltételt, méghozzá azt, hogy ha egy lépés hosszabb lenne, mint egy adott felső határ, akkor álljunk meg. Ezzel a feltétellel együtt a kapott áramvonalak láthatóak a 8. ábrán, itt egy lépés hosszát elég volt 1.5 alatt tartani, ez is illusztrálja, hogy mennyire hirtelen ugrik meg f értéke.



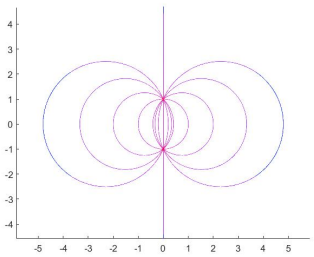
8. ábra. ugrás kiküszöbölve $f(z) = \frac{10+10i}{z^2}$

Ehhez az ábrához még kézzel hozzáadva a hatványvonalat kapjuk a 3. ábrát.

Azt is fontos észrevenni, hogy ezzel a korlátozással, gyakorlatilag elérjük, hogy tudjuk használni a 8.1. fejezetben tárgyalt hibabecslést, hiszen ott az kell, hogy $|\overline{f'(\gamma(t))}f(\gamma(t))|$ értékét meg tudjuk becsülni, amit egy kritikus pont közelében meg is tudunk tenni, ha a $h \cdot f$ értékét már korlátoztuk.

További információt tudunk közölni azzal, hogyha az áramvonalakat aszerint színezzük, hogy éppen mekkora az adott pontban a sebesség. A 9. ábra ezt kívánja illusztrálni, itt hiperbolikus körsorok vannak, és minél pirosabb (rózsaszínűbb ebben az esetben, mert ezen az ábrán így jobban látszik az átmenet) annál nagyobb ott a sebesség, minél kékebb, annál kisebb a sebesség.

Most a sebességet is ábrázolva már majdnem minden jellemzője megjelenik az ábrán az áramlásnak, ugyanis ha pontosan le tudnánk olvasni a színeket és tudnánk, hogy melyik melyen sebességhez tartozik, akkor már f-et meg tudjuk határozni egy -1-es szorzó erejéig. Azaz az irányítástól eltekintve egy ilyen ábra már minden információt tartalmaz az áramvonalakról.



9. ábra. parabolikus körsor $f(z) = \frac{1+i}{z^2}$

A színezést persze nem lehetett úgy megvalósítani, hogy minden ponthoz individuálisan rendeljünk színeket, hiszen az messze túl sok memóriát használna, tehát a gyakorlatban úgy kerekítünk, hogy összesen csak 10 féle szín szerepel az ábrán és akkor szakaszokra bonthatjuk az áramvonalakat a sebesség szerint és szakaszonként ábrázoljuk.

5.3. Nem ideális áramlások

A korábbi fejezetben ismertetett program minden nehézség nélkül hasz-

nálható bármilyen függvény áramvonalainak a kirajzolására, nem kell, hogy az holomorf legyen. Most tehát mutatunk néhány példát arra, hogy hogyan néznének ki azon áramvonalak, amik nem holomorf függvényhez tartoznak (habár ezek precízen nem is áramvonalak).

Korábban azzal, hogy azt mondtuk, hogy $\overline{f}$ határozza meg az áramlás vektormezőjét az az előnyünk származott, hogy f holomorf függvény lett. Ha ragaszkodtunk volna ahhoz, hogy f írja le a vektormezőt, akkor antiholomorf függvényekkel kellett volna dolgoznunk (olyan függvények, amiknek a konjugáltja holomorf), és ekkor extra konjugálások jöttek volna be a képbe például a lokális hasonlóság definíciójánál. Ebben a fejezetben viszont érdekünkben áll az $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ függvényeket tekinteni, amik maguk írják le a sebességvektormezőt. Tehát a továbbiakban ezt a jelölést fogjuk használni. Ez azt jelenti, hogy a fejezet további részében az antiholomorf függvényekhez fognak ideális áramlások tartozni.

Azért érdemes pontosan definiálni, hogy egyáltalán mi is egy áramvonal, ha f nem antiholomorf, hiszen ekkor nincs ideális áramlás, kérdéses is, hogy egyáltalán az áramlás szó használata helyénvaló-e.

5.1. Definíció. Az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható függvényhez tartozó

$$\gamma'(t) = f(\gamma(t)) \;\; t \in \mathbb{R}$$

autonóm differenciálegyenlet $\gamma(0) = p$ kezdeti feltétel melletti megoldása meghatároz egy $\phi(t,p)$ dinamikai rendszert, azaz egy olyan $\phi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható függvényt, amire

- $\forall p \in \mathbb{R}^2 \;\; \phi(0,p) = p$
- $\forall p \in \mathbb{R}^2 \; \forall t,s \in \mathbb{R} \quad \phi(t,\phi(s,p)) = \phi(t+s,p)$

Ezzel a jelöléssel beszélhetünk a $p \in \mathbb{R}^2$ pont pályájáról, mint a $\phi(\cdot,p)$ görbe.

Tehát általános esetben pályákról fogunk beszélni, és azt mondhatjuk, hogy az áramvonalak olyan speciális pályák, amiket antiholomorf f függvények esetén kapunk.

Most megvizsgálunk néhány egyszerű példát. Megnézzük, hogy miért nem eredményez ideális áramlást az adott függvény, ami nem is feltétlenül lesz antiholomorf, illetve megnézzük az áramvonalaik hogyan néznének ki.

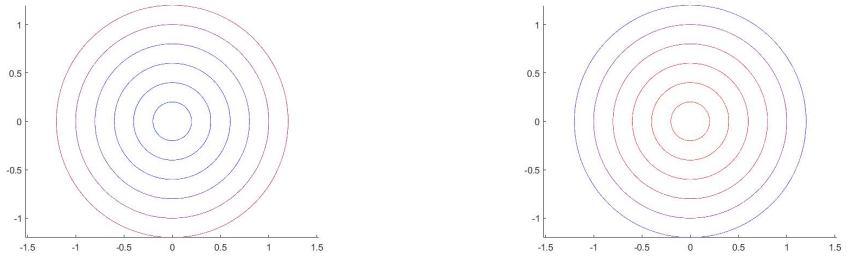
Kezdetnek vizsgáljuk meg az $f(z) = iz$ függvényt. Ha ugyanis mondani akarunk egy függvényt, ami esetén a pályák köröket járnak be ez az egyik legtermészetesebb választás. Persze ez a függvény holomorf, azaz sehol sem antiholomorf tehát bármilyen tartományon is vizsgálnánk nem kaphatunk ideális áramlást. Felmerülhet a kérdés, hogy pontosan melyik feltételét is sérti meg ez a függvény az ideális áramlásnak. A stacionáriusság nem sérülhet, az azt jelentené, hogy nem autonóm differenciálegyenletekről beszélünk.

Marad tehát az örvény, illetve forrás és nyelő mentesség. Ezek vizsgálatához, ahogy azt korábban láttuk az f divergenciáját, illetve rotációját kell kiszámolni. Most $u(x, y) = -y$ és $v(x, y) = x$, azaz

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\operatorname{rot} f = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2$$

Tehát látszik, hogy az örvénymentesség sérül, méghozzá a rotáció minden pontban 2.



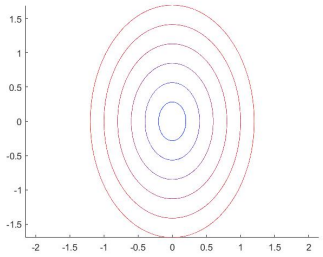
(a) nem ideális áramlás $f(z) = iz$ (b) ideális áramlás $f(z) = \frac{i}{\overline{z}}$

10. ábra

A 10. ábrával próbáljuk illusztrálni, hogy abban különböznek a pályák, hogy milyen gyorsan járjuk őket be, az iz esetében ahogy egyre közelebb

kerülünk a 0-hoz úgy az áramvonalak színe egyre inkább kék, míg az $\frac{i}{\overline{z}}$ esetén, amikor a 0-hoz közeledve a sebesség nő, az áramvonalak egyre inkább pirossal vannak színezve.

Most megvizsgáljuk az $f(x, y) = (-y, 2x)$ függvény esetét, ezen látszik, hogy ellipsziseket kapunk 11. ábra, továbbá, ez a függvény nyilván nem holomorf így az áramlás nem ideális (megint csak a rotáció nem 0, hanem konstans -3). Viszont felmerülhet a kérdés, hogy lehet-e egyáltalán ellipsziseket kapni, mint ideális áramlás, ha f-et egy furfangos $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénnyel megszorozzuk.



11. ábra

A rövid válasz, hogy nem, hiszen az ismert, hogy sem pólus, sem megszüntethető szingularitás, sem pedig olyan pont közelében ahol az antiholomorf függvény értelmezve van sem lehetnek az ideális áramlás áramvonalai ellipszisek. Az utolsó eset a lényeges szingularitás esete, de arra végül is úgy is gondolhatunk, hogy végtelenszeres pólus és így ott se hisszük, hogy lehetnének ellipszisek ha pólusok közelében mindig voltak olyan áramvonalak, amik a pólushoz tartottak.

Viszont szerencsére nem kell az intuíciónknak hinni ebben az esetben, egyszerűen megmutatható ugyanis, hogy valóban nem kaphatunk ideális áramlás áramvonalaiként ellipsziseket. Valójában az a kérdés, hogy ha adott egy iránymező (ebben az esetben az ellipszisek ívhossz szerint paraméterezve, majd őket deriválva kapjuk ezt meg), akkor az lehet-e egy ideális áramlás iránymezője. Ezt pedig már vizsgáltuk a 2.3. Iránymező című fejezetben és arra jutottunk, hogy ha az iránymező mint $e^{i\vartheta(z)}$ van adva, akkor szükséges,

hogy $\vartheta(z)$ lokálisan harmonikus legyen. Itt

$$\vartheta(x+iy) = arctg(-\frac{2x}{y})$$

hiszen $f(x,y) = (-y, 2x)$ volt. Most, ha nekiülünk és deriválunk azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{4xy}{(x^2+4y^2)^2}$$

és

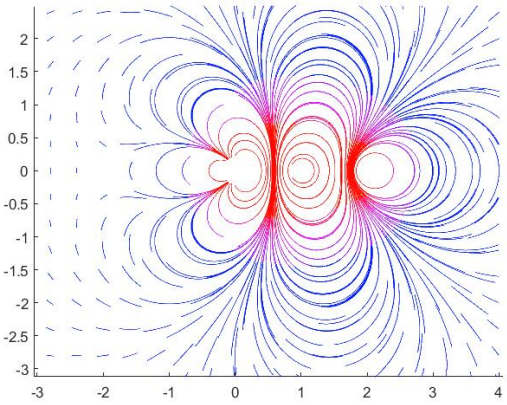
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{16xy}{(x^2+4y^2)^2}$$

azaz

$$\triangle f = \frac{12xy}{(x^2+4y^2)^2}$$

ez pedig nyilván nem konstans 0 tehát tényleg nem kaphatunk ellipsziseket ideális áramlás áramvonalaiként.

Most még egy kis gondolatkisérletet csinálunk, meggondoljuk, hogy mit tudunk elmondani egy ábra alapján az áramlásról.



12. ábra

Ehhez egy tekintsük a 12. ábrát, ahol valamilyen antiholomorf függvény adja meg az áramlást, tehát azt feltesszük, hogy ideális áramlásról beszélünk. Ezen az ábrán a kezdőpontok rácspontjai egy viszonylag sűrű rácsnak.

Az látszik, hogy az áramlás hirtelen gyorsul be és lassul le, ezért van, hogy például a (-3,0) pont környékén már csak rövid szakaszokat rajzolunk ki, itt ugyanis életbe lép a lépések korlátozása.

Rögtön látunk két elsőrendű pólust, körülbelül az (1, 0) és (2, 0) pontokban, hiszen ezek közelében körök vannak. Ebből arra is következtethetünk, hogy ezekben a pontokban tisztán képzetes a reziduum. Az, hogy itt nem parabolikus körsorok vannak lokálisan, az látható abból, hogy a körök nem érintenek egy tengelyt, ehelyett ilyen nyalábokba csoportosulnak, és nem is gyorsulnak be annyira, hogy elérjék a programban előírt sebességhatárt (nem tesz ott a program túl nagy lépéseket).

Látunk még egy zérushelyet is valahol a (-2, 0) környékén, hiszen ha megnézzük az áramvonalakat ott valahogy kereszteznünk kéne egymást, és azt is le lehet olvasni a környező áramvonalkból, hogy egyszeres csak a zérushely, hiszen 4 oldalról torkollik bele áramvonal (és láttuk, hogy n-edfokú zérushelybe $2|n+1|$ áramvonal torkollik).

Azt már nehezebb megállapítani, hogy vajon a (0, 0)-ban lokálisan hogyan néz ki az áramlás, mivel ott már le is áll a program mert annyira begyorsul az áramlás. De azért ez sem lényegesen bonyolult, mivel többszörös pólusoknál ilyen lóhere-szerű alakzatok voltak, viszont itt csak két irányból torkollanak áramvonalak a pólusba, ebből pedig arra következtetünk, hogy lokálisan parabolikus körsor lesz ott, és a pólus másodfokú. Itt az is látszik, hogy a hatványvonala képzetes tengelyel kell, hogy párhuzamos legyen, tehát a reziduum itt is képzetes.

Ez a kis gondolatmenet illusztrálja, hogy tényleg viszonylag sok minden leolvasható egy ilyen ábráról.

6. Függelék

A korábban ismertetett program kódját, mint függelék ide beillesztjük.

Először is csináltam egy egyszerő törtfüggvény osztályt, amiben ki tudom számítani a deriváltat is, mert kísérletezni akartam másodfokú közelítéssel, de ebben az esetben ez gyakorlatilag fölösleges. Szerettem volna eredetileg, ha az osztályon belül ki tudom számolni a függvény értékét egy adott pontban, de az nagyon lelassította a programot, úgy néz ki, hogy a MATLAB nem szereti az osztályokat.

```
1  classdef RF
2      %RF is short for rational function
3      %   This class is for representing
4      %       complex rational functions
5      %   Calculating their derivatives
6
7      properties
8          num;
9          den;
10     end
11
12     methods
13         function obj = RF(num,den)
14             %RF Construct an instance of this class
15             %   num and den are vectors representing a
16             %       polynomial
17             %   num is for numerator, and den is for
18             %       denominator
19             %   the vector represents a polynomial such that
20             %       the number at
21             %the index i is the coefficient of z^(i-1)
22             if ~any(den)
23                 error('Arguments:zeroDenumerator', ...
24                 'The denominator cannot be identically zero');
25             end
26             obj.num = num;
27             obj.den = den;
```

```
        end

        function rf = diff(obj)
            %diff returns the differential as another instance
            %   of RF
            nm1 = conv(polyder(obj.num), obj.den);
            nm2 = conv(polyder(obj.den), obj.num);
            l1 = size(nm1, 2); l2 = size(nm2, 2);
            l = max(l1, l2);
            z1 = zeros(1, l); z2 = zeros(1, l);
            z1((l-l1+1):l) = nm1; z2((l-l2+1):l) = nm2;
            nm = z1-z2;
            dn = conv(obj.den, obj.den);
            rf = RF(nm, dn);
        end
    end
end
```

Most a következő a közelítő függvény kódja. Nem túl elegáns az, ahogy a varargin jelenleg működik, azért raktam bele, mert ahogy hozzáadtam újabb és újabb inputokat szerettem volna, ha a régebbi verziókat használó kód használható maradnak.

```
function [ps, colors] = FirstOrderApproxWithColors(vFC, ...
start, varargin)
%FirstOrderApprox - approximating streamlines of ideal flow
%Input:
%   vFC         -  an instance of RF, representing a ratianal
% function the conjugate of this gives the velocity vector
% field of the flow we simulate
%   start       -  complex number, a point on the streamline
%   eps         -  number, the scaling of the steps we take
%   fS          -  number of function handle, if a number
%  we stop if we get further than it from start
% (being out of the frame), alternatively a
% function can be given for more complex frames
%   N           -  number, the bound for how many steps we make
% at most
```

```
%   er          -  number, if the streamline at some point
% comes this close to a point that it already contains, then
%  it considers the streamline compete, being periodic
%   th          -  number, until the first th steps we don't
% check weather we are er close to a point already in the
% streamline
%   trashHold -  number, if the size of a step is larger than
% trashHold, we consider the streamline complete, since
%  presumably we are close to a singularity
%FirstOrderApprox(vFC, start)
%FirstOrderApprox(vFC, start, 0.00001, 5, 650000, 0.0009, ...
%1000, 0.0002) -
% the default values for the inputs
%Output:
%   ps          - a vector of complex numbers, the points of
% the streamline

%Initializing the arguments and some error handling:
N = 650000;
eps = 0.00001;
fS = @(a) abs(a) > 5;
er = 0.0009;
th = 1000;
if nargin > 8
    error('Arguments:incorrectNumberOfArguments', ...
    'There must be less than or equal to 8 input arhuments!');
end
if ~(isnumeric(start) && all(size(start) == [1 1]))
    error('Arguments:incorrectType', ...
    'The second argument has to be a (complex) number!');
end
if ~isequal(class(vFC), 'RF')
    error('Arguments:incorrectType', ...
    'The first argument has to be ...
    an instance of the RF class!');
end
if nargin >= 3
    if isnumeric(varargin{1}) && ...
```

```
54      all(size(varargin{1}) == [1 1])
55          eps = varargin{1};
56      else
57          error('Arguments:incorrectType', ...
58          'The␣third␣argument␣has␣to␣be␣a␣number!');
59      end
60  end
61  if nargin >= 4
62      if isa(varargin{2}, "function_handle")
63          fS = varargin{2};
64      elseif isnumeric(varargin{2}) && ...
65      all(size(varargin{2}) == [1 1])
66          fS = @(a) abs(a-start) > varargin{2};
67      else
68          error('Arguments:incorrectType', ...
69          'The␣fourth␣argument␣has␣to␣be␣a␣number␣...
70  ␣␣␣␣␣␣␣␣or␣a␣function␣handle!');
71      end
72  end
73  if nargin >= 5
74      if isnumeric(varargin{3})...
75      && all(size(varargin{3}) == [1 1])
76          N = varargin{3};
77      else
78          error('Arguments:incorrectType',...
79          'The␣fifth␣argument␣has␣to␣be␣a␣number!');
80      end
81  end
82  if nargin >= 6
83      if isnumeric(varargin{4})...
84      && all(size(varargin{4}) == [1 1])
85          er = varargin{4};
86      else
87          error('Arguments:incorrectType', ...
88          'The␣sixth␣argument␣has␣to␣be␣a␣number!');
89      end
90  end
91  if nargin >= 7
```

```
92      if isnumeric(varargin{5}) && ...
93      all(size(varargin{5}) == [1 1])
94          th = varargin{5};
95      else
96          error('Arguments:incorrectType',...
97          'The seventh argument has to be a number!');
98      end
99  end
100 if nargin >= 8
101     if isnumeric(varargin{6}) &&...
102     all(size(varargin{6}) == [1 1])
103         trashHold = varargin{6};
104     else
105         error('Arguments:incorrectType', ...
106         'The eighth argument has to be a number!');
107     end
108 else
109     trashHold = 20*eps;
110 end
111
112
113 %initializing the vectors for stroing the points of the
114 %streamline and other variables that are used
115 %when simulating the flow
116 psP = zeros(1, N); %points going forward from the start
117 complex(psP);
118 psP(1) = start;
119 psN = zeros(1, N); %points going backwards from the start
120 complex(psN);
121 psN(1) = start;
122 x = 1;
123 y = 1;
124 mP = 0;
125 mN = 0;
126 velocitiesP = zeros(1, N);
127 velocitiesN = zeros(1, N);
128 for i = 2:N
129     if x == 1
```

```
130         z = psP(i-1);
131         newP_P = z + eps*conj(polyval(vFC.num, z)/...
132         polyval(vFC.den, z));
133         if fS(newP_P) || abs(newP_P-z) > trashHold
134             %the fact that we check for trashHold ensures
135             %that it is very unlikely that we
136             %divide by zero in the previous line assuming
137             %it is small enough
138             %we can't get too close to a singularity,
139             %so it would be very
140             %unlucky if we exactly land on it
141             x = 0;
142         else
143             mP = mP+1;
144             psP(i) = newP_P;
145             velocitiesP(i) = abs(newP_P-z)/eps;
146         end
147     end
148     if y == 1
149         z = psN(i-1);
150         newP_N = z - eps*conj(polyval(vFC.num, z)/...
151         polyval(vFC.den, z));
152         if fS(newP_N) || abs(newP_N-z) > trashHold
153             y = 0;
154         else
155             mN = mN+1;
156             psN(i) = newP_N;
157             velocitiesN(i) = abs(newP_N-z)/eps;
158         end
159     end
160     if abs(newP_N-newP_P) < er && i > th
161         break
162     end
163 end
164 psP = psP(1:mP);%we cut off the unnecessary zeros from the end
165 velocitiesP = velocitiesP(1:mP);
166 psN = psN(1:mN);
167 velocitiesN = velocitiesN(1:mN);
```

```
velocities = [flip(velocitiesP), velocitiesN];
ps = [flip(psP), psN];
g = @(lz) round((2/pi)*atan(lz.^3), 1);
vec = g(velocities);
colors = [vec; 0.1*exp(-vec.^2); 1-vec];
end
```

Még szükségünk van egy kis függvényre, ami a kirajzolásnál megcsinálja a szín átmenetet az áramvonalban.

```
function multicolorPlot(xs, ys, colors)
if ~isempty(xs)
assert(length(xs) == length(ys));

assert(length(xs) == length(colors));
dividers = [1];
for i = 2:length(colors)
    if ~all(colors(:,i) == colors(:,i-1))
        dividers = [dividers, i];
    end
end
dividers = [dividers, length(colors)];
hold on
for i = 2:length(dividers)
    plot(xs(dividers(i-1):dividers(i)), ...
    ys(dividers(i-1):dividers(i)), ...
    'color',  colors(:,dividers(i-1)));
end
end
end
```

Végül pedig egy gyors példa arra, hogy hogyan rajzolhatunk ki ennek segítségével koncentrikus köröket.

```
p = 0.2;
f = RF([1i], [1, 0]);
frameSize = 2;
hold on
basePoints = [0.4 0.6 0.8 1 1.2;0 0 0 0 0];
```

```
fS = @(a) a>2;
for n = 1:length(basePoints(1, :))
    [ps, colors] = FirstOrderApproxWithColors(f, p, ...
    0.0001, fS, 65000);
    multicolorPlot(real(ps), imag(ps), colors);
    p = basePoints(1, n) +1i*basePoints(2, n);
end
[ps, colors] = FirstOrderApproxWithColors(f, p, 0.0001,...
fS, 65000);
multicolorPlot(real(ps), imag(ps), colors);
axis equal
```

Hivatkozások

[1] Halász Gábor: *Kis Hidrodinamika*

[2] Halász Gábor: *Bevezető komplex függvénytan*, 2. javított kiadás, ELTE, 2002

[3] Hajós György: *Bevezetés a geometriába*, 4. kiadás Tankönyvkiadó, Budapest 1966

[4] Simon L. Péter: *Differencálegyenletek és dinamikai rendszerek*

[5] Gáspár Csaba: *Numerikus analízis 2*