

NYILATKOZAT

Név: Lukács Norbert Balint

ELTE Természettudományi Kar, szak: matematika BSc

NEPTUN azonosító: KVVWNV

Szakedolgozat címe: Parciális differenciálegyenletek
megoldása hálónélküli módszerekkel

A **szakedolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a
dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard
szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés
nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022.05.31.



a hallgató aláírása



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Parciális differenciálegyenletek megoldása hálónélküli módszerekkel

BSc Szakdolgozat

Lukács Norbert Bálint

Matematika BSc
Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:
Dr. Gáspár Csaba



Budapest, 2022

Tartalomjegyzék

1. Előszó	1
2. Alapfogalmak	2
3. Hálót, illetve rácsot alkalmazó módszerek	5
3.1. Véges differencia módszer	5
3.1.1. 1-dimenziós elliptikus problémák	5
3.1.2. 2-dimenziós elliptikus problémák	9
3.2. Véges elem módszer	11
3.3. Perem-integrálegyenlet módszer	14
4. Hálónélküli módszerek	17
4.1. Bevezetés	17
4.1.1. Szórt alappontú interpoláció	17
4.1.2. Radiális bázisfüggvények módszere	17
4.2. Kansa-módszer	18
4.3. Az alapmegoldások módszere	19
4.3.1. Az alapmegoldások módszerének áttekintése	19
4.3.2. A módszer sajátosságai	24
5. Összegzés	26

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Gáspár Csabának, hogy szakértelmével, észrevételeivel, valamint végtelen türelmével odaadóan segítette munkámat, és a végsőig kitartott mellettem.

1. fejezet

Előszó

A parciális differenciálegyenletek számos tudományágban fontos szerepet képviselnek bizonyos folyamatok modellezésében, mint például a hővezetés, vagy a diffúzió. Ezen egyenletek javarészt nem megoldhatóak analitikusan, így különféle numerikus közelítő módszereket alkalmazunk.

Szakedolgozatom fő témája a parciális differenciálegyenletek hálónélküli módszerekkel való megoldása, pontosabban az alapmegoldások módszerének átfogó prezentációja. Hogy szélesebb körű képet kaphassunk, bemutatok más, hálókat, rácsokat alkalmazó módszereket, pontosabban elsősorban azok működési elvét, numerikus jellemzőit és hátrányait, ezzel szemléletessé téve az egyes technikák sajátosságait, és egymástól való eltéréseit.

Szakedolgozatom szisztémája legfőképp Gáspár Csaba: *Parciális differenciálegyenletek néhány numerikus módszere* című jegyzetére alapszik.[1]

2. fejezet

Alapfogalmak

2.1. Definíció. (Differenciálás) Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ korlátos tartomány az N -dimenziós térben, legyen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ skalárfüggvény, és jelöljön $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ egy vektormezőt ($E := (E_1, E_2, \dots, E_N)$). Tegyük fel, hogy u és E kellően sima függvények. Ekkor:

$$\operatorname{grad} u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$$

vektormező, és

$$\operatorname{div} E := \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial E_N}{\partial x_N}$$

skalárfüggvény. Ezeket rendre u függvény gradienseinek, és E vektormező divergenciájának nevezzük.

2.2. Definíció. (Laplace-operátor) Ha u egy kétszer differenciálható skalárfüggvény, a Laplace-operátor az a differenciáloperátor, melyet a következőképp definiálunk:

$$\Delta u := \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u$$

2.3. Definíció. (Normált terek) Egy X vektorteret normált térnek nevezünk, ha X -en értelmezhető egy $\|\cdot\|$ -val jelölt függvény, azaz norma, mely kielégíti a következő feltételeket:

- I. $\forall x \in X$ vektorra: $\|x\| \geq 0$, és $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
- II. $\forall x \in X$ vektorra, és $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ skálár: $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.
- III. $\forall x, y \in X$ vektorpárra: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (háromszög-egyenlőtlenség).

2.4. Definíció. Az X normált teret Banach-térnek nevezzük, ha X a norma által indukált metrikával ellátva teljes, azaz minden X -ben haladó Cauchy-tulajdonságú sorozat konvergens.[2]

Néhány $\mathbb{R}^N$ -beli norma:

Legyen $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$

1. Maximum norma: $\|x\|_{max} := \max_{1 \leq k \leq N} |x_k|$
2. Összegnorma: $\|x\|_1 := \sum_{k=1}^N |x_k|$
3. Euklideszi norma: $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^N |x_k|^2}$

Néhány végtelen dimenziós téren értelmezett norma:

1. Véges, zárt $[a, b]$ intervallumon értelmezett folytonos, valós függvények $C[a, b]$ tere a maximum normával:

$$\|f\|_{max} := \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

2. Véges, zárt $[a, b]$ intervallumon értelmezett m -szer folytonosan differenciálható függvények $C^m[a, b]$ tere a maximum normával:

$$\|f\|_{C^m[a, b]} := \sum_{k=0}^m \max_{a \leq x \leq b} |f^{(k)}(x)|$$

3. Véges, vagy végtelen (a, b) intervallumon értelmezett integrálható függvények $L_1(a, b)$ tere az L_1 normával:

$$\|f\|_{L_1(a, b)} := \int_a^b |f(x)| dx$$

4. Véges, vagy végtelen (a, b) intervallumon értelmezett négyzetesen integrálható függvények $L_2(a, b)$ tere az L_2 normával:

$$\|f\|_{L_2(a, b)} := \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$$

2.5. Definíció. (Euklideszi terek) Egy X valós vektortér euklideszi tér, ha rajta értelmezhető egy kétváltozós, valós értékű $\langle \cdot, \cdot \rangle$ függvény, azaz skaláris szorzat, melyre az alábbi kritériumok igazak:

- I. $\forall x \in X$ vektorra: $\langle x, x \rangle \geq 0$, ezenfelül $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.
- II. $\forall x, y \in X$ vektorpárra: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- III. $\forall x, y \in X$ vektorpárra, és $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ skalárra: $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \cdot \langle x, y \rangle$
- IV. $\forall x, y, z \in X$ vektorokra: $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

Minden euklideszi tér normált a

$$||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

skaláris szorzat által indukált normával.

2.6. Definíció. *(Hilbert tér) Egy olyan X euklideszi teret, mely a skaláris szorzat által indukált normával teljes, Hilbert-térnek nevezzük.*

3. fejezet

Hálót, illetve rácsot alkalmazó módszerek

Parciális differenciálegyenletek megoldásához alkalmazhatunk olyasfajta módszereket, melyek során a vizsgált tartományt, és annak peremét diszkretizáljuk valamilyen ráccsal, hálóval.

3.1. Véges differencia módszer

A legrégebbi módszer ezen feladatok megoldására a hagyományos véges differencia módszer.

A differenciálegyenletben fellépő parciális deriváltakat közelítjük differenciasémákkal. Ezeket rácspontokon tudjuk kiértékelni, ehhez pedig definiálnunk kell egy rácsot.

3.1.1. 1-dimenziós elliptikus problémák

Adott egy Ω véges, nyílt intervallum, és legyen a megoldandó differenciálegyenletünk az 1-dimenziós Poisson-egyenlet a Dirichlet-peremfeltétellel:

$$\begin{aligned}\Omega &= (0, A) \\ u'' &= f \\ u(0) &= a, \quad u(A) = b\end{aligned}$$

Legyen N a részintervallumaink száma a felosztásban, és a lépésköz legyen $h := \frac{A}{N}$. Osszuk fel a $[0, A]$ intervallumot a következő x_k rácspontokkal:

$$x_k := k \cdot h \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N).$$

Ezzel egy ekvidisztáns alappontrendszert kapunk, ahol N a részintervallumok száma.

Differenciasémák

Ahhoz, hogy jól definiáljuk a differenciasémákat, a Taylor-sorfejtés módszerét alkalmazzuk.

1. Előrelépő séma:

$u(x_{k+1})$ -re a következő kifejezés írható fel x_k pont körüli Taylor-sorfejtéssel, h függvényében, ahol $x_{k+1} = x_k + h$:

$$u(x_{k+1}) = u(x_k) + \frac{u'(x_k)}{1!} \cdot h + \frac{u''(x_k)}{2!} \cdot h^2 + \frac{u'''(x_k)}{3!} \cdot h^3 + \mathcal{O}(h^4) \quad (3.1)$$

Innen láthatjuk a következőt:

$$u'(x_k) = \frac{u(x_{k+1}) - u(x_k)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

Ezzel megkaptuk az **előrelépő sémát**.

2. Visszalépő séma:

Hasonlóan határozzuk meg x_{k-1} -re az összefüggésünket $(-h)$ függvényében, ezzel megkapva a **visszalépő sémára** a képletünket.

$$u(x_{k-1}) = u(x_k) - \frac{u'(x_k)}{1!} \cdot h + \frac{u''(x_k)}{2!} \cdot h^2 - \frac{u'''(x_k)}{3!} \cdot h^3 + \mathcal{O}(h^4) \quad (3.2)$$

Innen egyszerű számításokkal kifejezzük $u'(x_k)$ -t:

$$u'(x_k) = \frac{u(x_k) - u(x_{k-1})}{h} + \mathcal{O}(h)$$

3. Centrális séma:

A következő írható fel $u'(x_k)$ kifejezésére a (3.1) és (3.2) egyenletek különbségét segítségül hívva:

$$u'(x_k) = \frac{u(x_{k+1}) - u(x_{k-1}))}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Ugyanezen sorfejtések összegével meghatározható $u''(x_k)$:

$$u''(x_k) = \frac{u(x_{k+1}) - 2u(x_k) + u(x_{k-1}))}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

3.1.1. Definíció. Egy sémát p -edrendűnek nevezünk, ha a pontos derivált és a séma értékének differenciája, azaz a **hibatag** nagyságrendje $\mathcal{O}(h^p)$.

Megfigyelhetjük, hogy az előre- és visszalépő sémák elsőrendűek, ellenben a két centrális séma másodrendű.

E módszer pontossága nagyban függ h méretétől. Módszerünkben a kisebb lépésközök nagyobb pontosságot eredményeznek, kiváltképp akkor, ha a differenciasémánk rendje nagy.

Jelöljük a közelítő módszerünk $u(x_k)$ megoldásait u_k -val, illetve $f(x_k)$ -kat f_k -val ($k = 0, 1, 2, \dots, N$). Az $u''(x_k)$ másodrendű deriváltra a centrális differenciasémával kapott értékre felírható az eredeti Poisson-egyenletből a következő összefüggés:

$$\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} = f_k \quad (3.3)$$

Vegyük figyelembe, hogy modellfeladatunkban $\Omega = [0, A]$ tartományon értelmezett u függvényünk értéke az intervallum két végpontjában ismertek.

$$u(0) = a, u(A) = b$$

Így csak az $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ rácspontokban vett közelítő értékek meghatározandók, ezzel kaptunk a (3.3) összefüggésből egy $(N - 1)$ -változós lineáris egyenletrendszert. Ennek megoldásával kapjuk meg a rácspontokban vett közelítéseket.

A módszer pontossága

Kétfajta hibatagot vizsgálunk a közelítés során. Jelölje g_k a lokális, e_k pedig a globális hibatagokat:

$$g_k := \frac{u(x_{k+1}) - 2u(x_k) + u(x_{k-1}))}{h^2} - f_k \quad (3.4)$$

$$e_k := u(x_k) - u_k \quad (3.5)$$

A két hibatagra egyszerűen levezethető a következő összefüggés a (3.3) és (3.4) egyenletekből. Rendezzük át a lokális hibatagra kapott egyenletünket:

$$\frac{u(x_{k+1}) - 2u(x_k) + u(x_{k-1}))}{h^2} = f_k + g_k$$

Ebből kivonva (3.3)-at:

$$g_k = \frac{(u(x_{k+1}) - u_{k+1}) - 2(u(x_k) - u_k) + (u(x_{k-1}) - u_{k-1}))}{h^2} \quad (k = 1, 2, \dots, N - 1)$$

Felhasználva a globális hibatagra látott kifejezést:

$$g_k = \frac{e_{k+1} - 2e_k + e_{k-1}}{h^2} \quad (k = 1, 2, \dots, N - 1)$$

Nyilván az intervallum két szélén vett globális hiba zérus ($e_0 = e_N = 0$).

Ezen összefüggésből szintén egy lineáris egyenletrendszert kapunk, $N - 1$ ismeretlennel. Legyen ennek együtthatómátrixa $A_h \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$.

Így a hibatagok egymáshoz való viszonya a következőképp írható fel:

$$A_h e = g, \quad e, g \in \mathbb{R}^{(N-1)}$$

3.1.2. Definíció. *(Négyzetes közép) Egy $x \in \mathbb{R}^N$ vektor négyzetes közepe (root mean square) a következő módon írható fel:*

$$\|x\|_{RMS} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N}}$$

3.1.3. Definíció. *(Korlátos operátor, operátornorma) Legyenek X, Y normált terek, és $A : X \rightarrow Y$ egy lineáris leképezés, azaz operátor. Azt mondjuk, hogy A lineáris operátor korlátos, ha $\exists K \geq 0: \|Ax\| \leq K \cdot \|x\| \quad \forall x \in X$. Ezt a K számot az A operátor korlátjának nevezzük. Ezen korlátok infimuma az A operátor normája.*

A vektorok koordinátáinak négyzetes középhibáját, és A_h^{-1} mátrix operátornormáját véve megfogalmazható a hibatagok közötti egyenlőtlenség.

$$\|e\|_{RMS} \leq \|A_h^{-1}\| \cdot \|g\|_{RMS}$$

3.1.1. Tétel. *A_h^{-1} inverz mátrixok egyenletesen korlátosak, azaz $\|A_h^{(-1)}\| \leq C$ valamilyen $C \geq 0$ h -től független konstansra.*

A fenti tételt nem bizonyítjuk (bár az A_h mátrix sajátértékeinek meghatározásával egyszerűen adódik), ellenben ezt felhasználván azt kapjuk, hogy a globális hiba felülről becsülhető a lokális hibával, tehát

$$\|e\|_{RMS} \leq C \cdot \|g\|_{RMS}$$

Eme egyenlőtlenséget gyakorta nevezzük a séma stabilitásának.

Idézzük fel a lokális hibatagra felírt képletünket:

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{u(x_{k+1}) - 2u(x_k) + u(x_{k-1}))}{h^2} - f_k = \\ &= \frac{u(x_{k+1}) - 2u(x_k) + u(x_{k-1}))}{h^2} - u''(x_k) = \mathcal{O}(h^2), \end{aligned}$$

tehát

$$g_k \leq K \cdot h^2$$

Ezzel kiegészítve a globális hiba felső becslését:

$$\|e\|_{RMS} \leq C \cdot K \cdot h^2 = \mathcal{O}(h^2)$$

Ezzel pedig megkaptuk, hogy a centrális sémára konstruált véges differencia módszer másodrendű pontosságú.

3.1.2. 2-dimenziós elliptikus problémák

Ugyanezen módszer alkalmazható magasabb dimenziós rendszerekre is. Vegyük hát alapul az $\Omega := (0, A) \times (0, B) \in \mathbb{R}^2$ téglalap alakú tartományt, és tekintsük itt a Poisson-egyenletet, ismét a Dirichlet-peremfeltétellel:

$$\Delta u = f, \quad u|_{\Gamma} = u_0$$

Itt az f függvény Ω -n értelmezett, illetve Γ a tartomány peremét jelöli.

Számítási rácsunkat definiáljuk $\bar{\Omega}$ -n, azaz Ω lezártján.

$$(x_{k,j}, y_{k,j}) := (k \cdot h_x, j \cdot h_y) \quad (k = 0, 1, \dots, N; \quad j = 0, 1, \dots, M)$$

Itt h_x és h_y jelölik az x és y tengelyen vett lépésközöket. Definiáljuk ezeket a következőképp:

$$h_x := \frac{A}{N}, \quad h_y := \frac{B}{M},$$

ahol adott N és M pozitív egészek jelölik, hogy a téglalap oldalait hány egyenlő részre osztottuk fel (h_x és h_y nem feltétlen egyeznek meg!). Ezen $(x_{k,j}, y_{k,j})$ pontokat rácspontoknak nevezzük.

Az 1-dimenziós differenciasémákból könnyen eredeztethető a 2-dimenziós feladatra is a modell. Ezt úgy tesszük, hogy az 1D-ben látott módszert alkalmazzuk külön a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ és $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ másodrendű parciális deriváltakra. Legyen $f(x_k, y_j) := f_{k,j}$, és jelölje a megoldás közelítő értékei (x_k, y_j) rácspontokban $u_{k,j}$. Így a Taylor-sorfejtéses eljárásunkkal a következő diszkrét egyenletrendszert kapjuk:

$$\frac{u_{k-1,j} - 2u_{k,j} + u_{k+1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{k,j-1} - 2u_{k,j} + u_{k,j+1}}{h_y^2} = f_{k,j}$$

Ennek megoldásával megkapjuk a rácspontokban vett függvényértékeket. Szemmel láthatóan ezen egyenletrendszernek lényegesen több, $(N-1) \cdot (M-1)$ ismeretlene van, ami sűrű felosztáson igen sok ismeretlent jelent.

A módszer hibája

Hasonlóan az egyváltozós modellünkhöz, itt is vezessük be a lokális és globális hibatagokat:

$$g_{k,j} := \frac{u(x_{k-1}, y_j) - 2u(x_k, y_j) + u(x_{k+1}, y_j)}{h_x^2} + \frac{u(x_k, y_{j-1}) - 2u(x_k, y_j) + u(x_k, y_{j+1})}{h_y^2} - f_{k,j},$$

$$e_{k,j} := u(x_k, y_j) - u_{k,j}$$

Ezen definíciókkal könnyen látható, hogy a hibatagok közötti összefüggés újfent fennáll.

$$\frac{e_{k-1,j} - 2e_{k,j} + e_{k+1,j}}{h_x^2} + \frac{e_{k,j-1} - 2e_{k,j} + e_{k,j+1}}{h_y^2} = g_{k,j}$$

Ebben a rendszerben az $x_{k,j}$ perem-rácsponatokon ($k = 0$, vagy $k = N$, vagy $j = 0$, vagy $j = M$) az $e_{k,j}$ globális hibatag 0.

Legyen A_{h_x, h_y} a diszkrét Laplace-operátor, akkor:

$$\|e\|_{RMS} \leq \|A_{h_x, h_y}^{-1}\| \cdot \|g\|_{RMS}$$

3.1.2. Tétel. A_{h_x, h_y}^{-1} operátor korlátos, $\exists C \in \mathbb{R}$, melyre $\|A_{h_x, h_y}^{-1}\| \leq C$

A (3.1.1) tételhez hasonlóan ezt a tételt sem bizonyítjuk, de újra hasznát vehetjük a két hibatag közötti egyenlőtlenségben, behelyettesítvén $\|A_{h_x, h_y}\|$ helyére a séma stabilitását:

$$\|e\|_{RMS} \leq C \cdot \|g\|_{RMS}$$

Használjuk fel az egydimenziós feladatban látott Taylor-sorfejtéssel megkapható kifejezéseket:

$$u(x_{k-1}, y_j) - 2u(x_k, y_j) + u(x_{k+1}, y_j) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_k, y_j) \cdot h_x^2 + \mathcal{O}(h_x^4),$$

illetve

$$u(x_k, y_{j-1}) - 2u(x_k, y_j) + u(x_k, y_{j+1}) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_k, y_j) \cdot h_y^2 + \mathcal{O}(h_y^4)$$

Innen pedig beláthatjuk, hogy a kétdimenziós centrális sémára felépített véges differencia módszer másodrendű pontosságú, azaz a globális hiba $\mathcal{O}(h^2)$ nagyságrendű.

$$\begin{aligned} g_{k,j} &= \frac{u(x_{k-1}, y_j) - 2u(x_k, y_j) + u(x_{k+1}, y_j)}{h_x^2} + \\ &+ \frac{u(x_k, y_{j-1}) - 2u(x_k, y_j) + u(x_k, y_{j+1})}{h_y^2} - f_{k,j} = \\ &= \frac{u(x_{k-1}, y_j) - 2u(x_k, y_j) + u(x_{k+1}, y_j)}{h_x^2} + \\ &+ \frac{u(x_k, y_{j-1}) - 2u(x_k, y_j) + u(x_k, y_{j+1})}{h_y^2} - \Delta u(x_k, y_j) = \\ &= \mathcal{O}(h_x^2 + h_y^2) \end{aligned}$$

Ebből a következő felső becslés határozható meg a lokális hibatagra:

$$|g_{k,j}| \leq C_0 \cdot (h_x^2 + h_y^2),$$

ahonnan

$$\|g\|_{RMS} \leq C_0 \cdot (h_x^2 + h_y^2),$$

tehát

$$\|e\|_{RMS} \leq C \cdot C_0 \cdot (h_x^2 + h_y^2)$$

alkalmas, h_x és h_y lépésközöktől, és k,j -től független C_0 konstansra.

A véges differencia módszer más, nem téglalap alakú tartományokon is jól működik, ellenben ezek peremei pontatlanul közelíthetők ráccsal. Ilyen esetben meg kell állapítani minden rácsponttól, hogy az belső-, perem-, avagy külső pont-e. A belső rácspontokra differenciasémákat alkalmazunk, a perem-rácspontokban a peremfeltételt közelítjük. Ez egy sokváltozós lineáris egyenletrendszer eredményez. Előnyünkre válik viszont, hogy ennek együtthatómátrixa ritka, így találhatunk hatékony iterációs, és/vagy többrácsos (multigrid) módszert, ami elfogadható időben kellően pontos végeredményt nyújt.[3]

3.2. Véges elem módszer

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ korlátos tartomány, e tartomány peremét jelölje Γ . Legyen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ négyzetesen integrálható függvény, és tekintsük modellfeladatnak a 2-dimenziós Poisson-egyenletet:

$$-\Delta u = f \quad \Omega\text{-n},$$

és csatoljuk ehhez a homogén Dirichlet-peremfeltételt:

$$u|_{\Gamma} = 0$$

Definiáljuk a H függvényteret az alábbi módon:

$$H := H_0^1(\Omega) := \{w \in L_2(\Omega) : \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \in L_2(\Omega), w|_{\Gamma} = 0\},$$

a következő skaláris szorzattal:

$$\langle u, v \rangle_H := \int_{\Omega} \langle \text{grad } u, \text{grad } v \rangle \, dx dy,$$

ahol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a közönséges $\mathbb{R}^2$ -beli skaláris szorzatot jelöli.

Ebben a térben fogjuk kitűzni az egyenlethez tartozó variációs problémát.

3.2.1. Definíció. (Variációs probléma) Legyen H valós Hilbert-tér, legyen $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ egy szimmetrikus, korlátos és koercív bilineáris funkcionál, illetve $\ell : H \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos lineáris funkcionál, vagyis:

I. a mindkét változójában lineáris

II. a szimmetrikus, vagyis $a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in H$

III. a korlátos, azaz $|a(u, v)| \leq C \cdot \|u\|_H \cdot \|v\|_H$ valamilyen $C \geq 0$ számra minden $u, v \in H$ esetén

IV. a koercív, tehát $|a(u, u)| \geq c \cdot \|u\|_H^2$ valamilyen $c > 0$ számra minden $u \in H$ esetén

V. ℓ korlátos, tehát $|\ell v| \leq C \cdot \|v\|_H$ valamilyen $C \geq 0$ számra minden $v \in H$ esetén.
Ekkor olyan $u \in H$ vektort keresünk, melyre

$$a(u, v) = \ell v \quad \forall v \in H\text{-ra}$$

Alapvető fontosságú, hogy a most definiált variációs problémának mindig pontosan egy megoldása van H -ban. Esetünkben $H := H_0^1(\Omega)$. Igazolható, hogy ezen a téren teljesül a következő egyenlőtlenség:

3.2.1. Tétel. (Poincaré-egyenlőtlenség): $\exists c > 0$ konstans, hogy $\forall u \in H_0^1(\Omega)$ -re:

$$\int_{\Omega} \|\text{grad } u\|^2 dx dy \geq c \cdot \int_{\Omega} |u(x, y)|^2 dx dy,$$

vagyis

$$\|u\|_H^2 \geq c \cdot \|u\|_0^2$$

Ha a Poisson egyenlet mindkét oldalát egy $v \in H_0^1(\Omega)$ függvénnyel szorozzuk, majd utána ezen tartományon integrálunk, a következőt kapjuk:

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x, y) \cdot v(x, y) dx dy = \int_{\Omega} f(x, y) \cdot v(x, y) dx dy$$

3.2.2. Tétel. (Green első tétele)

$$\int_{\Omega} (\Delta u) \cdot v d\Omega = - \int_{\Omega} \langle \text{grad } u, \text{grad } v \rangle d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma$$

Alkalmazva az első Green-formulát az egyenlet bal oldalára, akkor, mivel $v \in H_0^1(\Omega)$, azért az

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma$$

peremintegrál eltűnik, és

$$\int_{\Omega} \langle \text{grad } u(x, y), \text{grad } v(x, y) \rangle dx dy = \int_{\Omega} f(x, y) \cdot v(x, y) dx dy \quad (3.6)$$

Ezt nevezzük az eredeti Poisson-egyenlet gyenge alakjának. Definíáljuk a lineáris és bilineáris funkcionálokat a következőképp:

$$a(u, v) := \langle u, v \rangle_H = \int_{\Omega} \langle \text{grad } u(x, y), \text{grad } v(x, y) \rangle dx dy$$

$$\ell v := \langle f, v \rangle_0 = \int_{\Omega} f(x, y) \cdot v(x, y) dx dy$$

Ekkor a variációs probléma megegyezik (3.6) egyenlettel.

Igazolás nélkül kijelentjük, hogy a variációs problémához elvárt feltételek teljesülnek a funkcionálokra. A problémának egyetlen megoldása van H -n, emellett csupán elsőrendű deriváltakkal kell számolni, így a közelítő megoldás egyszerűbben meghatározható.

Ezt követően egy véges dimenziós V_h alteret kell konstruálnunk, mely kifejezetten nehéz feladattá válik, ha a tartomány alakja bonyolult. Állhat például az alter (legegyszerűbb esetben) sátorfüggvényekből. Optimális meghatározásuk a mai napig komplikált feladat, így ezek megalkotásának módjait most nem taglaljuk. A V_h alter bázisát alkotó függvényeket későbbiekben φ_j -vel jelöljük.

Értelmezzük a variációs problémát ezen az alteren: Olyan $u_h \in V_h$ vektort keresünk, melyre:

$$a(u_h, v_h) = \ell v_h \quad \forall v_h \in V_h \text{ vektorra}$$

Jelölje N a V_h alter dimenzióját. A variációs problémának egyaránt egyértelmű megoldása van a V_h alteren is, ám az egyenlőségeket elegendő a $v_h = \varphi_k$ vektorokra vizsgálni, így megkapjuk a variációs probléma diszkrét formáját. Legyen

$$u_h := \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j,$$

akkor:

$$\ell \varphi_k = \sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot a(\varphi_j, \varphi_k) \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

alakban történik, röviden $A\alpha = b$, ahol A mátrixot merevségi mátrixnak nevezzük, mely $a(\varphi_j, \varphi_k)$ elemekből áll, b vektor koordinátái pedig $\ell \varphi_k$ alakúak.

A lineáris egyenletrendszer mátrixa jellemzően ritka, de roppant sok változót tartalmaz. A perem rendszerint jól közelíthető az alter Ω tartományra illesztéséből kifolyólag, azonban V_h generálása meglehetősen nehéz. Az egyenletrendszer megoldásához ismét javasolt valamely iterációs módszer beépítése a számítási idő csökkentésére való tekintettel.

3.3. Perem-integrálegyenlet módszer

A perem-integrálegyenlet módszer újabb keletű, alkalmazása során a vizsgált tartomány egészét nem diszkrétizáljuk, csupán a peremét. Tekintsük a Poisson egyenletet:

$$\Delta U = f$$

Legyen peremfeltételünk az alábbi:

$$U|_{\Gamma_D} = u_0, \quad \frac{\partial U}{\partial n}|_{\Gamma_N} = v_0,$$

ahol Γ perem Γ_D és Γ_N diszjunkt uniója, u_0 és v_0 adott függvények. Legyen $\xi \in \Omega$ egy tetszőleges belső pont.

3.3.1. Tétel. (Green 3. tétele) Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ szakaszonként sima, korlátos tartomány, peremét jelöljük Γ -val a tartomány peremét. Legyen $U : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges, kétszer folytonosan differenciálható függvény. Ekkor $\forall x \in \Omega$ esetén teljesül

$$U(x) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Gamma} \frac{\langle x - y, n_y \rangle}{||x - y||^2} \cdot U(y) d\Gamma_y - \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Gamma} (\log ||x - y||) \cdot \frac{\partial U}{\partial n}(y) d\Gamma_y + \\ + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Omega} (\log ||x - y||) \cdot \Delta U(y) d\Omega_y \quad (3.7)$$

egyenlet, melyben n_y a perem egy y pontjához tartozó kifelé mutató normálvektort jelöli.

Ekkor a (3.7) felhasználva:

$$U(\xi) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Gamma} \frac{\langle \xi - y, n_y \rangle}{||\xi - y||^2} \cdot u(y) d\Gamma_y - \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Gamma} (\log ||\xi - y||) \cdot v(y) d\Gamma_y + \\ + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Omega} (\log ||\xi - y||) \cdot f(y) d\Omega_y,$$

ahol

$$u := U|_{\Gamma}, \quad v := \frac{\partial U}{\partial n}|_{\Gamma}$$

Vegyük egy tetszőleges $x \in \Gamma$ perempontot. Végrehajtva a $\xi \rightarrow x$ határátmenetet, és kiszámítva a jobb oldali integrálok határértékeit, a következő egyenletet kapjuk:

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Gamma} \frac{\langle x - y, n_y \rangle}{||x - y||^2} \cdot u(y) d\Gamma_y + \frac{1}{2\pi} \cdot (u(x) \cdot (2\pi - \alpha(x))) - \\ - \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Gamma} (\log ||x - y||) \cdot v(y) d\Gamma_y + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Omega} (\log ||x - y||) \cdot f(y) d\Omega_y,$$

ahol $\alpha(x)$ a Γ perem belső törésszögét jelöli az x perempontban. Ezt átalakítva a

$$\begin{aligned} \alpha(x) \cdot u(x) + \int_{\Gamma} \frac{\langle x - y, n_y \rangle}{\|x - y\|^2} \cdot u(y) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} \left(\log \frac{1}{\|x - y\|} \right) \cdot v(y) d\Gamma_y = \\ = - \int_{\Omega} \left(\log \frac{1}{\|x - y\|} \right) \cdot f(y) d\Omega_y \end{aligned} \quad (3.8)$$

egyenletet kapjuk, ezt a Poisson-egyenlethez tartozó perem-integrálegyenletnek nevezzük. Legyenek

$$K(x, y) := \frac{\langle x - y, n_y \rangle}{\|x - y\|^2}, \quad R(x, y) := \log \frac{1}{\|x - y\|}$$

magfüggvények, illetve legyenek

$$\begin{aligned} (Lf)(x) &:= \int_{\Omega} R(x, y) \cdot f(y) d\Omega_y \quad (x \in \Gamma) \\ (Ku)(x) &:= \int_{\Gamma} K(x, y) \cdot u(y) d\Gamma_y \quad (x \in \Gamma) \\ (Rv)(x) &:= \int_{\Gamma} R(x, y) \cdot v(y) d\Gamma_y \quad (x \in \Gamma) \end{aligned}$$

integráloperátorok. Ezek közül L egy tartományon értelmezett függvényhez rendel peremen értelmezett, ugyanakkor K és R peremen értelmezett peremen értelmezett függvényt, így ez utóbbi kettő valódi perem-integráloperátor. A bevezetett jelölésekkel felírhatjuk a (3.8) perem-integrálegyenletet a következő alakban:

$$\alpha \cdot u + Ku - Rv = -Lf$$

Számos esetben az L operátorral való integrálszámítás numerikus nehézségekhez vezethet, azonban a Poisson-egyenlet visszavezethető a Laplace-egyenletre. Ez a partikuláris megoldások módszerével vihető véghez.

Legyen U_0 a modellfeladatunk egy partikuláris megoldása, tehát $\Delta U_0 = f$, mindenféle peremfeltétel csatolása nélkül. Az U megoldás $U = U_0 + W$ alakban keressük, ahol W kielégíti a Laplace-egyenletet, ezen peremfeltételekkel:

$$W|_{\Gamma_D} = u_0 - U_0|_{\Gamma_D}, \quad \frac{\partial W}{\partial n}|_{\Gamma_N} = v_0 - \frac{\partial U_0}{\partial n}|_{\Gamma_N}$$

Ha sikeresen megtaláljuk a partikuláris megoldást, úgy a Laplace-egyenletet kielégítő W függvény a perem-integrálegyenlettel meghatározható anélkül, hogy az L operátorral való számolás során numerikus nehézségekbe ütköznénk, ugyanis ez esetben $f \equiv 0$.

Egy adott f -hez tartozó megoldás megtalálása nem triviális feladat. Ez megtehető Fourier-sorfejtésen alapuló módszerrel, avagy radiális bázisfüggvényeken alapuló szórt alappontú interpolációs technikával, ez utóbbit a későbbiekben részletezzük.

Tekintsük most a Laplace-egyenletet, és oldjuk meg az ehhez tartozó perem-integrálegyenletet.

Legyenek $x_1, x_2, \dots, x_N$ perem-kollokációs pontok Γ peremen. Legyen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$, és $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$ lineárisan független peremfüggvények rendszere, melyekre az

$$\alpha \cdot u + Ku = Rv$$

egyenletből u és v peremfüggvények közelítő megoldásai:

$$u \approx \sum_{j=1}^N u_j \cdot \varphi_j, \quad v \approx \sum_{j=1}^N v_j \cdot \psi_j$$

A perem-integrálegyenlet teljesülése megkövetelt a kollokációs pontokban. Legyen

$$K_{k,j} := (K\varphi_j)(x_k), \quad R_{k,j} := (R\psi_j)(x_k),$$

akkor az u_j, v_j együtthatókra az

$$\alpha_k \cdot \sum_{j=1}^N u_j \cdot \varphi_j(x_k) + \sum_{j=1}^N K_{k,j} u_j = \sum_{j=1}^N R_{k,j} v_j \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

egyenletrendszer áll fenn, továbbá felírandó a peremfeltételek diszkrét alakja:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N u_j \cdot \varphi_j(x_k) &= u_0(x_k), & \text{ha } x_k \in \Gamma_D, \\ \sum_{j=1}^N v_j \cdot \psi_j(x_k) &= v_0(x_k), & \text{ha } x_k \in \Gamma_N. \end{aligned}$$

Ezáltal kaptunk egy $2N$ ismeretlenből, és egyenletből álló egyenletrendszert. Ennek mátrixa rendszerint teljesen kitöltött, nemszimmetrikus és jellemzően rosszul kondicionált. Mivel a bevezetett ismeretlenek száma kevesebb, mint a korábbi módszerek során, így akár a klasszikus Gauss-elimináció is alkalmas megoldó algoritmus lehet, de a megoldás kivitelezhező valamilyen hatékony iterációs módszerrel is a megfelelő futásidő eléréséhez.

4. fejezet

Hálónélküli módszerek

4.1. Bevezetés

A hálónélküli módszerek nem igénylik sem a tartomány, sem a perem diszkretizálását sem ráccsal, sem hálóval a parciális differenciálegyenlet numerikus megoldása során. Egy struktúra nélküli pontthalmazt veszünk fel a tartomány belsejében, és/vagy a peremén. A Kansa-módszer, és az alapmegoldások módszere egyaránt radiális bázisfüggvényeket alkalmaznak.

4.1.1. Szórt alappontú interpoláció

Vegyünk egy $w_1, w_2, \dots, w_M$ alappontrendszer Ω -ban, és legyenek $f_1, f_2, \dots, f_M \in \mathbb{R}$ adott számok. E módszerrel minél simább olyan f függvényt keressük, amely teljesíti az $f(w_j) = f_j$ feltételt minden $j = 1, 2, \dots, M$ -re. Shephard módszerével például ez így módon határozható meg [4]:

$$f(x) := \frac{\sum_{j=1}^M f_j \cdot v_j(x)}{\sum_{j=1}^M v_j(x)}, \quad \text{ahol } v_j(x) := \frac{1}{\|x - w_j\|^2}$$

A módszer egyszerű, de meglehetősen pontatlan, ezért a parciális differenciálegyenletek közelítő megoldásaiban egy pontosabb eljárást kell keresni. Egy ilyen a radiális bázisfüggvények módszere, melyet a következőkben vázolunk.

4.1.2. Radiális bázisfüggvények módszere

Egy $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ radiális, azaz körszimmetrikus bázisfüggvény olyan függvény, melynek értékei kizárólag az $r := \|x\|$ normától függenek[5]. Vegyük Φ radiális bázisfüggvényt,

és legyen

$$f(x) := \sum_{j=1}^M \alpha_j \Phi(x - w_j),$$

melyhez az α_j együtthatókat az alábbi interpolációs egyenletrendszer megoldásából állapíthatjuk meg:

$$\sum_{j=1}^M \alpha_j \Phi(w_k - w_j) = w_k \quad (k = 1, 2, \dots, M)$$

Néhány példa radiális bázisfüggvényre (polárkoordinátákban megadva):

I. Multikvadrikus függvény:

$$\Phi_j(r) := \sqrt{r^2 + c_j^2},$$

itt c_k számok megfelelően megválasztott skálázó paraméterek. Például:

$$c_k := \min_{j \neq k} \|x_k - x_j\|$$

II. Vékony lemez spline:

$$\Phi_j(r) := r^2 \cdot \log r \quad \forall j\text{-re.}$$

III. Gauss-függvény:

$$\Phi_j(r) := e^{-c_j^2 r^2},$$

szintén alkalmas c_j skálázó paraméterekkel.[4][5][7]

4.2. Kansa-módszer

Legyen modellfeladatunk a kétdimenziós Poisson-egyenlet a Dirichlet-peremfeltétel mellett:

$$\Delta u = f \quad \Omega\text{-ban} \quad u|_{\partial\Omega} = u_0$$

Legyenek $x_1, x_2, \dots, x_M$ alappontok a tartomány belsejében, az $x_{M+1}, x_{M+2}, \dots, x_{M+N}$ pontok pedig a $\partial\Omega$ peremen.

A megoldásunkat a következő alakban keressük:

$$u(x) := \sum_{j=1}^{M+N} \alpha_j \cdot \Phi_j(x - x_j), \tag{4.1}$$

ahol a Φ_j -k radiális bázisfüggvények.

Amennyiben nem csak a (4.1) approximáció helytálló, hanem a jobb oldal Laplace-értékei is jól közelítik Δu -t, úgy az alábbi egyenletrendszer írható fel az ismeretlen értékekre:

$$\sum_{j=1}^{M+N} \alpha_j \cdot \Delta \Phi_j(x - x_j) = \Delta u(x_k) = f(x_k) \quad (k = 1, 2, \dots, M), \quad (4.2)$$

$$\sum_{j=1}^{M+N} \alpha_j \cdot \Phi_j(x - x_j) = u_0(x_k) \quad (k = M + 1, M + 2, \dots, M + N) \quad (4.3)$$

Elég nagy N és M értékekre az egyenletrendszer együtthatómátrixa igen nagy, rendszerint kitöltött, gyakorta nemszimmetrikus, illetve rosszul kondicionált, tehát a kapott rendszer rendkívül rossz numerikus jellemzőkkel rendelkezik.[5][6]

4.3. Az alapmegoldások módszere

Az alapmegoldások módszere viszonylag újabb eljárás bizonyos homogén elliptikus parciális differenciálegyenletek numerikus megoldására. Némely szempontból a peremintegrálegyenlet módszer szimplifikált változatának is tekinthető, e módszer nem követeli meg, hogy a peremen valamely elemstruktúrát definiáljunk, így ilyen szempontból mondhatni előnyösebb. Csupán véges ponthalmazok definiálása szükséges, bárminemű rács-, avagy elemstruktúra meghatározása nélkül.

4.3.1. Az alapmegoldások módszerének áttekintése

2D Laplace-egyenlet

Legyen modellfeladatunk a kétdimenziós Laplace-egyenlet:

$$\Delta u = 0$$

Mindezt egy korlátos Ω tartományon, és csatoljunk a differenciálegyenlethez kevert peremfeltételt:

$$u|_{\Gamma_D} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_N} = v_0$$

Itt az Ω tartomány Γ peremének egy diszjunkt felbontását adja Γ_D és Γ_N . A közelítő megoldásunkat harmonikus alapmegoldások, mint radiális bázisfüggvények lineáris kombinációjaként keressük, ahol $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N$ adott külső pontok (forráspontok)[5]:

$$u(x) := \sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot \Phi(x - \tilde{x}_j),$$

ahol, a Kansa-módszerben látottakhoz hasonlóan, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ együtthatók nem ismertek, Φ függvény pedig:

$$\Phi(x) := \log ||x||$$

4.3.1. Definíció. Egy $u \in C^2(\Omega)$ függvény harmonikus az Ω tartományon, ha:

$$\Delta u = 0 \quad \Omega\text{-n}.$$

4.3.1. Tétel. Φ kielégíti a kétdimenziós Laplace-egyenletet az origó kivételével mindenütt, az origóban pedig szingularitása van.

Bizonyítás: Egyszerű levezetéssel belátható az állítás ($x \neq 0$):

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(x) &= \operatorname{div} \operatorname{grad} \left(\frac{1}{2} \log ||x||^2 \right) = \operatorname{div} \left(\frac{1}{||x||^2} \cdot x \right) = \\ &= \left\langle \operatorname{grad} \frac{1}{||x||^2}, x \right\rangle + \frac{1}{||x||^2} \cdot (\operatorname{div} x) = \left\langle -\frac{2x}{||x||^4}, x \right\rangle + \frac{2}{||x||^2} = 0. \end{aligned}$$

Az origóban Φ -nek nyilvánvalóan szingularitása van. Az $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N$ forráspontokon kívül tehát az

$$u(x) := \sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot \Phi(x - \tilde{x}_j)$$

módon definiált függvény mindenütt eleget tesz a Laplace-egyenletnek. Defináljunk további $x_1, x_2, \dots, x_N \in \Gamma$ perem-kollokációs pontokat.

Innen az ismeretlen α_j együtthatókra a következő lineáris egyenletrendszer áll fenn:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot \Phi(x - \tilde{x}_j) &= u_0(x_k) \quad \text{ha } x_k \in \Gamma_D \\ \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial \Phi}{\partial n_k} \cdot \Phi(x - \tilde{x}_j) &= v_0(x_k) \quad \text{ha } x_k \in \Gamma_N \end{aligned}$$

Itt n_k az x_k perem-kollokációs pontban vett kifelé mutató normális irányú egységvektort jelöli, maga a Φ normális irányú deriváltja pedig egyszerűen meghatározható:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_k}(x) = \frac{\langle x, n_k \rangle}{||x||^2}$$

A közelítő megoldást tehát az

$$u(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot \Phi(x - \tilde{x}_j)$$

alakban nyerjük.

2D Poisson-egyenlet

Az alapmegoldások módszere általánosítható a Poisson-egyenlet megoldására. Ezt egy radiális bázisfüggvényeken alapuló szórt pontú interpolációs technikával tehetjük meg. Vegyük a következő Poisson egyenletet:

$$\Delta u = f \quad (4.4)$$

az Ω tartományon, illetve modelproblémánkat ismét kevert peremfeltétellel lássuk el:

$$u|_{\Gamma_D} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_N} = v_0$$

A differenciálegyenlet megoldását egy partikuláris, és egy homogén megoldás összegeként keressük, azaz:

$$u = u_P + u_H \quad (4.5)$$

Itt az u_P függvényre teljesül bármilyen peremfeltétel figyelembevétel nélkül a

$$\Delta u_P = f$$

Poisson egyenlet. Ezután a homogén megoldásfüggvény a

$$\Delta u_H = 0$$

egyenlet megoldásával határozható meg. Ez utóbbi Laplace-egyenlethez átalakítjuk az eredeti peremfeltételeket az alábbira:

$$u_H|_{\Gamma_D} = u_0 - u_P|_{\Gamma_D}, \quad \frac{\partial u_H}{\partial n}|_{\Gamma_N} = v_0 - \frac{\partial u_P}{\partial n}|_{\Gamma_N}$$

Könnyen látható, hogy így a (4.5) egyenlet eleget tesz az eredeti modellfeladatban megszabott Poisson-egyenletnek, és a hozzá tartozó peremfeltételeknek is. Ezt partikuláris megoldások módszerének hívják.

Vegyük a $w_1, w_2, \dots, w_M$ pontokat az Ω tartományban, és legyen Ψ egy radiális bázisfüggvény. Erre alapozott szórt alappontú interpolációval approximáljuk a (4.4) Poisson-egyenlet jobb oldalán lévő f függvényt. Ekkor az $f(w_j)$ függvényértékek segítségével meghatározhatjuk az alábbi interpolációs egyenletrendszerben szereplő β_j értékeket:

$$f(w_k) = \sum_{j=1}^M \beta_j \cdot \Psi(w_k - w_j) \quad (k = 1, 2, \dots, M)$$

Ezen együtthatókkal adható meg az interpolációs függvény:

$$f(x) = \sum_{j=1}^M \beta_j \Psi(x - w_j)$$

Ezt követően meg kell találnunk azt a Φ radiális bázisfüggvényt, melyre:

$$\Delta\Phi = \Psi,$$

ugyanis egy ilyen függvényre az

$$u_P(x) := \sum_{j=1}^M \beta_j \cdot \Phi(x - w_j)$$

módon meghatározott függvény a modellfeladatunk egy partikuláris megoldása lesz. Ez könnyen látható a következő levezetésből:

$$\begin{aligned} \Delta u_P(x) &= \sum_{j=1}^M \beta_j \cdot \Delta\Phi(w_k - w_j) = \\ &= \sum_{j=1}^M \beta_j \cdot \Psi(w_k - w_j) = f(w_k) \end{aligned}$$

A $\Delta u_H = 0$ homogén egyenlet megoldása a módosított kevert peremfeltétellel ekvivalens a 2D Laplace-egyenlet megoldásával, u_H meghatározható az alapmegoldások módszerével. Ekkor a modellfeladat közelítő megoldását megkaphatjuk $u = u_H + u_P$ alakban.

Felmerül a kérdés, hogy egy Ψ radiális bázisfüggvényhez milyen Φ függvény tartozik. Lássunk pár példát a párokra:

1. példa:

$$\Psi(r) := 1 + r, \text{ ekkor } \Phi(r) = \frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{9}r^3$$

2. példa (Vékony lemez spline):

$$\Psi(r) := r^2 \cdot \log r, \text{ ekkor } \Phi(r) = \frac{1}{16}r^4 \cdot \log r - \frac{1}{32}r^4$$

3. példa (Multikvadrikus függvény):

$$\Psi(r) := \sqrt{r^2 + c^2}, \text{ ekkor } \Phi(r) = \frac{1}{9}(4c^2 + r^2) \cdot \sqrt{r^2 + c^2} - \frac{c^3}{3} \log(c + \sqrt{r^2 + c^2})$$

Az alábbiakban belátjuk az 1. és 2. példára, hogy ezen párokra valóban teljesül $\Delta\Phi = \Psi$. Ehhez előbb látnunk kell, mi a Laplace-operátor polárkoordinátás alakja.

4.3.2. Tétel. Legyen $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ elég sima kétváltozós függvény. Ekkor

$$\Delta u = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

ahol $U(r, t) = u(x, y)$; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $t = \arctg \frac{y}{x}$.

Bizonyítás: Az egyszerűség kedvéért a parciális deriváltakat nem a hagyományos módon fogom jelölni, hanem alsó indexben fogom feltüntetni, épp mely változó(k) szerinti parciális deriváltakat akarjuk kifejezni.

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} \quad (4.6)$$

Az u függvény x szerinti elsőrendű parciális deriváltja:

$$u_x = U_r \cdot r_x + U_t \cdot t_x$$

Ezt még egyszer deriválva x szerint, megkapjuk az x szerinti másodrendű parciális deriváltat:

$$u_{xx} = ((U_{rr} \cdot r_x + U_{rt} \cdot t_x) \cdot r_x + U_r \cdot r_{xx}) + ((U_{rt} \cdot r_x + U_{tt} \cdot t_x) \cdot t_x + U_t \cdot t_{xx}) =$$

Ugyanígy:

$$u_{yy} = ((U_{rr} \cdot r_y + U_{rt} \cdot t_y) \cdot r_y + U_r \cdot r_{yy}) + ((U_{rt} \cdot r_y + U_{tt} \cdot t_y) \cdot t_y + U_t \cdot t_{yy})$$

(4.6)-ból:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \\ &= U_{rr} (r_x^2 + r_y^2) + 2U_{rt} (r_x t_x + r_y t_y) + U_{tt} (t_x^2 + t_y^2) + U_r (r_{xx} + r_{yy}) + U_t (t_{xx} + t_{yy}) \end{aligned}$$

A parciális deriváltakat meghatározzuk:

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}, & r_y &= \frac{y}{r} \\ r_{xx} &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2) \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y^2}{r^3}, & r_{yy} &= \frac{x^2}{r^3} \\ t_x &= \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{r^2}, & t_y &= \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x + \frac{y^2}{x}} \cdot \frac{x}{x} = \frac{x}{r^2} \\ t_{xx} &= -\frac{y}{(x^2 + y^2)^2} \cdot 2x = -\frac{2xy}{r^4}, & t_{yy} &= \frac{2xy}{r^4} \end{aligned}$$

A fentiekből:

$$\begin{aligned} r_x^2 + r_y^2 &= \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1 \\ r_x t_x + r_y t_y &= -\frac{xy}{r^3} + \frac{xy}{r^3} = 0 \\ t_x^2 + t_y^2 &= \frac{y^2 + x^2}{r^4} = \frac{r^2}{r^4} = \frac{1}{r^2} \\ r_{xx} + r_{yy} &= \frac{y^2}{r^3} + \frac{x^2}{r^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r} \\ t_{xx} + t_{yy} &= -\frac{2xy}{r^4} + \frac{2xy}{r^4} = 0 \end{aligned}$$

Innen megkaphatjuk, hogy:

$$\begin{aligned}\Delta u &= U_{rr} + \frac{1}{r^2} \cdot U_{tt} + \frac{1}{r} \cdot U_r = \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\end{aligned}$$

Ezzel levezettük a 2D Laplace-operátor polárkoordinátás alakját.

Most leellenőrizzük $\Delta\Phi$ -t a fenti példákra. Mivel Ψ radiális bázisfüggvény, így nem függ t -től. Ez esetben:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right)$$

1. Ha

$$\Phi(r) = \frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{9}r^3,$$

akkor

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(r) &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \left(\frac{1}{2}r + \frac{1}{3}r^2 \right) \right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{3}r^3 \right) = \\ &= \frac{1}{r} \cdot (r + r^2) = 1 + r = \Psi(r)\end{aligned}$$

2. Ha

$$\Phi(r) = \frac{1}{16}r^4 \cdot \log r - \frac{1}{32}r^4$$

akkor

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(r) &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \left(\frac{1}{4}r^3 \cdot \log r + \frac{1}{16} \cdot \frac{r^4}{r} - \frac{1}{8}r^3 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{4}r^4 \cdot \log r + \frac{1}{16}r^4 - \frac{1}{8}r^4 \right) = \\ &= \frac{1}{r} \cdot \left(r^3 \cdot \log r + \frac{1}{4} \cdot \frac{r^4}{r} - \frac{1}{4}r^3 \right) = r^2 \cdot \log r\end{aligned}$$

A 3. példa ennél sokkal hosszadalmasabb számítást igényel, ezért ennek levezetését elhagyjuk.

4.3.2. A módszer sajátosságai

E módszer igen könnyen programozható. Ugyanakkor az α_j -kre kapott egyenletrendszer együtthatómátrixa a legtöbb esetben nonszimmetrikus, illetve teljesen kitöltött, ezenfelül gyakorta nagyon rosszul kondicionált.

Minél messzebb kerülnek a forráspontok a peremtől, annál nagyobb kondíciószerű mátrixot kapunk. Fontos megemlíteni, hogy ezen pontok alkalmas elhelyezése közel sem evidens, nincs "optimálisnak" mondható forráspontegyüttes.

Előfordulhat, hogy a forráspontok, és perem-kollokációs pontok száma nem megegyező - ugyanis ezt nem követeljük meg. Ez esetben a lineáris egyenletrendszer mátrixa nem lesz négyzetes, így egy legkisebb négyzetes megoldás vizsgálendő, vagy szinguláris értékek szerinti felbontást kell alkalmazni.

Ha az inhomogén Poisson-egyenlet megoldására alkalmaznánk az alapmegoldások módszerét, úgy alkalmaznunk kell szórt alappontú interpolációt, valamint a partikuláris megoldások módszerét.

5. fejezet

Összegzés

A parciális differenciálegyenletek nagy része analitikusan nem megoldható, így gyakran ezeknek valamely közelítő, numerikus módszerrel keressük a megoldását.

Dolgozatomban ismertettem pár hálót, rácsot alkalmazó módszert. A véges differencia módszer alkalmazása során differenciasémákkal közelítettük a parciális deriváltakat egy adott számítási rácson, ezzel nyerve egy ritka mátrixú, ellenben nagyon sok ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletrendszer. A véges elem módszer alkalmazásakor megoldottuk a differenciálegyenlet gyenge alakját, ahol az egyenletet egy variációs ekvivalensével reprezentáltuk, ennek eredményéül egy hasonló tulajdonságokkal rendelkező egyenletrendszert kaptunk, ám ez utóbbi módszerrel a vizsgált tartományunk peremét jobban tudtuk közelíteni. Végül láttuk, hogy a perem-integrálegyenlet módszerrel történő megoldás során már nem diszkretizáltuk az egész tartományt, csak annak peremét. Ez lényegesen kevesebb ismeretlenből álló egyenletrendszert eredményezett, viszont ennek együtthatómátrixa teljesen kitöltött, és rosszul kondicionált volt.

Ezt követően említésre került a Kansa-módszer, illetve bemutattam az alapmegoldások módszerét, mely bizonyos szempontból a perem-integrálegyenlet módszer egy egyszerűsített verziójának tekinthető. A kétdimenziós Laplace-egyenlet megoldásához nem használtunk sem rácsot, sem hálót, csupán egy struktúra nélküli ponthalmaz felvétele volt szükséges. Ekkor a megoldásunkat radiális bázisfüggvények egy lineáris kombinációjaként kerestük. Ezt követően láttuk, hogy ezen eljárás általánosítható a Poisson-egyenlet megoldására is egy radiális bázisfüggvényeken alapuló szórt pontú interpolációs technikával. Hasonlóképpen a perem-integrálegyenlet módszerhez, egy kitöltött, gyakran nagyon rosszul kondicionált mátrixú egyenletrendszerhez jutottunk.

Irodalomjegyzék

- [1] Gáspár Csaba: Parciális differenciálegyenletek néhány numerikus módszere. Elektronikus jegyzet, Eötvös Loránd Tudományegyetem, 2021.
- [2] Tarcsay Zsigmond: Funkcionálanalízis. Elektronikus jegyzet, Budapest, 2018.
- [3] Stoyan Gisbert, Takó Galina: Numerikus Módszerek III. Typotex, Budapest, 1997.
- [4] Gáspár Csaba: Parciális differenciálegyenletek megoldása hálónélküli módszerekkel: az alapmegoldások módszere. Farkas Miklós Alkalmazott Analízis Szeminárium, Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, math.bme.hu/alkanalszemi1617, 2017
- [5] Gáspár Csaba: Egyenlőtlen cellafelbontáson alapuló többszintű numerikus modellezési eljárások. MTA-doktori értekezés, Budapest, 2007.
- [6] Gáspár Csaba: Hálónélküli módszerek és alkalmazásuk a Stokes-problémára. Alkalmazott Matematikai Lapok, 26. kötet, 207-222. old, 2009.
- [7] Gáspár Csaba: Numerikus analízis 1 - Fejezetek a numerikus analízisből. Elektronikus jegyzet, Eötvös Loránd Tudományegyetem, 2020.