NYILATKOZAT

Név: Györey Paula Beatrix

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: T7OIFC

Szakdolgozat címe:
Gráfok Hamilton-körei

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022. május 30.

Györey Paula Beatrix

a hallgató aláírása

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Gráfok Hamilton-körei

Györey Paula Beatrix
Matematika BSc
Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:
Dr. Sziklai Péter
Egyetemi tanár
Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2022

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Sziklai Péternek, aki a konzultációk során precizitásával, szakértelmével, érthető és világos magyarázataival, valamint türelmével és kedvességével jelentős mértékben hozzájárult a szakdolgozatom elkészüléséhez. Külön szeretném megköszönni neki, hogy a szakdolgozatom megírása során folyamatosan rendelkezésemre állt, így bármikor lehetőségem volt hozzá fordulni a felmerülő kérdéseimmel.

Hálával tartozom továbbá családom valamennyi tagjának, akik biztosították számomra a zavartalan készülés hátterét és toleránsak voltak velem ezen nehéz időszakban is.

Köszönöm továbbá barátaimnak a támogatásukat, a bíztató szavakat és kedvességüket, ami továbblendített az időnként felmerült nehézségek legyőzésében.

Nélkülük bizonyára ez a szakdolgozat nem ilyen minőségben valósult volna meg.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

1.1. A Hamilton-kör eredete

A Hamilton-kör fogalma Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) ír matematikus nevéhez fűződik. Hamilton tehetsége már kiskorában megmutatkozott, 5 éves korára a latin és a görög nyelv mellett héberül is megtanult. Érdeklődése a matematika iránt 13 éves korában kezdődött, amikor Clairaut Algebra című művéből kezdett tanulni, melyet megkönnyített, hogy addigra már folyékonyan beszélt fraciául is. 15 éves korában kezdte tanulmányozni Newton és Laplace munkásságát.
1823-ban Hamilton belépett a dublini Trinity College-ba. Egyetemistaként a matematika mellett fizikából is jeleskedett, miközben folytatta saját matematikai vizsgálatait. 1827-ben kinevezték a Trinity College csillagász professzorává. 1843. október 16-án kezdett megfogalmazódni fejében a kvaterniók algebrájának felfedezése, melynek kidolgozásával élete hátralévő részét töltötte. [2, 3]
Hamilton 1857-ben talált fel egy kirakós játékot, melynek célja Hamilton-kör keresés volt. Az "Icosian" nevű játék egy dodekaéder gráfjából állt, melynek minden csúcsa lyukas volt. A rejtvény megfejtéséhez szegekkel és zsinórral kellett egy olyan útvonalat megtalálni, melyben minden csúcsot egyszer érintünk és a végpont megegyezik a kiindulási ponttal. [4]

1.2. Alapfogalmak

Először is tekintsük át vázlatosan a gráfokra vonatkozó alapfogalmakat, melyek szükségesek a további részek megértéséhez.
Gráfnak nevezzük pontoknak és éleknek a halmazát, ahol az élek pontokat kötnek össze, valamint az élekre pontok illeszkednek úgy, hogy minden élre legalább egy és legfeljebb kettő pont illeszkedik.
A gráf ponthalmazának elemeit csúcsoknak vagy pontoknak hívjuk.
Jelölés: $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ - a G gráf ponthalmaza (véges halmaz).
A gráf pontjait élek kötik össze.
Jelölések:

- $E(G) = \{\ldots, (v_i, v_j), \ldots\}$ - a G gráf élhalmaza, ahol $v_i, v_j \in V(G)$,
- $e = (v_i, v_j)$ - az i és j csúcsokat összekötő él (amennyiben ezt rendezett párnak tekintjük, úgy az e él a v_i csúcsból mutat a v_j csúcsba, és ezzel a konstrukcióval irányított gráfot kapunk).

1.2.1 Megjegyzés:

- Az él hurokél, ha $v_i = v_j$.
- Többszörös- / párhuzamos él, ha v_i-t és v_j-t több él is összeköti.

1.2.1 Definíció: (Egyszerű gráf)
Egy G gráfot egyszerűnek nevezünk, ha nincs benne hurokél, sem többszörös él.

$\diamond$

1.2.2 Megjegyzés:
Tegyük fel, hogy egy G egyszerű gráfra $|V(G)| = n$, ekkor

$$0 \leq |E(G)| \leq \binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

1.2.2 Definíció: (Csúcs fokszáma/foka)
Egy csúcs fokszáma megadja, hogy hány él indul ki az adott csúcsból.
Jelölés: $deg(v_i)$ vagy $d(v_i)$

$\diamond$

1.2.1 Állítás:
G egyszerű gráfban $\sum\limits_{v \in V(G)} deg(v) = 2 \cdot |E(G)|$, ugyanis itt minden élt kétszer számoltunk meg.

Következmények:

- A fokszámösszeg mindig páros.
- Páratlan fokú csúcsok száma páros.

1.2.3 Definíció: (Élsorozat/séta)
Csúcsok és élek váltakozó sorozata, például: $u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, \ldots, u_{k-1}, e_k, u_k$ (ezen séta hossza k), ahol $u_0, u_1, \ldots, u_k \in V(G)$, $e_1, e_2, \ldots, e_k \in E(G)$ és $e_i = (u_{i-1}, u_i)$, $i = 1, \ldots, k$.

$\diamond$

1.2.4 Definíció: (Vonal)
Olyan élsorozat, melyben még azt is kikötjük, hogy ne legyen ismétlődő él, azaz minden élre $e_i \neq e_j$, ha $i \neq j$.

$\diamond$

1.2.5 Definíció: (Út)
Olyan élsorozat, amiben azt kötjük ki, hogy $u_i \neq u_j$, ha $i \neq j$ (azaz nincs ismétlődő csúcs).

$\diamond$

1.2.6 Definíció: (Körséta)
Olyan séta, hogy $u_0 = u_k$, azaz kezdő- és végcsúcs megegyezik.

$\diamond$

1.2.7 Definíció: (Körvonal)
Olyan vonal, hogy $u_0 = u_k$, vagyis a kezdőpont és a végpont megegyezik, és nem ismétlődhet él.

$\diamond$

1.2.8 Definíció: (Kör)
Olyan körséta, melyben $u_0 = u_k$ kivételével nem ismétlődik csúcs.

$\diamond$

1.2.9 Definíció: (Összefüggő gráf:)
Egy gráfot összefüggőnek nevezünk, ha bármely két csúcsa között van út / séta.

$\diamond$

1.2.10 Definíció: (Részgráf)
Egy H gráf részgráfja a G gráfnak, ha $V(H) \subseteq V(G)$ és $E(H) \subseteq E(G)$, vagyis ha H csúcs- és élhalmaza része G csúcs- és élhalmazának, tehát H-t megkapjuk G-ből úgy, hogy G néhány csúcsát és néhány élét "töröljük".

$\diamond$

1.2.11 Definíció: (Feszített részgráf)
A H gráf feszített részgráfja a G gráfnak, ha részgráfja G-nek úgy, hogy "csak" csúcsokat törlünk ki (és természetesen a kitörölt csúcsokhoz tartozó éleket is).

$\diamond$

1.2.12 Definíció: (Hamilton-kör)
Egy G gráf Hamilton-köre olyan kör, mely G minden csúcsát pontosan egyszer tartalmazza.

$\diamond$

1.2.13 Definíció: (Hamilton-út)
Egy G gráf Hamilton-útja olyan út, mely G minden csúcsát pontosan egyszer tartalmazza.

$\diamond$

2. Szükséges feltétel Hamilton-kör / -út létezésére

Ebben a fejezteben áttekintjük a szükséges feltételeket, melyeknek teljesülni kell a gráfokban ahhoz, hogy lehessen bennük Hamilton-kör, illetve Hamilton-út. Ezek után nézünk egy példát arra, hogy ezen feltételek miért nem elégségesek.

2.0.1 Tétel:

1. Ha egy G összefüggő gráfban létezik Hamilton-kör, akkor bármely k csúcs törlésével legfeljebb k összefüggő részre (komponensre) esik szét.

2. Ha egy G összefüggő gráfban létezik Hamilton-út, akkor bármely k csúcs törlésével legfeljebb $k+1$ összefüggő részre (komponensre) esik szét.

Bizonyítás:

1. Egy körből k csúcsot törölve a maradék legfeljebb k részre esik szét.
   Tekintsük a Hamilton-kör éleit és színezzük őket pirosra, míg a gráf maradék éle legyen kék. Egy pont törlésével a Hamilton-körből egy, az eredetinél kettővel rövidebb út keletkezik (amennyiben az út hosszát a benne található élek szerint számoljuk), mely a maradék gráfban egy Hamilton-út, azaz továbbra is összefüggő a gráf. Egy újabb pont törlése a piros utat két részre bonthatja. Amennyiben az út széléről választunk pontot, az út eggyel rövidül, ha valahonnan az út belsejéből, akkor az két részre esik szét. Előfordulhat, hogy az így keletkező két piros komponens között vezet kék él, vagyis továbbra is egy komponenst alkotnak a gráf pontjai. Minden további él törlése egy piros élekből álló utat bonthat két részre, vagy rövidíthet egy éllel az előbbiek alapján. Így a második pont törlésétől kezdve legfeljebb eggyel nőhet a komponensek száma minden csúcs törlésével, vagyis valóban legfeljebb annyi darab összefüggő részre eshet szét a gráf, ahány csúcsát kitöröltük. [5]

2. Az előző rész bizonyításához hasonlóan adódik ezen állítás helyessége is. Az előzőekben az első pont törlése után biztosan keletkezett Hamilton-út, onnantól kezdve pedig minden további csúcs eltávolításával legfeljebb eggyel nőtt a komponensek száma. Vagyis egy útból k csúcsot törölve a maradék legfeljebb $k+1$ összefüggő részre esik szét.

□

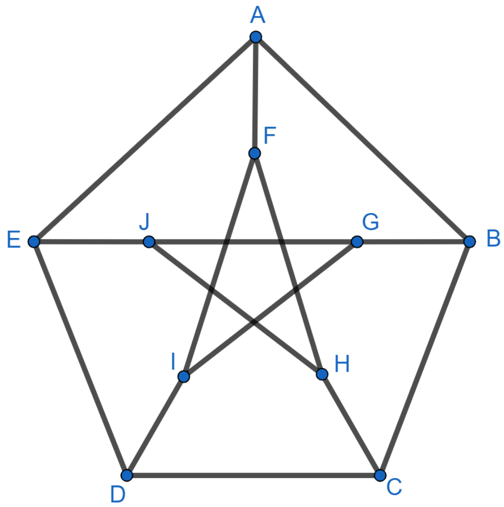
Láthatjuk tehát, hogy ezek valóban szükséges feltételek Hamilton-kör, valamint Hamilton-út létezésére, de vajon miért nem elégségesek?

A mai napig nem ismert használható szükséges és elégséges feltétel Hamilton-kör létezésére.

Ahhoz, hogy lássuk, a fenti tételre sem teljesül, hogy szükséges és elégséges feltételt is biztosít, érdemes lehet egy példát nézni arra, amikor teljesülnek a szükséges feltételek, ám Hamilton-kört nem tartalmaz a gráf .

2.1. A Petersen-gráf

A Petersen-gráf egy 10 csúcsú és 15 élű gráf, mely sok állításra szolgál ellenpéldaként, így van ez a mostani esetben is.
Először belátjuk, hogy a Petersen-gráfban létezik Hamilton-út, majd pedig azt, hogy Hamilton-kör viszont nem.



1. ábra.

Tekintsük a fenti 1. ábrát, mely egy Petersen-gráfot ábrázol. Ha sorra bejárjuk az $(A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ J,\ G,\ I,\ F,\ H)$ csúcsokat éppen egy Hamilton-utat kapunk.
Ezzel a Hamilton-út létezését könnyen ellenőriztük, most pedig lássuk be, hogy nincs benne Hamilton-kör.

2.1.1 Állítás:
A Petersen-gráf nem tartalmaz Hamilton-kört, pedig teljesíti a szükséges feltételt.

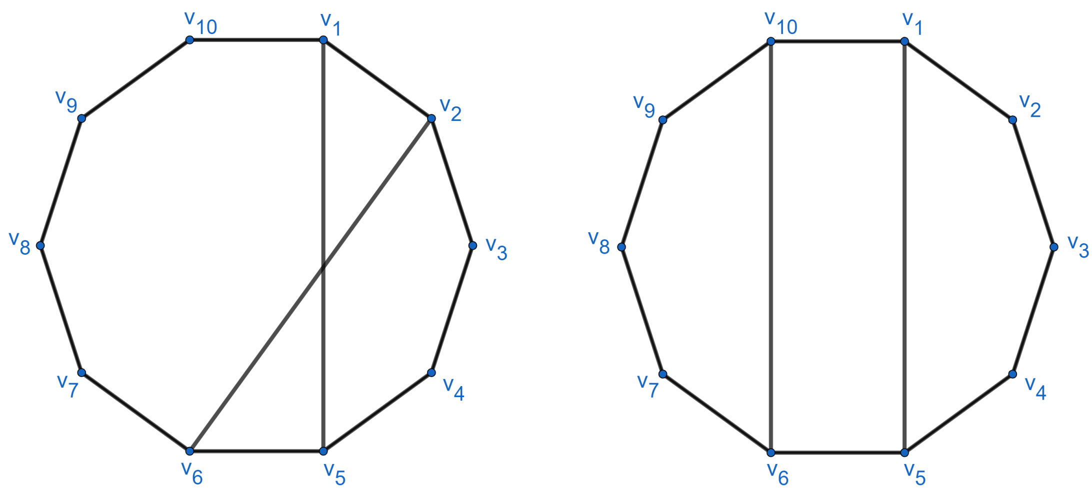
Bizonyítás:
Az is könnyen ellenőrizhető, hogy a gráfra teljesül a Hamilton-kör létezésének szükséges feltétele. Ahhoz, hogy belássuk, hogy nincs a gráfban Hamilton-kör, az alábbi megfigyelést használjuk fel:
A Petersen-gráfnak nincs olyan köre, mely kevesebb, mint 5 csúcsot tartalmaz.
Indirekt tegyük fel, hogy létezik egy C Hamilton-kör a Petersen-gráfban.
Tudjuk, hogy a gráf 3-reguláris, 10 csúcsból és 15 élből áll, így C 10 csúcsot és 10 élt tartalmaz, vagyis csupán 5 élt nem használ a Hamilton-kör, nevezzük ezeket "maradék éleknek". Megmutatjuk, hogy ha létezik Hamilton-kör a gráfban, akkor nem tudjuk behúzni ezt az 5 maradék élt úgy, hogy a megfigyelés fennálljon.
Tekintsük a C kört, melynek csúcsai sorra $(v_1,\ v_2, \ldots, v_{10})$. Ha a maradék éleket úgy használjuk fel, hogy minden csúcsot pontosan a körben vele szemközti csúccsal kötünk össze (például v_1-et v_6-tal), akkor keletkezik 4 hosszú kör $(v_1,\ v_6,\ v_5,\ v_{10},\ v_1)$.

Tehát így nem húzhatjuk be a maradék éleket.

Nézzünk egy másik módszert. Ha v_1 nem v_6-tal van összekötve, és nem is a $v_3,\ v_4,\ v_9$ vagy v_8 csúcsok valamelyikével (ekkor is keletkezne legfeljebb 4 hosszú kör), akkor v_5-tel, vagy v_7-tel köthetjük össze. Mindegy melyiket választjuk, hiszen a két eset szimmetrikus, így nem veszítünk a feladat általánosságából bármelyiket is nézzük.

Legyen $(v_1, v_5) \in E$. Most lássuk be, hogy v_6 csúcsra nem tudunk úgy maradék élt illeszteni, hogy továbbra is teljesüljön a megfigyelés. A v_6 csúcsot a $\{v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_8,\ v_9,\ v_{10}\}$ csúcsok valamelyikével kapcsolhatnánk össze maradék éllel. Ezek közül azonban $\{v_3,\ v_4,\ v_8,\ v_9\}$ csúcsokkal nem köthetjük össze a megfigyelés miatt (ekkor keletkezne legfeljebb 4 hosszú kör), így csupán a v_2, és v_{10} csúcsok közül választhatunk. Ha a v_2-vel kötjük össze, akkor $(v_1,\ v_5,\ v_6,\ v_2,\ v_1)$ 4 hosszú kört alkotna, ahogyan azt lent, a 2. ábra bal oldali alakzata mutatja. Amennyiben v_{10} csúccsal kötjük össze v_6-ot, akkor pedig a $(v_1,\ v_5,\ v_6,\ v_{10},\ v_1)$ 4 hosszú kört kapjuk (ezt a 2. ábra jobb oldali alakzata szemlélteti), így egyik csúcs sem megfelelő választás v_6 számára, ugyanakkor a gráf 3-reguláris, mellyel ellentmondásra jutottunk, vagyis valóban nem tartalmaz Hamilton-kört a Petersen-gráf.

$\square$



2. ábra.

3. Elégséges feltétel Hamilton-kör létezésére

Ebben a fejezetben a Hamilton-körök létezésének elégséges feltételeivel foglalkozunk. 4 fontos tételt és azok bizonyításait vesszük sorra, melyek elegendő feltételt biztosítanak számunkra, hogy tudjuk egy adott gráfban létezik Hamilton-kör.

3.1. Dirac-tétele

3.1.1 Tétel: (Dirac)
Ha az n csúcsú G egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor G-ben létezik Hamilton-kör. [1]

Bizonyítás:
Indirekt tegyük fel, hogy G egy olyan gráf, melyben minden csúcs foka legalább $\frac{n}{2}$ és mégsincs benne Hamilton-kör.

1. lépés: Telítés:

- Húzzunk be G-be további éleket, ha még lehet, amíg csak lehet úgy, hogy még mindig ne legyen benne Hamilton-kör.
- Amikor leállunk bármely összekötetlen csúcspárt összekötve már keletkezne Hamilton-kör.
- Amit kaptunk nem teljes gráf (hiszen abban van Hamilton-kör).

2. lépés: Hamilton-út megadása:

- Legyenek x és y összekötetlen csúcsok. Ekkor létezik x és y között Hamilton-út (az 1. lépés 2. pontja alapján). Ha több is van közöttük, rögzítsük le az egyiket, és ezek után ezt tekintsük a bizonyítás során.
- **Állítás:** Nincsenek kereszt-élek.

  3.1.1 Definíció: (Kereszt-él)
  Olyan élpár, mely a következőképpen néz ki: (x, u), (v, y) és v eggyel közelebb van x-hez a Hamilton-úton, mint u.

  ◇

  Bizonyítás:
  Ha mégis lenne kereszt-él, akkor lenne Hamilton-kör is: tekintsük az x és y csúcsok közötti Hamilton-utat, ha az x csúcstól elindulunk ezen a v csúcsig, majd innen a (v, y) élen elmegyünk az y csúcsba, onnan vissza a Hamilton-úton az u csúcsig, végül az (u, x) élen vissza az x csúcsba, akkor éppen egy Hamilton-körét kapjuk meg a gráfnak.

$\square$

3. lépés: Számoljuk meg x és y szomszédait!

Az y csúcs szomszédaira a következő felső becslés igaz:

$$n - 1 - deg(x) \geq deg(y). \quad (1)$$

Ugyanis y nem lehet önmaga szomszédja (hurokéleket nem engedünk meg), illetve az x szomszédai előtt eggyel lévők sem lehetnek y szomszédai, mert nem létezik kereszt-él. (Az y csúcs az x csúccsal sem szomszédos, de azt x szomszédai között vonjuk le, ugyanis a Hamilton-úton nézve x első szomszédja előtti csúcs maga az x csúcs.) Ezen (1) egyenletet átrendezve a következőt kapjuk:

$$n - 1 \geq deg(x) + deg(y) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \geq n. \quad (2)$$

A (2) egyenlőtlenség teljesülésének oka az, hogy a bizonyítás elején feltettük, hogy a G gráf minden csúcsának foka legalább $\frac{n}{2}$. Az egyenlőtlenség elejét és végét összevetve láthatjuk, hogy ellentmondásba ütköztünk, vagyis valóban létezik ezen G gráfban Hamilton-kör.

$\square$

3.1.1 Megjegyzés:
A bizonyítás során valójában nem is használtuk ki, hogy minden csúcs fokszámára teljesül, hogy legalább $\frac{n}{2}$, csupán annyit, hogy bármely kettő összekötetlen x, y csúcspárra igaz, hogy $deg(x) + deg(y) \geq n$, ez vezet a következő tételre.

3.1.2 Tétel: (Ore)
Ha G egy n csúcsú egyszerű gráf, melynek bármely kettő összekötetlen x, y csúcspárára teljesüljön, hogy

$$deg(x) + deg(y) \geq n,$$

akkor G tartalmaz Hamilton-kört. [1]

Mivel a Dirac-tétel bizonyítása során csak az Ore feltételt használtuk ki, így lényegében az Ore-tétel helyességét láttuk be. Ugyanakkor az Ore feltétel gyengébb a Dirac feltételnél, mivel kevesebb dolgot követel meg, viszont ugyanarra a következtetésre jut, azaz arra, hogy a gráf tartalmaz Hamilton-kört, így Ore-tétele erősebb, vagyis maga után vonja a Dirac-tétel igazságát is.

3.2. Pósa-tétele

3.2.1 Tétel: (Pósa)

Legyen G egy egyszerű gráf, melynek fokszámai nagyság szerint sorbarendezve a következők: $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$. Ekkor, ha minden $k < \frac{n}{2}$ indexre teljesül, hogy $d_k \geq k+1$, akkor G-ben van Hamilton-kör. [1]

A tétel helyességét a következő részben látjuk be egy másik, a Pósa-tételnél erősebb tétel segítségével. Az alábbiakban a következő állítást igazoljuk:

3.2.1 Állítás:

Pósa-tételből következik Ore-tétele.

Bizonyítás:

Az állítás szerint Pósa-tétele erősebb Ore-tételénél, vagyis gyengébb a feltétele, így fennáll, hogy Ore feltételéből következik Pósa feltétele. Ez alapján igazoljuk az állítás helyességét.

Indirekt tegyük fel, hogy létezik egy olyan G egyszerű gráf, melynek n csúcsa van és teljesül rá az Ore feltétel, de a Pósa feltétel nem, azaz $\exists k < \frac{n}{2}$, melyre $d_k \leq k$. Rögzítsük le ezt a k-t. Az eddigi feltevésekből tudjuk, hogy

$$d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_k \leq k < \frac{n}{2},$$

ezért egyértelműen adódik, hogy ha az első k darab legkisebb fokszámértékhez tartozó csúcs közül valahogyan választunk kettőt, akkor azok fokszámainak az összege biztosan kisebb lesz n-nél. Ugyanakkor Ore feltétele teljesül (bármely kettő összekötetlen x, y csúcspárra $deg(x) + deg(y) \geq n$), vagyis ezen k darab csúcs páronként szomszédos kell, hogy legyen egymással, így egy k csúcsú teljes részgráfot alkotnak. A feltétel szerint ezen csúcsok fokszáma legfeljebb k, és a teljes részgráf miatt már tudjuk, hogy legalább $k-1$, azaz ezen csúcsok mindegyikének legfeljebb egy további csúcs lehet szomszédja a maradék $n-k$ csúcsból.

A $k < \frac{n}{2}$ feltételből következik, hogy $n-k > k$, ezért ezen maradék $n-k$ csúcs között biztosan van olyan csúcs, mely egyik csúccsal sem szomszédos az előbbi k csúcs közül, vagyis ezen csúcsnak a fokszáma legfeljebb $n-k-1$ (egyszerű gráf révén önmagával nem lehet szomszédos). Legyen egy ilyen csúcs t. Mivel t-t nem köti össze él az első k csúcs egyikével sem, ezért t-re és valamely $1 \leq l \leq k$ csúcs fokszámára kellene, hogy teljesüljön Ore feltétele, azonban a következő lesz igaz:

$$d_l + d_t \leq k + n - k - 1 = n - 1.$$

Ezzel ellentmondásra jutottunk, vagyis az eredeti feltevés helyes volt, miszerint Ore feltételéből következik Pósa feltétele, vagyis a Pósa-tételéből következik Ore-tétele. [6]

$\square$

3.2.1 Megjegyzés:
Pósa-tétele lényegében azt mondja, hogy ha egy egyszerű gráfban a növekvően sorbarendezett csúcsok között a kis indexűeknek is viszonylag nagy már a fokszáma (az indexénél nagyobb), akkor a gráf tartalmaz Hamilton-kört.
A következő részben egy olyan tételt mondunk ki és látunk be, melyben a kis indexű csúcsok fokszámai nem nagyok (legfeljebb az indexükkel megegyező méretű), ugyanakkor ebből következően a sorrendben a "szimmetrikus párjuk" fokszáma viszont nagy (n csúcsú gráf d_k csúcsának szimmetrikus párjának tekintsük most a d_{n-k} csúcsot), akkor a gráf tartalmaz Hamilton-kört.

3.3. Chvátal-tétele

3.3.1 Tétel: (Chvátal)
Tekintsünk egy n csúcsú G egyszerű gráfot. Ha ezen G gráf növekvően rendezett fokszámaira ($d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$) teljesül, hogy $d_k \leq k < \frac{n}{2} \Rightarrow d_{n-k} \geq n-k$, akkor G tartalmaz Hamilton-kört. [1]

Bizonyítás:
Indirekt tegyük fel, hogy G teljesíti a Chvátal feltételt, de nem tartalmaz Hamilton-kört, valamint "telített" a gráf, vagyis végrehajtottuk ismét a Dirac-tétel bizonyításának 1. lépését, tehát bármely két nem szomszédos csúcsot egy éllel összekötve már lenne Hamilton-kör a gráfban.
A Dirac-tétel bizonyítása során kapott eredményeket most is felhasználjuk, tehát igaz, hogy bármely két összekötetlen csúcs között létezik Hamilton-út, illetve minden ilyen u, v csúcspárra teljesül, hogy

$$d(u) + d(v) \leq n - 1. \tag{1}$$

Ha az állna fent, hogy $d(u) + d(v) \geq n$, akkor a tétel bizonyítása kész is lenne, ugyanis teljesülne az Ore-feltétel.
Legyen u és v két olyan nem szomszédos pont, melyekre

$$d(u) + d(v) \text{ maximális} \tag{2}$$

és $u < v$ (ezzel nem veszítünk a feladat általánosságából), tehát

$$d(u) \leq d(v) \text{ és } k := d(u), \tag{3}$$

amire teljesül, hogy

$$k < \frac{n}{2} \tag{4}$$

az (1) miatt.
Rögzítsünk le most is egy Hamilton-utat az u és v csúcsok között. Ekkor ezen Hamilton-úton minden u_{j-1} csúcsra teljesül, hogy ha az u szomszédos u_j-vel, akkor v nem lehet szomszédos u_{j-1}-gyel (hiszen az kereszt-él lenne, mely Hamilton-kört eredményezne). Ezen u_{j-1} csúcsok foka legfeljebb k lehet, hiszen k darab ilyen csúcs van az u-ból v-be vezető Hamilton-úton ($d(u) = k$, és az u szomszédait megelőző csúcsokat tekintjük), valamint ezek bármelyikét választhattuk volna v párjának, de u választása miatt tudjuk, hogy ezen csúcsok fokszáma nem haladja meg u fokszámát, azaz k értékét. Vagyis van k darab legfeljebb k fokú csúcsa a gráfnak, és mivel a fokszámok növekvően vannak rendezve, ezért következik, hogy

$$d_k \leq k. \tag{5}$$

Tekintve, hogy az u csúcsnak k szomszédja van, így további $n-k-1$ darab csúccsal nincs összekötve. A (2) tulajdonságot kihasználva kapjuk, hogy a maradék $n-k-1$ csúcsnak a foka legfeljebb $d(v)$ lehet. Az (1) és (3) tulajdonságok alapján:

$$d(u) \leq d(v) \leq n - 1 - k.$$

Ezek szerint, figyelembe véve a v csúcsot is, legalább $n-k$ darab csúcs van, melyeknek foka legfeljebb $n - 1 - k$ lehet, azaz

$$d_{n-k} \leq n - 1 - k. \tag{6}$$

Vagyis nem teljesül a Chvátal feltétel (a (4), az (5) és (6) tulajdonságot összevetve), melyről feltettük, hogy fennáll, így végül ellentmondásra jutottunk, tehát G-nek valóban tartalmaznia kell Hamilton-kört. [7]

$\square$

3.3.1 Megjegyzés:
Észrevehető, hogy ha fennáll a Pósa feltétel, akkor teljesül a Chvátal feltétel is, ugyanis ha a $k < \frac{n}{2}$-re $d_k \geq k+1$ igaz, akkor a Chvátal feltétel $d_k \leq k < \frac{n}{2}$ része sosem áll fenn. Tehát a Pósa feltétel erősebb a Chvátal feltételnél, vagyis Chvátal-tételéből következik Pósa-tétele, így Chvátal-tételének igazolása után már kijelenthetjük a Pósa-tétel helyességét is.

3.4. Bondy-tétele

3.4.1 Tétel: (Bondy feltétel:)
Legyenek egy n csúcsú G egyszerű gráf fokszámai növekvő sorba rendezve: $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$. Amennyiben ezekre teljesül, hogy $d_l \leq l$ és $d_k \leq k$-ból következik, hogy $d_l + d_k \geq n$ $(k \neq l)$, akkor G tartalmaz Hamilton-kört. [1]

Bizonyítás:
Vegyünk egy G egyszerű gráfot, melyre az alábbiak igazak:

$$d_k \leq k < \frac{n}{2}, \tag{1}$$

$$l = n - k \Rightarrow n = k + l. \tag{2}$$

Ekkor két eset lehetséges: vagy $d_l \leq l$, vagy $d_l \geq l$.
Az első esetben teljesül a tétel feltétele, vagyis fennáll a következő:

$$d_k + d_l \geq n = k + l, \tag{3}$$

kihasználva a (2) egyenlőséget is. Most a (3) egyenletet átrendezve és az (1) feltevést felhasználva kapjuk, hogy:

$$d_l \geq l. \tag{4}$$

Így eljutottunk a második esethez, tehát $d_l \geq l$ teljesül biztosan. Ekkor viszont a (2) alapján

$$d_{n-k} \geq n - k \tag{5}$$

egyenlethez jutunk. Ekkor észrevehetjük, hogy teljesül a Chvátal-feltétel (fennáll az (1), illetve levezettük a (5)-t, ami pont megegyezik a Chvátal-feltétellel), melyről az iméntiekben láttuk be, hogy teljesülése esetén létezik Hamilton-kör a gráfban.
Ezek alapján már egyértelműen láthatjuk, hogy Bondy-feltételéből is következik, hogy G-ben létezik Hamilton-kör.

□

4. Állítások és bizonyítások - avagy mikor van Hamilton-köre egy gráfnak?

Ebben a fejezetben különböző feltevéseket teszünk gráfok csúcsszámára és azok fokszámaira vonatkozóan, és vizsgájuk, hogy ezen feltételek mellett mikor tartalmaznak Hamilton-kört.
Az alábbi fejezet valamennyi állítása és bizonyítása az [1]-es forrás alapján készült.

4.1. Fokszámra vonatkozó feltevések

A következőkben a fokszámokra teszünk fel különböző feltételeket, és ezek alapján vizsgáljuk, hogy mikor mondhatjuk azt, hogy egy gráfoknak van Hamilton-köre.
4.1.1 Állítás:
Legyen G olyan n pontú egyszerű gráf, melyben minden csúcs fokszáma legalább $\frac{n+q}{2}$. Ekkor teljesül, hogy bármely diszjunkt utakat alkotó q élből álló F halmazt tartalmaz egy Hamilton-kör.
Bizonyítás:
Indirekt tegyük fel, hogy G egy olyan egyszerű gráf, melyben nincsen F élein áthaladó Hamilton-kör, de ugyanakkor telített, vagyis bármely további élt hozzávéve már lenne benne ilyen, azaz F élein áthaladó Hamilton-kör. (Egy teljes gráfban mindig található Hamilton kör, mely adott diszjunkt útjain halad át a gráfnak.) A Dirac tétel bizonyításához hasonlóan legyen x és y két olyan csúcsa a gráfnak, melyek nincsenek éllel összekötve. Ekkor tudjuk, hogy $E(G) + (x, y)$ élhalmazban már létezik Hamilton-kör, mely átmegy az F halmaz összes élén, vagyis G-ben létezik Hamilton-út az x és y csúcsok között. Jelöljük ezt $P = (x = v_1, v_2, \ldots, v_n = y)$-nal, és legyenek x szomszédai: $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$, ahol $(2 = i_1 < \cdots < i_k < n)$ (tudjuk, hogy $(x, y) \notin E(G),\ v_n = y$, ezért $i_k < n$).
A $v_{i_\nu - 1}$ egy x-szel szomszédos pontot (v_{i_ν}-t) megelőző pont. Ez csak abban az esetben lehet szomszédos y-nal, ha $(v_{i_\nu-1}, v_{i_\nu}) \in F$, ugyanis az $(x, v_{i_\nu}), (v_{i_\nu-1}, y)$ pár egy kereszt-él lenne a gráfban, mely Hamilton-kört eredményez, de ebben az esetben ezen kör nem megy át F összes élén (az $(v_{i_\nu-1}, v_{i_\nu})$ él kimaradna). Ekkor y szomszédai maximum $n-1-k+q$ darab csúcs lehet (önmaga és x szomszédait eggyel megelőző csúcsok nem lehetnek, kivéve ha azok F-ben vannak). Ekkor a következő becslés áll fenn:

$$d(y) + d(x) \leq n - 1 - k + q + k = n + q - 1$$

Ez azonban ellentmond a feladat feltevésének, miszerint G-ben minden csúcs foka legalább $\frac{n+q}{2}$, ami alapján x és y fokszámösszege legalább $n+q$ kellene, hogy legyen. Tehát az indirekt bizonyítás során ellentmondásra jutottunk, vagyis az eredeti feltevés helyes volt, azaz G-ben valóban létezik F összes élén áthaladó Hamilton-kör.

□

4.1.2 Állítás:
Legyen G egy olyan n-reguláris egyszerű gráf, melynek $2n+1$ pontja van. Ekkor G-re teljesül, hogy tartalmaz Hamilton-kört.

4.1.1 Megjegyzés:
Ez az állítás tekinthető a Dirac-tétel egy javításának is, ugyanis ha a gráfnak $2n$ pontja lenne, akkor teljesülne a Dirac feltétel, de itt most gyengítünk a feltételen, és így is igazoljuk, hogy a gráf tartalmaz Hamilton-kört.

Bizonyítás:
Először is vegyünk hozzá a G gráfhoz egy új y pontot, és kössük össze az eredeti gráf összes pontjával. Ekkor a keletkezett gráfnak $2n+2$ pontja van és fennáll, hogy minden pont foka legalább $n+1$, tehát teljesül a Dirac tétel feltétele, vagyis az így kapott gráf tartalmaz Hamilton-kört. Ha most töröljük az y pontot, akkor visszakapjuk az eredeti G gráfot, ugyanakkor láthatjuk, hogy létezik benne egy Hamilton-út, jelöljük ezt $P = (x_0, \ldots, x_{2n})$-nel.
Indirekt tegyük fel, hogy G nem tartalmaz Hamilton-kört. Ekkor a korábbiak alapján tudjuk, hogy kereszt-éleket sem tartalmazhat, vagyis ha $(x_0, x_i) \in E(G)$, akkor $(x_{i-1}, x_{2n}) \notin E(G)$. Azaz az x_0 és x_{2n} csúcsokat tekintve, mivel nem szomszédosak egymással, mindkét csúcs szomszédai ugyanazon $2n-1$ csúcsból kerülnek ki. Ha először kiválasztjuk x_0 csúcs n darab szomszédját, akkor az őket 1-gyel megelőző n darab pontot nem választhatjuk x_{2n} szomszédjának, vagyis egyértelműen adódik mely pontok lehetnek x_{2n} szomszédai.
Tekintsük elsőnek azt az esetet, amikor az x_0 csúcs szomszédai az x_k csúcsok, $k = 1, \ldots, n$, illetve x_{2n} csúcs szomszédai x_l csúcsok, $l = n, \ldots, 2n-1$. Ekkor, mivel x_0 és x_{2n} is szomszédos x_n-nel, és $deg(x_n) = n$, ezért létezik egy olyan x_i pont, $1 \leq i < n$, melyre $(x_i, x_n) \notin E(G)$, tehát x_i-nek biztosan van legalább egy szomszédja az $x_{n+1}, \ldots, x_{2n-1}$ csúcsok között, legyen ez x_j. Na de ekkor az alábbi kör éppen egy Hamilton-kört ad meg:

$$(x_i, x_{i-1}, \ldots, x_0, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{j-1}, x_{2n}, x_{2n-1}, \ldots, x_j)$$

Most nézzük azt az esetet, amikor $(x_0, x_{i+1}) \in E(G)$, $(x_0, x_i) \notin E(G)$ és $i \in [1, 2n-1]$. Ekkor a fenti érvelés alapján $(x_{i-1}, x_{2n}) \in E(G)$ adódik, vagyis az

$$(x_{i-1}, \ldots, x_0, x_{i+1}, \ldots, x_{2n})$$

egy $2n$ hosszú kör. Jelöljük $C = (y_1, y_2, \ldots, y_{2n})$-nel G egy $2n$ hosszú körét, és legyen y_0 a körből kimaradó csúcs. Tudjuk, hogy C maximális (mivel feltettük, hogy G nem tartalmaz Hamilton-kör), így y_0 nem lehet szomszédos C-ben két egymás melletti csúccsal, ugyanis ekkor minden gond nélkül beilleszthetnénk a körbe. Továbbá tudjuk, hogy minden csúcs foka n, ezért feltehető, hogy y_0 C minden második pontjával szomszédos, például $y_1, y_3, \ldots, y_{2n-1}$ csúcsokkal. Viszont ha y_0-t kicseréljük bármely más páros indexű ponttal, azaz y_{2i}-vel valamely $i = 1, \ldots, n$-re, akkor szintén egy maximális kört kapunk, illetve láthatjuk, hogy ezen pont szomszédai is meg kell, hogy egyezzenek y_0 szomszédaival. Így az y_1 csúcs szomszédos az $y_0, y_2, \ldots, y_{2n}$ pontokkal, vagyis $deg(y_1) \geq n + 1$, mely ellentmond annak, hogy G n-reguláris. Ezek szerint az eredeti feltevés valóban igaz volt, vagyis G tartalmaz Hamilton-kört.

$\square$

4.1.2 Megjegyzés:
Ha azt tennénk fel, hogy ezen G n-reguláris gráfnak $2n+2$ pontja van, akkor előfordulhat, hogy G-t két darab K_{n+1} gráf alkotja, vagyis nem összefüggő, így már nem lenne igaz, hogy tartalmaz Hamilton-kört.

Tekintsünk egy olyan állítást is, melyben Hamilton-út létezését látjuk be.

4.1.3 Állítás:
Legyen G egy olyan egyszerű $n \geq 2$ pontú gráf, melyben minden csúcs foka legalább $\frac{n+1}{2}$. Ekkor G bármely két pontja között van Hamilton-út.

Bizonyítás:
Legyen $V(G)$ tetszőleges két pontja x és y, róluk fogjuk belátni, hogy összeköthetők egy Hamilton-úttal.
Feltehetjük, hogy $(x, y) \in E(G)$, ugyanis egy esetleges plusz él hozzávétele a gráfhoz nem befolyásolja az állítás feltételét és következményét sem. Tekintsünk egy olyan G' gráfot, melyet úgy kapunk G-ből, hogy felosztjuk ezen (x, y) élt egy z ponttal. Ekkor látható, hogy a kapott $n+1$ pontú G' gráfban pontosan akkor van Hamilton-kör, ha az eredeti G-ben létezik Hamilton-út az x és y csúcsok között.
G' gráf fokszámaira a következő teljesül: $2 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_{n+1}$, ahol $d_2, \ldots, d_{n+1}$ az eredeti G gráf csúcsainak fokai, a z csúcs foka pedig 2. Mivel $d_2 > \frac{n}{2}$ az állítás alapján, azaz $d_2 \geq \frac{n+1}{2}$, így teljesül a Pósa feltétel a G' gráfra ($k = 2 < \frac{n'}{2}$-re $d_2 \geq \frac{n+1}{2}$(+1 a z csúcs) $\geq k + 1 = 3$, ahol $n' = n + 1$ a G' gráf csúcsszáma), amiből következik, hogy G'-ben létezik Hamilton-kör, vagyis G-ben van az x és y csúcsok között Hamilton-út.

$\square$

Az eddigiektől eltérően most nézzünk egy példát arra, hogy irányított gráfban milyen feltétel teljesülése esetén tudható, hogy tartalmaz irányított Hamilton-kört a gráf.

4.1.4 Állítás:
Tekintsünk egy egyszerű, n pontú G irányított gráfot. Ha ezen G gráfra teljesül, hogy minden pontjának befoka és kifoka is legalább $\frac{n}{2}$, akkor G tartalmaz irányított Hamilton-kört.

Bizonyítás:

1. lépés: Tekintsünk G-ben egy leghosszabb $C = (x_1, \ldots, x_m)$ irányított kört, és lássuk be, hogy $|V(C)| > \frac{n}{2}$ teljesül.
Ehhez vegyünk egy $Q = (v_0, \ldots, v_p)$ leghosszabb irányított utat, és legyenek $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ azon pontjai G-nek, melyekre igaz, hogy $(v_{i_\nu}, v_0) \in E(G), \forall \nu = 1, \ldots, k$. Ekkor ezen csúcsok mindegyikére igaz, hogy részei a Q irányított útnak, hiszen, ha lenne köztük olyan, amelyik nem, akkor azt betehetnénk az út elejére, mivel belőle vezet él v_0-ba. Az állítás feltétele alapján $i_k \geq \frac{n}{2}$, ezért a $(v_0, \ldots, v_{i_k})$ irányított kör hossza legalább $\frac{n}{2}$, így a C hossza is (mely egy maximális köre G-nek) nagyobb, mint $\frac{n}{2}$.

2. lépés: Indirekt tegyük fel, hogy C nem egy irányított Hamilton-kör a G gráfban. Tekintsünk egy $P = (y_0, \ldots, y_l)$ maximális utat a $V(G) - V(C)$ csúcshalmazon. Ekkor legalább $\frac{n}{2} - l$ darab olyan u, nem P-beli pontja van a gráfnak, melyekre $(u, y_0) \in E(G)$ (hiszen y_0-nak legfeljebb l darab P-beli szomszédja lehet). Ezek mindegyikéről tudható, hogy a C irányított körön helyezkedik el, különben hozzávettük volna őket a P leghosszabb irányított úthoz. Jelöljük ezeket $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_t})$-vel, ahol $t \geq \frac{n}{2} - l$. Hasonlóan igaz ez minden u' pontra, melyekre $(y_l, u') \in E(G)$, jelöljük ezen csúcsokat $x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}$-sel, ahol $s \geq \frac{n}{2} - l$.

Észrevehető, hogy a $C(x_{i_\nu}, x_{j_\mu})$ ív hossza legalább $l + 2$ kell hogy legyen, amennyiben $x_{i_\nu} \neq x_{j_\mu}$, különben ezen ívet helyettesíthettük volna a P úttal a következőképpen:

$$(x_{i_\nu}, y_0) + P + (y_l, x_{j_\mu}),$$

ezzel egy hosszabb kört kapva. Így tehát igaz, hogy ha tekintjük C egy x_{i_ν}-ben induló $l + 1$ hosszú C_ν ívét ($\nu \in [1, t]$), akkor $\forall \mu \in 1, \ldots, s$-re

$$x_{j_\mu} \notin \bigcup_{\nu=1}^{t} V(C_\nu).$$

Az egyértelműen adódik, hogy $|\bigcup_{\nu=1}^{t} V(C_\nu)| \geq t + l$, melyből következik, hogy

$$s \leq m - t - l, \tag{1}$$

mellyel ekvivalens a következő:

$$m \geq s + t + l. \tag{2}$$

Ebbe behelyettesítve, hogy s és t legalább $\frac{n}{2} - l$ nagyságú kapjuk, hogy

$$m \geq n - l \tag{3}$$

Ugyanakkor azt is tudjuk, hogy a G gráf $n - m$ csúcsából a P út $l + 1$ csúcsot használ, vagyis

$$l + 1 \leq n - m, \tag{4}$$

azaz

$$m \leq n - l - 1. \tag{5}$$

A (3)-as és az (5)-ös pont alapján ellentmondásra jutottunk, így az eredeti feltevés igaz volt, vagyis C valóban egy irányított Hamilton-köre a G gráfnak.

□

4.2. Összefüggőségre vonatkozó feltevések

Az alábbi állításokban a gráfok összefüggőségéről teszünk fel valamit, és ezek mellett szeretnénk igazolni, hogy tartalmaznak Hamilton-kört.

4.2.1 Definíció: (*G* gráf *k*-összefüggő)

Egy G gráfot k-szorosan összefüggőnek nevezünk, ha legalább $k + 1$ pontja van, és G-ből bárhogyan is hagyunk el k-nál kevesebb pontot, az összefüggő marad.

◇

4.2.1 Állítás:

Egy G egyszerű gráfban, mely k-szorosan összefüggő és nem tartalmaz $k+1$ méretű független ponthalmazt ($k \geq 2$) van Hamilton-kör.

Bizonyítás:

Az állítás indirekt módon látható be.

1.lépés: Tekintsük G egy maximális C körét, és tegyük fel, hogy ezen C nem Hamilton-köre a G gráfnak. Mivel C nem alkot Hamilton-kört, ezért a $V(G) - V(C)$ csúcshalmaz nemüres, így legyen G_1 ennek egy komponsense. Jelöljük $x_1, \ldots, x_s$-sel a C kör azon pontjait, melyek szomszédosak a G_1 komponenssel. Ekkor C maximalitása miatt nem lehetséges az, hogy valamely x_i és

x_j szomszédos legyen a C körön, ahol $i \neq j$, $\forall i, j \in \{1, \dots, s\}$, különben ezek G_1-beli szomszédaival bővíthető lenne a C kör (x_i, x_j) íve. Ebből következik, hogy az $\{x_1, \dots, x_s\}$ csúcshalmaz szétválasztja a G gráf csúcsait, vagyis ha ezeket törölnénk G-ből, az már nem lenne összefüggő. Mivel az állítás szerint G k-szorosan összefüggő, így $s \geq k$ adódik.

2. lépés: Haladjunk végig C-n egy tetszőleges irányban, és jelöljük $y_1, \dots, y_s$-sel az $x_1, \dots, x_s$ pontokat közvetlen követő csúcsait a C körnek.

Állítás: $y_1, \dots, y_s$ független ponthalmazt alkot.

4.2.2 Definíció: (Független ponthalmaz)
Az $X \subseteq V(G)$ csúcshalmazt független ponthalmaznak nevezzük, ha X bármely két pontjára teljesül, hogy nem szomszédosak.

◇

Bizonyítás: Indirekt, tegyük fel, hogy y_i és y_j ($i \neq j$ és $i, j \in \{1, \dots, s\}$) szomszédosak. Ekkor hagyjuk el a C körből az (x_i, y_i) és (x_j, y_j) éleket, és vegyük be az (y_i, y_j) élet, valamint azokat, melyek az x_i és x_j csúcsokat összekötik a G_1 komponens megfelelő csúcsain keresztül. Az így kapott kör hosszabb, mivel plusz csúcsokat vettünk hozzá a G_1-ből, ami ellentmond C maximalitásának, vagyis az $y_1, \dots, y_s$ valóban független ponthalmaz.

3. lépés: Az $y_1, \dots, y_s$ csúcsok közül semelyik sem lehet szomszédos G_1-gyel, ugyanis ezen pontok mindegyike szomszédos valamely x_i-vel ($i = 1, \dots, s$), és az 1. lépésben beláttuk, hogy nem lehet a C körön két olyan pont, melyek szomszédosak és mindkettőnek van G_1-beli szomszédja is. Így ha veszünk egy y_0 pontot a $V(G_1)$ csúcshalmazból, akkor a következő $S = \{y_0, y_1, \dots, y_s\}$ független ponthalmaz lesz. Viszont $|S| = s + 1 \geq k + 1$, ami ellentmond az állításnak, miszerint a G gráf nem tartalmaz $k + 1$ méretű független csúcshalmazt. Ezek alapján már látható, hogy az eredeti feltevés igaz volt, tehát C valóban Hamilton-kör.

□

4.3. Legalább k hosszúságú kör keresése

A fejezet további állításaiban kicsit enyhítünk a feltételeken, így nem feltétlenül a (lehetséges leghosszabb) Hamilton-kör létezését szeretnénk belátni, hanem csak egy legalább k hosszúságú kört kívánunk keresni.
Először tekintsünk egy segédállítást, melynek eredményét a következőkben még felhasználjuk.

4.3.1 Állítás:
Ha G egy olyan egyszerű n pontú gráf, melynek minden csúcsának foka legalább k, akkor G-ben található legalább $k+1$ hosszú kör.

Bizonyítás:
Vegyünk egy $P = (x_0, x_1, \ldots, x_m)$ leghosszabb utat a G gráfban, és tekintsük ennek az útnak az x_0 csúcsát. Ezen pontnak minden szomszédja a P úton kell, hogy legyen, mivel ha lenne egy (x_0, x_j) éle a gráfnak úgy, hogy x_j nem része P-nek, akkor x_j-t a P út elejére téve egy hosszabb utat kapnak. Az állítás alapján $deg(x_0) \geq k$, így létezik egy x_i csúcs a P úton, melyre $(x_0, x_i) \in E(G)$ és $k \leq i \leq m$. Ekkor a $C = (x_0, \ldots, x_i)$ körnek $i+1 \geq k+1$ csúcsa van, mellyel az állítást beláttuk.

$\square$

4.3.2 Állítás:
Legyen G egy egyszerű, n pontú gráf, melynek minden csúcsának foka legalább k. Ha G-re teljesül, hogy 2-szeresen összefüggő, akkor G-ben vagy található egy legalább $2k$ hosszúságú kör, vagy G tartalmaz Hamilton-kört.

Bizonyítás:
Legyen ismét $P = (x_0, \ldots, x_m)$ egy leghosszabb útja a G gráfnak.

1.lépés: Tegyük fel, hogy létezik olyan x_i és x_j pontjai a gráfnak, melyekre x_0 szomszédos x_j-vel és x_m szomszédos x_i-vel, továbbá $i < j$. Az előző állítás bizonyítása alapján ezen x_i és x_j csúcsok részei a P útnak. Tegyük fel valamint azt is, hogy a $j-i$ különbség minimális az ilyen indexpárok között, és tekintsük a $C = (x_0, \ldots, x_i, x_m, x_{m-1}, \ldots, x_j)$ kört.

- Ha $j = i+1$, akkor ezen C kör hossza $m+1$, és szükségképpen Hamilton-kör, különben lenne a C körön kívül egy olyan y pont, mely szomszédos C-vel és a P útnál egy hosszabb utat eredményezne. (Tegyük fel, hogy y szomszédos a C kör x_l pontjával. Ekkor azon P' út, mely az (y, x_l) éllel kezdődik, és végigmegy a C kör élein egészen az x_{l-1} csúcsig, egy P-nél hosszabb út lesz, mely a feltevés szerint nem lehetséges, hiszen P a leghosszabb út a G gráfban.)
- Most tegyük fel, hogy $j \geq i+2$. Ekkor minden olyan x_l pontra igaz, melyre $i+1 \leq l \leq j-1$, hogy nem szomszédos sem x_0-lal, sem x_m-mel, különben nem állna fenn $j-i$ minimalitása. Ekkor a C kör tartalmazza az x_m csúcsot, az x_m csúcs összes szomszédját (hiszen minden szomszédja a P úton van az előző állítás alapján, méghozzá az $[x_i, x_j]$ intervallumon kívül, a C körön pedig bejárjuk ezen csúcsokat) és a P út minden olyan x_ν pontját, melyre $x_{\nu+1}$ szomszédos x_0-lal kivéve az x_{j-1} csúcsot (ugyanis a feltételek alapján

az előfordulhat, hogy valamely csúccsal x_0 és x_m is szomszédos (ezeket már számoltuk), ezért nem tekinthetjük x_0 közvetlen szomszédait, de az x_0 pont szomszédait megelőző csúcsokat igen, hiszen ezekkel x_m biztosan nem szomszédos $j-i$ minimalitása miatt, illetve az x_{j-1} az $[x_i, x_j]$ intervallumba esik, azt pedig nem érinti a C kör). Ezen csúcsokat összeadva a C kör legalább $2k$ hosszúságú lesz, ugyanis x_m-nek és x_0-nak is legalább $k-k$ szomszédja van.

2. lépés: Nézzük azt az esetet, amikor az x_0 csúcs utolsó szomszédja, legyen ez x_i, előbb van a P úton, mint az x_m csúcs első, x_j szomszédja (ezen pontok akár egybe is eshetnek $(i \leq j)$). Tekintsük a $C_1 = (x_0, \ldots, x_i)$ és $C_2 = (x_j, \ldots, x_m)$ köröket. Ezekről tudjuk az előző állítás alapján, hogy legalább $k+1$ hosszúak. Mivel a G gráf kétszeresen összefüggő, ezért C_1-et és C_2-t szükségképpen P_1 és P_2, két független út köti össze, hiszen, ha ezen utaknak lenne közös pontja, akkor azt törölve a gráf egyből két részre esne szét, vagyis nem teljesülne a kétszeres összefüggőség.
Mivel most $P = (x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_m)$, ezért x_i és x_j között vezet egy út, így első esetben feltehetjük, hogy P_1 és P_2 közül valamelyik ez.
Egy másik lehetséges eset, hogy P_1 és P_2 közül az egyik x_i-ben kezdődik. Ha nem így lenne, akkor az $(x_i, \ldots, x_j)$ úton haladva előbb-utóbb vagy elérnénk C_2-t (ha ezt az x_j pontban tesszük, akkor az első esetet kapjuk vissza), ekkor az x_i-től C_2-ig tartó út is lehet P_1 vagy P_2, vagy rálépünk P_μ ($\mu = 1, 2$) út egyik x_z csúcsára, ekkor helyettesíthetjük a P_μ út C_1-től x_z-ig tartó szakaszát az x_i-től x_z-ig tartó úttal. Hasonlóan belátható, hogy létezik olyan út is, mely független az előbb talált P_μ-től és x_j-ben végződik.
Mindkét esetben megadható úgy egy kör, mely P_1 és P_2 utakat használva összeköti C_1 és C_2 köröket, így hossza nagyobb, mint $2k$.

$\square$

4.3.3 Állítás:
Ha G olyan n pontú egyszerű gráf, melyben több, mint $\frac{k(n-1)}{2}$ él van $(2 \leq k < n)$, akkor G-ben található legalább $k+1$ méretű kör.

Bizonyítás:
Az állítás n szerinti indukcióval látható be.

- $n = 3$ esetén $k = 2$ adódik, ekkor a gráfnak legalább 3 éle van, így K_3, vagyis igaz az állítás.
- Tegyük fel, hogy $n-1$ csúcsig igaz az állítás.
- Most nézzük n csúcsra, és először tegyük fel, hogy létezik egy olyan x csúcsa G-nek, melynek foka legfeljebb $\frac{k}{2}$. Ekkor, ha ezt a csúcsot töröljük a gráfból,

akkor az így kapott $G' = G - x$ gráfnak legalább

$$\frac{k(n-1)}{2} - \frac{k}{2} = \frac{k(n-2)}{2}$$

éle van, mely az indukciós feltevés miatt tartalmaz egy legalább $k+1$ méretű kört, így az eredeti G gráf is kell, hogy tartalmazzon.
Ezek után nézzük azt az esetet, melyben minden csúcs foka legalább $\frac{k+1}{2}$, és tegyük fel, hogy G nem kétszeresen összefüggő, vagyis ha $G = G_1 \cup G_2$ előállítás fennáll, akkor $|V(G_1) \cap V(G_2)| \leq 1$ teljesül. Ekkor a következő lesz igaz:

$$|E(G_1)| + |E(G_2)| > \frac{k(n-1)}{2} \geq \frac{k(|V(G_1)| + |V(G_2)| - 2)}{2} =$$

$$= \frac{k}{2}(|V(G_1)| - 1) + \frac{k}{2}(|V(G_2)| - 1).$$

Ekkor $i = 1$ vagy $i = 2$ esetén fenn kell, hogy álljon az alábbi:

$$|E(G_i)| > \frac{k}{2}(|V(G_i)| - 1).$$

Mivel ez G-nek egy részgráfja, így tudjuk rá alkalmazni az indukciót, így ebben az esetben is igaz az állítás.
Végül tekintsük azt az esetet, amikor G kétszeresen összefüggő. Ekkor teljesülnek az előző állítás feltételei, vagyis ha minden csúcs foka legalább $k' = \frac{k+1}{2}$ és a gráf kétszeresen összefüggő, akkor tartalmaz egy legalább $2k' = 2 \cdot \frac{k+1}{2} = k+1$ méretű kört, mellyel az állítást beláttuk.

$\square$

4.3.1 Megjegyzés:

Megfigyelhető, hogy ha $k = n$ megengedett lenne, akkor egyértelmű lenne az állítás, hiszen G teljes gráf lenne, így tartalmazna Hamilton-kört.

5. Utazó ügynök probléma

Az utazó ügynök problémájában egy kereskedelmi utazónak adott városokba kell elmennie, mégpedig úgy, hogy minden várost csak egyszer látogat meg, majd az utazása végén visszatér oda, ahonnan elindult. Ekkor az útjára tekinthetünk úgy, hogy a meglátogatandó társok a gráf csúcspontjainak, míg a városok közötti útvonalak az éleknek felelnek meg. Minden útnak meghatározott útiköltsége van (mely szimmetrikus), így adódik, hogy több alternatív útvonal esetén a minimális költségű utat célszerű választani.
Legyen adott egy nemnegatívan élsúlyozott K_n teljes gráf ($c(e) \geq 0 \; \forall e \in E(K_n)$), melyben egy minimális költségű C Hamilton-kört keresünk, azaz $\min\limits_{C} \sum\limits_{e \in E(C)} c(e)$-t szeretnénk meghatározni. [8]

5.1. Algoritmusok

Az alábbiakban tekintsünk át néhány lehetséges szuboptimális megoldási módszert az utazó ügynök problémájára.
1. "Nearest neighbor" vagyis a legközelebbi szomszéd algoritmus:

- Tetszőlegesen válasszunk ki egy x csúcsot a teljes gráfból, jelöljük meg, mint már bevett csúcsot, majd nézzük meg a belőle kiinduló élek költségeit. Ezek közül vegyük hozzá C-hez azt az e élt, melynek minimális a költsége.

- A kiválasztott e él másik végpontját nevezzük y-nak. Jelöljük meg y-t is bejárt csúcsként, és most tekintsük a belőle kiinduló éleket, melyek még bejáratlan csúcsba mennek. Hasonlóan az x-hez, az y csúcsnál is a minimális költségűt vegyük hozzá C-hez.

- Ezt ismételjük, míg minden csúcsot be nem járunk és vissza nem térünk az x pontba. Ekkor megkaptuk egy C Hamilton-körét a K_n teljes gráfnak.

5.1.1 Megjegyzés:
Az így kapott C Hamilton-kör költsége: $S(C) = \sum\limits_{e \in E(C)} c(e)$ csupán egy felső korlát a minimális költségű Hamilton-körre. [8]

2. "Insertion methods" azaz beillesztési módszerek:

- Kiindulunk egy valamekkora körtúrából, ami még nem járja be az összes csúcsot.

- Kiválasztunk egy pontot és beszúrjuk az adott körtúrába a legolcsóbb módon.

- Az előző pontot ismételjük, míg minden csúcsot bejárunk.

  Például elindulunk egy háromszögből és kiválasztunk egy csúcsot. Megnézzük, hogy hova a legolcsóbb beszúrni ezt a kiválasztott pontot, majd beillesztjük, ezzel kapva egy négyszöget. Ezt követően kiválasztunk egy újabb csúcsot és beszúrjuk oda, ahova a legolcsóbb, így már egy 5 hosszú körtúránk van.
  A beszúrás során mindig 1 él kiesik az eddigi körből és 2 hozzáadódik, a kiválasztott csúcsot oda szúrjuk be, ahol ezen élek költségének különbsége minimális.

  Csúcs kiválasztásának módja:

  a, ***Legközelebbi:***
  Azt a csúcsot válasszuk, amelyiket a legeslegolcsóbb beszúrni, vagyis ami a már felállított körhöz a legkisebb kitérővel beilleszthető.

  b, ***Legtávolabbi:***
  Mindig a legmesszebbi csúcsot válasszuk ki, amit a legdrágább beszúrni, de a sétában oda szúrjuk be, ahova a legolcsóbb. Tehát elindulunk egy 1 csúcsú körből, kiválasztjuk a legmesszebbi pontot, ezzel kapunk egy 2 csúcsú túrát. Ezt követően válasszuk ki a tőlük legtávolabbi pontot, így már egy háromszöget kapunk, majd ezt folytatva egy négyszöget, stb.

5.1.2 Megjegyzés:
Megfigyelések alapján tipikusan a *b*, jobb megoldást ad, mint az *a*. Vagyis ha azt szúrjuk be, aminek a legolcsóbb beszúrása a legdrágább, az jobb lesz, mintha azt szúrnánk be, aminek a legolcsóbb beszúrása a legolcsóbb.

3. "Improving methods" azaz javítási módszerek:
Vegyünk egy tetszőleges bejárást, például az előzőek közül egyet, és azt próbáljuk meg lokálisan javítani.

a, ***2-opt:*** Ha a kapott bejárásban van két keresztező él, akkor azokat lecseréljük kettő rövidebbre, ha van ilyen a gráfban. Geometrialiag elképzelve egy négyszög átlóit próbáljuk meg lecserélni a négyszög két oldalára. Ezt addig folytatjuk, amíg tudjuk. Ezen algoritmusban 1 javítás keresése során minden élpárt végignézünk, vagyis a futási ideje 1 javításnak $O(|V|^2)$.

b, ***3-opt:*** A $2 - opt$ algoritmus további javítása. Ennek során 3 élet választunk ki, és ezeket próbáljuk meg átkötni, hogy rövidebb utakat kapjunk. Ilyen cseréket már nehezebb találni, egy javítás során a futasi idő $O(|V|^3)$.

4. Sorba állított élek algoritmusa:

- Rendezzük növekvő sorrendbe a teljes gráf éleit súlyuk szerint.
- Először válasszuk ki azon e élét a gráfnak, mely minmális súlyú, és vegyük hozzá a C körhöz, valamint jelöljük meg a két végpontját, és tartsuk számon, hogy hány olyan él indul ki belőlük, melyek már részei a C körnek.
- Ezt követően sorra úgy válasszunk ki éleket a gráf még ki nem választott élei közül, hogy az alábbiak teljesüljenek:
  1. Minimális súlyú.
  2. Egyik végpontja se legyen olyan csúcs, melyből már kiindul két él, amelyek a C kör részei.
  3. Ne alkossunk vele kört, amennyiben még nem tartalmaz n pontot a C kör.
- Ha kiválasztottuk már a gráf összes csúcsát, és az utolsó él bezárja a C kört, akkor C egy Hamilton-köre a gráfnak. [8]

6. Hamilton-kör NP-teljessége

A következő fejezetben belátjuk, hogy a Hamilton-kör eldöntésének problémája NP-teljes, valamint megvizsgáljuk más eldöntési problémák NP-teljességét is, melyek bizonyítását a Hamilton-körökére vezetjük vissza.
Először tekintsünk át néhány fogalmat, melyek a fejezet megértéséhez szükségesek.

6.0.1 Definíció: (P)
A P olyan ***polinomiális osztályt***, vagy másnéven ***hatékonyan megoldható problémák*** osztályát jelenti, melybe azon eldöntési problémák tartoznak, amikre létezik egy olyan A algoritmus, ami jól megoldja őket, és létezik egy olyan c konstans is, hogy A legfeljebb $c \cdot |x|^c$ lépést tesz meg bármely x input esetén, ahol $|x|$ az input mérete.

◇

6.0.2 Definíció: (NP)
Az NP olyan eldöntési problémákból álló osztály, melyek polinomiális időben le-ellenőrizhetők. Vagyis: egy NP-beli eldöntési probléma esetén, ha egy x inputra a válasz "igen", akkor megadható egy polinom hosszú z "tanú", melynek segítségével polinom időben ellenőrizhető, hogy x-re a válasz valóban "igen".

◇

6.0.3 Definíció: (NP-teljes)
Egy x problémát ***NP-teljesnek*** nevezünk, ha NP-ben van, és minden $y \in NP$ polinomiálisan visszavezethető x-re, azaz x legalább olyan nehéz, mint y.

◇

6.0.1 Megjegyzés:
Az NP-teljes problémákról általában azt szoktuk gondolni, hogy őket nehéz megoldani (egyelőre nem ismert rájuk polinomiális algoritmus).

Az iméntiekben leírt definíciók forrása: [9]
Ezen fogalmak tisztázása után térjünk rá a fejezet lényegi részeire. A következő állítást bizonyítás nélkül mondjuk ki.

6.0.1 Állítás:
Annak eldöntése, hogy egy adott G gráfban van-e Hamiton-út NP-teljes.

6.0.2 Állítás:
Annak megállapítása, hogy egy gráfban van-e Hamilton-kör NP-teljes.

Bizonyítás:
Az NP-teljesség bizonyításához két dolgot kell igazolni:

1. A probléma NP-beli:
   Egy konkrét input (azaz egy G gráf) esetén az "igen" válaszra tanú G egy Hamilton-köre. Egy adott körről polinom időben el tudjuk dönteni, hogy Hamilton-kör-e, vagyis valóban NP-beli a probléma.

2. A Hamilton-kör problémája legalább olyan nehéz, mint egy NP-teljes probléma:
   Ezen rész belátása többféleképpen is lehetséges, ugyanakkor ez a tematikába nem fér bele, ezért a bizonyítását kihagyjuk.

□

Most tekintsünk egy másik állítást, melyben felhasználjuk az előző eredményét. Ennek az érdekessége az, hogy ha nem egy konstans hosszúságú kört keresünk, hanem egy olyan nagyságút, mely a gráf méretének függvényében van megadva, akkor ezen eldöntési probléma is már NP-teljes.

6.0.3 Állítás:
Annak eldöntése, hogy egy adott gráfban van egy legalább $\frac{|V|}{2}$ hosszúságú kör NP-teljes.

Bizonyítás:
Az előző állítás bizonyításához hasonlóan most is az alábbi két dolgot kell belátni:

1. A probléma NP-beli:
   Egy konkrét input (azaz egy G gráf) esetén az "igen" válaszra ismét tanú G egy köre. Ha már adott egy kör, akkor arról polinom időben meg tudjuk állapítani, hogy a csúcsoknak a felét tartalmazza-e.

2. Egy adott gráfban $\frac{|V|}{2}$ hosszúságú kör keresése legalább olyan nehéz, mint egy NP-teljes probléma:
   Vezessük vissza a Hamilton-kör problémáját a $\frac{|V|}{2}$ hosszúságú kör keresésének problémájára.
   Tekintsünk egy G gráfot, és alkossuk meg belőle G'-t. Erre többféle lehetőségünk is van.

   (a) G' legyen olyan, hogy G-t lemásoljuk egymás mellé kétszer diszjunkt módón, vagy

   (b) G' álljon a G gráfból, valamint vegyünk fel még mellé $V(G)$ darab izolált pontot.

   Mindkét esetben igaz lesz, hogy G-ben pontosan akkor létezik Hamilton-kör, ha G'-ben létezik $\frac{|V(G)|}{2}$ hosszú kör. Ez a konstrukcióból egyértelműen látszik.

□

A következő állítás az utazó ügynök problémára vonatkozik, melyre szintén a Hamilton-kör problémát vezetjük vissza.

6.0.4 Állítás:
Az utazó ügynök probléma, vagyis annak megállapítása, hogy egy teljes gráfban az éleken adott metrikus hosszfüggvénnyel (tehát teljesül a hosszakra a háromszög-egyenlőtlenség) van-e legfeljebb K hosszúságú Hamilton-kör, NP-teljes.

Bizonyítás:
Először is tekintsük át az inputot: teljes gráf, $d : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ metrikus, azaz $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ $\forall u, v, w \in V$, $K \in \mathbb{R}$.
Az állítás belátásához most is az alábbi két dolgot kell vizsgálnunk:

1. A probléma NP-belisége:
   Erre megfelelő tanú egy legfeljebb K hosszúságú Hamilton-kör, ez polinomiális időben könnyen ellenőrizhető.

2. Egy adott gráfban egy legfeljebb K hosszúságú Hamilton-kör keresése van annyira nehéz, mint egy NP-teljes probléma.
   Vezessük vissza ezen legfeljebb K hosszú Hamilton-kör keresési problémára a Hamilton-kör keresésének problémáját.
   Tekintsünk most is egy G gráfot, és ennek segítségével definiáljunk egy G'-t:
   A G' gráf csúcshalmaza egyezzen meg a G gráf csúcshalmazával, azaz $V(G') := V(G)$, az élhalmaza pedig a következő legyen:

   (a) ha $(u, v) \in E(G)$, akkor $d(u, v) := 1$,
   (b) ha pedig $(u, v) \notin E(G)$, akkor $d(u, v) := 2$,

   így G' teljes gráf, valamint $K := n$. Ekkor az alábbi állítást kell igazolni:
   G-ben pontosan akkor van Hamilton-kör, ha G'-ben létezik legfeljebb K hosszúságú Hamilton-kör.
   Tegyük fel, hogy G-ben van Hamilton-kör. Ekkor G'-ben van olyan Hamilton-kör, melynek minden éle 1 súlyú, vagyis pontosan $n = K$ hosszú Hamilton-kör van G'-ben.
   Most nézzük a másik irányt, vagyis tegyük fel, hogy G'-ben van legfeljebb $K = n$ hosszú Hamilton-kör. Ekkor ezen Hamilton-kör csupa 1 súlyú élekből kell, hogy álljon, vagyis ez szükségképpen G-ben is egy Hamilton-kör.

□

A következő állítás Hamilton-kör keresésére vonatkozik a $P = NP$ feltevés teljesülése esetén.

6.0.5 Állítás:
Amennyiben fennállna, hogy polinomiális időben eldönthető, hogy egy gráfban van-e Hamilton-kör, akkor polinomiális időben meg is tudnánk találni egyet.

Bizonyítás:
Az állítás feltétele, hogy polinomiális időben el tudjuk dönteni, hogy van-e Hamilton-kör egy G gráfban, így ezt szubrutinként fogjuk meghívni a Hamilton-kör kereső algoritmus során.
Legyen $|E(G)| = m$, és menjünk végig sorba a gráf összes élén. Mindegyik esetében vizsgáljuk meg, hogy ha az adott élt törölnénk a gráfból, vagyis ha $G - e_i$-t tekintenénk ($i = 1, \ldots, m$), akkor a maradék gráfban van-e Hamilton-kör. Ezt a szubrutin meghívásával polinom időben tudjuk ellenőrizni.
Ha a válasz igen, akkor ezt az e_i élt elhagyhatjuk a gráfból, hiszen a maradékban továbbra is van Hamilton-kör. Amennyiben nemleges választ kapunk, az adott élt hagyjuk bent a gráfban, ugyanis ez az él a jelenlegi gráf minden Hamilton-körének része, hiszen nélküle már nem tartalmazna a gráf Hamilton-kört a szubrutin szerint.
Ezen eljárás végén éppen egy Hamilton-körét kapjuk a G gráfnak, ugyanis csak azokat az éleket tartottuk meg, amelyek egy Hamilton-körben szerepelnek. Ezzel az algoritmussal polinomiális időben megtaláltuk egy Hamilton-körét a G gráfnak, mivel élszámszor, azaz polinom sokszor hívtunk meg a szintén polinomiális szubrutint.

$\square$

7. Alkalmazások

A Hamilton-köröknek számos felhasználása van az élet különböző területein, úgymint a számítógépes grafikában, az operációkutatásban, elektromos áramkörök tervezésében, vagy a genomok feltérképezésében. Ezek közül tekintünk át párat ebben a fejezetben.

7.1. Az USA-ban elterjedt iskolabuszok

Elsőként tekintsük az iskolabuszok példáját. Az Amerikai Egyesült Államokban népszerű, hogy a diákokat iskolabusszal viszik reggel az iskolába, illetve onnan délután haza. Ezen busz-útvonalak megtervezésének alapját is a Hamilton-kör keresés adja. A csúcsoknak a gyerekek házai feleltethetőek meg, míg az élek a házak között menő utakat jelképezik. Természetes cél, hogy a busz a lehető legrövidebb utat tegye meg úgy, hogy közben olyan útvonalon megy, mely az iskola érintésével minden diák háza mellett pontosan egyszer halad el. Ily módon egy Hamilton-kört tesz meg az iskolabusz.

Ezen nagyon egyszerű példa után tekintsünk egy sokkal érdekesebbet.

7.2. Genom összeállítása

A genomok szekvenálása egy meglehetősen bonyolult folyamat, mellyel rengeteg kutató foglalkozik világszerte. A genom a DNS-ben van kódolva (annak bázissorrendjében), és egy szervezetnek a teljes örökítő információját tartalmazza. [10]
Az alábbi alkalmazásban megnézzük, hogy a Hamilton-kör (illetve Hamilton-út) milyen módon tud segíteni a genomok összeállításában. Ehhez felhasználjuk a de Bruijn-gráfot, az élgráfot, illetve az Euler-vonalat, ezért először tisztázzuk ezen fogalmak jelentését.

7.2.1 Definíció: (De Bruijn-gráf)
De Bruijn-gráfnak nevezzük az olyan irányított gráfokat, melyeknek csúcsai szimbólumok azonos hosszúságú összes lehetséges sorozatát jelentik, és irányított éllel kötjük össze őket, ha az egyik a másiknak egy majdnem teljes átfedése, vagyis az (x, y) eleme az élhalmaznak, ha $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ esetén ”$x_2, x_3, \ldots, x_n$” = ”$y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$”.

◇

Szokás a de Bruijn-gráfok feszített részgráfját is de Bruijn-gráfnak nevezni, ezeket fogjuk használni az alkalmazás során.

7.2.2 Definíció: (Élgráf)
Egy G gráf élgráfja egy olyan gráf, melynek csúcsai G éleinek felelnek meg, és két csúcsot összkötünk éllel, ha a G gráfban nekik megfelelő éleknek van közös pontja.

◇

7.2.3 Definíció: (Euler-vonal)
Egy G gráf Euler-vonala olyan vonal, mely G minden élét tartalmazza.

◇

Először nézzük meg milyen kapcsolat van de Bruijn-gráf és élgráfja között, tehát tekintsünk egy de Bruijn-gráfot, és készítsük el ennek az élgráfját. Az így kapott gráf csúcsai az előző éleinek felelnek meg, vagyis az élgráf csúcsaiban eggyel hosszabb sorozatokat tárolunk, mint az eredeti gráf csúcsaiban. (Az eredeti gráfban két csúcsot összekötöttünk, ha köztük majdnem teljes volt az átfedés, így a két csúcsot összekötő él a (csúcsokban tárolt sorozat hossza + 1) hosszúságú, mivel az első csúcs sorozatához hozzávesszük a második csúcs sorozatának utolsó tagját.) Tehát ha az élgráf csúcsaiban tárolt sorozatok hossza l, akkor élei a $(l+1)$-hosszúságú részkarakterlácok. Vagyis ha két pont szomszédos (azaz köztük majdnem teljes az átfedés), akkor az őket összekötő él a belőlük kapott $(l+1)$-hosszúságú sorozatot jelenti (az első csúcs l-hosszú sorozatához hozzávesszük a második csúcs sorozatának utolsó tagját). Ekkor láthatjuk, hogy ezen élgráf is egy de Bruijn-gráf lesz, vagyis de Bruijn-gráf élgráfja az eggyel nagyobb de Bruijn-gráf.

Ezek után vizsgáljuk meg egy de Bruijn-gráf és egy nála eggyel nagyobb de Bruijn-gráf kapcsolatát. Először tekintsük az előbbiek alapján a kisebbik de Bruijn-gráfot. Ha ebben a gráfban végigmegyünk az összes élen pontosan egyszer, akkor a gráf egy Euler-vonalát kapjuk meg. Ezek után nézzük a nagyobbik de Bruijn-gráfot, ami az előzőnek az élgráfja, vagyis ezen gráfban a csúcsok az előbbi gráf éleinek felelnek meg. Ha abban minden élen pontosan egyszer haladtunk végig, azaz Euler-vonalat kerestünk, akkor ebben a gráfban minden csúcson kell pontosan egyszer végigmennünk, így ezen gráfnak a Hamilton-útját kell megtalálnunk. Tehát összegezve: a kisebbik de Bruijn-gráf Euler-vonala a nagyobbik Hamilton-útja.

7.2.1 Megjegyzés:
Egy de Bruijn-gráf Euler-vonalának megtalálása lineáris időben lehetséges. Ezt később részletezzük.

Most pedig térjünk rá a konkrét alkalmazásra. Tekintsünk egy bázissorozatot, vagyis az A, G, C, T bázisokból alkotott sorozatot. Legyen az R halmaz, ami ezen bázissorozat összes, egy előre meghatározott hosszúságú részintervallumát tartalmazza (multiplicitással). Ezen R halmaz elemeiből készítsünk el egy de Bruijn-gráfot úgy, hogy a gráf csúcsainak feleljenek meg a meghatározott hosszúságú bázissorozat-darabok (vagyis maguk az R elemei), és egy u csúcsból mutasson él egy v csúcsba pontosan akkor, ha u utótagja megegyezik v előtagjával, vagyis u második karakterétől az utolsó karakteréig tartó bázissorozat megegyezik v első karakterétől az utolsó előtti karakteréig tartó sorozattal.

Példa:

Álljanak a gráf csúcsai 3 darab bázisból. Mutasson az $e = (ATTC)$ irányított él az u csúcsból a v-be, ha $u = (ATT)$ és $v = (TTC)$, vagyis ha u utolsó két bázisa megegyezik v első két bázisával, így az u és v csúcsot átfedve összeolvasva megkapjuk az őket összekötő e élt.

A genomot az így előállított gráf segítségével szeretnénk meghatározni. Tegyük fel, hogy az R k-hosszúságú bázissorozat-darabokat tartalmaz, vagyis az eredeti bázissorozatot k hosszú részintervallumokra daraboltuk fel az összes lehetséges módon. Ekkor a csúcsokban k darab bázist tárolunk, és így az élek $(k + 1)$-hosszúságú bázissorozatoknak felelnek meg, ugyanis a két csúcsnak $k - 1$ közös bázisa van és ehhez vesszük hozzá az első csúcs első- és a második csúcs utolsó bázisát. Ha ebben a gráfban az egyik csúcsból átmegyünk a másikba egy él mentén, az annak felel meg, hogy egy k bázisból álló sorozathoz hozzáveszünk még 1 bázist (a második csúcs utolsó bázisát), így egy $(k+1)$-hosszúságút kapunk. Az idealizált feltevések mellett (mely szerint fel tudjuk darabolni az eredeti bázissorozatot azonos hosszúságú darabokra), a genomot egy olyan útvonal írja le, amely minden bázist pontosan egyszer tartalmaz, azaz az átfedési gráf egy Hamilton-útja. Hiszen a csúcsokon sorban végighaladva minden lépésben egy újabb bázist teszünk hozzá a készülő genomhoz, és Hamilton-út lévén az eredeti bázissorozat minden bázisát pontosan egyszer vesszük be.

A fentiek alapján a következő 2 állítás ekvivalens és lineáris időben megoldható:

1. Euler-vonal keresése de Bruijn-gráfban, ahol az élek a bázisok k-hosszú részláncainak felelnek meg.

2. Hamilton-út keresése de Bruijn-gráfban, ahol a csúcsok a bázisok k-hosszú részláncainak felelnek meg.

Az első azt jelenti, hogy az összeállítási feladat lineáris időben megoldható, ha egy Euler-vonalat keresünk egy de Bruijn-gráfban. A második állítás érdekessége, hogy de Bruijn-gráfban a Hamilton-út keresés is megoldható lineáris időben a fentiekben részletezett ötlet alapján.

Minden Euler-vonal, illetve Hamilton-út egyetlen genom-rekonstrukciónak felel meg. Így amennyiben egy gráfban több Euler-vonal, vagy Hamilton-út található, az azt jelenti, hogy a genom szerkezete a rendelkezésre álló adatok alapján nem egyértelmű. Vagyis ugyanazon R bázissorozatok halmazát használva különböző genomok rekonstruálhatók, amelyek mindegyike teljes mértékben megfelelhet a valóságnak a rendelkezésre álló adatok szerint. Ezek alapán nem választhatunk ki önkényesen egyet közülük, hiszen nem tudhatjuk, hogy melyik az eredeti genom. Ez az oka annak, hogy semelyik gyakorlatban is használt összeállító algoritmus sem használ Euler-vonalat vagy Hamilton-utat kereső algoritmust. Ehelyett az összeállító algoritmusok kimenetelei ugynevezett kontigok (hosszú, összefüggő szegmensek), amelyekről egyértelműen arra lehet következtetni, hogy a genom részei. Az ilyen szegmensek meghatározása egészen más számítási probléma, mint egyetlen Euler-vonal vagy Hamilton-út megtalálása.
A fentiekben leírt alkalmazás a [11] forrás alapján készült.

7.2.1. Euler-körvonal keresése - Hierholzer-algoritmus

Ahogyan azt korábban megjegyeztük az Euler-vonal lineáris időben megtalálható. Ezen állítást igazolva tekintsük át az alábbiakban a Hierholzer-algoritmust. Először az Euler-körvonal kereséséről látjuk be, hogy megvalósítható lineáris időban, majd az algoritmus kis módosításával igazoljuk, hogy ez Euler-vonal keresésére is igaz.

Vegyünk egy összefüggő gráfot, melyben minden csúcs foka páros.

- Tetszőlegesen válasszuk ki egy kezdő v csúcsát a gráfnak, és innen haladjunk végig az élek egy útvonalán egészen addig, míg vissza nem érünk a v csúcsba. A v-n kívül egyetlen csúcsnál sem akadhatunk el, mivel minden csúcs foka páros, így amikor a nyomvonal egy másik w csúcsába lép be a gráfnak, akkor kell lennie egy a w-t elhagyó élnek is. Így kaptunk egy körsétát a gráfban, tehát még előfordulhat, hogy ez nem fedi le a gráf összes élét.

- Mindaddig, amíg létezik olyan u csúcsa a gráfnak, amely az aktuális körsétához tartozik, és ezen u-nak van olyan éle, mely nem része az eddig megkapott körsétának, tegyük a következőt: Indítsunk el egy másik keresést u-ból az első pont mintájára, ezzel a még fel nem használt éleket összekötve addig, amíg vissza nem térünk az u csúcsba, és csatlakoztassuk az így kialakított körsétát az előzőhöz. Az előző körséta mentén menjünk el a v csúcsból az u csúcsba, járjuk be az új körséta útvonalát, majd u-ba visszatérve folytassuk az első körséta mentén az utat.

- Mivel feltettük, hogy a gráf összefüggő, így az előző pontot ismételve megkapjuk a gráf összes élét.

Az Euler-vonal keresése annyiban különbözik a fentitől, hogy ott kezedtben egy olyan gráfot veszünk, mely amellett, hogy összefüggő tartalmazhat legfeljebb két páratlan fokú csúcsot. Az Euler-vonal keresését egy páratlan fokú t csúcsból indítva kezdjük el. Ekkor két helyen akadhatunk el, vagy visszaérünk a t csúcsba pont úgy, mint az előbb (ezzel t fokszáma az Euler-vonalban még felhasználatlan éleket tekintve 2-vel csökkent, vagyis továbbra is páratlan fokú csúcsnak tekintjük), vagy a másik páratlan fokú csúcsba érkezünk. Ez utóbbi esetben tehát kiindultunk az egyik páratlan fokú csúcsból és a másikba jutottunk el, vagyis mindkét csúcsnak az Euler-vonalba még nem bevett éleit tekintve páros fokúvá vált, tehát ebben az értelemben mostmár minden csúcs foka párosnak tekinthető.
Például a duplán linkelt lista adatsruktúra használatával számon tudjuk tartani az egyes csúcsokhoz tartozó még fel nem használt élek halmazát, az aktuális körséta azon csúcsait, amelyek rendelkeznek még használatlan éllel, illetve magát a túrát, vagyis az algoritmus egyes műveleteit (az egyes csúcsokból kilépő, még bejáratlan élek keresése, egy körséta új kezdőcsúcsának megtalálása, valamint két, azonos csúcshoz kapcsolódó körséta összekapcsolása). Ezek mindegyike konstans időben végrehajtható, így ezen algoritmus lineáris időt vesz igénybe, $O(|E|)$. [14]

7.3. Az utazó ügynök probléma

Az utazó ügynök problémának számtalan felhasználása létezik különböző területeken. Ezek közül fogunk az alábbiakban párat megismerni.

1. **Starlight Interferométer Program**
   A houstoni Hernandez Engineering és a Brigham Young Egyetem mérnökeiből álló csapat kísérleteket végzett abból a célból, hogy optimalizálja a leképezendő égi objektumok sorrendjét egy NASA programban. A tanulmány célja az volt, hogy minimalizálja az üzemanyag felhasználását a célzási és képalkotási manőverek során a küldetésben résztvevő műholdak esetében. Az utazó ügynök problémában a városok a leképezendő égi objektumoknak, míg az utazási költségek az ahhoz szükséges üzemanyag mennyiségének felelnek meg, hogy a két műholdat az egyik képről a másikra áthelyezzük. [12]

2. **Érmegyűjtés**
   Az utazó ügynök probléma egyik régi alkalmazása az érmék begyűjtésének ütemezése a nyilvános telefonfülkékből egy adott régióban. Különféle érmegyűjtési problémák megoldására a Concorde megoldó program heurisztikájának módosított változatát használták. A módosításokra az egyirányú utcák és a városi

utazás egyéb jellemzőinek kezelése miatt volt szükség, amelyek ebben az esetben irreálissá teszik azt a feltételezést, hogy az x pontból az y pontba utazás költsége megegyezik az y-ból x-be való utazás költségével. [12]

3. **Whizzkids'96 Vehicle Routing**
   A Whizzkids egy matematika verseny volt 1996-ban, melyre bárki nevezhetett. A feladat az volt, hogy megoldják az újságok kézbesítési tervének csoportosítását és irányítását a jelentkezők. Azaz pontosabban: négy hírlapszállító fiú 120 újságot juttat el az előfizetőknek. Egyszerre indulnak egyetlen depóból. A feladatuk az, hogy a lehető legkorábban kézbesítsék az utolsó újságot. Az egyértelműség végett a problémát Manhattanben helyezték el, így az előfizetők címét egyszerű (x, y)-koordinátákkal írhatjuk le, és az előfizetőpárok közötti távolságot a Manhattan-távolság határozza meg. [13]

   7.3.1 Megjegyzés:
   Egy $\underline{x} = (x_1, x_2)$ és egy $\underline{y} = (y_1, y_2)$ pont Manhattan-távolsága:

   $$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

   A Concorde megoldó program egy módosított változatát használták arra, hogy bizonyítsák a verseny győztese valóban egy optimális megoldását adta a feladatnak. [12]

7.3.1. Concorde megoldó program

A fenti alkalmazásokban említésre került a Concorde megoldó program, tekintsük át röviden miről is van szó ebben.
A Concorde egy számítógépes kód a szimmetrikus utazó ügynök problémára (TSP) és néhány kapcsolódó hálózatoptimalizálási feladatra. A kódot ANSI C programozási nyelven írták, és szabadon elérhető tudományos kutatási célokra. A Concorde letölthető könyvtára több mint 700 funkciót tartalmaz, melyek segítségével lehetőséget biztosítanak a felhasználók számára, hogy speciális kódokat hozzanak létre a TSP-hez hasonló problémák megoldására. [15]
A Concorde egy előrehaladott, precíz TSP-megoldó a szimmetrikus utazó ügynök problémára, mely a Branch & Bound (korlátozás és szétválasztás) eljáráson és probléma-specifikus vágásósíkos módszereken alapul. Egy speciálisan tervezett, úgynevezett QSopt lineáris programozási megoldót használ. Egyesek szerint a Concorde a legjobb ismert pontos algoritmus az utazó ügynök problémára. A Concorde futási idejét lényegében véletlenszerű, egységes példákon vizsgálták. Például Applegate megvizsgálta, hogy a fentiekben említett példákon a szükséges futási idő a példa $|V|$ méretének exponenciális függvényeként növekszik. [16]

8. Hivatkozások

[1] Lovász László: Kombinatorikai problémák és feladatok. Typotex Elektronikus Kiadó Kft., 1999.

[2] David Wilkins: Sir William Rowan Hamilton
url: https://www.britannica.com/biography/William-Rowan-Hamilton

[3] J. J. O'Connor és E. F. Robertson: William Rowan Hamilton
url: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hamilton/

[4] Stephanie Glen: Hamiltonian Cycle: Simple Definition and Example
url: https://www.statisticshowto.com/hamiltonian-cycle/

[5] Szőnyi Tamás: Hamilton-utak, Hamilton-körök
url: https://szonyitamas.web.elte.hu/hami.pdf

[6] Wikipédia: Ore-tétel, A Pósa-tétel és az Ore-tétel kapcsolata
url: https://hu.wikipedia.org/wiki/Ore-tétel

[7] Arnab Sen Ramit Hansda: Chalk & Talk Session
url: https://www.csa.iisc.ac.in/~arpita/DS14/Chvatal.pdf

[8] Turjányi Sándor: Bevezetés a kombinatorikába és a gráfelméletbe

[9] Király Zoltán: Algoritmuselmélet

[10] Bana Ágnes Nóra: A genom összerakás elmélete és alkalmazása a gímszarvas genom projektben
url: http://real.mtak.hu/113876/1/Bana_2020.1.pdf

[11] Paul Medvedev, Mihai Pop: What do Eulerian and Hamiltonian cycles have to do with genome assembly?, Plos Computational Biology
url: https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1008928

[12] Applications of the TSP
url: https://www.math.uwaterloo.ca/tsp/apps/index.html

[13] WHIZZKIDS '96
url: https://www.win.tue.nl/whizzkids/1996/

[14] Wikipedia: Eulerian path, Hierholzer's algorithm
url: https://en.wikipedia.org/wiki/Eulerian_path

[15] Concorde TSP Solver
url: http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/concorde.html

[16] Yongliang Lu, Jin-Kao Hao, Qinghua Wu: Solving the Clustered Traveling Salesman Problem via TSP methods
url: https://doi.org/10.48550/arXiv.2007.05254