

NYILATKOZAT

Név: Magyarósi Balint

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: HE 20WC

Szakdolgozat címe: Quillen - Suslin Tétel

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022.05.31


a hallgató aláírása



EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Mogyorósi Bálint

A QUILLEN-SUSLIN TÉTEL

Szakdolgozat
Matematika BSc
matematikus szakirány

Témavezető:

dr. Zábrádi Gergely

Algebra és Számelmélet Tanszék



Budapest, 2022

Köszönet nyilvánítás

Szeretnék ezúton is köszönetet mondani a témavezetőmnek, dr. Zábrádi Gergelynek, hogy megismertette velem ezt a témát, a rendszeres konzultációkat valamint, hogy hasznos észrevételekkel, tanácsokkal látott el a szakdolgozatom elkészítése során.

Tartalomjegyzék

Jelölések	4
Bevezetés	5
1. Algebrai alapok	6
1.1. Projektív modulusok	6
1.2. Lapos és hűségesen lapos modulusok	8
1.3. Lokális és globális módszerek	11
1.4. Stabilan szabad modulusok	14
1.5. Elemi mátrix csoport	16
1.6. Ellenpélda $SL_n(R)$ és $E_n(R)$ egyenlőségére	18
2. Serre Sejtés elemi bizonyítása	19
2.1. Bass tétele	19
2.2. Suslin féle bizonyítás	20
3. Serre sejtés Quillen féle bizonyítása	24
3.1. Quillen foltozási tétele	24
3.2. Quillen féle bizonyítás	28

Jelölések

$U(R), R^*$	az R gyűrű invertálható elemeinek csoportja
$\mathfrak{M}(R)$	az R gyűrű végesen generált modulusainak osztálya
$\mathfrak{B}(R)$	az R gyűrű végesen generált projektív modulusainak osztálya
$S^{-1}R, R_S$	az R gyűrű S multiplikatív halmaz szerinti lokalizáltja
$R_a, R[a^{-1}]$	az R gyűrű $\{a^i : i \geq 0\}$ halmaz szerinti lokalizáltja
$R_{\mathfrak{p}}$	az R gyűrű $\mathfrak{p}$ prímeál szerinti lokalizáltja
$\max(R)$	maximális ideál spektruma az R kommutatív gyűrűnek
$\text{Spec}(R)$	prím ideál spektruma az R kommutatív gyűrűnek
$D(f)$	azon prímeálok halmaza, amik nem tartalmazzák f -et
$V(f)$	azon prímeálok halmaza, amelyek tartalmazzák f -et
$R[x]$	az R feletti polinom gyűrű
$\mathfrak{M}^R(R)$	$\mathfrak{M}(R)$ -beli modulusok amik R -ről lettek kiterjesztve
$\mathfrak{B}^R(R)$	$\mathfrak{B}(R)$ -beli modulusok amik R -ről lettek kiterjesztve
$R\langle x \rangle$	$R[x]$ lokalizáltja az összes egy főegyütthatós polinommal

Bevezetés

A Serre sejtést 1995-ben J.-P. Serre fogalmazta meg, amikor arra a kérdésre kereste a választ, hogy a végesen generált projektív modulusok egy $k[x_1, \dots, x_n]$ polinom gyűrű felett szabadok-e, ahol k test. Ezt a kérdést az motiválta, hogy algebrai geometriában a $k[x_1, \dots, x_n]$ által meghatározott affin varietás a k feletti affin n -tér analógiája. Tudjuk, hogy topológiában az affin n -tér pontrahúzható, így felette csak triviális vektornyalábok léteznek. Az algebrai vektornyalábok $\text{Spec } k[x_1, \dots, x_n]$ felett megfelelnek a végesen generált projektív $k[x_1, \dots, x_n]$ -modulusoknak. Így az alapproblémát természetesnek vehetjük, azonban rá választ csak 21 évvel később kaptunk 1976-ban. Egymástól függetlenül Quillen és Suslin is bebizonyították ugyanabban az évben teljesen eltérő megközelítésben. Suslin bizonyítása tekinthető elemibbnek, ugyanis végesen generált modulusok Hermite gyűrű felett már stabilan szabadok. Ez azért lesz hasznos a számunkra, mert stabilan szabad modulusok leírását meg lehet adni, mint egy mátrix nulltere és így lineáris algebrára redukálódik a probléma. Ezzel szemben Quillen bizonyítása már nem elemi, mivel használja a homológikus algebra eszközeit. Az ő bizonyítása az általa belátott foltozási tételen múlik, amely azt biztosítja, hogy bizonyos lokális tulajdonságú gyűrű elemek egymás után fűzhetők azaz egy ideált alkotnak. Szakdolgozatomban először a Suslin féle bizonyítást ismertetem, ezt követően pedig a Quillen féle bizonyítást fejtem ki, mindezek előtt pedig a szükséges fogalmakat és lemmákat ismertetem.

1. fejezet

Algebrai alapok

Ebben a fejezetben megalapozzuk az algebrai eszközöket és bevezetjük a szükséges definíciókat, amelyek szükségesek a sejtésünk bizonyításához. Kezdve a projektív modulusokkal és tulajdonságaikkal, a lokalizáláson át a stabilan szabad modulusokig.

1.1. Projektív modulusok

Ezt a fejezetet T.Y.Lam, *Serre's problem on projective modules* könyvének I.1 fejezetére alapoztam.

1.1.1. Definíció. Egy P baloldali R -modulust projektívnek nevezünk ha $\text{Hom}_R(P, \cdot)$ egy egzakt funktor a baloldali R -modulusokról az Ábel csoportokba.

1.1.2. Állítás. A direkt összeg $P = \bigoplus_{\alpha} P_{\alpha}$ egy projektív modulus akkor és csak akkor ha minden P_{α} projektív.

Bizonyítás.

$$\text{Hom}_R(\bigoplus_{\alpha} P_{\alpha}) \cong \prod_{\alpha} \text{Hom}_R(P_{\alpha}, \cdot)$$

A bal oldal egzakt akkor és csak akkor ha minden α -ra a Hom funktor egzakt. $\square$

1.1.3. Állítás. Minden P R -modulusra ekvivalensek a következők:

- (1) P projektív.
- (2) Minden R -epimorfizmus $A \twoheadrightarrow R$ hasad.
- (3) P direkt összeadandója egy szabad R -modulusnak.

1.1.4. Következmény. Tetszőleges R gyűrűre, a következők ekvivalensek:

- (1) Bal R -modulusok rövid egzakt sorozata mindig hasad.
- (2) Minden R -modulus projektív.

1.1.5. Lemma (Nakayama). Legyen $M \in \mathfrak{M}(R)$, azaz egy végesen generált R -modulus, és $J = \text{rad}(R)$ a Jacobson radikál. Ekkor $M = J \cdot M \Rightarrow M = 0$.

Bizonyítás. Legyen $M = \sum_{i=1}^r R \cdot m_i$ úgy hogy r minimális. Ekkor:

$$M = J \cdot M = \sum_{i=1}^r J \cdot m_i$$

Speciálisan felírható $m_1 = j_1 m_1 + \dots + j_r m_r$, úgy hogy $j_i \in J$. Ekkor $(1 - j_1)m_1 = j_2 m_2 + \dots + j_r m_r$. Mivel $1 - j_1$ nincs egy maximális ideálban sem és van balinverze így kapjuk, hogy $m_1 \in \sum_{i=2}^r R \cdot m_i$ de ez ellentmond r minimalitásának. $\square$

1.1.6. Lemma (Nakayama, változat). Legyen $N_0 \subseteq N$ R -modulus, úgy hogy $N/N_0 \in \mathfrak{M}(R)$. Ekkor $N = N_0 + J \cdot N \Rightarrow N = N_0$.

Bizonyítás. $N = N_0 + J \cdot N$ faktorizáljunk le N_0 -lal erre alkalmazva az előző Nakayama lemmát kapjuk az állítást. $\square$

1.1.7. Következmény. Jelölje a felülvonás a $J = \text{rad}(R)$ szerinti faktorizálást. Legyen $Q \in \mathfrak{M}(R)$, $P \in \mathfrak{B}(R)$, és $\gamma \in \text{Hom}_R(Q, P)$. Ha $\bar{\gamma} : \bar{Q} \rightarrow \bar{P}$ egy izomorfizmus akkor γ is egy izomorfizmus lesz. Ha $P, Q \in \mathfrak{B}(R)$, és $\bar{Q} \cong \bar{P}$ mint $\bar{R}$ -modulusok, akkor $Q \cong P$ mint R -modulusok.

1.1.8. Következmény. Legyen $P \in \mathfrak{B}(R)$, és $z_1, \dots, z_r \in P$. Ekkor $\{z_i\}$ P -nek egy szabad R -bázisát adják akkor és csak akkor a képeik $\{\bar{z}_i\}$ $\bar{P}$ -nek egy szabad $\bar{R}$ -bázisát adják.

Bizonyítás. Oda irány világos. Visszafelé alkalmazzuk az előző következményt a $\gamma : R^r \rightarrow P$ leképezésre, ahol $\gamma(e_i) = z_i$ és $\{e_i\}$ pedig az egységvektorok. $\square$

1.1.9. Következmény. Legyen R egy lokális gyűrű, és $J = \text{rad}(R)$. Ekkor minden $P \in \mathfrak{B}(R)$ szabad. A $z_1, \dots, z_r \in P$ elemek egy szabad R -bázisát adják P -nek akkor és csak akkor ha a képeik $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_r$ egy vektortér bázisát adják $\bar{P} = P/(J \cdot P)$ -nek $\bar{R} = R/J$ felett.

1.2. Lapos és hűségesen lapos modulusok

Ebben a fejezetben bevezetjük a lapos- és a hűségesen lapos modulusok fogalmát és belátjuk ezen modulusok tulajdonságait, amelyek segítségünkre lesznek Qullien-féle bizonyításnál. Ezt a fejezetet T.Y.Lam, *Serre's problem on projective modules* könyvének I.2 fejezetére alapoztam.

1.2.1. Definíció. N jobb R -modulust R -laposnak mondunk, ha $N \otimes_R -$ egy egzakt funktor a bal R -modulusokról az Ábel csoportokra, azaz

$$\begin{aligned} M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \quad \text{egzakt} \\ \Rightarrow \quad N \otimes_R M_1 \rightarrow N \otimes_R M_2 \rightarrow N \otimes_R M_3 \quad \text{egzakt.} \end{aligned}$$

N hűségesen R -lapos ha

$$\begin{aligned} M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \quad \text{egzakt} \\ \iff \quad N \otimes_R M_1 \rightarrow N \otimes_R M_2 \rightarrow N \otimes_R M_3 \quad \text{egzakt.} \end{aligned}$$

1.2.2. Tétel. Minden N R -modulusra, a következők ekvivalensek:

- (1) N hűségesen lapos.
- (2) N lapos, és minden M R -modulusra: $M \neq 0 \Rightarrow N \otimes_R M \neq 0$.
- (3) N lapos, és minden maximális bal ideálra $\mathfrak{m} \subset R$: $N \cdot \mathfrak{m} \neq N$.

Bizonyítás. (1) $\Rightarrow$ (2). Tegyük fel hogy $N \otimes_R M = 0$. Ekkor a $N \otimes_R 0 \rightarrow N \otimes_R M \rightarrow N \otimes_R 0$ egzaktaságából következik $0 \rightarrow M \rightarrow 0$ egzaktasága.

(2) $\Rightarrow$ (3). $R/\mathfrak{m} \neq 0 \Rightarrow 0 \neq N \otimes_R R/\mathfrak{m} \cong N/(N \cdot \mathfrak{m})$

(3) $\Rightarrow$ (2). Tegyük fel, hogy M ciklikus (mivel N lapos). $M \cong R/I$, ahol $I \subsetneq R$ egy bal ideál. Legyen $\mathfrak{m}$ egy maximális balideál ami tartalmazza I -t. Ekkor $N \otimes_R M \cong N/(N \cdot I)$ -nek van egy epimorf képe $N/(N \cdot \mathfrak{m}) \neq 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Legyen $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ R -modulusok egy sorozata úgy, hogy $N \otimes_R M_1 \xrightarrow{f'} N \otimes_R M_2 \xrightarrow{g'} N \otimes_R M_3$ egzakt legyen (ahol $f' = N \otimes_R f$ és $g' = N \otimes_R g$). Mivel $N \otimes_R -$ egy egzakt funktor,

$$N \otimes_R \text{Im}(gf) \cong \text{Im}(g'f')$$

(2) miatt $g'f' = 0$ következik, hogy $gf = 0$, azaz $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ egzakt, valamint N lapossága miatt kész vagyunk. $\square$

1.2.3. Definíció. Az mondjuk, hogy egy $R \xrightarrow{\psi} R'$ gyűrűhomomorfizmus lapos (illetve hűségesen lapos), ha R' R -lapos (hűségesen R -lapos) a ψ által indukált jobbhatásra nézve.

1.2.4. Megjegyzés. Ha $\psi : R \rightarrow R'$ hűségesen lapos, akkor egy monomorfizmus lesz és ekkor $R' \otimes_R R$ hűségesen lapos bővítése. Ahhoz hogy az állításunkat belássuk kell hogy $R' \otimes_R R \xrightarrow{R' \otimes \psi} R' \otimes_R R$ is egy monomorfizmus. De $R' \otimes_R R \cong R'$ és $R' \rightarrow R' \otimes_R R, r' \mapsto r' \otimes 1$ van bal inverze a bal R' -modulusok kategóriájában, amit az $r'_1 \otimes r'_2 \mapsto r'_1 r'_2$ ad meg.

1.2.5. Állítás. Legyen $R' \supseteq R$ egy hűségesen lapos bővítés, és legyen M tetszőleges R -modulus. Ekkor $M \in \mathfrak{M}(R)$ akkor és csak akkor ha $R' \otimes_R M \in \mathfrak{M}(R')$.

Bizonyítás. Az odairány evidens. Legyen $m_1, \dots, m_r \in M$ úgy, hogy $\{1 \otimes m_i\}$ generálják $R' \otimes_R M$ -et mint bal R' -modulus, és legyen $M_0 = \sum_i R \cdot m_i$. A leképezés $R' \otimes_R M_0 \rightarrow R' \otimes_R M$ szürjektív. Mivel R' hűségesen lapos mint egy jobb R -modulus, $M \rightarrow M_0$ is szürjektív. $\square$

1.2.6. Definíció. Egy M R -modulust akkor hívunk végesen prezentáltnak, ha létezik egy egzakt sorozat $R^m \rightarrow R^n \rightarrow M \rightarrow 0$, megfelelő m, n pozitív egész számokkal.

1.2.7. Állítás. Legyen $R' \supseteq R$ egy hűségesen lapos bővítés, és legyen M tetszőleges R -modulus. Ekkor M végesen prezentált R fölött akkor és csak akkor, ha $R' \otimes_R M$ végesen prezentált R' felett.

Bizonyítás. Oda irány: Az előző állítás miatt tudjuk, hogy M végesen generált. Így létezik a következő egzakt sorozat $0 \rightarrow K \rightarrow R^n \rightarrow M \rightarrow 0$, amiből tenzor szorzással kapunk egy másik egzakt sorozatot:

$$0 \rightarrow R' \otimes_R K \rightarrow R' \otimes_R R^n \rightarrow R' \otimes_R M \rightarrow 0$$

Az előző megjegyzés miatt $R' \otimes_R K$ végesen generált R' felett vagyis az előző állítás miatt R felett is. Így létezik $R^m \rightarrow K$ szürjektív, amiből kapjuk $R^m \rightarrow R^n \rightarrow M \rightarrow 0$ $\square$

1.2.8. Állítás. Legyen F_1, F_2 egzakt kontravariáns funktor $\mathfrak{M}$ -ből az Ábel csoportokba, és legyen $\theta : F_1 \rightarrow F_2$ egy természetes transzformáció. Ha $\theta(R^n) : F_1(R^n) \rightarrow F_2(R^n)$ egy izomorfizmus (illetve monomorfizmus) minden R^n szabad modulusra, akkor $\theta(M) : F_1(M) \rightarrow F_2(M)$ szintén egy izomorfizmus (illetve monomorfizmus) minden végesen reprezentált (illetve végesen generált) M R -modulusra.

Bizonyítás. Legyen M végesen prezentált. Alkalmazzuk $F_1 \xrightarrow{\theta} F_2$ leképezést $R^m \rightarrow R^n \rightarrow M$ egzakt sorozatra, így kapjuk a következő kommutatív diagrammot:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F_1(M) & \longrightarrow & F_1(R^n) & \longrightarrow & F_1(R^m) \\ & & \downarrow \theta(M) & & \downarrow \theta(R^n) & & \downarrow \theta(R^m) \\ 0 & \longrightarrow & F_2(M) & \longrightarrow & F_2(R^n) & \longrightarrow & F_2(R^m) \end{array}$$

Az állításunk következik a 4-lemmából. Ha csak M végesen generáltságát szeretnénk belátni akkor elég a jobb oszlopot elhagyva nézni a fenti diagramot. $\square$

1.2.9. Állítás. Legyen $\psi : R \rightarrow R'$ egy lapos homomorfizmus azzal a tulajdonsággal, hogy $\psi(R) \subseteq Z(R')$. Legyen M egy végesen reprezentált (végesen generált) bal R -modulus, és N tetszőleges bal R -modulus. Ekkor a természetes leképezés:

$$\sigma : R' \otimes_R \text{Hom}_R(M, N) \rightarrow \text{Hom}_{R'}(R' \otimes_R M, R' \otimes_R N)$$

izomorfizmus (monomorfizmus) lesz.

Bizonyítás. A természetes leképezés σ -t megadja:

$$\sigma(r'_1)(r'_2) = r'_1 r'_2 \otimes g(m),$$

ahol $r'_i \in R', m \in M, g \in \text{Hom}_R(M, N)$. Legyen N fix, ekkor

$$F_1(M) = R' \otimes_R \text{Hom}_R(M, N),$$

$$F_2(M) = \text{Hom}_{R'}(R' \otimes_R M, R' \otimes_R N)$$

F_1, F_2 bal egzakt kontravariáns funktorok, és a σ leképezés megad egy természetes leképezést a kettő között. Ekkor az előző állításunk értelmében elég ellenőrizni, hogy R^n -re izomorfizmus.

$$F_1(R^n) = R' \otimes_R \text{Hom}_R(R^n, N) \cong (R' \otimes_R N)^n$$

$$F_2(R^n) = \text{Hom}_{R'}(R'^n, R' \otimes_R N) \cong (R' \otimes_R N)^n$$

$\square$

1.2.10. Állítás. Legyen R' egy hűségesen lapos bővítése az R részgyűrűjének úgy, hogy $R \subseteq Z(R')$. Legyen $f : N \rightarrow M$ egy bal R -modulus homomorfizmus úgy, hogy M végesen reprezentált R felett. Ekkor f egy hasadó szűrjekció akkor és csak akkor, ha

$$R' \otimes_R N \xrightarrow{R' \otimes_R f} R' \otimes_R M$$

is egy hasadó szűrjekció.

Bizonyítás. Mivel R' hűségesen lapos mint jobb R -modulus, tudjuk hogy f szűrjektív akkor és csak akkor ha $R' \otimes_R f$ is szűrjektív. Továbbá, tetszőleges szűrjektív f -re:

$$f \text{ hasad} \iff \text{Hom}_R(M, N) \rightarrow \text{Hom}_R(M, M) \text{ szűrjektív}$$

$$\iff R' \otimes_R \text{Hom}_R(M, N) \rightarrow R' \otimes_R \text{Hom}_R(M, M)$$

$$\iff \text{Hom}_{R'}(R' \otimes_R M, R' \otimes_R N) \rightarrow \text{Hom}_{R'}(R' \otimes_R M, R' \otimes_R M) \text{ szűrjektív}$$

$$\iff R' \otimes_R f \text{ hasad. } \square$$

1.2.11. Állítás. Legyen R' egy hűségesen lapos bővítése az R részgyűrűjének úgy, hogy $R \subseteq Z(R')$. Ekkor minden M R -modulus-ra:

$$M \in \mathfrak{B}(R) \iff R' \otimes_R M \in \mathfrak{B}(R')$$

Bizonyítás. Vissza irány: $R' \otimes_R M \in \mathfrak{B}(R')$ implikálja, hogy $R' \otimes_R M$ is végesen prezentált, így M is mint R -modulus is végesen prezentált. Előző állítás következtében tetszőleges $N \twoheadrightarrow M$ R -szűrjekció hasad, azaz $M \in \mathfrak{B}(R)$. $\square$

1.2.12. Következmény. Legyen S egy multiplikatív halmaz R gyűrűben, és legyen M és N végesen prezentált. Tegyük fel, hogy $\varphi_s : M_S \rightarrow N_S$ egy R_S -izomorfizmus. Ekkor létezik egy $f \in S$ és egy R_f -izomorfizmus $M_f \rightarrow N_f$ ami φ -hez lokalizálódik.

1.3. Lokális és globális módszerek

Ebben a fejezetben a lokális és globális módszerekkel ismerkedünk meg, amelyek szükségesek a Quillen foltozási tétel bizonyításához. Ezt a fejezetet T.Y.Lam, *Serre's problem on projective modules* könyvének I.3 fejezetére alapoztam.

1.3.1. Állítás. A $\oplus_{\mathfrak{m}} R_{\mathfrak{m}}$ ($\mathfrak{m} \in \max(R)$) hűségesen lapos R -modulus.

Bizonyítás. Előző fejezetből tudjuk, hogy minden $R_{\mathfrak{m}}$ R -lapos, így $\oplus_{\mathfrak{m}} R_{\mathfrak{m}}$ szintén R -lapos. Mivel $\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}} = R_{\mathfrak{m}}$ minden $\mathfrak{m} \in \max(R)$ -re, azaz $\oplus_{\mathfrak{m}} R_{\mathfrak{m}}$ hűségesen lapos. $\square$

1.3.2. Következmény. R -modulusok egy sorozata $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ egzakt akkor és csak akkor, ha $M'_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{g_{\mathfrak{m}}} M''_{\mathfrak{m}}$ is egzakt minden $\mathfrak{m} \in \max(R)$. Speciálisan $\psi : N \rightarrow M$ injektív, szűrjektív illetve bijektív akkor és csak akkor, ha $\psi_{\mathfrak{m}} : N_{\mathfrak{m}} \rightarrow M_{\mathfrak{m}}$ injektív, szűrjektív illetve bijektív minden $\mathfrak{m} \in \max(R)$.

1.3.3. Következmény. Legyen $\phi : N \rightarrow M$ egy R -modulus homomorfizmus és M végesen prezentált R felett. Ekkor ϕ hasadó szűrjekció akkor és csak akkor ha $\phi_{\mathfrak{m}} : N_{\mathfrak{m}} \rightarrow M_{\mathfrak{m}}$ is az mint $R_{\mathfrak{m}}$ -modulusok homomorfizmusa minden $\mathfrak{m} \in \max(R)$.

1.3.4. Következmény. Minden P végesen prezentált R -modulusra, a következők ekvivalensek:

- (1) P R -projektív.
- (2) $P_{\mathfrak{m}}$ $R_{\mathfrak{m}}$ -projektív minden $\mathfrak{m} \in \max(R)$
- (3) $P_{\mathfrak{p}}$ $R_{\mathfrak{p}}$ -szabad minden $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$

Bizonyítás. (1) $\iff$ (2) következik az előző állításból valamint abból, hogy P projektív.

(3) $\Rightarrow$ (2) Egyértelmű hisz minden maximális ideál egyben prímeideál is.

(2) $\Rightarrow$ (3) Létezik $\mathfrak{m}$: $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m} \in \max(R)$, ekkor $P_{\mathfrak{p}}$ megkapjuk ha $P_{\mathfrak{m}}$ -et szintén lokalizáljuk. Mivel $P_{\mathfrak{m}}$ $R_{\mathfrak{m}}$ -projektív, így $P_{\mathfrak{p}}$ $R_{\mathfrak{p}}$ -projektív és az első fejezet alapján $R_{\mathfrak{p}}$ -szabad is. $\square$

1.3.5. Definíció. Ha $P \in \mathfrak{B}(R)$ és $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$, ekkor definiálhatjuk a $\mathfrak{p}$ szerinti rangját, $rk_{\mathfrak{p}}P = \text{rank}_{R_{\mathfrak{p}}}P_{\mathfrak{p}}$

1.3.6. Megjegyzés. Ezzel a definícióval kapunk egy függvényt $rkP : \text{Spec}(R) \rightarrow \mathbb{Z}$.

$\text{Spec}(R)$ -en van egy természetes topológiánk a Zariski topológia, ahol a zárt halmazaink a következők:

$$V(\mathfrak{U}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) | \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{U}\}$$

ahol $\mathfrak{U}$ egy ideál. A zárt halmazaink komplementere:

$$\cup_{f \in \mathfrak{U}} \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) | f \notin \mathfrak{p}\}.$$

A nyílt halmazaink bázisa a következő lesz:

$$D(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) | f \notin \mathfrak{p}\}.$$

Ezen felül azt is tudjuk, hogy a Zariski topológia $\text{Spec}(R)$ -en mindig kompakt. Ugyanis ha veszünk egy nyílt fedést $D(f_{\alpha})$, az f_{α} generálják az egység ideált, de ezt véges sok f_{α} is generálja vagyis ezek R -et is generálják, így elég az ezekhez tartozó $D(f_{\alpha})$ -kat venni.

1.3.7. Állítás. Ha $P \in \mathfrak{B}(R)$, akkor $rkP : \text{Spec}(R) \rightarrow \mathbb{Z}$ folytonos ha $\text{Spec}(R)$ -en a Zariski topológiát nézzük míg $\mathbb{Z}$ -n a diszkrét topológiát. Speciálisan rkP korlátos.

Bizonyítás. Legyen $rk_{\mathfrak{p}}P = n$, azaz $P_{\mathfrak{p}} \cong R_{\mathfrak{p}}^n$. Ekkor létezik $f \notin \mathfrak{p}$, hogy $P_f \cong R_f^n$. Azaz rkP konstans n , a $\mathfrak{p} \in D(f)$ környezetében. Ebből következik a folytonossága az rkP -nek, a korlátosság pedig abból a tényből, hogy $\text{Spec}(R)$ kompakt. $\square$

1.3.8. Következmény. Ha R -ben nincs nemtriviális idempotens elem akkor minden $P \in \mathfrak{B}(R)$ -nak konstans a rangja.

Bizonyítás. Mivel R -ben csak triviális idempotens elemek vannak így a $\text{Spec}(R)$ egy összefüggő halmaz lesz a Zariski topológiára nézve. Vagyis minden folytonos $rkP : \text{Spec}(R) \rightarrow \mathbb{Z}$ függvény korlátos lesz. $\square$

1.3.9. Tétel. Legyen R egy kommutatív félig-lokális gyűrű. Ha egy $P \in \mathfrak{B}(R)$ modulusnak konstans a rangja mondjuk n , akkor $P \cong R^n$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\max(R) = \{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r\}$. Minden i -re válasszunk $x_{i1}, \dots, x_{in} \in P$ elemeket, hogy a képük $P_{\mathfrak{m}_i}$ -ben egy szabad bázist adjanak. A kínai maradéktétel értelmében $\exists x_j \in P$, hogy $x_j \equiv x_{ij} \pmod{\mathfrak{m}_i P}$ minden i -re. A $x_1, \dots, x_n$ elemek képei minden maximális ideál szerinti lokalizáltban szabad bázisok. Definiáljuk $f : R^n \rightarrow P$ leképezést $f(e_j) = x_j$ azonossággal, ahol e_j az egységvektorok. Ekkor $f_{\mathfrak{m}_i}$ egy izomorfizmus minden i -re. Így f maga is egy izomorfizmus lesz, vagyis $P \cong R^n$ $\square$

1.3.10. Állítás. Legyen M egy tetszőleges R -modulus és legyen $f, g \in R$ két komaximális elem (abban az értelemben, hogy $fR + gR = R$). Ekkor a következő egy visszahúzási diagram:

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M_g \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_f & \longrightarrow & M_{fg} \end{array}$$

Bizonyítás. Vegyük az $M \rightarrow M_f \oplus M_g$ leképezést, ez injektív lesz. Valóban, ha $m \in M$ a 0-ba lokalizálódik M_f -ben akkor M_g -ben, ekkor $f^r m = 0 = g^r m$ alkalmas r hatványra. De f^r és g^r még mindig komaximálisak így m csak a $0 \in M$ lehet. Továbbiakban használjuk a következő jelöléseket $S = \{f^n : 0 \leq n\}$ és $T = \{g^n : 0 \leq n\}$.

Tegyük fel, hogy $\frac{m}{s} \in M_f = M_S$ és $\frac{n}{t} \in M_g = M_T$ ugyanahhoz az elemhez lokalizálódik M_{fg} -ben. Feltelhetjük, hogy $sn = tm \in M$ (Ugyanis $(s't')(tm - sn) = 0$ ebből $(tt')(s'm) = (ss')(t'n)$ és akkor m/s helyett írhatunk $s'm/s's$). Legyen $xs + yt = 1$ ($x, y \in R$), és $q = xm + yn \in M$. Ekkor

$$sq = (xs)m + y(sn) = (xs)m + (yt)m = m,$$

és hasonlóan, $tq = n$. Így $q = \frac{m}{s} \in M_S$, és $q = \frac{n}{t} \in M_T$ $\square$

1.3.11. Következmény (Homomorfizmusok foltozása). Legyen M, N R -modulusok valamint f és g komaximális elemek. Tegyük fel, hogy van két homomorfizmusunk

$$\beta_f : M_f \longrightarrow N_f, \quad \beta_g : M_g \longrightarrow N_g$$

ugyanahhoz a $M_{fg} \longrightarrow N_{fg}$ homomorfizmus lokalizálódna. Ekor,

(1) egyértelműen létezik egy R -homomorfizmus $\beta : M \longrightarrow N$ ami β_f -hez illetve β_g -hez lokalizálódik.

(2) továbbá, β egy izomorfizmus (valamint monomorfizmus, epimorfizmus) akkor és csak akkor, ha β_f és β_g szintén izomorfizmusok (valamint monomorfizmusok, epimorfizmusok).

Bizonyítás. (1) β létezése és egyértelműsége következik abból, hogy a visszahúzási konstrukció egy funktor.

(2) Az oda irány evidens. Vissza irány:

A monomorfizmus és az izomorfizmus megkapható diagramvadászatból. Az epimorfizmus nem kapható meg így. Ha β_f és β_g szűrjektívek akkor minden $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) = D(f) \cap D(g)$, $\beta_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \rightarrow N_{\mathfrak{p}}$ is szűrjektív. De ha ez igaz minden prímeál szerinti lokalizáltban akkor β maga is szűrjektív kell legyen. $\square$

1.3.12. Következmény (Modulusok foltozása). *Legyen f és g komaximális elemek. Legyen Y egy R_f -modulus és Z egy R_g -modulus úgy, hogy $Y_g \cong Z_f$ mint R_{fg} -modulusok. Ekkor létezik egy izomorfia erejéig egyértelmű X R -modulus, amire $X_f \cong Y$ és $X_g \cong Z$. Továbbá:*

(1) $Y \in \mathfrak{M}(R_f), Z \in \mathfrak{M}(R_g) \iff X \in \mathfrak{M}(R)$.

(2) Y és Z végesen reprezentáltak R_f illetve R_g felett $\iff X$ végesen prezentált R felett.

(3) $Y \in \mathfrak{B}(R_f)$ és $Z \in \mathfrak{B}(R_g) \iff X \in \mathfrak{B}(R)$.

1.4. Stabilan szabad modulusok

A stabilan szabad modulusok azért lesznek hasznosak, mert ezek magadhatók úgy, mint egy jobbinvertálható mátrix nulltere. Így a stabilan szabad modulusok vizsgálatát vissza lehet vezetni gyűrűk feletti lineáris algebrára. Ezt a fejezetet T.Y.Lam, *Serre's problem on projective modules* könyvének I.4 fejezetére alapoztam.

1.4.1. Definíció. Egy P R -modulust m -típusú stabilan szabadnak hívunk, ha $P \oplus R^m$ szabad. Egy modulus stabilan szabad ha van valamilyen m , hogy m -típusú stabilan szabad.

1.4.2. Állítás. *Ha P stabilan szabad és nem végesen generált, akkor P szabad.*

Bizonyítás. Legyen $P \oplus R^m \cong F$ szabad e_i $i \in I$ bázisokkal. Mivel P nem végesen generált, így I -nek muszáj végtelen halmaznak lennie. Tekintsünk úgy P -re, mint $\ker(F \xrightarrow{f} R^m)$ (alkalmas f epimorfizmusra). Egy kellően nagy véges $I_0 \subset I$ részhalmazra, $F_0 = \sum_{i \in I_0} e_i \cdot R \xrightarrow{f} R^m$ már szűrjektrív. Így $F = P + F_0$ és legyen $Q = P \cap F_0$, ekkor kapjuk a következő rövid egzakt sorozatokat:

$$0 \rightarrow Q \rightarrow P \rightarrow P/Q \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow Q \rightarrow F_0 \rightarrow R^m \rightarrow 0$$

Noether izomorfia tétele értelmében $P/Q \cong F/F_0 \cong \sum_{i \in I \setminus I_0} e_i \cdot R$. Mivel $I \setminus I_0$ végtelen, így $P/Q \cong R^m \oplus F_1$ alkalmas F_1 szabad modulussal. Ekkor a fenti két rövid egzakt sorozat hasad, ezzel:

$$P \cong Q \oplus (R^m \oplus F_1) \cong F_0 \oplus F_1$$

azaz P szabad modulus. $\square$

1.4.3. Megjegyzés. Emiatt elég a végesen generált modulussal foglalkozni.

Ha P m -típusú stabilan szabad akkor és csak akkor ha $P \cong \ker(R^n \xrightarrow{f} R^m)$ egy alkalmas f hasadó epimorfizmusra. Ha M egy $m \times n$ f -hez asszociált mátrix, akkor M invertálható, azaz létezik egy $n \times m$ N mátrix, hogy $MN = I_m$. Következés képpen minden jobb invertálható $m \times n$ mátrix M definiál egy m -típusú stabilan szabad jobb R -modulust:

$$P = \left\{ \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} : M \cdot \alpha = 0 \right\}$$

az M megoldás tere. Így a végesen generált stabilan szabad R -modulusok vizsgálata ekvivalens az R fölötti jobb invertálható téglalap mátrixok vizsgálatával.

1.4.4. Állítás. $P \cong \ker(R^n \xrightarrow{f} R^m)$ szabad akkor és csak akkor ha f felemelhető egy $\hat{f} : R^n \rightarrow R^m \oplus R^r$ alkalmas r -re, hogy $\pi \hat{f} = f$, ahol $\pi : R^m \oplus R^r \rightarrow R^m$ a vetítés az első faktorba.

$$\begin{array}{ccc} & & R^m \oplus R^r \\ & \nearrow \hat{f} & \downarrow \pi \\ R^n & \xrightarrow{f} & R^m \end{array}$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\hat{f}$ izomorfizmus. Ekkor $f \cong \ker(\pi) = R^r$. Másik irány: tegyük fel, hogy létezik $g : P \xrightarrow{\cong} R^r$. Legyen $R^n = Q \oplus P$, így az f megszorítása Q -ra, egy izomorfizmust ad $f_0 : Q \rightarrow R^m$. Ekkor $f_0 \oplus g : R^n \rightarrow R^m \oplus R^r$ megadja a kívánt $\hat{f}$ izomorfizmust. $\square$

1.4.5. Következmény. Minden jobb invertálható $m \times n$ M mátrixra, a megoldástere az M -nek szabad akkor és csak akkor, ha M kiegészíthető egy invertálható mátrixszá megfelelő számú sor hozzáadásával.

A következő állításokat nem bizonyítom, ezek a Hermite és d -Hermite gyűrűk definiálására szolgálnak.

1.4.6. Definíció. Egy $(b_1, \dots, b_n)$ vektort (jobb) unimoduláris sornak nevezünk, ha $(b_1, \dots, b_n)$ jobb invertálható, azaz $\sum_{i=1}^n b_i R = R$. Adott R gyűrű esetén az unimoduláris sorok halmazát $Um_n(R)$ jelöljük.

1.4.7. Következmény. *Tetszőleges R gyűrűre a következők ekvivalensek:*

- (1) Minden végesen generált stabilan szabad R -modulus szabad.
- (2) Minden végesen generált 1-típusú stabilan szabad R -modulus szabad.
- (3) Tetszőleges R feletti unimoduláris sor kiegészíthető egy invertálható mátrixszá.

1.4.8. Definíció. Egy gyűrűt amely rendelkezik a fenti ekvivalens tulajdonságokkal, Hermite gyűrűnek hívunk.

1.4.9. Állítás. *Tetszőleges R gyűrűre és d nemnegatív egészre a következők ekvivalensek:*

- (1) Minden $n \geq d + 2$ egészre, $GL_n(R)$ tranzitívan hat $Um_n(R)$ halmazon.
- (2) Minden végesen generált legalább $d + 1$ -típusú stabilan szabad R -modulus szabad.
- (3) Tetszőleges R feletti legalább $d + 2$ hosszú unimoduláris sor kiegészíthető egy invertálható mátrixszá.

1.4.10. Definíció. Egy gyűrűt, amely rendelkezik a fenti ekvivalens tulajdonságokkal, d -Hermite gyűrűnek hívunk.

1.5. Elemi mátrix csoport

Ez a fejezet azért fontos a számunkra, mert az unimoduláris sorokkal való számolás alapját adják. Ezt a fejezetet T.Y.Lam, *Serre's problem on projective modules* könyvének I.5 fejezetére alapoztam.

1.5.1. Állítás. (1) A diagonális mátrixok csoportja $E_n(R)$ -et normalizálja $GL_n(R)$ -ben.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in E_{2n}(R)$. Speciálisan:

$$(\dots, a, \dots, b, \dots) \sim_{E_n(R)} (\dots, -b, \dots, a, \dots)$$

$$\sim_{E_n(R)} (\dots, b, \dots, -a, \dots)$$

Bizonyítás. Elég azt megmutatni, hogy $D = \text{diag}(1, \dots, d, \dots, 1)$ (d invertálható elem) $E_n(R)$ -et normalizálja. Tegyük fel, hogy d a k -adik sorban van. Ekkor, $i \neq j$:

$$D \cdot (I + xe_{ij}) \cdot D^{-1} = \begin{cases} I + xe_{ij} & \text{ha } i \neq k \neq j \\ I + dxe_{ij} & \text{ha } k = i \\ I + xd^{-1}e_{ij} & \text{ha } k = j \end{cases}$$

(2) Elégséges azt megmutatni, hogy $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in E_{2n}(R)$. Ez pedig következik az alábbi elemi oszlop transzformációk sorozatából:

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

□

1.5.2. Lemma (Whitehead lemma). Minden $A, B \in GL_n(R)$ igaz, hogy:

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \cdot E_{2n}(R)$$

Bizonyítás. Könnyen kaphatjuk oszlop transzformációkkal:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & -AB \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} AB & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

□

1.5.3. Következmény. (1) Minden $u_1, \dots, u_n \in U(R)$ elemekre igaz, hogy

$$\text{diag}(u_1, \dots, u_n) \in \text{diag}(u_1 \cdots u_n, 1, \dots, 1) \cdot E_n(R).$$

(2) Ha R kommutatív gyűrű, tetszőleges $SL_n(R)$ -beli diagonális mátrix $E_n(R)$ -beli.

A következő két állítást nem bizonyítom, csak kimondom, ezeket felfogjuk használni Suslin féle bizonyításnál.

1.5.4. Állítás. Ha $(b_1, \dots, b_m) \in Um_n(R)$ tartalmaz egy jobb rövidebb rész unimoduláris sort, akkor $(b_1, \dots, b_m) \sim_{E_n(R)} (1, 0, \dots, 0)$.

1.5.5. Állítás. Legyen R vagy euklidészi tartomány vagy félig-lokális gyűrű.

(1) Minden $n \geq 2$, tetszőleges $(a_1, \dots, a_n) \in Um_n(R) \sim_{E_n(R)} (1, 0, \dots, 0)$.

(2) Továbbá $SL_n(R) = E_n(R)$.

1.6. Ellenpélda $SL_n(R)$ és $E_n(R)$ egyenlőségére

Előző fejezetben láthattuk, hogyha R egy euklideszi tartomány vagy egy kommutatív félig-lokális gyűrű, akkor $SL_n(R) = E_n(R)$, minden $n \geq 0$.

A következőkben mutatunk egy ellenpéldát, hogy ez tetszőleges gyűrűben nem feltétlen teljesül. Ezt a fejezetet T.Y.Lam, *Serre's problem on projective modules* könyvének I.8 fejezetére alapoztam.

1.6.1. Tétel. *Legyen k egy nemnulla kommutatív gyűrű és legyen $R = k[x, y]$ polinom gyűrű, ekkor*

$$C = \begin{pmatrix} 1 + xy & x^2 \\ -y^2 & 1 - xy \end{pmatrix} \in SL_2(R) \quad (1 - (xy)^2 + x^2y^2 = 1)$$

de nem eleme $E_n(R)$ -nek.

1.6.2. Megjegyzés. Ha $R = k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ahol k tetszőleges test. Legyen $f \in R$ tetszőlegesen nemnulla polinom és írjuk fel összeg alakban úgy, hogy minden tényező homogén i fokkal, azaz $f = f_1 + f_2 + \dots + f_d$. Ekkor f vezető alakja f_d lesz, jelölésben: $LF(f) = f_d$. $A = (a_{ij})$ R fölötti mátrix, akkor $LF(A) = (LF(a_{ij}))$

1.6.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy $A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in E_2(R) \setminus M_2(k)$. Ekkor vagy p, q, r, s közül az egyik 0, vagy $LF(A)$ egy oszlopa R -szerese egy másiknak, hasonlóan soraira.*

Bizonyítás. [1.6.1]

Az előző tételt használva könnyen láthatjuk, hogy a C mátrixunk nem $E_2(R)$ -beli, ugyanis C egyik eleme sem k bel, így alkalmazhatjuk a tételt. $LF(C) = \begin{pmatrix} xy & x^2 \\ -y^2 & xy \end{pmatrix}$, ennek két sora: $x(y, x)$ és $-y(y, x)$ egyik sem R -szerese a másiknak így $C \notin E_2(R)$. Ezzel kész az ellenpéldánk. $\square$

2. fejezet

Serre Sejtés elemi bizonyítása

Előző fejezetben beláttam, hogyha egy mátrix jobb invertálható akkor meghatároz egy stabilan szabad modulust, valamint azt is, hogy ha egy gyűrű Hermite akkor minden végesen generált projektív modulus stabilan szabad. Ezzel az észrevétellel a végesen generált projektív modulusainkat le lehet írni jobb invertálható mátrixok segítségével. Előtte azonban szükséges lesz kitérni Bass tételére.

2.1. Bass tétele

Mielőtt nekilátok Suslin bizonyításának, egy eredményt még be kell bevezetni, nevezetesen Bass tételét. Ami azt mondja ki, hogyha egy kommutatív noether gyűrű Krull dimenziója d akkor az d -Hermite. Ez azért szükséges, mert $k[t_1, \dots, t_d]$ egy ilyen gyűrű, és így ki lehet használni a d -Hermite gyűrűk definíciójából adódó unimoduláris sorok tulajdonságait. A lentebbi tételeket bizonyítás nélkül ismertetem. Ezt a fejezetet T.Y.Lam, *Serre's problem on projective modules* könyvének II.7 fejezetére alapoztam.

2.1.1. Definíció. R tetszőleges gyűrű, ekkor a $d = \sup\{n \mid \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \mathfrak{p}_n \subsetneq R\}$ számot a gyűrű Krull dimenziójának hívjuk.

2.1.2. Tétel. Legyen $R = k[t_1, \dots, t_d]$, ahol k egy test. Ekkor minden $P \in \mathfrak{B}(R)$ modulus, amire $\text{rk} P > d$ teljesül szabad.

2.1.3. Tétel. Legyen k test, ekkor $k[t_1, \dots, t_d]$ Krull dimenziója d .

2.1.4. Tétel. Ha R egy kommutatív noether gyűrű aminek Krull dimenziója $d < \infty$, akkor R d -Hermite.

2.2. Suslin féle bizonyítás

Ebben a fejezetben ismertetem Suslin bizonyítását arra, hogy test fölötti polinomgyűrű fölött minden projektív modulus szabad. Ezt a fejezetet T.Y.Lam, *Serre's problem on projective modules* könyvének III.1 fejezetére alapoztam.

2.2.1. Lemma. *Legyen R egy kommutatív gyűrű és I egy ideál $R[t]$ -ben ami tartalmaz egy monikus polinomot. Legyen J egy ideál R -ben úgy, hogy $I + J[t] = R[t]$. Ekkor $(R \cap I) + J = R$.*

Bizonyítás. Legyen $S = R[t]/I \supset R/R \cap I$, és legyen $\bar{J}$ J képe $R/R \cap I$ -ben. Ha a feltételt faktorizáljuk $R \cap I$ -vel akkor kapjuk a $\bar{J} \cdot S = S$ azonosságot. Mivel S egész, a "Going Up" tétel [Matsumura: 1970, p. 34] miatt egész bővítés. Ez alapján $\bar{J} = R/R \cap I$, vagyis $(R \cap I) + J = R$. $\square$

2.2.2. Lemma. *Legyen R egy kommutatív gyűrű, és $f = (f_1, f_2) \in R[t]^2$. Legyen $c \in R \cap (f_1, f_2)$. Ekkor tetszőleges A kommutatív R -algebrára, és $b, b' \in A$:*

$$b \equiv b' \pmod{cA} \rightarrow f(b) \sim_{SL_2} f(b').$$

Bizonyítás. Legyen $c = f_1 g_1 + f_2 g_2$ ($g_1, g_2 \in R[t]$). Tegyük fel, hogy c nem nullosztó A -ban, ekkor dolgozhatunk a lokalizáltjában $A_c \supset A$.

$$M = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} g_1(b) & -f_2(b) \\ g_2(b) & f_1(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(b') & f_2(b') \\ -g_2(b') & g_1(b') \end{pmatrix}$$

$$\det(M) = \frac{1}{c^2} \cdot c \cdot c = 1, \text{ vagyis } M \in SL_2(A).$$

$$\text{Valamint ha } A/cA\text{-ban dolgozunk akkor a fenti két mátrix szorzata} \equiv \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vagyis M minden eleme A -beli.

Végül nézzük meg, hogy valóban teljesül az $f(b) \sim_{SL_2} f(b')$:

$$\begin{aligned} f(b) \cdot M &= (f_1(b), f_2(b)) \cdot \frac{1}{c} \begin{pmatrix} g_1(b) & -f_2(b) \\ g_2(b) & f_1(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(b') & f_2(b') \\ -g_2(b') & g_1(b') \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{c} (c, 0) \begin{pmatrix} f_1(b') & f_2(b') \\ -g_2(b') & g_1(b') \end{pmatrix} = (f_1(b'), f_2(b')) = f(b') \end{aligned}$$

Általánosan nem szükséges, hogy c ne legyen nullosztó, a fentihez hasonlóan előállíthatjuk M -et anélkül, hogy c lenne a nevezőben:

$$f_i(t + yz) = f_i(t) + y\phi_i(t, y, z)$$

$$g_i(t + yz) = g_i(t) + y\psi_i(t, y, z)$$

$$b' = b + cd \quad (d \in A)$$

Ha elvégezzük a nullosztómentes esetben az M -ben lévő két mátrix szorzását akkor az m_{11} elemre a következőt kapjuk az előbbi jelölésekkel:

$$\begin{aligned} g_1(b)(f_1(b) + c\phi_1(b, c, d)) + f_2(b)(g_2(b) + c\psi_2(b, c, d)) \\ = c[1 + g_1(b)\phi_1(b, c, d) + f_2(b)\psi_2(b, c, d)] \end{aligned}$$

A kapcsos zárójelben lévő érték lesz az m_{11} , ehhez hasonlóan kapjuk a többi mátrix elemet. Formálisan láthatjuk hogy $\det(M) = 1$ valamint $f(b)M = f(b')$ $\square$

2.2.3. Lemma. *Legyen R egy kommutatív gyűrű, és legyen $f \in R[t]^n$. Ekkor tetszőleges kommutatív R algebra esetén, és tetszőleges $G \subset GL_n(A)$,*

$$I = I_{f,A,G} = \{c \in R \mid b \equiv b' \pmod{cA} \rightarrow f(b) \sim_G f(b')\}$$

mindig egy ideál R -ben.

Bizonyítás. Legyen $c, c' \in I$, és $r, r' \in R$. Ahhoz, hogy belássuk, hogy $rc + r'c' \in I$, legyen $b - b' = (rc + r'c')a$, ahol $b, b', a \in A$. Mivel $b - ra \cdot c = b' + r'a \cdot c'$, kapjuk hogy:

$$f(b) \sim_G f(b - ra \cdot c) = f(b' + r'a \cdot c') \sim_G f(b').$$

$\square$

2.2.4. Definíció. Egy $g \in R[t]$ polinomot unitérnek hívunk, ha a főegyütthatója egység R -ben.

Eddig ismertetésre került, hogy a 2.2.2 lemmában szereplő tulajdonságú elemek egy ideált alkotnak, következő tételben azt mutatom majd be, hogy ez az ideál az egység ideál. Ez a tétel azért célszerű, mert segítségével minden unimoduláris sor visszavezethető egyetlen unimoduláris sorra az $(1, 0, \dots, 0)$ -ra.

2.2.5. Tétel (Suslin). *Legyen R egy kommutatív gyűrű, és $f = (f_1, \dots, f_n)(n \geq 2)$ legyen egy unimoduláris sor $R[t]$ felett, úgy hogy f_1 unitér. Ekkor minden kommutatív R -algebra A , és tetszőleges $b, b' \in A$ -ra $f(b) \sim_G f(b')$ ahol $G \subset GL_n(A)$ $E_n(A)$ és $SL_2(A)$ generátuma.*

Bizonyítás. Legyen f és G ahogy az állításban szerepeltek, ekkor azt kell belátnunk hogy $I = I_{f,A,G}$ az egység ideál R -ben. Egy adott tetszőleges maximális ideálra $m \subset R$, elégséges találni egy elemet $c \in I \setminus m$ Vegyük f -et modulo $(f_1) + m[t]$, ekkor kapunk egy unimoduláris sort $(\bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n)$ felett

$$\frac{R[t]}{(f_1) + m[t]} \cong \frac{\frac{R}{m}[t]}{(\bar{f}_1)}$$

Ami egy véges dimenziós algebra R/m test felett, vagyis egy semi-lokális gyűrű. Tegyük fel hogy $n \geq 3$, különben $f(b) \sim_{SL_2(A)} (1, 0) \sim_{SL_2(A)} f(b')$. Ekkor 1.5.5 miatt $\exists \bar{M} \in E_{n-1}(\frac{R[t]}{(f_1)+m[t]})$ amire:

$$(\bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n) \cdot \bar{M} = (\bar{1}, \bar{0}, \dots, \bar{0})$$

Emeljük fel $\bar{M}$ -et $M \in E_{n-1}(R[t])$, és legyen $(f_2, \dots, f_n) \cdot M = (g_2, \dots, g_n) \in R^{n-1}$. Ekkor $g_2 \equiv 1 \pmod{(f_1)+m[t]}$, amiből kapjuk, hogy $(f_1, g_2) + m[t] = R[t]$. Mivel f_1 monikus 2.2.1 miatt $R \cap (f_1, g_2) + m = R$. Pontosabban létezik $c \in R \cap (f_1, g_2)$ és $c \notin m$. Azzal fejezzük be a bizonyítást hogy megmutatjuk, hogy $c \in I$. Ehhez ellenőrizzük, hogy $b \equiv b' \pmod{cA}$. $i \geq 2$ -re:

$$g_i(b) - g_i(b') \in (b - b') \cdot A \subseteq c \cdot A \subseteq f_1(b)A + g_2(b)A$$

ezzel,

$$\begin{aligned} f(b) &\sim_{E_n} (f_1(b), g_2(b), g_3(b), \dots, g_n(b)) \\ &\sim_{E_n} (f_1(b), g_2(b), g_3(b'), \dots, g_n(b')) \\ &\sim_{SL_2} (f_1(b'), g_2(b'), g_3(b'), \dots, g_n(b')) \\ &\sim_{E_n} (f_1(b'), f_2(b'), f_3(b'), \dots, f_n(b')) = f(b') \end{aligned}$$

□

2.2.6. Következmény. Legyen R egy kommutatív gyűrű és $f = (f_1, \dots, f_n) (n \geq 2)$ egy unimoduláris sor $R[t]$ felett úgy hogy f_1 unitér. Ekkor $g \sim_G f(0)$ ahol $G \subseteq GL_n(R[t])$ valamint $E_n(R[t])$ és $SL_2(R[t])$ generátuma.

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző tételt $A = R[t]$ -re $b = t$ és $b' = 0$ -val. □

2.2.7. Tétel. Ha k egy test, és $A = k[t_1, \dots, t_d]$, akkor tetszőleges végesen generált projektív A -modulus szabad.

Bizonyítás. 2.1.4 miatt tudjuk, hogy A d -Hermite gyűrű. Így a tételünket d -beli indukciónal látjuk be. Legyen f egy unimoduláris sor A felett. Tegyük fel hogy $f_1 \neq 0$, cseréljük meg a változókat a következő képpen:

$$t_1 \mapsto t_1$$

$$t_i \mapsto t_i + t_1^{r_i} (2 \leq i \leq d)$$

$$f(t_1, t_2 + t_1^{r_2}, \dots) = c \cdot h(t_1, \dots, t_d)$$

ahol $c \in k \setminus \{0\}$ és h monikus polinom t_1 -ben. A változócsere úgy is tekinthetünk, mint k -algebra automorfizmusai A -nak, így feltehetjük hogy $f_1(t_1, \dots, t_d)$ monikus $R[t_1]$ -ben skalárszorzó erejéig, ahol $R = k[t_2, \dots, t_d]$. A skalárszorzó invertálható hisz k test. Ezzel és a fenti következménnyel $f \sim_{GL_n} f(0, t_2, \dots, t_d)$, az induktív feltétel miatt ez $\sim_{GL_n} (1, 0, \dots, 0)$.

□

3. fejezet

Serre sejtés Quillen féle bizonyítása

Ebben a fejezetben Quillen bizonyítását mutatom be. Az első részben Quillen foltozási tételét látom be, ami a sejtés bizonyításának a kulcsa. A fejezet második részében pedig megfogalmazom a sejtést algebrai és geometriai alakban is, hogy szemléletesebben is látható legyen a tétel hasznossága. Végző soron belátom a sejtést, miszerint tetszőleges test fölötti polinomgyűrű fölött minden projektív modulus szabad.

3.1. Quillen foltozási tétele

Ezt a fejezetet T.Y.Lam, *Serre's problem on projective modules* könyvének III.1 fejezetére alapoztam.

3.1.1. Tétel. *Legyen E egy gyűrű, f egy centrális elem benne, valamint x, y, t független határozatlanok E felett. Ha $\theta(t) \in E_f[t]^*$, ekkor létezik k_0 , hogy*

$$\theta((x + f^k y)t)\theta(xt)^{-1} \in E_f[x, y, t]^*$$

Bizonyítás. Legyen $\theta(x + y) - \theta(x) = y\phi(x, y)$, ahol $\phi(x, y) \in E_f[x, y]$. Ekkor minden $r \geq 0$:

$$\begin{aligned} \theta((x + f^r y)t)\theta(xt)^{-1} &= 1 + [\theta((x + f^r y)t) - \theta(xt)] \cdot \theta(xt)^{-1} \\ &= 1 + f^r y t \cdot \phi(xt, f^r y t) \cdot \theta(xt)^{-1} \end{aligned}$$

Válasszuk meg r -t úgy, hogy $f^r \cdot \phi(x, y)\theta(x)^{-1} \in E[x, y]$. Ekkor létezik $\sigma(x, y, t) \in E[x, y, t]$:

$$\theta((x + f^r y)t)\theta(xt)^{-1} = \sigma(x, y, t)_f$$

Az első egyenletünknek köszönhetően feltehetjük hogy $\sigma(x, y, t) \equiv 1 \pmod{yt}$, de $\sigma(x, y, t)$ nem feltétlenül lesz invertálható $E[x, y, t]$ -ben. Ezért változtatnunk kell σ választásán. Vegyünk észre, hogy $E_f[x, y, t]$ -ben σ inverze:

$$\theta(xt)\theta((x + f^r y)t)^{-1} = \sigma(x + f^r y, -y, t)$$

Ekkor legyen:

$$\sigma'(x, y, t) = \sigma(x + f^r y, -y, t) \in E[x, y, t]$$

így $\sigma^{-1} = \sigma' \in E_f[x, y, t]$. Vagyis $\sigma(x, y, t) \equiv 1 \pmod{yt}$, ezért felírhatjuk a következő egyenleteket:

$$\sigma\sigma' = 1 + yt \cdot \mu_1, \quad \mu_1 \in E[x, y, t]$$

$$\sigma'\sigma = 1 + yt \cdot \mu_2, \quad \mu_2 \in E[x, y, t]$$

Vegyünk egy kellően nagy s -t, hogy $f^s \mu_1 = f^s \mu_2 = 0$, ha $y = y f^s$ számolunk akkor a fenti egyenletekből a következő lesz:

$$\sigma\sigma' = 1$$

$$\sigma'\sigma = 1$$

Vagyis $\sigma(x, f^s y, t) \in E[x, y, t]^*$, ezzel pedig:

$$\theta((x + f^{r+s} y)t)\theta(xt)^{-1} = \sigma(x, f^s y, t)_f \in (E[x, y, t]^*)_f$$

□

3.1.2. Következmény. *Legyen R egy kommutatív gyűrű, és E egy R -algebra. Legyen $f \in R$ és $\theta(t) \in E_f[t]^*$. Ekkor létezik $k \geq 0$, hogy tetszőleges $a, b \in R$ amikre $a - b \in f^k R$ teljesül, igaz hogy $\theta(at)\theta(bt)^{-1} \in (E[t]^*)_f$.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző tételt $x + f^k y = a$ és $x = b$ helyettesítésekkel. Az $a - b \in f^k R$ feltétel miatt alkalmazhatjuk és ezzel kész is vagyunk.

□

3.1.3. Következmény. *Legyen R egy kommutatív gyűrű, és E egy R -algebra, és legyen f_0, f_1 két komaximális elem R -ben, azaz $f_0 R + f_1 R = R$. Ekkor:*

$$E_{f_0 f_1}[t]^* = (E_{f_1}[t]^*)_{f_0} \cdot (E_{f_0}[t]^*)_{f_1}$$

Bizonyítás. Legyen $\theta(t) \in E_{f_0 f_1}[t]^*$. Alkalmazhatjuk az előző következményt mindkét lokalizációhoz $E_{f_1} \rightarrow (E_{f_1})_{f_0}$ és $E_{f_0} \rightarrow (E_{f_0})_{f_1}$. Válasszunk $k \geq 0$ ami jó mindkét lokalizációhoz. Minden $b \in R$:

$$\theta(t) = [\theta(t)\theta(bt)^{-1}] \cdot \theta(bt)$$

Mivel $f_0^k R + f_1^k R = R$, így választhatunk egy $b \in f_1^k R$ hogy $1 - b \in f_0^k R$ is teljesül. Ekkor:

$$\theta(t)\theta(bt)^{-1} \in (E_{f_1}[t]^*)_{f_0}, \quad \theta(bt)\theta(0)^{-1} \in (E_{f_0}[t]^*)_{f_1}$$

□

3.1.4. Megjegyzés. Legyen A egy gyűrű, ekkor $M \in \mathfrak{M}^A(A[t_1, \dots, t_n])$ jelölés azt jelenti, hogy M végesen generált $A[t_1, \dots, t_n]$ modulus A -ról van kiterjesztve, azaz $\exists N$ A -modulus, hogy $M \cong A[t_1, \dots, t_n] \otimes_A N$. Értelem szerűen $N \cong M/(t_1, \dots, t_n)M \in \mathfrak{M}(A)$

3.1.5. Tétel (Quillen foltozási tétele). *Legyen R egy kommutatív gyűrű. A nem szükség-szerűen kommutatív R -algebra, és M egy végesen reprezentált $A[t_1, \dots, t_n]$ -modulus. Ekkor:*

(A_n) $Q(M) := \{g \in R : M_g \in \mathfrak{M}^{A_g}(A[t_1, \dots, t_n])\}$ halmaz egy R ideál, ezt M Quillen ideáljának nevezzük.

(B_n) Ha $M_{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{M}^{A_{\mathfrak{m}}}(A[t_1, \dots, t_n])$ minden $\mathfrak{m} \in \max(R)$, akkor $M \in \mathfrak{M}^A(A[t_1, \dots, t_n])$.

Bizonyítás. 1. lépés:

Belátjuk, hogy $(A_n) \Rightarrow (B_n)$ (minden n -re). Ehhez elégséges azt megnézni, hogy minden B_n -beli M -re, a Quillen ideál $Q(M)$ az egész R .

$$M' = A[t_1, \dots, t_n] \otimes_A M/(t_1, \dots, t_n)M$$

Ez végesen reprezentált A -ról bővített $A[t_1, \dots, t_n]$ -modulus. Minden $\mathfrak{m} \in \max(R)$ létezik egy izomorfizmus $\phi : M_{\mathfrak{m}} \rightarrow M'_{\mathfrak{m}}$ 1.2.12 következmény miatt, ϕ a lokalizáltja egy $A_g[t_1, \dots, t_n]$ izomorfizmusnak $M_g \rightarrow M'_g$, valami $g \in R \setminus \mathfrak{m}$ -re. Ekkor van egy $g \in Q(M) \setminus \mathfrak{m}$, így $Q(M) \not\subseteq \mathfrak{m}$, vagyis $Q(M) = R$.

2. lépés:

Ha (A_1) teljesül akkor (A_n) is teljesül minden n -re. Indukciót alkalmazva feltehetjük hogy (A_{n-1}) teljesül így (B_{n-1}) szintén teljesül. Vegyük az (A_n) -beli $Q(M)$ -et. $R \cdot Q(M) \subseteq Q(M)$ evidens, így elég megmutatni

$$f_0, f_1 \in Q(M) \Rightarrow f = f_0 + f_1 \in Q(M)$$

Legyen $N = M/(t_n)M$, ami végesen reprezentált $A[t_1, \dots, t_{n-1}]$ felett, és $L = M/(t_1, \dots, t_n)M$ ami pedig A felett végesen reprezentált. Alkalmazzuk (A_1) -et a következőre:

$$A[t_1, \dots, t_{n-1}] \rightarrow A[t_1, \dots, t_{n-1}][t_n]$$

Láthatjuk hogy $M_f N_f$ kiterjesztése, ami végesen reprezentált $A[t_1, \dots, t_{n-1}]$ felett. Azt szeretnénk belátni, hogy $N_f \in \mathfrak{M}^{A_f}(A_f[t_1, \dots, t_{n-1}])$, ekkor $M_f \in \mathfrak{M}^{A_f}(A_f[t_1, \dots, t_n])$, azaz $f \in Q(M)$.

Ehhez elégséges a (B_{n-1}) tulajdonság miatt leellenőrizni, hogy $(N_f)_{\mathfrak{m}}$ valami $(A_f)_{\mathfrak{m}}$ - modulus kiterjesztése, minden $\mathfrak{m} \in \max(R)$ -re.

Legyen $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_f$, ahol $\mathfrak{p}$ az $\mathfrak{m}$ visszahúzása R -be. Mivel $\mathfrak{m} \in \max(R)$ így $1 \notin \mathfrak{m}$ vagyis $f \notin \mathfrak{p}$, mert ha benne lenne akkor az f -fel való lokalizálás után $1 \in \mathfrak{m}$ teljesülne ami el-lentmondás, emiatt legalább az egyik f_i nincs benne $\mathfrak{p}$ -ben, ez legyen f_0 ezt indexcserével érhetjük el.

De M_{f_0} az L_{f_0} kiterjesztése, így $(N_f)_{\mathfrak{m}} = N_{\mathfrak{p}}$ az $L_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{M}(A_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{M}((A_f)_{\mathfrak{m}})$ kiterjesztése, ahogy szerettünk volna.

3. lépés:

Belátjuk, hogy (A_1) igaz. A jelölések egyszerűsítése miatt t_1 -et t -vel jelöljük. Meg kell mutatnunk, hogy:

$$f_0, f_1 \in Q(M) \Rightarrow f = f_0 + f_1 \in Q(M)$$

Jelöljük R -rel R_f -et, ekkor feltehetjük hogy f_0, f_1 komaximális elemek R -ben. Legyen $N = M/tM$, és be szeretnénk látni, hogy $M \cong N[t]$. Vegyük az A_{f_i} -izomorfizmusokat $u_i : M_{f_i} \rightarrow N_{f_i}[t]$, $i = 0, 1$. Véve egy megfelelő $N_{f_i}[t]$ automorfizmust ν_i , feltehetjük hogy $u_i N_{f_i}$ azonosítási leképezéshez redukálódik modulo t . Így kapunk két izomorfizmust $M_{f_0 f_1}$ -ről $N_{f_0 f_1}[t]$ -re. Ha ezek ugyan azok akkor létezik egy $A[t]$ -izomorfizmus $M \rightarrow N[t]$ (1.3.11 miatt). Ezekután már csak az u_i -ket kell úgy megválasztani hogy $(u_0)_{f_1}$ és $(u_1)_{f_0}$ azonosak legyenek.

Legyen $\theta = (u_1)_{f_0} \circ (u_0)_{f_1}^{-1}$, ez $\text{End}_{A_{f_0 f_1}[t]}(N_{f_0 f_1}[t])$ eleme, amit azonosíthatunk $(\text{End}_A N)_{f_0 f_1}[t]$ -vel. Legyen $E = \text{End}_A N$, ami egy R -algebra. Mivel θ az identitáshoz redukálódik mod(t), így $\theta \in E_{f_0 f_1}[t]^*$. 3.1.3 miatt felírhatjuk $\theta = (\nu_1)_{f_0}^{-1} \circ (\nu_0)_{f_1}$, alakban alkalmas $\nu \in E_{f_i}[t]^*$ -re. Ezzel $(\nu_0 u_0)_{f_1} = (\nu_1 u_1)_{f_0}$ azonosságot kapjuk és u_i -t helyettesítve $\nu_i u_i$ -vel be is láttuk az állítást. $\square$

3.1.6. Megjegyzés. Tudjuk, hogy minden végesen generált projektív modulus tetszőleges gyűrű felett végesen reprezentált. Ha az előző tételt alkalmazzuk a végesen generált P

projektív $A[t_1, \dots, t_n]$ -modulusokra, és $A = R$, akkor a következő feltétel adódik arra, hogy P mikor kiterjesztett modulus.

3.1.7. Következmény. *Legyen R egy kommutatív gyűrű, és $P \in \mathfrak{B}(R[t_1, \dots, t_n])$. Ekkor $P \in \mathfrak{B}(R[t_1, \dots, t_n])$ akkor és csak akkor ha $P_{\mathfrak{m}} R_{\mathfrak{m}}[t_1, \dots, t_n]$ -szabad minden $\mathfrak{m} \in \text{Max} R$ -re.*

3.2. Quillen féle bizonyítás

Ebben a fejezetben a célkitűzés annak az igazolása, hogy test fölötti polinomgyűrű fölött minden projektív modulus szabad. Ezt a fejezetet T.Y.Lam, *Serre's problem on projective modules* könyvének III.2 és III.3 fejezetére alapoztam.

3.2.1. Tétel (Horrocks, Geometriai alak). *Legyen R egy kommutatív gyűrű, és legyen B egy $P \in \mathfrak{B}(R[t])$ által meghatározott vektornyaláb $\mathbb{A}_R^1$ -n. Ha B kiterjeszthető egy $\mathbb{P}_R^1$ vektornyalábbá, akkor $B \text{ Spec}(R)$ -ről van kiterjesztve, azaz $P \in \mathfrak{B}^R(R[t])$.*

3.2.2. Tétel (Horrocks, Algebrai alak). *Legyen R tetszőleges kommutatív gyűrű, és legyen $P \in \mathfrak{B}(R[t])$. Ha $P\langle t \rangle := R\langle t \rangle \otimes_{R[t]} P$ egy végesen generált projektív R -modulus kiterjesztése, akkor $P \in \mathfrak{B}^R(R[t])$.*

3.2.3. Megjegyzés. Az előző állításnál, ha $P\langle t \rangle P_0 \in \mathfrak{B}(R)$ -ről van kiterjesztve, akkor P szintén P_0 -ról van kiterjesztve.

Valamint szintén az előző állításból tudjuk, hogyha P valami $Q_0 \in \mathfrak{B}(R)$ -ről van kiterjesztve (természetesen, $Q_0 \cong P/tP$), akkor

$$P_0\langle t \rangle (= R\langle t \rangle \otimes_R P_0) \cong P\langle t \rangle \cong R\langle t \rangle \otimes_{R[t]} (R[t] \otimes_R Q_0) \cong Q_0\langle t \rangle.$$

3.2.4. Állítás. *Legyen R egy kommutatív gyűrű, és $P_0, Q_0 \in \mathfrak{B}(R)$. Ha $P_0\langle t \rangle \cong Q_0\langle t \rangle$ mint $R\langle t \rangle$ -modulusok, akkor $P_0 \cong Q_0$ mint R -modulusok.*

Bizonyítás. Létezik egy egy főegyütthatós polinom $f(t)$ aminek a foka n , amire $P_0[t]_f \cong Q_0[t]_f$. Legyen $s = t^{-1}$, és $g(s) = t^{-n}f(t) \in R[s]$. Amiatt, hogy f egy főegyütthatós, tudjuk, hogy $g(0) = 1$ így $g(s)$ és s komaximálisak $R[s]$ -ben. Nézzük a következő modulusokat

$$P_0[s]_g \in \mathfrak{B}(R[s]_g) \quad \text{és} \quad Q_0[s]_s \in \mathfrak{B}(R[s]_s).$$

Mivel f és g asszociatívak $R[t, t^{-1}]$, ekkor

$$(Q_0[s]_s)_g = Q_0[t, t^{-1}]_g \cong Q_0[t, t^{-1}]_f = Q_0[t]_{tf},$$

$$(P_0[s]_g) \cong (P_0[s]_s)_g \cong P_0[t]_{tf},$$

ezek izomorfak, mint $R[t]_{tf}$ -modulusok: Az első fejezet alapján létezik egy $M \in \mathfrak{B}(R[s])$ amire $M_g \cong P_0[s]_g$ és $M_s \cong Q_0[s]_s$ teljesülnek. Az utóbbiból következik, hogy $R\langle s \rangle \otimes_{R[s]} M$ a $Q_0 \in \mathfrak{B}(R)$ kiterjesztése, így a Horrocks tétel miatt, M egy $M_0 \in \mathfrak{B}(R)$ kiterjesztése. Ekkor

$$M_0 \cong \frac{M}{sM} \cong \left(\frac{M}{sM}\right)_g \cong \frac{M_g}{sM_g} \cong \frac{P_0[s]_g}{s \cdot P_0[s]_g} \cong P_0$$

valamint,

$$M_0 \cong \frac{M}{(s-1)M} \cong \left(\frac{M}{(s-1)M}\right)_s \cong \frac{M_s}{(s-1)M_s} \cong \frac{Q_0[s]_s}{(s-1) \cdot P_0[s]_s} \cong Q_0$$

azaz $Q_0 \cong P_0$. $\square$

3.2.5. Állítás. Legyen R egy kommutatív gyűrű, és $P \in \mathfrak{B}(R[t, t^{-1}])$. Ekkor P egy $\mathfrak{B}(R[s])$ $s = t^{-1}$ -beli modulus kiterjesztése, pontosan akkor ha létezik egy egyfőegyütthatós polinom $f \in R[t]$ amire teljesül, hogy P_f egy $\mathfrak{B}(R[s])$ -beli modulus kiterjesztése.

Bizonyítás. Vissza irány: Legyen $P_f = R[t, t^{-1}]_f \otimes_{R[s]} Q$, ahol $Q \in \mathfrak{B}(R[s])$. Mivel

$$P_g \cong P_f \cong Q_{sg} \cong (Q_g)_s,$$

így létezik egy $M \in \mathfrak{B}(R[s])$ modulus, amire $M_g \cong Q_g$ és $M_s \cong P$ teljesül. $\square$

3.2.6. Állítás. Minden R kommutatív gyűrűre, legyen

$$u = (f_1(t), \dots, f_n(t)) \in Um_n(R[t])$$

Ha $f_1(t)$ unitér (azaz a főegyütthatója invertálható), akkor u kiegészíthető egy $GL_n(R[t])$ -beli mátrixszá.

Bizonyítás. Tetszőleges kommutatív S gyűrű felett, minden unimoduláris sor $u \in Um_n(S)$ meghatároz egy szabad $n - 1$ rangú S -modulust, $P(u) = \ker(u)$. A megoldás tere szabad pontosan akkor ha u kiegészíthető S felett. Most legyen $S := R[t]$ és u az állításbeli. Beszorozva u -t egy R -beli invertálható elemmel feltehetjük, hogy $f_1(t)$ főegyütthatója 1. Mivel $u_{f_1(t)} \in Um_n(R_{f_1(t)}[t])$ vektornak az elsp eleme invertálható, így $P(u_{f_1(t)})$ szabad. $P(u)_{f_1(t)} \cong P(u_{f_1(t)})$ szintén szabad, így a fentebbi megjegyzésünkből következik, hogy $P(u)$ szabad. $\square$

3.2.7. Tétel (Quillen-Suslin Tétel). Legyen R egy test, általánosabban egy főideál gyűrű. Ekkor minden $P \in \mathfrak{B}(R[t_1, \dots, t_n])$ szabad.

Bizonyítás. Legyen R egy test. Teljes indukcióval látjuk be n -re, az $n = 0$ eset egyértelmű. Legyen $n > 0$, és legyen $A = R[t_2, \dots, t_n]$:

$$A[t] \subseteq R\langle t \rangle[t_2, \dots, t_n] \subseteq A\langle t \rangle$$

Az indukciós feltétel miatt, P szabad lesz ha feltenzör szorzunk $R\langle t \rangle[t_2, \dots, t_n]$ -vel, azaz $A\langle t \rangle \otimes_{A[t]} P$ $A\langle t \rangle$ -szabad. Az előző tételek miatt $P/P/t_1P \in \mathfrak{B}(A)$ bővítése. Az induktív feltétel szerint, akkor P/t_1P A -szabad, így $P/A[t] = R[t_1, \dots, t_n]$ -szabad. Ha R főideál gyűrű akkor ugyan ez az indukciós eljárás működik annyi plusz megfigyeléssel hogyha R főideál gyűrű akkor $R\langle t \rangle$ is az. $\square$

Irodalomjegyzék

- [1] Segre Lang, *Algebra*, Springer, 2002
- [2] T.Y.Lam, *Serre's problem on projective modules*, Springer, 2006
- [3] Matsumura, H., *Commutative Algebra*, Benjamin, Reading, Mass., 1970