Lajos Hanka

Síkgráfok általánosított Clar-száma

Szakdolgozat
matematika BSc

Témavezetők:
Bérczi-Kovács Erika
adjunktus
Frank András
professzor emeritus

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Operációkutatási Tanszék
Budapest, 2022

ELTE
EÖTVÖS LORÁND
TUDOMÁNYEGYETEM

Tartalomjegyzék

Bevezetés **1**

Áttekintés **2**

1. A Clar-szám **3**

2. Unimodularitás **6**
2.1. Unimoduláris és TU mátrixok jellemzése 6
2.2. A $[K, R]$ mátrix 7

3. A Clar-halmazok min-max tétele **13**

4. Az optimális megoldások közötti átjárások **18**

5. A Clar-halmaz általánosításai **21**
5.1. Egy particionálási feladat 21
5.2. A $b-$Clar-szám 23
5.3. A $b - f$-Clar-szám 26
5.4. A $[K, R]$ mátrix unimodularitása 28
5.5. Példák további általánosításokra 30

6. Összefoglalás **31**

Hivatkozások **32**

Köszönetnyilvánítás

Nagyon köszönöm témavezetőimnek, Bérczi-Kovács Erikának és Frank Andrásnak a dolgozatom megírásához nyújtott sok segítséget, visszajelzést és közös gondolkodást.

Bevezetés

A Clar-számot mint szénhidrogén molekulák stabilitásának indikátorát E. Clar vezette be [4]. A gráfelmélet kémiai alkalmazásaiban egyes molekuláknak 2-összefüggő síkgráfokat feleltetnek meg, és a gráfok paramétereire vezetnek vissza bizonyos kémiai tulajdonságokat. Ilyen paraméter a Clar-szám is, ami eredetileg a páronként diszjunkt rezonáns hatszögek maximális száma a molekulában.

Azon molekulák esetében, amelyeknek minden tartománya páros sokszög, a megfelelő síkgráf páros. Ezen 2-összefüggő páros síkgráfok Clar-számát Hansen és Zheng egy egészértékű programként írta fel [6][7]. Megfogalmazták azt a sejtést, hogy a relaxált lineáris program is egész optimális megoldásokat nyújt, valamint meghatároztak egy duális problémát. Az egészértékűséget és a duális problémához tartozó min-max tételt Abeledo és Atkinson bizonyította be [1][2]. Először az egészértékűség belátásához a lineáris program mátrixának unimodularitását mutatták meg [1], majd áramfeladatok segítségével igazolták a min-max tételt is [2].

A dolgozatban bemutatásra kerülnek az unimodularitási eredmények, a duális probléma és a kapcsolódó min-max tétel. Ismertetjük Abeledo és Atkinson bizonyítását a min-max tételre [1], és egy új bizonyítást is megadunk. Ezeket a Clar-probléma néhány lehetséges általánosításának definiálása követi, amelyekre megfogalmazunk min-max tételeket, és bizonyítjuk is ezeket a Clar-szám esetéhez hasonló módon.

Áttekintés

1. fejezet: Definiáljuk a Clar-halmazokat és a Clar-számot. Kétféleképpen felírjuk a Clar-problémát mint egészértékű programot.

2. fejezet: Az unimoduláris, illetve teljesen unimoduláris mátrixok alapvető jellemzéseit ismertetjük. Megmutatjuk, hogy a $[K, R]$ mátrix unimoduláris.

3. fejezet: A duális probléma konstruálásához bevezetjük a megengedett vágásoknak, vágásfedéseknek és súlyaiknak a fogalmát. Az unimodularitás segítségével, majdpedig anélkül bizonyítjuk, hogy a Clar-számnak mint maximalizálási problémának az optimális értéke megegyezik a minimális összsúlyú vágásfedés súlyával.

4. fejezet: A lineáris programok optimális megoldásai közötti kapcsolatokat vizsgáljuk: az áramfeladatnak és a Clar LP1 duálisának megoldásai közötti átjárásokat, illetve az áramfeladat duálisának és a Clar LP1 megoldásai közöttieket tekintjük át.

5. fejezet: A Clar-számhoz hasonló problémákat, a Clar-halmaz néhány lehetséges általánosítását vesszük sorra. A vágásfedések és súlyaik általánosításaival min-max tételeket adunk meg.

Először azt a particionálási feladatot vizsgáljuk meg, hogy a csúcshalmazt lehetséges-e a gráf néhány tartományának csúcsaira particionálni.

Ezt követően a Clar-halmaznak azt az általánosítását nézzük meg, amely esetében élekkel és tartományokkal a csúcsoknak nem egyszeres fedését írjuk elő, hanem a b-vektor komponensei szerinti fedéseket.

Tovább általánosítjuk a problémát úgy, hogy nem a maximális elemszámú b-Clar-halmazt keressük, hanem adott súlyozás szerinti maximális összsúlyút.

Az általánosított Clar-halmazok és vágásfedések fogalmainak és összefüggéseinek alkalmazásaként újabb bizonyítását adjuk a $[K, R]$ mátrix unimodularitásának.

Végül példákat hozunk a Clar-szám lehetséges további általánosításaira.

6. fejezet: Összefoglaljuk a dolgozat tételeit és összefüggéseiket.

1. A Clar-szám

Az alábbiakban meghatározom a Clar-számhoz kapcsolódó alapvető jelöléseket és fogalmakat.

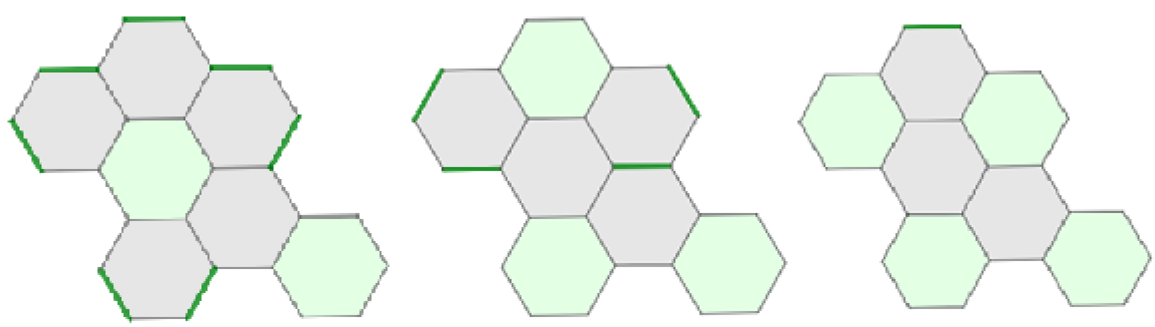
1.1. Jelölés. Legyen G egy páros, 2-összefüggő és teljesen párosítható síkgráf, rögzített beágyazással. A csúcsainak halmazát jelölje V, az éleit E, a rögzített beágyazás szerinti korlátos tartományait F. A gráf tartományai alatt az F-beli korlátos tartományokot fogjuk érteni, a nem korlátos tartományt külön kezeljük. A $G = (V, E, F)$ páros gráf két csúcsosztályára fekete, illetve fehér színosztályként is hivatkozunk.

Jelöljük K-val a G gráf csúcs-él incidenciamátrixát, R-rel pedig a csúcs-tartomány incidenciamátrixot.

1.2. Definíció. [2] **Clar-halmaz**nak vagy *rezonáns* halmaznak ([5]) nevezzük a tartományok egy olyan csúcsdiszjunkt halmazát, amely tartományok által nem fedett csúcsok részgráfján létezik teljes párosítás.

Ez megfogalmazható úgy is, hogy van a gráfnak olyan teljes párosítása, amely a halmazbeli tartományokon alternál.

1.3. Példa. A lenti ábrán - a kiválasztott tartományokat zölddel jelölve - egy gráf három különböző Clar-halmaza látható.



1.4. Definíció. [2] A gráf **Clar-szám**a a maximális elemszám, amellyel a gráfnak egy Clar-halmaza rendelkezhet.

Ez ekvivalens azzal, hogy a csúcsokat pontosan egyszeresen fedjük tartományok és élek halmazával, és a felhasznált tartományok maximális számát keressük.

Ebből adódik a következő egészértékű program a Clar-számra.

1.5. Definíció. [2] A Clar-szám felírható mint egészértékű program:

Clar IP1: $\{\max\ 1^T y,\ K\,x\ +\ R\,y\ =\ 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,$ ahol x és y egész vektorok$\}$.

A **Clar IP1** optimális értéke a Clar-szám.

1.6. Definíció. [2] A relaxált lineáris program a következő.

Clar LP1: $\{\max\ 1^T y,\ K\,x\ +\ R\,y\ =\ 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

A Clar-számnak egy másik egészértékű programjára is szükség lesz, amelynek felírásához definiálom a keretezéseket és incidenciamátrixaikat.

1.7. Definíció. [1] **Keret** *("frame")*:

A $G = (V, E, F)$ gráfnak egy $f \in F$ tartománya, mivel páros hosszú kör, kétféleképpen párosítható. Ezt a két (diszjunkt) élhalmazt nevezzük a tartomány két keretének. Az óramutató járása szerinti keret a fekete csúcsokat az óramutató járása szerint közelebb eső fehér szomszédjaikkal párosítják. A másik keretet óramutató járásával ellentétes keretnek hívjuk.

1.8. Definíció. [1] **Keretezés** *("framework")*, **egyirányú és egyszerű keretezések:**

A **keretezés** egy olyan függvény, amely a gráf minden tartományához hozzárendeli valamelyik keretét.

Egyirányú keretezés esetén vagy az összes tartományhoz az óramutató járása szerinti keretet rendeljük, vagy mindegyikhez az óramutató járásával ellentétes keretet.

Egy keretezés akkor **egyszerű**, ha minden él legfeljebb egy tartomány keretének része. Adódik, hogy az egyirányú keretezések egyszerűek.

Egy keretezés incidenciamátrixa alatt azt az általában U-val jelölt mátrixot értjük, amelynek sorai az E élhalmaznak, oszlopai az F tartományhalmaznak felelnek meg, és $U_{e,f} = 1$ (ahol $e \in E, f \in F$) akkor, ha az e él benne van az f tartományhoz rendelt keretben, különben $U_{e,f} = 0$.

A második egészértékű program felírásához használni fogjuk valamely keretezés U incidenciamátrixát. Ebben segítségünkre lesz a következő lemma.

1.9. Lemma. [1] Tekintsük a G gráfot és egy tetszőleges keretezését a fenti jelölésekkel. Ekkor $R = KU$.

Bizonyítás: Vizsgáljuk az R mátrix $v \in V$ és $f \in F$ csúcs-tartomány párjához tartozó elemét: $R_{v,f}$-et.

Ha $R_{v,f} = 1$, akkor az f tartomány egyik csúcsa v. Az f keretének pontosan egy olyan éle van, amely v-nek éle, így v él-incidenciavektorának (sorvektorként értelmezve) és f keretének az incidenciavektorának (oszlopvektorként értelmezve) a szorzata 1, azaz $(KU)_{v,f} = 1$.

Ha $R_{v,f} = 0$, akkor az f tartománynak v nem csúcsa. Az f keretének nincs olyan éle, amely v-nek éle, így v él-incidenciavektorának és f keretének az incidenciavektorának a szorzata 0, azaz $(KU)_{v,f} = 0$. □

A lemma alapján a **Clar IP1** $\{Kx + Ry = 1\}$ feltételének megfelel a $\{K(x + Uy) = 1\}$ feltétel. Így a következő egészértékű programnak is a Clar-szám az optimális értéke.

1.10. Definíció. [1] Legyen U egy egyszerű keretezés incidenciamátrixa. Ekkor a következőképpen is felírható a Clar-szám mint egészértékű program.

Clar IP2: $\{\max\ 1^T y,\ Kz = 1,\ x + Uy = z,\ x, y, z \geq 0,$ ahol x, y és z egész vektorok$\}$.

1.11. Definíció. [1] A relaxált lineáris program a következő.

Clar LP2: $\{\max\ 1^T y,\ Kz = 1,\ x + Uy = z,\ x, y, z \geq 0\}$.

A következő fejezetben a fenti lineáris programok mátrixairól megmutatjuk, hogy unimodulárisak, és kitérünk az egészértékűséggel kapcsolatos következményekre.

2. Unimodularitás

Abeledo és Atkinson [2] bizonyítottak a Clar-számra vonatkozóan egy min-max tételt (3.12 tétel). Ehhez először a $[K, R]$ mátrix unimodularitását látták be, amely során az unimodularitás fogalmára és néhány kapcsolódó tételre építettek. Ebben a fejezetben először ezeket a tételeket, majd pedig a $[K, R]$ mátrix unimodularitásának bizonyítását ismertetjük [1].

2.1. Unimoduláris és TU mátrixok jellemzése

2.1. Definíció. [1] Egy egész mátrix akkor **unimoduláris**, ha bármelyik oszlopbázisának vesszük a teljes rangú részmátrixait, azok determinánsainak legnagyobb közös osztója 1.

Az alábbi tételeken alapulnak a fejezet bizonyításai.

2.2. Tétel. [8] Az A egész mátrix pontosan akkor unimoduláris, ha az

$$\{x \ : \ A\,x \ = \ b, \ x \geq 0\}$$

poliéder tetszőleges egész b vektorra egész poliéder.

2.3. Tétel. [10] Az A egész mátrix unimoduláris, ha teljesíti a következő két feltételt:

a) Létezik olyan B unimoduláris oszlopbázisa A-nak, valamint 0, 1 és -1 elemekből álló C mátrix, amelyekre $A \ = \ B\,C$.

b) Nem létezik A oszlopainak olyan részhalmaza, amely lineárisan független és az összegvektor minden eleme páros.

2.4. Definíció. [9] Egy mátrixot **teljesen unimodulárisnak** (röviden: TU-nak) nevezünk, ha minden aldeterminánsa $(0, \pm 1)$ értékű.

2.5. Megjegyzés. Ha egy mátrix TU, akkor unimoduláris.

2.6. Tétel. [9] Páros gráf incidenciamátrixa teljesen unimoduláris.

2.7. Tétel. [9] Minden TU-mátrix és egész korlátozó vektor által megadott poliéder egész.

2.2. A $[K, R]$ mátrix

A következőkben Abeledo és Atkinson [1] nyomán megmutatjuk, hogy a $[K, R]$ mátrix unimoduláris. Ekkor a 2.2 tétel szerint a Clar LP1 (1.6) poliédere egész, a lineáris program optimális értéke felvétetik egész vektoron is, tehát ez az optimális érték maga a Clar-szám.

Először a Clar LP2 (1.11) mátrixáról látjuk be, hogy unimoduláris, majd pedig ebből a Clar LP1 mátrixának unimodularitását is.

2.8. Tétel. [1] Legyen U egy egyszerű keretezés incidenciamátrixa.
Ekkor a $\begin{bmatrix} 0 & 0 & K \\ I & U & -I \end{bmatrix}$ mátrix unimoduláris.

2.9. Megjegyzés. A Clar LP2 (1.11) programot éppen a fenti mátrixszal adtuk meg.

Bizonyítás: Tekintsük a $\begin{bmatrix} 0 & 0 & K \\ I & U & I \end{bmatrix}$ mátrixot. Ez pontosan akkor unimodulásis, ha a tételbeli mátrix is az, hiszen megkaphatóak egymásból sorok, illetve oszlopok -1-gyel szorzásával; ezek a műveletek, mivel nem változtatnak a részmátrixok determinánsainak osztóin, nyilvánvalóan megtartják az unimodularitás tényét.

Hasonlóképpen unimoduláris mátrix oszlopainak felcserélésével is unimoduláris mátrixot kapunk.

Legyen T a gráf egy feszítőfájának élhalmaza, K_T pedig a K mátrix megfelelő oszlopaiból álló részmátrix. Ezen oszlopok kiválasztásával kapjuk a $\begin{bmatrix} 0 & 0 & K \\ I & U & I \end{bmatrix}$ mátrixból a $\begin{bmatrix} K_T \\ I_T \end{bmatrix}$ mátrixot. A komplementer $T^{\complement}$ élhalmazhoz a $\begin{bmatrix} K_{T^{\complement}} \\ I_{T^{\complement}} \end{bmatrix}$ részmátrix tartozik. Ekkor a tétel állítása megfelel a következő mátrix unimodularitásának:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & K_T & K_{T^{\complement}} \\ I & U & I_T & I_{T^{\complement}} \end{bmatrix}$$

Az unimodularitás bizonyításához a 2.3 tételt alkalmazzuk a következő szereposztással:

$B := \begin{bmatrix} 0 & K_T \\ I & I_T \end{bmatrix}$ és $C := \begin{bmatrix} I & U & 0 & I_{T^{\complement}} - I_T\Lambda \\ 0 & 0 & I & \Lambda \end{bmatrix}$, ahol a Λ mátrix a $K_T\Lambda = K_{T^{\complement}}$ egyenletrendszer megoldása, amelynek létezése és egyértelműsége következménye a feszítőfa részgráfjának tetszőleges csúcspár közötti egyértelmű útjának, amely út két G-ben éllel összekötött csúcs között G párossága miatt páratlan hosszú (ezt nevezzük az él alapkörének), így ezen G-beli élekhez tartozó K-beli oszlopok kifejezhetőek a feszítőfa egyes oszlopvektorainak +1 és -1 együtthatós kombinációjaként. Ez a visszavezetés azt is megvilágítja, hogy a Λ mátrix elemei mind 0, 1 vagy -1. Valójában a T feszítőfához tartozó hálózati mátrixot írtuk fel.

A 2.3 tétel alapján a következők belátása szükséges:

1. Teljesül: $A = BC$.
2. B egy oszlopbázisa az A mátrixnak.
3. A B mátrix unimoduláris.
4. A C mátrix elemei mind 0, 1 vagy -1.
5. Az A mátrix néhány oszlopának kiválasztásával kapott részmátrix, amennyiben teljesül rá, hogy oszlopainak összege csupa páros elemből áll, úgy szinguláris mátrix.

Következzék a fenti állítások belátása.

1. $BC = \begin{bmatrix} 0 & K_T \\ I & I_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & U & 0 & I_{T^\complement} - I_T\Lambda \\ 0 & 0 & I & \Lambda \end{bmatrix} =$
$$= \begin{bmatrix} 0I + K_T0 & 0U + K_T0 & 00 + K_TI & 0(I_{T^\complement} - I_T\Lambda) + K_T\Lambda \\ II + I_T0 & IU + I_T0 & I0 + I_TI & I(I_{T^\complement} - I_T\Lambda) + I_T\Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & K_T & K_{T^\complement} \\ I & U & I_T & I_{T^\complement} \end{bmatrix}$$
2. Az K mátrix sorrangja $|V| - 1$, az A mátrix sorrangja (és így az oszloprangja is) $|E| + |V| - 1$. A B mátrix A-nak $|E| + |V| - 1$ darab oszlopából áll, sorrangja $|E| + |V| - 1$, így oszlopai lineárisan függetlenek. Tehát B oszlopbázisa A-nak.
3. A K mátrix egy páros gráf csúcs-él incidenciamátrixa, mint ilyen teljesen unimoduláris (2.6 tétel). A B mátrix ebből következően nem csupán unimoduláris, hanem még teljesen unimoduláris is.

4. Csakis a $\begin{bmatrix} I_{T^\complement} & -I_T\Lambda \end{bmatrix}$ részmátrix elemeiről nem triviális állítás, hogy 0, 1 vagy -1 az értékük. A Λ mátrix elemeiről, így $I_{T^\complement}$ és $-I_T\Lambda$ elemeiről ezt már tudjuk. Egy-egy tetszőleges oszlopot választva $I_{T^\complement}$, illetve I_T oszlopaiból, elmondható, hogy az azonos helyeken lévő elempároknak legfeljebb az egyike nemnulla. Ez a tulajdonság az I_T mátrixról öröklődik a $-I_T\Lambda$ mátrixra. Így a megfelelő oszlopok összegére, az ezekből alkotott $\begin{bmatrix} I_{T^\complement} & -I_T\Lambda \end{bmatrix}$ mátrixra is teljesül, hogy minden eleme 0, 1 vagy -1.

5. Legyen A' az A mátrix néhány olyan oszlopának kiválasztásával kapott részmátrix, amely oszlopok összege csupa páros elemből áll. Ekkor valamely $D' \in E, E' \in E, F' \in F$ részhalmazokkal $A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & K_{E'} \\ I_{D'} & U_{F'} & I_{E'} \end{bmatrix}$. Azt szeretnénk igazolni, hogy A' oszlopai lineárisan összefüggenek, azaz létezik olyan $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$ nemnulla vektor (hossza: $|D'| + |F'| + |E'|$), amelyre $\begin{bmatrix} 0 & 0 & K_{E'} \\ I_{D'} & U_{F'} & I_{E'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0$. Ehhez különböző esetekre bontva definiálni fogunk az egyenletrendszert kielégítő $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$ vektorokat.

2.10. Megjegyzés. Az $I_{D'}$, $U_{F'}$ és $I_{E'}$ mátrixok mindegyikére igaz, hogy minden eleme 0 vagy 1, és minden sorának legfeljebb egy nemnulla eleme van, azaz legfeljebb egy darab olyan eleme van, ami 1-es. Így az $\begin{bmatrix} I_{D'} & U_{F'} & I_{E'} \end{bmatrix}$ minden sorának 0 vagy 2 darab 1-es eleme van, a többi elem nulla.

Abban az esetben, amikor E' üres, akkor u minden elemét 1-re, v minden elemét -1-re állítva kielégítjük az egyenletrendszert: az A' azon sorai, amelyek nem csupa nulla elemből állnak, pontosan két 1-est tartalmaznak, az egyikhez tartozó u-elemet 1-nek, a másikhoz tartozó v-elemet -1-nek választottuk, a szorzatra nulla adódik.

Ha E' nemüres, akkor vizsgáljuk az élei által indukált részgráfját G-nek, és jelölje a korábbi síkbaágyazást megtartó indukált páros síkgráfot $G' = (V', E', \tilde{F})$. Mivel K'_E minden sora páros sok 1-est tartalmaz, ezért G' minden csúcsának páros a fokszáma. Így G'-nek valóban páros hosszú körökkel határolt tartományai vannak (ezek halmaza $\tilde{F}$), amelyek közé most beleértjük a nem korlátos tartományt is.

A fokszámok párossága miatt a G' tartományai 2-színezhetőek (lásd [11]). Vegyük egy 2-színezésüket. A tartományok kapott osztályaira piros, illetve kék tartományokként hivatkozunk.

Először a w vektor értékeit határozzuk meg, amelyekre tekinthetünk úgy, mint egy E' élein értelmezett függvényre. Egy $e \in E'$ élre legyen $w_e = 1$, ha az egyetlen kék tartománynak, amelynek e az egyik éle, annak a tartománynak az óramutató járása szerinti keretének eleme ez az él. Különben, ha az óramutató járásával ellenkező irányú keretnek az eleme az e él, akkor legyen $w_e = -1$. Ugyanazokat az értékeket kapnánk, ha a piros tartományok óramutató járása szerinti éleinek adnánk $w_e = -1$ értékeket, a többinek pedig 1-et.

Az $f \in F'$ tartományhoz a következőképpen rendeljünk v_f értékeket: ha van a tartomány U szerinti keretének olyan éle, amely eleme E'-nek, akkor tetszőleges ilyen e_f él kiválasztásával $v_f := -w_{e_f}$. Azt állítjuk, hogy ugyanazt az értéket kapjuk, ha a tartomány keretének egy másik E'-beli élet választottuk volna v_f meghatározásához, azaz két ilyen élnek - nevezzük e_1-nek és e_2-nek ezeket - azonos a w szerinti értéke: síkbeli elhelyezkedés tekintetében az f tartományt tartalmazza a G' síkgráf valamely $\tilde{f} \in \tilde{F}$ tartománya, amely tartományra e_1 és e_2 is pontosan akkor eleme az óramutató járása szerinti keretnek, ha f-nek az U szerinti kerete óramutató járása szerinti. Tehát egy adott (színű) $\tilde{F}$-beli tartomány egyazon keretéhez tartozik a két él, így $w_{e_1} = w_{e_2}$.

Ha nincs az f tartomány U szerinti keretének E'-beli éle, akkor v_f tetszőlegesen megválasztható, az egyszerűség kedvéért legyen $v_f = 1$ minden ilyen tartományra.

Az u értékek definiálásához építkezünk arra a korábbi megfigyelésre, hogy az $\begin{bmatrix} I_{D'} & U_{F'} & I_{E'} \end{bmatrix}$ részmátrix minden sorának 0 vagy 2 darab 1-es eleme van, a többi elem nulla. Az $e \in D'$ sorában még egy 1-es van. Ha ez az 1-es az $f \in F'$ tartományhoz tartozó oszlopban van (ami azt jelenti, hogy az e él az f tartomány U szerinti keretének egyik éle), akkor $u_e := -v_f$. Ha az 1-es az $\begin{bmatrix} I_{E'} \end{bmatrix}$ részmátrix megfelelő sorában van (azaz $e \in D' \cap E'$), akkor $u_e := -w_e$.

Ellenőrizzük, hogy a fenti módokon definiált $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$ vektor teljesíti a kívánt egyenlőségrendszert:

$\begin{bmatrix} K_{E'} w \end{bmatrix} = 0$, azaz minden csúcs E'-beli éleire a w-összeg nulla. Tudjuk, hogy adott csúcsnak páros sok ilyen éle van, amelyek a G' gráfban párosíthatóak úgy, hogy egy-egy pár valamelyik tartomány két szomszédos éle, tehát w-értékeik összege nulla.

Az $\begin{bmatrix} I_{D'} & U_{F'} & I_{E'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0$ soronkénti ellenőrzését bontsuk három esetre aszerint, hogy az adott sorban melyik két résztmátrixban található a két nemnulla elem (ha csupa nulla elem van, nyilván teljesül az egyenlőség):

Ha olyan e él sorát vizsgáljuk, amely eleme D'-nek, akkor az u értékek meghatározásából közvetlen adódik, hogy u_e ellentettje a sor másik 1-es elemének a v vagy w értékének.

Ha olyan e él sorát vizsgáljuk, amely D'-nek nem eleme, ellenben E'-nek és valamely $f \in F'$ tartomány U szerinti keretének is eleme, akkor definíció szerint $v_f = -w_e$.

Tehát az 5. állításnak megfelelően ezen oszlopok lineárisan összefüggenek.

Ezzel beláttuk az alkalmazott 2.3 tétel összes feltételét. A következmény: a $\begin{bmatrix} 0 & 0 & K \\ I & U & -I \end{bmatrix}$ mátrix unimoduláris. □

A 2.2 és a 2.8 tételek segítségével megmutatjuk, hogy a $[K, R]$ mátrix is unimoduláris.

2.11. Tétel. [1] A $[K, R]$ mátrix unimoduláris.

Bizonyítás: Legyen U egy egyszerű keretezés incidecnciamátrixa.

Tekintsük a következő poliédereket:

2.12. Definíció.

$$P_1(b) := \{(x, y) \mid Kx + Ry = b, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$P_2(b) := \{(x, y, z) \mid Kz = b, x + Uy - z = 0, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

A 2.8 tétel azt mondta ki, hogy a $P_2(b)$-t definiáló mátrix unimoduláris. Így a 2.2 ekvivalencia értelmében $P_2(b)$ egész poliéder, tetszőleges célfüggvény esetén felveszi az optimumot egész vektoron is.

A $P_1(b)$ poliéder is egész: tetszőleges célfüggvény esetén az optimum megegyezik az adott célfüggvény szerinti optimummal a $P_2(b)$ poliéderre vonatkozóan, hiszen $(x, y) \in P_1(b)$ esetén $(x, y, x + Uy) \in P_2(b)$ és $(x, y, z) \in P_2(b)$ esetén $(x, y) \in P_1(b)$; a $P_2(b)$ poliéderen az optimum felvétetik egész (x, y, z) vektoron, tehát felvétetik a $P_1(b)$ polidér egész (x, y) vektorán.

Tehát a $[K, R]$ egész mátrixra és tetszőleges egész b vektorra $P_1(b)$ egész. Ez a tulajdonság a 2.2 karakterizáció szerint éppen a mátrix unimodularitását fejezi ki. □

Ezzel bizonyítottuk a fejezetnek a továbbiakban legfontosabb tételét, a $[K, R]$ mátrix unimodularitását. Arra fogjuk használni, hogy a 2.2 értelmében a Clar LP1 optimuma egész vektoron is felvétetik, tehát megegyezik a Clar-számmal. Ezt mondja ki a következő tétel.

2.13. Tétel. [1] A Clar-szám megegyezik a Clar LP1 (1.6) optimális értékével.

3. A Clar-halmazok min-max tétele

A min-max tételbeli minimalizálási probléma konstrukciójához a következő definíciókra lesz szükségünk.

3.1. Definíció. [5] A $G = (V, E, F)$ gráf egy **vágás**ának nevezzük az élek egy olyan részhalmazát, amely pontosan azokból az élekből áll, amelyek valamely $Z \subset V$ csúcshalmaz mellett összekötik a Z és $V - Z$ csúcshalmazokat. Egy vágást **minimális**nak mondunk, amennyiben nincs olyan valódi részhalmaza, ami szintén vágás. **Egyirányú** az a vágás, amelyre teljesül, hogy a vágásbeli élek Z-beli csúcsai mind egy színosztályhoz tartoznak. **Megengedett** *("feasible")* vágásoknak a minimális egyirányú vágásokat nevezzük.

3.2. Megjegyzés. Egy vágás pontosan akkor minimális, ha a vágásbeli élek elhagyásával keletkező gráfban csak két összefüggőségi komponens van.

3.3. Megjegyzés. A G gráf minimális vágásai megfeleltethetőek a duális síkgráf (3.9) köreinek. A megengedett vágások pedig a duális irányított gráf (3.9) egyirányú köreinek feleltethetőek meg.

3.4. Definíció. [5] **Vágásfedés** alatt megengedett vágások egy olyan halmazát értjük, amelyre teljesül, hogy minden tartománynak van olyan éle, amely legalább az egyik vágásnak eleme. Fogjuk használni azt a kifejezést, hogy a vágás metszi a tartományt; azt értjük alatta, hogy a tartománynak, illetve valamely keretének van a vágással közös éle.

3.5. Definíció. [7] A megengedett vágásoknak súlyokat tulajdonítunk. Legyen M egy teljes párosítás élhalmaza. Egy megengedett vágás élhalmazát jelölje E_c. A vágás súlyára $m_c := |E_c \cap M|$, azaz a vágásbeli élek között azon élek száma, amelyek élei az M teljes párosításnak is.

3.6. Definíció. [7] Egy vágásfedés súlya alatt a halmazbeli megengedett vágások súlyainak összegét értjük.

3.7. Tétel. [7] A megengedett vágások súlya jóldefiniált: bármely M teljes párosításra nézve ugyanannyi $|E_c \cap M|$.

Bizonyítás: A $(V, E - E_c)$ gráfnak két összefüggőségi komponense van: az egyik, fehéresnek titulált részben az E_c élek pontjai mind fehérek. A másik részt feketésnek hívjuk. Egy teljes párosításban a fehéres rész fekete pontjai a fehéres rész bizonyos fehér pontjaival vannak összepárosítva, mivel a vágás definíciójából adódóan nem létezik olyan él, ami a fehéres rész egy fekete pontját a másik, feketés rész egy fehér pontjával kötné össze. Ez azt jelenti, hogy pontosan annyi darab olyan éle van a párosításnak, ami a két rész egy-egy pontját köti össze, amennyivel több fehér pontja van a fehéres résznek, mint fekete. Ez a darabszám éppen a vágásnak az adott teljes párosítás szerinti súlyának felel meg, ami tehát állandó. □

Ezen fogalmak segítségével már ki tudjuk mondani a duális problémát: vágásfedés összsúlyát szeretnénk minimalizálni. Először belátjuk azt a gyengébb állítást, hogy a Clar-számot felülről becsli a vágásfedések minimális súlya, majd azt a min-max tételt is, hogy a két optimális érték megegyezik.

3.8. Tétel. [7] A Clar-szám nem lehet nagyobb egy minimális súlyú vágásfedés súlyánál.

Bizonyítás: Azt látjuk be, hogy egy Clar-halmaz elemszáma nem lehet nagyobb, mint egy vágásfedés súlya. Válasszunk tetszőlegesen egy vágásfedést, egy Clar-halmazt és egy olyan teljes párosítást, amely tartalmazza a Clar-halmaz elemeinek egy-egy keretét. A Clar-halmaz bármelyik eleméhez találunk olyan vágást a fedésben, ami metszi ezt a tartományt, sőt, ennek a vágásnak a tartomány mindkét keretét metszenie kell: a tartománynak kell, hogy legyen másik vágásbeli éle is, különben az él két csúcsa között $(V, E - E_c)$-ben is vezetne út; mivel a megengedett vágás egyirányú, a másik él a másik keretnek éle. Így ez a vágás olyan élben is metszi a tartományt, amely a kiválasztott teljes párosításnak éle. Ezek az élek különbözőek (mivel a Clar-halmaz tartományai csúcsdiszjunktak), mindegyiket számoljuk a vágásfedés súlyában, ami így legalább akkora, mint a Clar-halmaz elemszáma. □

A min-max tételt minimális költségű áramfeladattá alakítással fogjuk belátni, ehhez a következő gráfokat fogjuk használni.

3.9. Definíció. [2] A $G = (V, E, F)$ síkgráf duálisa a $G^* = (F \cup \{t\}, E^*)$ gráf, amelynek csúcsai a G tartományainak feleltethetőek meg, beleértve a t nem korlátos tartományt is. Két G^*-beli csúcsot annyi él köt össze, amennyi közös éle van a megfelelő két G-beli tartománynak. Ezzel a szemlélettel az E, illetve E^* élhalmazok elemei között megadhatunk egy megfeleltetést.

3.10. Definíció. [2] A G^* éleit irányítsuk meg: ha az $e^* \in E^*$ él a G^* gráfban az f^* és g^* csúcsokat köti össze, akkor a G gráfban a megfelelő f és g tartományoknak az e közös éle; az e él pontosan az egyik tartomány óramutató járása szerinti keretének eleme; ennek a tartománynak megfelelő G^*-beli csúcsba irányítsuk a másikból az e^* élt. Ez a duális irányított gráf. Ezután minden F-beli f^* csúcsot duplázzunk meg, azaz cseréljük le egy f_1^* és f_2^* csúcspárra, irányítsunk egy élt f_1^*-ből f_2^*-be (az így keletkező élek alkotják az A_F élhalmazt), az f^*-ba beérkező éleket f^* helyett f_1^*-be irányítjuk, az f^*-ból induló éleket f_2^*-ből indítjuk. Az E^* éleket lecseréltük az A_E élhalmazra.
Az így kapott irányított gráf: $D = (F_1 \cup F_2 \cup \{t\}, A_E \cup A_F)$.

3.11. Megjegyzés. Írjuk fel a D gráf csúcs-él incidenciamátrixát. Jelöljük U-val a G gráf óramutató járása szerinti keretezés, W-vel pedig az óramutató járásával ellenkező irányú keretezés él-tartomány incidenciamátrixát. Használjuk még az $a := (U - W)\underline{1}$ jelölést.

Az incidenciamátrix: $\begin{bmatrix} U^T & -I \\ -W^T & I \\ -a^T & 0 \end{bmatrix}$.

Az előkészületek végeztével rátérünk a min-max tétel bizonyítására.

3.12. Tétel. [2] A Clar-szám megegyezik egy vágásfedés minimális összsúlyával.

Bizonyítás: Írjuk fel a D gráfra a következő minimális költségű áramfeladatot:

$$\begin{bmatrix} U^T & -I \\ -W^T & I \\ -a^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = 0 \text{ (azaz áram)},\ r \geq 0,\ s \geq 1 \text{ (alsó korlátok)}, \min\, k^T r \text{ (célfüggvény)},$$

ahol k az eredeti gráf egy tetszőleges teljes párosításának incidencia(oszlop)vektora.

Tekintsük a duális feladatnak ezt a felírását:

$\max\, 1^T y, \quad Uu - Ww - a\alpha + x = k, \quad -u + w + y = 0, \quad x, y \geq 0.$

A 2.6 és 2.7 tételekből tudjuk, hogy az egész korlátokkal megadott áramfeladatnak van optimális és egész megoldása. Vegyünk egy ilyen megoldást: (r, s). A kapott egészértékű áram felbontható egyirányú körökön egész (speciálisan 1) értékű áramokra. A D gráf valamely egyirányú körének megfeleltethető a G gráf egy megengedett vágása, az áram pedig megengedett vágások egy halmazának. Az áram utolsó feltételéből kiolvasható, hogy minden duális gráfbeli csúcson legalább 1 értékű áram halad át, így a megengedett vágások halmaza egy vágásfedés. A minimalizált $k^T r$ érték éppen ennek a c_* vágásfedésnek az összsúlya. Tehát létezik $m(c_*) = k^T r$ összsúlyú vágásfedés.

Vegyük a duális feladat egy optimális megoldását: (u, w, α, x, y). A dualitás tétel értelmében a két optimum megegyezik: $k^T r = 1^T y$. Azt állítjuk, hogy az (x, y) komponensek kielégítik a Clar LP1 (1.6) feltételeit. Ennek megmutatásához a duális feladat első feltételét szorozzuk be a K mátrixszal: $KUu - KWw - Ka\alpha + Kx = Kk$.

Mivel $KU = R = KW$ (az 1.9 lemma alapján), $Ka = K(U - W)\underline{1} = 0$ és $Kk = 1$, a fenti egyenlet továbbalakítható: $R(u - w) + Kx = 1$, amiből $y = u - w$ helyettesítéssel látható, hogy a nemnegatív (x, y) vektor teljesíti a Clar LP1 feltételét: $Kx + Ry = 1$.

Ebből következik, hogy a Clar LP1 optimális értéke legalább $1^T y$. Mivel a 2.13 tétel az unimodularitási eredmény következményeként kimondta, hogy a Clar LP1 optimális értéke maga a Clar-szám, így a Clar-szám is legalább $1^T y$.

Rakjuk össze a becsléseket: $1^T y \leq$ Clar-szám $\leq$ minimális súlyú vágásfedés súlya $\leq m(c_*) = k^T r = 1^T y$. Az egyenlőtlenségek tehát mind egyenlőséggel teljesülnek, így például: a Clar-szám egyenlő egy minimális összsúlyú vágásfedés súlyával. □

3.13. Megjegyzés. A min-max tétel bizonyításában definiált áramfeladat egyúttal polinomiális algoritmusát adja a Clar-szám kiszámításának.

Most pedig megmutatjuk, hogy a min-max tétel igazolásához nem szükséges hivatkozni a $[K, R]$ mátrix unimodularitására, illetve arra a következményére sem, hogy a Clar LP1 optimuma megegyezik a Clar-számmal.

A tételnek egy új bizonyítását adjuk meg, amely nagyrészt az Abeledo és Atkinson szerzőpárostól származó ismertetett bizonyítás gondolatmenetét követi, azonban az unimodularitási eredményeket nem használja fel.

Bizonyítás: Tekintsük a 3.12 bizonyításában szereplő áramfeladatot és duálisát. Láttuk, hogy optimális és egész primál megoldásra $m(c_*) = k^T r$ valamely c_* vágásfedéssel. A 3.8 tételből adódik, hogy: Clar-szám $\leq$ minimális súlyú vágásfedés súlya $\leq m(c_*)$.

A 2.6 és 2.7 tételekből tudjuk, hogy az egész korlátokkal megadott áram feladat duálisának is van optimális és egész megoldása. Vegyünk egy ilyen (u, w, α, x, y) megoldást. Ekkor $1^T y = k^T r$. Az (x, y) vektor kielégíti a Clar LP1 feltételét, miközben nemnegatív egész vektor. Tehát (x, y) teljesíti a Clar IP1 (1.5) összes feltételét, y egy Clar-halmazt definiál, amelynek elemszáma $1^T y$. Triviálisan: $1^T y \leq$ Clar-szám. Rakjuk össze a becsléseket:
$1^T y \leq$ Clar-szám $\leq$ minimális súlyú vágásfedés súlya $\leq m(c_*) = k^T r = 1^T y$. Tehát a Clar-szám megegyezik egy minimális súlyú vágásfedés súlyával. □

A bizonyítás során kihasználtuk, hogy az áramfeladat duálisának egy megoldása egyúttal a Clar LP1 poliéderének is eleme. A következő fejezetben a négy lineáris program optimális megoldásai közötti további kapcsolatokat járjuk körül.

4. Az optimális megoldások közötti átjárások

A min-max tétel utóbbi bizonyításában az áramfeladat duálisának egy optimális és egész megoldásából vetítéssel egy maximális elemszámú Clar-halmaz vektorát kaptuk. Ebben a fejezetben a két primál, illetve duális feladat közötti négy átjárást tekintjük át.

A vizsgált lineáris programok az alábbiak.

A P_1 primálfeladat (az áramfeladat a 3.12 bizonyításban):

$$\begin{bmatrix} U^T & -I \\ -W^T & I \\ -a^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = 0 \text{ (azaz áram)},\ r \geq 0,\ s \geq 1 \text{ (alsó korlátok)},\ \min k^T r \text{ (célfüggvény)}.$$

A D_1 duálfeladat:

$\max 1^T y,\ \ Uu - Ww - a\alpha + x = k, \quad -u + w + y = 0, \quad x, y \geq 0.$

A D_2 duálfeladat (a Clar LP1: 1.6):

$\max\ 1^T\, y,\ K\, x\ +\ R\, y\ =\ 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0.$

A P_2 primálfeladat (a Clar LP1 duálisa):

$\min z1,\ \ zK \geq 0,\ \ zR \geq 1.$

A min-max tétel (3.12) következménye, hogy a lineáris programok optimális értékei megegyeznek, és egész vektorokon is felvétetnek.

A fejezet további részében áttekintjük, hogyan kapható meg az egyik primál/duál feladat egy optimális és egész megoldásából a másik primál/duál feladat egy optimális és egész megoldása.

1. **Adott D_1-nek egy optimális és egész megoldása, keressük D_2 egy optimális és egész megoldását.**

   Ezt a legegyszerűbb esetet már alkalmaztuk is a min-max tétel bizonyításakor: ha (u, w, α, x, y) megoldása a D_1 feladatnak, akkor (x, y) megoldása a D_2-nek, hiszen $Kx + Ry = Kx + R(u - w) = Kx + KUu - KWw - Ka\alpha = K(Uu - Ww - a\alpha + x) = Kk = 1$. Az (u, w, α, x, y) optimalitása garantálja (x, y) optimalitását.

2. **Adott D_2-nek egy optimális és egész (x, y) megoldása, keressük D_1 egy optimális és egész megoldását.**

   Olyan u vektort szeretnénk, amely kielégíti az $Uu - W(u - y) + x = k$ egyenletrendszert, azaz $Uu - Wu = k - x - Wy = k - k'$, ahol k' az (x, y)-ból származtatott teljes párosítás vektora. Tudjuk, hogy a k' teljes párosításból el tudunk jutni a k teljes párosításig alternáló körökkel, sőt, tetszőleges k-beli él(ek)ből kiindulva meg tudunk határozni megfelelő alternáló köröket; ezeket az alternáló köröket helyettesíthetjük alternáló tartományokkal, így a két teljes párosítás különbözetét felírtuk $Uu - Wu$ alakban, mivel $U - W$ oszlopai éppen alternáló tartományok él-incidenciavektorainak felelnek meg. Ekkor $\alpha := 0$ és $w := u - y$ választással $Uu - Ww - a\alpha + x =$ $= Uu - W(u - y) + x = k$, valamint a $\{-u + w + y = 0, \quad x, y \geq 0\}$ feltételek és az optimalitás is teljesül.

3. A primál megoldások közötti kapcsolathoz először értelmezzük ezek jelentését a G gráf vonatkozásában. Az r vektor minden G-beli élhez egy nemnegatív értéket rendel, az s vektor pedig a tartományokon ad meg 1-nél nem kisebb értékeket. Az $U^T r - s = 0$ feltételből kiolvashatjuk, hogy s minden tartományhoz az óramutató járása szerinti keret éleinek r-összegét rendeli, ugyanakkor a $-W^T r + s = 0$ feltételből ez egyúttal az óramutató járásával ellentétes irányú keret éleinek r-összege is. (Az $U^T r = W^T r$ egyenlőség a D irányított gráf konstrukciójából és abból a tényből adódik, hogy (r, s) a D gráfon egy áramot definiál.)

A z vektor a G gráf csúcsaira írt értékeknek feleltethető meg. A P_2 lineáris program a csúcsok z szerinti összértéket kívánja minimalizálni a következő feltételek mellett: bármely él két csúcsának z-összege nemnegatív ($zK \geq 0$), és bármely tartományon legalább 1 a z-összeg ($zR \geq 1$).

4. **Adott P_2-nek egy optimális és egész z megoldása, keressük P_1 egy optimális és egész megoldását.**

   Legyen $r := zK$ és $s := U^T r$ egész vektorok. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy a G-beli éleken az értékeket úgy határoztuk meg, hogy összeadtuk a megfelelő két csúcs z-értékét. Így teljesül az $U^T r = W^T r$ egyenlőség, amelynek következtében $-a^T r = 0$. A fenti s definícióból $U^T r - s = 0$ és $-W^T r + s = -U^T r + s = 0$. Az r nemnegativitása következik P_2 első feltételéből: $r^T = zK \geq 0$. A második feltételből, miszerint $zR \geq 1$, minden tartományon legalább 1 a z-összeg. Az $U^T r$ vektor egy koordinátája a megfelelő tartomány óramutató járása szerinti keretének éleire az r-értékek összege, azaz a tartomány csúcsainak z-összege: $U^T r = (zR)^T$. Így $s = U^T r = (zR)^T \geq 1$. Az (r, s) egész vektor teljesíti P_1 minden feltételét. Az összes csúcsra a z-összeg kiszámítható egy teljes párosítás éleire vett r-összegként: $z1 = k^T r$. Tehát (r, s) optimális és egész megoldása P_1-nek.

5. A primál megoldások közötti másik irányhoz szükségünk lesz adott r mellett a $zK = r^T$ egyenletrendszer megoldására. Az r egy nemnegatív egész áramnak felel meg a duális irányított gráfban, így felbontható egyirányú körökön egész értékű áramokra. A körök helyett vehetjük a topológiailag tartalmazott tartományokat, a tartományokhoz pedig a különböző körökből származtatott értékek összegét. A tartományokon ekképpen értelmezett z függvény a G gráfra vonatkoztatva a csúcsokon ad meg értékeket. Azt állítjuk, hogy $zK = r^T$. Ellenőrizzük az egyenletrendszer tetszőleges egyenletét, legyen ez az $e \in E$ élhez tartozó: az e él két csúcsa a duális irányított gráfban két szomszédos tartománynak felel meg; az r áram felbontásakor a közös e_* élnek az r-értéke a két tartomány z-értékeire bomlott ketté, ami a G gráfban éppen azt jelenti, hogy a két csúcs z-összege megegyezik a duális él r-értékével.

6. **Adott P_1-nek egy optimális és egész (r, s) megoldása, keressük P_2 egy optimális és egész megoldását.**

   Az előzőek alapján oldjuk meg a $zK = r^T$ egyenletrendszert, azaz írjunk a G csúcsaira z-értékeket úgy, hogy bármely élen a két csúcs z-összege megegyezzen az él r-értékével. Ekkor P_2-nek a $zK \geq 0$ feltétele teljesül, mert minden élen a z-összeg megegyezik az él r-értékével, ami nemnegatív. A $zR \geq 1$ feltétel is teljesül, hiszen minden tartományon a z-összeg megegyezik valamely keretének r-összegével, azaz a tartomány s-értékével, és $s \geq 1$. Már tudjuk, hogy z megoldása a P_2 feladatnak. Az optimalizálandó $z1$ érték kiszámítható egy teljes párosítás éleinek mint csúcspároknak a z-párjainak összegeként, azaz a teljes párosítás r-értékeinek összegeként: $z1 = k^T r$. A z megoldás optimális. Ilyen módon az áramfeladat egy optimális megoldásából könnyen megkaphatjuk a Clar LP1 duálisának egy optimális megoldását.

5. A Clar-halmaz általánosításai

5.1. Egy particionálási feladat

A Clar-számhoz hasonlatos probléma például az, ha a csúcsok pontosan egyszeres fedésében a tartományok számának maximalizálása helyett az élek számát szeretnénk minimalizálni. Tekintsük ennek a problémának azt a változatát, amikor mindössze annyi a kérdés, hogy lehet-e a fedésben használt élek száma nulla, azaz egy adott G_0 páros, 2-összefüggő és teljesen párosítható síkgráf csúcshalmazát tudjuk-e úgy particionálni, hogy minden partíció a gráf egy tartományának a csúcshalmaza.

5.1. Tétel. A particionálási feladat polinomiális algoritmussal eldönthető.

Bizonyítás: Legyen a G gráf a G_0-ból az élek duplázásával kapott gráf. A korábbi definíciókkal és jelölésekkel tekintsük a következő áramfeladatot a D gráfban:

$$\begin{bmatrix} U^T & -I \\ -W^T & I \\ -a^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = 0 \text{ (azaz áram)}, \; r \geq 0, \;\; s \geq t \text{ (alsó korlátok)}, \; \min k^T r \text{ (célfüggvény)},$$

ahol t a G_0 tartományaihoz (illetve az azokból származtatott D-beli csúcsokhoz) nullát rendel, és a G_0 valamely élének duplázásából keletkező tartományokhoz (illetve az azokból származtatott D-beli csúcsokhoz) -1-es súlyt rendel.

A duális feladat: $\max t^T y,\ \ Uu - Ww - a\alpha + x = k, \quad -u + w + y = 0, \quad x, y \geq 0$. Az optimális értékek egész vektorokon is felvétetnek a 2.6 és 2.7 tételek következtében.

A particionálási feladat valójában annak felel meg, hogy a $\max\{t^T\, y \mid K\, x\ +\ R\, y\ = 1,\ \ x\ \geq\ 0 \text{ egész},\ y\ \geq\ 0 \text{ egész}\}$ optimális érték nulla-e vagy negatív, hiszen éppen azt a kérdést teszi fel, hogy létezik-e olyan pontosan egyszeres fedése a csúcshalmaznak, amely nem használ éleket, azaz nem használja a G gráfnak a t szerint -1 súlyú tartományait. Az utóbbi két lineáris program optimuma megegyezik, ezt biztosítják a duális poliéderek közötti korábban ismertetett átjárások (4. fejezet).

Az áramfeladat optimális értékét polinomiális algoritmussal meghatározzuk, majd az optimális érték alapján eldöntjük, hogy particionálható-e tartományokkal a G_0 gráf csúcshalmaza: ha az optimum nulla, akkor particionálható, különben - negatív optimum esetén - nem. □

5.2. Megjegyzés. Ha az optimum negatív, akkor léteznek olyan r és s egész vektorok, amelyekre:

$$\begin{bmatrix} U^T & -I \\ -W^T & I \\ -a^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = 0,\ \ r \geq 0,\ s \geq t,\ \ k^T r < 0.$$

Az r függvényt írjuk át a csúcsokra a $zK = r^T$ egyenletrendszer teljesítésével. (Ennek menetét korábban bemutattuk: 4. fejezet) A kapott, G, illetve G_0 csúcsain értelmezett függvényre teljesül egyrészt, hogy a csúcsokon a $k^T r$ összérték negatív, másrészt az összérték az egyes tartományokon $(U^T r)_i = s_i \geq t_i$, ami G_0 tartományain nemnegatív. Ez a függvény triviális cáfolatát adja a particionálhatóságnak, hiszen nem lehet nemnegatív értékű partíciókra bontani egy negatív összértékű halmazt.

5.2. A $b-$Clar-szám

A továbbiakban a Clar-szám két általánosítását vizsgáljuk meg, amelyekre a Clar-számhoz hasonlóan a vágások speciális halmazainak segítségével min-max tételeket fogalmazunk meg. Először a csúcsok egyszeres fedésévé kiegészíthető Clar-halmaz helyett a pontosan b-szeres fedéssé kiegészíthető b-Clar-halmazokkal foglalkozunk, majd tovább általánosítjuk a problémát úgy, hogy már nem csak maximális elemszámú b-Clar-halmazt szeretnénk, hanem a tartományoknak adott súlyozás szerint maximális összsúlyú halmazát, ahol a maximális összsúlyt fogjuk $b-f$-Clar-számnak nevezni.

5.3. Definíció. Legyen $b \in \mathbb{N}^{|V|}$. Nevezzük b-faktornak a G élein értelmezett $m \in \mathbb{N}^{|E|}$ függvényt, amennyiben teljesíti a $Kx = b$ egyenletrendszert, azaz az m vektor által meghatározott élsúlyozással a gráf minden csúcsát annyiszor fedjük, amennyi a megfelelő b-komponens. Egy b-faktorra úgy is tekinthetünk, mint egy többszörös elemeket is megengedő élhalmazra.

5.4. Megjegyzés. Az alábbiakban feltesszük, hogy a G gráfnak létezik a rögzített b vektorunk esetében b-faktora.

5.5. Definíció. A G tartományainak egy halmazát, amely tartalmazhat többszörös elemeket is, b-Clar-halmaznak nevezzük, ha minden elemének egy-egy keretét kiválasztva olyan élhalmazt kapunk (esetleges többszörös élekkel), amely további élek hozzávételével kiegészíthető egy b-faktorrá.

5.6. Megjegyzés. A fenti definíció a Clar-halmaz általánosítása, hiszen az $\underline{1}$-Clar-halmazok maguk a Clar-halmazok.

5.7. Definíció. A b-Clar-szám egy b-Clar-halmaz maximális elemszáma. Felírhatjuk az alábbi egészértékű programként is.

b-Clar IP: $\{\max\ 1^T y,\ K\,x\ +\ R\,y\ =\ b,\ x \geq 0,\ y \geq 0,$ ahol x és y egész vektorok$\}$.

5.8. Definíció. Legyen m egy tetszőleges b-faktor. Egy megengedett vágás b-súlya alatt a vágásbeli élek m-értékeinek összegét értjük.

5.9. Definíció. Egy vágásfedés b-súlya alatt a halmazbeli megengedett vágások b-súlyainak összegét értjük.

5.10. Tétel. A megengedett vágások b-súlya jóldefiniált: nem függ a b-faktor megválasztásától.

Bizonyítás: A $(V, E - E_c)$ gráfnak két összefüggőségi komponense van: az egyik, fehéresnek titulált részben az E_c élek pontjai mind fehérek. A másik részt feketésnek hívjuk. A vágás definíciójából adódóan nem létezik olyan él, ami a fehéres rész egy fekete pontját a másik, feketés rész egy fehér pontjával kötné össze. Így tetszőleges b-faktort tekintve a fehéres rész fekete pontjait a b-értékeiknek megfelelően és nem vágásbeli élekkel fedjük; a fehér rész fehér pontjainak vágásbeli éleire az m-összeg pontosan annyi, amennyi ezeknek a fehér pontoknak az összegzett b-többlete a fehér rész fekete pontjaihoz képest, így független m választásától. □

A b-Clar-szám min-max tételét készíti elő a következő felső becslés.

5.11. Tétel. Tetszőleges b-Clar-halmaz elemszáma legfeljebb akkora, mint egy tetszőleges vágásfedés b-súlya.

Bizonyítás: Tekintsük a b-Clar-halmaz valamely kiegészítését, amely b-faktor. Eszerint a b-faktor szerint számítsuk ki a vágásfedés b-súlyát, illetve annak egy alsó becslését a következőképpen. A b-Clar-halmaz bármelyik eleméhez találunk olyan megengedett vágást a vágásfedésben, ami metszi ezt a tartományt, sőt, ennek a vágásnak a tartomány mindkét keretét metszenie kell, így olyan élben is metszi a tartományt, amely a kiválasztott b-faktornak legalább egyszeres éle. Mindegyik ilyen élt külön leszámlálhatunk a vágásfedés b-súlyában: ha egy élt két tartománynál is számolunk, akkor a b-faktornak is többszörös éle, a vágásfedés b-súlyában is szerepel legalább kétszer. Így a vágásfedés b-súlya legalább akkora, mint a b-Clar-halmaz elemszáma. □

5.12. Tétel. A b-Clar-szám megegyezik egy vágásfedés minimális b-súlyával.

Bizonyítás: Nézzük a D gráfban a következő áramfeladatot:

$$\begin{bmatrix} U^T & -I \\ -W^T & I \\ -a^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = 0 \text{ (azaz áram)},\ r \geq 0,\ s \geq 1 \text{ (alsó korlátok)}, \min\, m^T r \text{ (célfüggvény)},$$

ahol m egy tetszőleges b-faktor vektora.

Tekintsük a duális feladatnak ezt a felírását:

$\max\, 1^T y, \quad Uu - Ww - a\alpha + x = m, \quad -u + w + y = 0, \quad x, y \geq 0.$

Vegyünk optimális és egész (r, s) és (u, w, α, x, y) vektorokat. Azt állítjuk, hogy $Kx + Ry = b$. Ez belátható a következő átalakításokkal:

$Uu - Ww - a\alpha + x = m$

$KUu - KWw - Ka\alpha + Kx = Km$

$R(u - w) + 0 + Kx = b$, azaz $Ry + Kx = b$. Tehát y egy b-Clar-halmaz vektora.

Az r vektorról pedig már láttuk, hogy megengedett vágások egy halmazát adja meg, és hogy az s-re vonatkozó alsó korlát garantálja minden tartomány elmetszését, így r vágásfedést határoz meg. Az $m^T r$ érték a vágásfedés b-súlyának m szerinti kiszámítása.

Találtunk egy $1^T y$ elemszámú b-Clar-halmazt és egy $m^T r$ b-súlyú vágásfedést, valamint a primál és duál optimális értékek egyenlősége folytán $1^T y = m^T r$. Összevetve az előző 5.11 tételbeli egyenlőtlenséggel azt kapjuk, hogy ez a b-Clar-halmaz maximális elemszámú, illetve ez a vágásfedés minimális b-súlyú. A b-Clar-szám egyenlő a minimális b-súlyú vágásfedés súlyával. $\square$

5.3. A $b-f$-Clar-szám

Legyen $f \in \mathbb{N}^{|F|}$ egy G tartományain értelmezett súlyfüggvény vektora. Most olyan b-Clar-halmazt szeretnénk, amely az f szerint maximális összsúlyú. Az eddigiekre tekinthetünk úgy, hogy azok a speciális $f = \underline{1}$ esetet tárgyalták.

5.13. Definíció. Egy b-Clar-halmaz f szerint maximális összsúlya a $b-f$-Clar-szám.

5.14. Definíció. Adott $c \in \mathbb{N}^{|E|}$ és $d \in \mathbb{N}^{|F|}$. Egy $c-d$-vágásfedés megengedett vágások olyan halmaza, amely teljesíti a következő két feltételt: minden él legalább annyi vágásnak az éle, mint amennyi a megfelelő c-komponens; és minden tartomány valamely keretét legalább annyi élben metszik összesen a vágások (egy élben akár többször is metszhetik), mint amennyi a megfelelő d-komponens.

5.15. Megjegyzés. Egy megengedett vágás egy tartomány egyik keretét ugyanannyi élben metszi, mint a másik keretet.

5.16. Jelölés. Az f-vágásfedés megnevezést a $\underline{0}-f$-vágásfedés rövidítésekent használjuk ezentúl.

5.17. Tétel. Legyen $(x, y) \in P_1(b) = \{(x, y) \mid Kx + Ry = b, x \geq 0, y \geq 0\}$ egész vektor és vegyünk egy tetszőleges $c-d$-vágásfedést. Ekkor $cx + dy$ nem lehet nagyobb a vágásfedés b-súlyánál.

Bizonyítás: Az (x, y) vektorból származtassunk egy b-faktort, amelynek x-ből vett része egyértelmű, y-ból vett része a tartományok keretei közötti választás eredménye.

Becsüljük alulról a vágásfedés x-ből, illetve y-ból származó b-súlyát. (Egy vágás x-ből származó súlya alatt a vágásbeli élek x-értékeinek összegét értjük).

Minden él benne van legalább annyi vágásban, amennyi a megfelelő c-komponens. Így a vágásfedés x-ből származtatott súlya legalább cx.

Minden tartományt (és mindkét keretét) legalább annyiszor metszünk, mint a megfelelő d-komponens. Így a vágásfedés y-ból származó súlya legalább dy.

Tehát a $c-d$-vágásfedés b-súlya legalább $cx + dy$. $\square$

5.18. Tétel. A $b-f$-Clar-szám megegyezik egy f-vágásfedés minimális b-súlyával.

Bizonyítás: Nézzük a D gráfban a következő áramfeladatot:

$$\begin{bmatrix} U^T & -I \\ -W^T & I \\ -a^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = 0 \text{ (azaz áram)}, \ r \geq 0, \ s \geq f \text{ (alsó korlátok)}, \min m^T r \text{ (célfüggvény)},$$

ahol m egy tetszőleges b-faktor vektora.

Tekintsük a duális feladatnak ezt a felírását:

$\max f^T y, \quad Uu - Ww - a\alpha + x = m, \quad -u + w + y = 0, \quad x, y \geq 0.$

Vegyünk optimális és egész (r, s) és (u, w, α, x, y) vektorokat. Azt állítjuk, hogy $Kx + Ry = b$. Ez belátható a következő átalakításokkal:

$Uu - Ww - a\alpha + x = m \Rightarrow KUu - KWq + Ka\alpha + Kx = Km$

$R(u - w) + 0 + Kx = b$, azaz $Ry + Kx = b$. Tehát y egy b-Clar-halmaz vektora.

Az r vektorról már láttuk, hogy megengedett vágások egy halmazát adja meg. Az $U^T r = s \geq f$ feltétel biztosítja, hogy r egy f-vágásfedést határoz meg. Az $m^T r$ érték a vágásfedés b-súlyának m szerinti kiszámítása.

Találtunk egy $f^T y$ elemszámú b-Clar-halmazt és egy $m^T r$ b-súlyú f-vágásfedést, valamint a primál és duál optimális értékek egyenlősége folytán tudjuk, hogy $f^T y = m^T r$.

A 5.17 tétel következménye, hogy egy y vektorral megadott b-Clar-halmaz $f^T y$ összsúlya nem lehet nagyobb egy f-vágásfedés b-súlyánál.

Így y egy f szerint maximális összsúlyú b-Clar-halmaz és r egy minimális b-súlyú f-vágásfedés. A $b-f$-Clar-szám egyenlő a minimális b-súlyú f-vágásfedés b-súlyával. $\square$

5.19. Megjegyzés. A $b = \underline{1}$ és $f = \{0, 1\}^{|F|}$ speciális esetben a tartományok egy rögzített részhalmazából szeretnénk minél nagyobb elemszámú Clar-halmazt kiválasztani. Ekkor az 5.18 tétel a következőt mondja.

5.20. Tétel. [5] Az $F_0 \subset F$ tartományaiból álló maximális elemszámú Clar-halmaz elemszáma egyenlő azzal a minimális összsúllyal, amelyet megengedett vágások egy olyan halmaza határoz meg, hogy minden F_0-beli tartományt metszi valamelyik halmazbeli vágás.

5.4. A $[K, R]$ mátrix unimodularitása

Az általánosítások és kapcsolódó definíciók alkalmazásával új bizonyítását adjuk a $[K, R]$ mátrix unimodularitásának (2.11 tétel).

Bizonyítás: A 2.2 tétel szerint az unimodularitás ekvivalens azzal, hogy tetszőleges b egész vektorra a

$$P_1(b) = \{(x, y) \mid Kx + Ry = b, x \geq 0, y \geq 0\}$$

nem üres poliéder egész.

Egy poliéder akkor egész, ha minden lineáris célfüggvény optimuma egész vektoron is felvétetik. Ennek megfelelően azt kell belátni, hogy tetszőleges c, d és egész b mellett a $\max\{cx + dy \mid Kx + Ry = b, x \geq 0, y \geq 0\}$ optimuma felvétetik valamely x és y egész vektorokra. Mivel $[K, R]$ racionális, feltehetjük, hogy c és d is egész.

Nézzük a D gráfban a következő áramfeladatot:

$$\begin{bmatrix} U^T & -I \\ -W^T & I \\ -a^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = 0 \text{ (azaz áram)}, \; r \geq c^T, \; s \geq d^T \text{ (alsó korlátok)}, \min m^T r \text{ (célfüggvény)},$$

ahol m egy tetszőleges b-faktor vektora. Ilyen m létezik a következő lemma szerint.

5.21. Lemma. Ha b egész vektor és $P_1(b) = \{(x, y) \mid Kx + Ry = b, x \geq 0, y \geq 0\}$ nem üres, akkor létezik b-faktor.

Bizonyítás: Van olyan (x, y), hogy $Kx + Ry = b$. Ekkor $m := x + Uy$ teljesíti a $Km = b$ egyenletrendszert, viszont lehetnek nem egész komponensei. A következő eljárással módosítsuk m-et addig, amíg csupa egész komponense nem lesz. Vegyünk egy olyan élt, amely minimalizálja a $\beta := \min(\{m_i\}, 1 - \{m_i\})$ értéket. Ez az él benne van egy nem egész komponensekhez tartozó körben. A kör mentén váltakozva $\pm\beta$ értékeket adva az m-komponensekhez legalább egy élnek az értéke nem egészről egészre változik, nem keletkezik újabb nem egész értékű él, és továbbra is teljesül $Km = b$. Legfeljebb $|E|$ lépésben a módosított m minden értéke egész, tehát b-faktort kaptunk. □

Tekintsük a duális feladatnak ezt a felírását:

$\max cx + dy, \quad Uu - Ww - a\alpha + x = m, \quad -u + w + y = 0, \quad x, y \geq 0.$

Vegyünk optimális és egész (r, s) és (u, w, α, x, y) vektorokat. Azt állítjuk, hogy $Kx + Ry = b$. Ez belátható a következő átalakításokkal: $Uu - Ww - a\alpha + x = m \Rightarrow KUu - KWq + Ka\alpha + Kx = Km \Rightarrow R(u - w) + 0 + Kx = b$, azaz $Ry + Kx = b$.

Az r vektorról pedig azt mondhatjuk, hogy egy $c{-}d$-vágásfedést határoz meg: már láttuk, hogy vágásfedést ad meg, és hogy az s-re vonatkozó alsó korlát garantálja a tartományok megfelelő számú elmetszését; az $r \geq c$ feltétel pedig az élek elégséges számú vágásban szereplését írja elő. Az $m^T r$ érték a vágásfedés b-súlyának m szerinti kiszámítása.

Ebből az is következik, hogy $\max\{cx + dy \mid Kx + Ry = b, x \geq 0, y \geq 0\} \leq m^T r$, hiszen ez az 5.17 tétel alapján tetszőleges $c - d$-vágásfedés súlyára igaz.

Így az (x, y) vektor, amely egész eleme a $P_1(b)$ poliédernek és amelyre $cx + dy = m^T r$, maximalizálja a $P_1(b)$ poliéderen a $cx + dy$ értéket. Tehát az optimum egész vektoron is felvétetik. A 2.2 tétel ekvivalenciájából: a $[K, R]$ mátrix unimoduláris. $\square$

Bizonyítás: Bemutatunk még egy bizonyítást, amely az egész poliédereknek abból a jellemzéséből indul ki, hogy minden oldal tartalmaz egész pontot. Tekintsük a $P_1(b)$ egy nemüres oldalát: $\{(x, y) \mid Kx + Ry = b, x \geq 0, y \geq 0,\ x_i = 0,\ i \in I,\ y_j = 0,\ j \in J\}$. Az oldal egy tetszőlegesen kijelölt eleméből származtassuk az m b-faktort az előző 5.21 lemma alapján.

Nézzük a D gráfban a következő áramfeladatot:

$$\begin{bmatrix} U^T & -I \\ -W^T & I \\ -a^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = 0 \text{ (azaz áram)},\ r \geq c^T,\ s \geq d^T \text{ (alsó korlátok)}, \min m^T r \text{ (célfüggvény)},$$

ahol $c_i := -1$, ha $i \in I$; különben $c_i := 0$; valamint $d_j := -1$, ha $j \in J$; különben $d_j := 0$.

Tekintsük a duális feladatnak ezt a felírását:

$\max cx + dy, \quad Uu - Ww - a\alpha + x = m, \quad -u + w + y = 0, \quad x, y \geq 0.$

Az optimális érték nulla: az oldal kijelölt eleme ad egy ilyen megoldást. Az áramfeladat duálisának optimuma egész vektorokon is felvétetik; egy ilyen optimális és egész megoldás (x, y) vetületének $P_1(b)$ feltételei mellett $cx+dy = 0$ miatt az $\{x_i = 0, i \in I,\ y_j = 0, j \in J\}$ feltételeket is teljesítenie kell. Így az oldal tartalmaz egész pontot is. $\square$

5.22. Megjegyzés. A fenti bizonyítás során alkalmazott $\max\{cx+dy \mid Kx+Ry = b, x \geq 0, y \geq 0\}$ probléma mint egészértékű program tulajdonképpen a b-Clar-halmaz egy további általánosítása, ahol az éleknek és a tartományoknak a (c, d) szerinti összsúlyát kívánjuk maximalizálni.

5.5. Példák további általánosításokra

A Clar-probléma általánosításaival és módosításaikkal további maximalizálási problémákat konstruálhatunk. Néhány példát sorolunk fel.

1. A b-Clar-halmazok feltételeit szigorítsuk úgy, hogy minden tartományra adott egy felső korlát, amelynél többször nem szerepelhet a tartomány a halmazban.

2. A csúcsok pontosan b-szeres fedésének követelményét helyettesíthetjük a legfeljebb b-szeres fedés előírásával.

3. Adott az éleken egy c súlyfüggvény, a tartományokon pedig egy d súlyfüggvény. A csúcsokat pontosan b-szeresen fedjük élekkel és tartományokkal úgy, hogy a $cx + dy$ értéket maximalizáljuk.

4. Csak tartományokkal fedjük pontosan b-szeresen a csúcsokat és maximalizáljuk a d szerinti összsúlyt.

5. Diszjunkt tartományok maximális d-összsúlyú halmazát keressük, illetve ezt a súlyértéket vizsgáljuk.

6. Ha a gráfnak nincs teljes párosítása, a módosított Clar-probléma alatt a következőt is érthetjük: egy maximális elemszámú párosításra azon tartományok maximális száma, amelyeken a párosítás alternál.

6. Összefoglalás

A dolgozatban a Clar-számmal és az unimodularitással kapcsolatos alapvető fogalmak és jellemzések bevezetése után ismertettük Abeledo és Atkinson bizonyítását a $[K, R]$ mátrix unimodularitására [1], amely Truempernek az unimoduláris mátrixokra vonatkozó tételén alapult [10].

Az unimodularitásnak Hoffman és Kruskal 2.2 tételéből adódóan az volt a következménye, hogy a Clar-szám megegyezik a 1.6 relaxált lineáris program optimális értékével, ezt mondta ki a 2.13 tétel.

Abeledo és Atkinson felhasználta ezt az eredményt a 3.12 min-max tételre adott bizonyításukban. Azonban a 3. fejezetben a min-max tétel bizonyításának új befejezésével megmutattuk, hogy nem szükséges az unimodularitási eredményekre hivatkozni, elegendő volt az áramfeladatnak és duálisának optimális megoldásait egésznek választani.

A bizonyítás során az áramfeladat duálisának optimális és egész megoldásából vetítéssel egy Clar-halmaz vektorát kaptuk. A 4. fejezetben a két primál-, illetve duálfeladat optimális megoldásai közötti átjárásokat vettük végig.

Az 5.1. alfejezetben a particionálási feladatot visszavezettük minimális költségű áramfeladat optimális értékének meghatározására (5.1). Az 5.2 és 5.3 alfejezetekben a Clar-halmaz általánosításaira láttunk be min-max tételeket: a b-Clar-számról megmutattuk, hogy megegyezik a minimális b-súlyú vágásfedés súlyával (5.12); a $b - f$-Clar-szám pedig a minimális b-súlyú f-vágásfedés súlyával egyenlő (5.18).

Az 5.4 alfejezetben az általánosított Clar-halmazok és vágásfedések fogalmainak és összefüggéseinek alkalmazásaként újabb bizonyítását adtuk a $[K, R]$ mátrix unimodularitásának.

Végül példákat hoztunk a Clar-halmaz lehetséges további általánosításaira.

Hivatkozások

[1] H. Abeledo; G.W. Atkinson. Unimodularity of the Clar number problem. *Linear Algebra and its Applications* **420** (2007), no. 2, 441-448.

[2] H. Abeledo; G. W. Atkinson. A min–max theorem for plane bipartite graphs. *Discrete Applied Mathematics* **158** (2010), no. 5, 375-378.

[3] E. Bérczi-Kovács; A. Bernáth. The complexity of the Clar number problem and an exact algorithm. *Journal of Mathematical Chemistry* **56** (2018), 597-605.

[4] E. Clar. The aromatic sextet (1972).

[5] D. Erdős; A. Frank; K. Kun. Sink-stable sets of digraphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **28**(4) (2014), 1651-1674.

[6] P. Hansen; M. Zheng. The Clar number of a benzenoid hydrocarbon and linear programming. *Journal of Mathematical Chemistry* **15** (1994) 93-107.

[7] P. Hansen; M. Zheng. Upper bounds for the Clar number of benzenoid hydrocarbons. *Journal of the Chemical Society, Faraday Transactions* **88** (1992), 1621-1625.

[8] A.J. Hoffman; J.B. Kruskal. Integral Boundary Points of Convex Polyhedra. *Linear Inequalities and Related Systems (H.W. Kuhn and A.J. Tucker, eds.), Princeton University Press* (1956), 223–246.

[9] A. Schrijver. Theory of Linear and Integer programming. *Wiley-Interscience* (1986).

[10] K. Truemper. Algebraic characterizations of unimodular matrices. *SIAM Journal on Applied Mathematics* **35**(2) (1978), 328-332.

[11] D. B. West. Introduction to Graph Theory. Second. *Upper Saddle River, N.J. : Prentice Hall* (2001).