NYILATKOZAT

Név: Horváth Csongor

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: XFHQ76

Szakdolgozat címe:
Merev körű és levélhatvány gráfok

A szakdolgozat szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022.05.24.

Horváth Csongor

a hallgató aláírása

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Horváth Csongor

Merev körű és levélhatvány gráfok

Szakdolgozat
Matematika BSc
Matematikus szakirány

Témavezető: Blázsik Zoltán
Tudományos munkatárs, Ph.D.

Budapest, 2022.

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Elsősorban szeretném megköszönni a témavezetőmnek Blázsik Zoltánnak az egész éves közös munkát, a rendszeres konzultációkat és észrevételeit a dolgozatommal kapcsolatban. Külön köszönöm, hogy a szakdolgozatom tartalmát az én érdeklődésemnek megfelelően alakítottuk, és a széles témakörön belül szabadon választhattam meg, hogy mi kerüljön a dolgozatba. Valamint hálás vagyok, hogy számomra izgalmas témakörrel ismerkedhettem meg a szakdolgozati munkám alatt.

Ezentúl köszönöm barátaimnak az odaadó támogatást a tanulmányaim és a szakdolgozatom elkészítése alatt. Különösen értékesnek tartom a szakdolgozati témámmal kapcsolatban folytatott eszmecseréinket.

Szeretném megköszönni középiskolai tanáraimnak, Molnár-Sáska Ildikónak és Juhász Péternek, hogy a magasabb matematika irányába terelték érdeklődésemet. Köszönettel tartozom továbbá egyetemi oktatóimnak is a mély matematikai ismeretek átadása iránt tett fáradhatatlan törekvéseikért.

Végül, de nem utolsó sorban szeretném megköszönni a családomnak, hogy már kiskoromban felkeltették a matematika iránti érdeklődésemet, és máig hatalmas odaadással támogatnak a tanulmányaimban.

1. fejezet

Bevezetés

A dolgozat célja áttekintést adni a merev körű gráfok klasszikus eredményeiről. Ezeket régebben háromszögelt gráfoknak is nevezték, azonban ezen elnevezés kevésbé elterjedt, elsősorban mivel félrevezető, mivel a háromszögelt síkgráfok nem mind merev körűek. A dolgozat struktúrája az alábbiak szerint alakul.
A 2. fejezetben a dolgozatban használt gráfelméleti alapfogalmak és a téma fő fogalmai kerülnek bevezetésre. Majd a 3. fejezetben a merev körű gráfok klasszikus karakterizációiról lesz szó. Amik a minimális elvágó csúcshalmazokon alapuló és a szimpliciális sorrendet használó jellemzésüket takarja. Ezek a karakterizációk a terület első eredményei közé tartoznak az 1960-as évekből és Dirac [5](1961), valamint Fulkerson és Gross [11](1965) nevéhez fűződnek. Különösen a második karakterizáció azért érdekes, mint ahogy a 4. fejezetben látni fogjuk, mert ezen eredményen alapul az egyik hatékony merev körű gráf felismerő algoritmus. Valamint, amint szintén ebben a fejezetben majd látni fogjuk, a szimpliciális sorrend segítségével más, általában nehéz problémák is hatékonyan oldhatóak meg egyszerű algoritmusok segítségével. Így ennek több gyakorlati alkalmazása is van [40]. Például a számítógépben a regiszterek kiosztása a fordítóprogramokban a regiszterek interferencia gráfjának a merev körűségét használja ki. Mivel ismert, hogy minden SSA (Static Single Assignment) program esetén az merev körű lesz. És a regiszterek kiosztása közben használt területek interferencia gráfjának színezésére is ezen tulajdonság szolgáltat hatékony algoritmust. A színezés keresését a regiszterek kiosztására az 1980-as évek óta használják. Más területeken is, ha adott objektumokról kiderül, hogy merev körű gráfok vagy azt reprezentálják, akkor ott is lehet a merev körű gráfokról való ismereteket hatékony algoritmusok készítésére használni. Ilyen például az aciklikus adatbázissémákon való lekérdezések végrehajtása.
Az algoritmusok után az 5. fejezetben a merev körű gráfok alosztályai kerülnek

részletesebben tárgyalásra különös tekintettel az erősen merev körű gráfok alosztályaira. Ezen részben az egyes alosztályok egymáshoz való viszonyára is rámutatunk. Az egyes alosztályai a merev körű gráfoknak önmagukban is külön-külön kutatási területeket szolgáltatnak. Ugyan ezekről nem mind lesz szó a dolgozat során, de a legtöbb megemlített alosztály felismerésére ismert polinomiális algoritmus.
A befejező a 6. fejezetet kizárólag a levélhatvány gráfoknak szenteljük. Különböző k-kra a k-adik levélhatványok egymáshoz való viszonyát és a kis k értékek esetén az ismert karakterizációkat ismertetjük. Valamint a k-adik levélhatványokat felismerő algoritmusokról is lesz itt szó. Megjegyzendő, hogy a levélhatványoknak is vannak gyakorlati alkalmazásai, például az evolúcióbiológiában használják a róluk való ismereteket a fajok leszármazási fáinak rekonstrukciós feladatainál.

2. fejezet

Alapvető definíciók, előzmények

Először átismételjük a gráfelmélet legalapvetőbb fogalmait, hogy aztán ezek segítségével definiálhassuk a szakdolgozat meghatározó fogalmait. A szűkebb témakörök specifikus fogalmait az adott fejezetekben mutatjuk majd be.

2.1. Gráfok

A témánk során elsősorban irányítatlan véges hurokélmentes gráfokkal fogunk dolgozni, így ha mást nem mondunk, akkor a gráf szó alatt ilyen objektumot értünk. Ezekre tekinthetünk úgy, mint egy $G = (V, E)$ pár, ahol V egy véges halmaz, melynek elemeit *csúcsoknak* nevezzük. E pedig részhalmaza a $\{\{v, w\} : v, w \in V,\ v \neq w\}$ rendezetlen pároknak, és E elemeit *éleknek* nevezzük.
A későbbiek során egy $v \in V$ csúcs *szomszédaira* az $N(v) = \{u \in V : \{v, u\} \in E\}$ jelölést fogjuk használni. Valamint egy $v \in V$ csúcs szomszédainak számát *fokszámnak nevezzük* és $deg(v) = |N(v)|$-nel jelöljük.

Egy $G' = (V', E')$ gráfot a $G = (V, E)$ gráf *részgráfjának* nevezünk, ha $V' \subset V$, $E' \subset E$ és $E' \subset \{\{v, w\} : v, w \in V'\}$.
Egy G' részgráfját a G gráfnak *feszített részgráfnak* nevezzük, ha az előbbi jelölésekkel $E' = E \cap \{\{v, w\} : v, w \in V'\}$. Azaz a csúcsok egy részén vesszük az összes eredeti élet. Erre ezen túl használhatjuk a $G(V')$ jelölést is.
A $G = (V, E)$ gráf *komplementerének* nevezzük $\overline{G} = (V, \overline{E})$ gráfot, ha két csúcs között $\overline{G}$-ben pontosan akkor vezet él, ha G-ben nem. Azaz $\forall v, w \in V, v \neq w$: $\{v, w\} \in \overline{E} \Leftrightarrow \{v, w\} \notin E$. A definícióból következik, hogy minden gráf megegyezik a komplementerének komplementerével.

Valamely $n \geq 0$ egész esetén a gráfon *sétának* (avagy n hosszú sétának) nevezünk egy $S = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots e_n, v_n)$ sorozatot, ahol $v_i \in V$ $(i = 0, 1, \dots n)$, $e_j = \{v_{j-1}, v_j\} \in E$ $(j = 1, 2, \dots n)$.
Amennyiben a sétának nincsenek ismétlődő csúcsai, azaz $\forall i \neq j \in \{0, 1, \dots, n\}$-re $v_i \neq v_j$, akkor *útról* beszélhetünk, melynek hossza n. Jelölje egy $U = \{v_0, e_1, v_1, e_2, \dots e_n, v_n\}$ út hosszát $\ell(U)$. Ekkor $\ell(U) = n$.
Könnyen meggondolható állítás, hogy két csúcs közt pontosan akkor vezet séta, amikor út is. Mivel az út séta is és ha vezet séta, akkor abból az ismétlődő csúcsok közötti részeket elhagyva egy utat kapunk a két csúcs között.
Amennyiben olyan sétáról van szó, ahol $n \geq 3$ és $v_0 = v_n$, valamint a $v_1, v_2, \dots v_n$ csúcsok páronként különbözőek, akkor *körről* beszélhetünk.
Legyen $n \geq 3$ esetén $K = \{v_0, e_1, v_1, e_2, \dots e_n, v_n\}$ egy kör. Érdemes megjegyezni, hogy egy kört csak az éleinek halmaza vagy csak a csúcsainak rendezett halmaza is meghatározza. A K kör *húrjának* azon $\{v_i, v_j\} \in E$ élet nevezzük, amelyre $v_i, v_j \in K$, de $\{v_i, v_j\} \notin K$. Ennek segítségével a *feszített kört* is definiálhatjuk, ami egy olyan kör, aminek nincsen húrja.
Egy *kör hosszán* annak éleinek számát értjük. Jelölje $\ell(K)$ ezen értéket. Ekkor $\ell(K) = n$.

Beszélhetünk összefüggő és nem összefüggő gráfokról. Egy $G = (V, E)$ *összefüggő*, ha $\forall v, w \in V : \exists u_1, \dots, u_n \in V$ valamely $n \in \mathbb{N}$-re, hogy $\{v, u_1\}, \{u_n, w\} \in E$ és $i = 1, \dots n-1$ esetén $\{u_i, u_{i+1}\} \in E$ teljesül, azaz tetszőleges két csúcs közt vezet séta/út. És *nem összefüggő* egy gráf, ha létezik két olyan csúcsa, hogy azok közt nincsen séta/út.
Egy gráfnak beszélhetünk az *összefüggőségi komponenseiről*, amik a tovább nem bővíthető összefüggő részgráfok. Azaz olyan részgráfok, amiknek bármely két csúcsát út köti össze, viszont a gráf ezen részgráfon kívüli csúcsaiba nem vezet egyik itteni csúcsból se él. Például az összefüggő gráfoknak egy összefüggőségi komponense van. Szokásos még a *komponenseket* definiálni egy a csúcsokon értelmezett ekvivalencia reláció segítségével is, ahol $v, w \in V$ esetén $v \sim w$, akkor ha létezik v, w út. Erről a relációról belátható, hogy reflexív, szimmetrikus és tranzitív, azaz tényleg ekvivalencia reláció. Ekkor az összefüggő komponensek ezen reláció ekvivalenciaosztályai.

Egy $T = (V, E)$ összefüggő gráfot *fának* nevezünk, ha nem tartalmaz kört. Ezzel ekvivalens, hogy tetszőleges két csúcsát T-nek pontosan egy út köti össze. Azon $v \in V$ csúcsokat, amire $deg(v) = 1$ a fa *levelének* nevezzük. Azaz a fa gráfnak az

egy fokszámú csúcsai a levelek.
Egy $F = (V, E)$ gráfot *erdőnek* nevezünk, hogyha nem tartalmaz kört. Az erdő összefüggőségi komponenseinek mindegyike egy fa.

Továbbiakban szükségünk lesz a csúcsok távolságának fogalmára is. Ezt a két csúcsot összekötő utak hosszainak segítségével definiálhatjuk. Tegyük fel, hogy $v, w \in V$ olyan, hogy létezik olyan $U = \{v_0, e_1, v_1, e_2, \dots e_n, v_n\}$ út, ahol $v_0 = v, v_n = w$. Jelölje $\mathcal{U}$ az ilyen utak halmazát. Ekkor a $d_G(v, w) = \underset{U \in \mathcal{U}}{min}\ \ell(U)$ értéket hívjuk a v és w csúcs *távolságának* a G gráfban. Azaz két csúcs távolsága az őket összekötő legrövidebb út hossza. Amennyiben nincsen út a két csúcs között, akkor definiálhatjuk a távolságukat ∞-nek. Ahol ∞ egy olyan objektum, ami minden véges számnál nagyobbnak tekintendő. A használt jelölésből, amennyiben a gráf egyértelmű, úgy az alsó indexet elhagyhatjuk, azaz $d(v, w) = d_G(v, w)$.
A távolság segítségével kaphatjuk meg egy G gráf *átmérőjét* is az alábbi módon: $d = \underset{v \in V}{max}\ \underset{w \in V}{max}\ d(v, w)$. Ami egy összefüggő gráf esetén véges szám, míg egy nem összefüggő gráf esetén ∞.

Egy $G = (V, E)$ gráf *teljes*, ha minden csúcspárja szomszédos, azaz $E = \{\{v, w\} : v, w \in V, v \neq w\}$. Egy *klikk* alatt a továbbiakban egy olyan $S \subset V$ csúcshalmazt értünk, amire $G(S)$ teljes részgráf. Ezentúl beszélhetünk *maximális klikkről*, ami egy olyan klikk, ami tovább nem bővíthető. Azaz nem kapható belőle csúcs bevételével ismét klikk. Ezzel ekvivalens, hogy nincs olyan klikk, aminek valódi részhalmazát alkotja.
Továbbá még a *klikkszámot* is használni fogjuk, ami a gráfban szereplő maximális elemszámú klikk mérete és $\omega(G)$ jelöli.
Egy $S \subset V$ részhalmaza a csúcsoknak *független*, ha nem vezet S-ben él. Azaz $\forall v, w \in S, v \neq w : \{v, w\} \notin E$. Ez a fogalom a klikk fogalmával komplementer viszonyban áll, ugyanis $S \subset V$ pontosan akkor független G-ben, ha egy klikket alkot $\overline{G}$-ben, azaz G komplementerében.

2.2. Merev körű gráfok

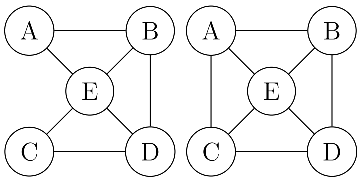
2.2.1. Definíció. Merev körű gráfnak *vagy* húrgráfnak *azon gráfot nevezzük, amelynek minden legalább négy hosszú körében van húr.*

Megjegyzés: ezzel a definícióval ekvivalens, hogy minden feszített kör a gráfban három hosszú, ezért alternatívan a háromszögelt gráf elnevezést is használják ezen típusú gráfokra.

Megjegyzés: a definícióból adódóan a körmentes gráfok triviális módon merev körű gráfok. Azaz a fa gráfok és az erdők merev körűek.

2.2.2. Következmény. *Merev körű gráf feszített részgráfja is merev körű.*

Bizonyítás. Legyen $G' \subset G$ egy feszített részgráf, $K \subset G'$ egy legalább négy hosszú kör. Ekkor $K \subset G$ is teljesül, azaz van a K körnek G-ben húrja. Ez a húrél viszont szerepel a G'-ben is a feszített részgráf definíciója miatt. □



2.1. ábra.

A 2.1 ábra bal oldali gráfja merev körű, a jobb oldali gráfja pedig nem. A jobb oldali nem merev körű, mivel az A, B, C, D köre legalább négy élből áll, viszont nincsen húrja. A bal oldalinak viszont minden feszített köre 3 hosszú, így az merev körű.

2.2.1. Példák merev körű gráfokra:

A következőkben bemutatásra kerülő példák egymással szoros kapcsolatban állnak. Ezen összefüggésekről részletesebben az 5. fejezetben lesz szó.

Erősen merev körű gráf

2.2.3. Definíció. Erősen merev körű *egy gráf, ha merev körű és minden legalább 6 hosszú páros sok élből álló körének van olyan húrja, aminek két végpontja a kör mentén páratlan távolságra van.*

2.2.4. Következmény. *Az erősen merev körű gráfok feszített részgráfjai is erősen merev körűek.*

Bizonyítás. Ez a definícióból nyilván következik, mivel ha adott K kör egy feszített részgráfban, akkor az az eredeti gráfban is kör volt, így van megfelelő húrja. □

Ez a gráfosztály triviálisan részhalmazát képzi a merev körű gráfoknak. Ez azért lesz érdekes nekünk, mert a most következő két alosztálya a merev körű gráfoknak erősen merev körű is.

Intervallumgráf

Az intervallumgráfok ütemezési problémák modellezésére és a tápláléklánc gráfjának vizsgálatára is használhatóak.

2.2.5. Definíció. Intervallumgráfoknak *nevezzük azon* $G = (V, E)$ *gráfokat* ($n = |V|$)*, melyekre létezik olyan* $v_i \mapsto I_i$ ($i \in \{1, 2, \dots n\}$) *megfeleltetés, ahol* I_i ($i \in \{1, 2, \dots n\}$) *a valós számok egy intervalluma, és amire* $\{v_i, v_j\} \in E$ *pontosan akkor teljesül, ha* $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ *minden* $i \neq j \in \{1, 2, \dots n\}$ *esetén.*

2.2.6. Állítás. *Az intervallumgráfok merev körűek.*

Bizonyítás. Tekintsük az intervallumgráf intervallum reprezentációját, $V = \{I_i | i \in \{1, 2, \dots n\}\}$. Ekkor ha lenne legalább 4 hosszú feszített kör, akkor meg lehet adni $\{I_{j_1}, I_{j_2}, \dots I_{j_k}\}$ intervallumokat ($k \geq 4$), hogy $I_{j_1} \cap I_{j_k} \neq \emptyset$ és $I_{j_i} \cap I_{j_{i+1}} \neq \emptyset$ $i \in \{1, 2, \dots k-1\}$ és minden más $m \neq l$ párra, ahol ez értelmes, ott $I_{j_m} \cap I_{j_l} = \emptyset$ teljesül. Vegyük ezen intervallumoknak olyan $\{I_{h_1}, I_{h_2}, \dots I_{h_k}\}$ rendezését amiben az intervallumok bal végpontjai monoton nőnek, azaz I_{h_m} bal végpontja kisebb vagy egyenlő, mint I_{h_l} bal végpontja, ha $1 \leq m < l \leq k$. Ekkor mivel minden intervallum pontosan két másikat metsz ezek közül a feltevés szerint, ezért I_{h_1} szükségszerűen az I_{h_2}, I_{h_3}-at metszi. De ekkor I_{h_2} metszi I_{h_3}-at is, hogyha nem csak az I_{h_1}-gyel van közös metszete. De ez a metszet struktúrában egy három hosszú feszített kört jelentene, ami ellentmondás, mivel azt tettük fel, hogy a $\{I_{h_1}, I_{h_2}, \dots I_{h_k}\}$ intervallumok olyanok, aminek metszet struktúrája egy $k \geq 4$ hosszú feszített kör. □

k-adik levélhatvány

Kezdjük a levélhatvány bevezetését egy kis kitérővel a gráfok hatványaira és azok néhány tulajdonságára.

2.2.7. Definíció. *Egy* $G = (V, E)$ *gráf* k-adik hatványán *(jelölése:* G^k*) azt az irányítatlan gráfot értjük, amelynek csúcshalmaza megegyezik* G *csúcshalmazával és minden* $v, w \in V$ *csúcsra* $\{v, w\}$ *pontosan akkor éle* G^k*-nak, ha* $d_G(v, w) \leq k$*.*

2.2.8. Következmény. *Adott* G *összefüggő gráf esetén, ha annak átmérője* d*, akkor minden* $k \geq d$ *esetén a* G^k *éppen a teljes gráf lesz. És minden* $m < d$ *esetén pedig* G^m *nem lesz teljes.*

Most pedig térjünk rá a levélhatványokra.

2.2.9. Definíció. *Egy tetszőleges T fa k-*adik levélhatványa *azon G gráf, melynek csúcsai a T levelei, élei pedig az ezen csúcsok közt T^k-ban futó élek. Azaz az élek azon levélpárokat kötik össze, amelyek T-beli távolsága legfeljebb k.*
*Egy G gráf k-*adik levélhatvány gráf*, ha létezik T fa, aminek éppen G a k-adik levélhatványa. Ekkor a T fát a G gráf* k-adik levélgyökének *nevezzük.*
Továbbá egy gráfot levélhatványnak *nevezünk, ha lézetik olyan k, amire egy k-adik levélhatvány.*

2.2.10. Állítás. *A k-adik levélhatvány gráfok feszített részgráfjai is k-adik levélhatványok $k \geq 2$ esetén.*

Bizonyítás. A szóban forgó gráf legyen $G = (V, E)$ és a definícióból létezik T fa, aminek G a k-adik levélhatványa. Ekkor vizsgáljuk az $S \subset V$ által feszített részgráfot. Tekintsük azt a T' részfáját T-nek, ami minimális az S-beli csúcsokat tartalmazók közül. Tehát $G(S)$ éppen T' k-adik hatványa lesz. T'-nek nyilván csak az S-nek megfelelő csúcsok a levelei, és ezen csúcsok távolsága ugyanannyi, mint T-ben, így a szerkezetük a T^k és T'^k gráfokban megegyezik. □

Split gráf

2.2.11. Definíció. Split gráfnak *vagy* hasított gráfnak *nevezünk egy $G = (V, E)$ gráfot, ha annak V csúcshalmaza két részre osztható úgy, hogy az egyik részben lévő csúcsok egy klikket alkotnak, a másik részben lévők pedig függetlenek.*

2.2.12. Következmény. *$G = (V, E)$ pontosan akkor split gráf, ha a komplementere is az.*

Bizonyítás. Legyen $V = V_1 \dot{\cup} V_2$ a csúcsok egy partíciója úgy, hogy V_1 klikk, V_2 független. Ekkor a komplementerben $\overline{G}$ V_1 lesz független, V_2 pedig klikk a két fogalom komplementer volta miatt. Azaz ha G split gráf, akkor $\overline{G}$ is. Ezzel mindkét irányt beláttuk, felhasználva, hogy $\overline{G}$ komplementere G. □

2.2.13. Állítás. *Minden split gráf merev körű gráf is egyben.*

Bizonyítás. Legyen a gráf $G = (V, E)$ és $V = V_1 \dot{\cup} V_2$ a csúcsok egy partíciója úgy, hogy V_1 klikk, V_2 független. Tegyük fel, hogy van egy legalább 4 hosszú feszített kör. Ekkor mivel minden útnak két V_2-beli csúcsa közt kell legyen V_1-beli és a körön van egy legalább négy hosszú út, így van legalább 2 nem szomszédos csúcsa a körnek V_1-ben. Ez akkor is igaz, hogyha nincsen két V_2-beli csúcsa a körnek. Ekkor a két nem szomszédos V_1-beli csúcs közt van él, ami a körnek húrja. Ez ellentmond a feltevésünknek. □

3. fejezet

A merev körű gráfok jellemzése

A következő fejezetben a merev körű gráfokról szóló néhány alapvető állítással fogunk foglalkozni, amelyek több különböző karakterizációt adnak a merev körű gráfok osztályára. A fejezet alapjául elsősorban a [2, 3-4. fejezet] és [12] források szolgáltak.

3.1. Minimális elvágó csúcshalmaz

3.1.1. Definíció. *Az irányítatlan $G = (V, E)$ gráfban a $v, w \in V$* csúcsok elvágó csúcshalmazának *vagy* (v, w)-szeparátorának nevezzük *az $S \subset V$ részhalmazt, ha v és w két különböző összefüggőségi komponensébe esik a $G(V \setminus S)$ részgráfnak.*

3.1.2. Definíció. *Egy S (v, w)-szeparátort* minimális elvágó csúcshalmaznak *vagy* minimális (v, w)-szeparátornak nevezünk*, ha nincsen S-nek olyan valódi részhalmaza, ami szintén (v, w)-szeparátor lenne. Azaz S tartalmazásra nézve minimális (v, w)-szeparátor halmaz.*

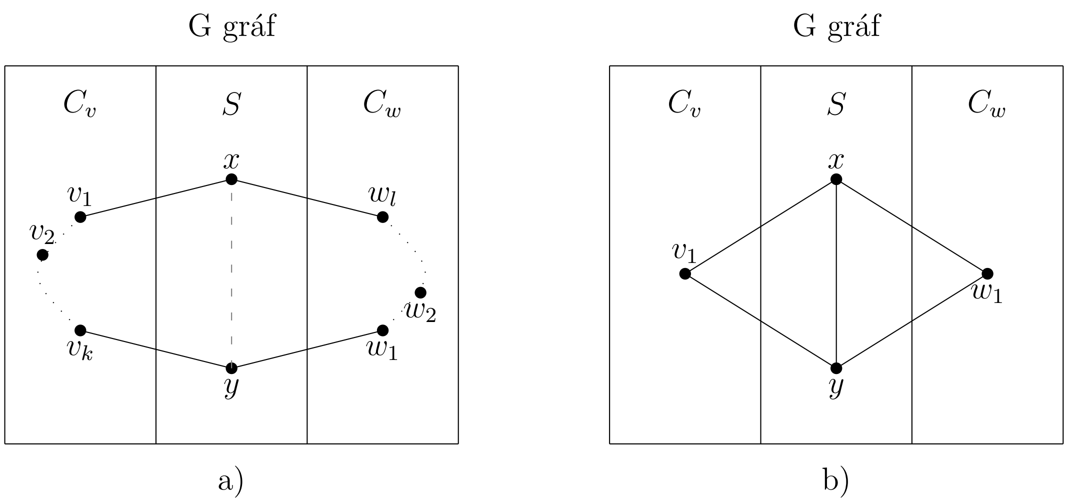
3.1.3. Tétel. (Dirac [5]) *Egy gráf pontosan akkor merev körű, ha minden minimális elvágó csúcshalmaza teljes.*

Bizonyítás. Elég az állítást összefüggő gráf esetén bizonyítani, mivel különben a bizonyítás komponensenként működik. Ezt nem rontja el az sem, ha olyan csúcspár minimális elvágó csúcshalmazát tekintjük, amik különböző komponensbe esnek, mivel ez az üres gráf lesz, ami szintén teljes.
Először tegyük fel, hogy minden minimális elvágó csúcshalmaz teljes. Ekkor vizsgáljunk egy olyan kört, ami legalább négy hosszú. Erről akarjuk belátni, hogy van húrja. Ennek a körnek van két nem egymást követő csúcsa v, w. Két lehetőség van. $\{v, w\} \in E$, azaz ez él. Ekkor készen vagyunk. Amenyiben v, w nem él, akkor

létezik (v, w)-szeparátor. És minden szeparátor szükségszerűen tartalmaz a körből két v, w-től különböző csúcsot, amik nem egymásra következőek, hiszen a kör által meghatározott két v, w út mindegyikén kell legyen egy-egy olyan csúcs, ami a szeparátor halmaznak eleme. Ekkor ha tekintünk egy S minimális (v, w) szeparátort és $u_1, u_2 \in S$ két nem egymásra következő csúcsa a körnek, akkor S teljessége miatt $\{u_1, u_2\} \in E$ húrja a körnek. Azaz ha minden minimális szeparátor halmaz teljes, akkor a gráf merev körű.
A másik irány bizonyításához azt kell megmutatni, hogy ha egy $G = (V, E)$ merev körű gráf egy v, w csúcspárjára S egy minimális szeparátor halmaz, akkor S teljes. Ekkor jelölje $G(V \setminus S)$ v és w-t tartalmazó komponenseit rendre C_v és C_w.

3.1.4. Lemma. *Minden $z \in S$ csúcsnak van C_v és C_w-beli szomszédja is.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy nincs valamelyik komponensben szomszédja z-nek, ekkor $S \setminus \{z\}$ is szeparátor halmaz lenne, ami ellentmond S minimalitásának. □



3.1. ábra.

Kell, hogy $\forall x, y \in S$ csúcspárra $\{x, y\} \in E$ él. Mivel C_v, C_w összefüggőségi komponensek és a lemma miatt x és y-nak is létezik C_v és C_w-ben is szomszédja, így léteznek $P_v = (x, v_1, \ldots, v_k, y) \subset C_v \cup \{x, y\}$ és $P_w = (y, w_1, \ldots, w_l, x) \subset C_w \cup \{x, y\}$ legrövidebb utak x, y között C_v illetve C_w komponenseken keresztül ($k, l \geq 1$), ahol $v_1, v_k \in C_v$, $w_1, w_l \in C_w$ és v_1, w_l szomszédja x-nek és v_k, w_1 szomszédja y-nak. (lásd a 3.1 ábra a) részén) Tekintsük a két út segítségével kapott $K = (x, v_1, \ldots, v_k, y, w_1, \ldots, w_l, x)$ kört. Mivel $l, k \geq 1$, ezért ezen kör hossza legalább négy, azaz a K körnek van húrja. Elég megmutatni, hogy az egyetlen lehetséges húrja a K körnek $\{x, y\}$. Ez azonban nyilvánvaló. Jelölje $H_v = \{v_i : i \in \{1, \dots k\}\}$, $H_w = \{w_j : j \in \{1, \dots l\}\}$ halmazt. Ekkor ezen halmazok közt nincs él, mivel egyik halmazban C_v a másikban C_w beli csúcsok vannak. És mivel a legrövidebb utakat tekintettük, így nincsen ezeken a halmazokon belül se húrja a K körnek, valamint olyan húr sincs, aminek egyik végpontja x, vagy y lenne a másik pedig H_v vagy H_w beli. Tehát a K kör egyetlen lehetséges húrja az $\{x, y\}$. □

Megjegyzendő, hogy a tétel bizonyításainak jelölését használva igazából $l = k = 1$ áll fenn a húrgráfokra (lásd a 3.1 ábra b) részén), mivel $\{x, y\} \in E$ miatt $(x, w_1, \dots w_l, y, x)$ és $(x, v_1, \dots v_k, y, x)$ húr nélküli körök, azaz legfeljebb 3 hosszúak a gráf merev körűsége miatt, vagyis pontosan 3 hosszúak. Ennek következményeként $x, y \in N(v_1) \cap N(w_1)$, ahol $v_1 \in C_v$ és $w_1 \in C_w$. Ennél több is igaz, amint azt az alábbi tételből látni fogjuk, amely eredmény a [7]-ből származik.

3.1.5. Tétel. *Egy $G = (V, E)$ merev körű gráfnak legyen S egy minimális (v, w) szeparátor halmaza. Ekkor léteznek $G(V \setminus S)$-nek a rendre v, w-t tartalmazó komponenseiből v_1, és w_1 csúcsok úgy, hogy $S = N(v_1) \cap N(w_1)$.*

Bizonyítás. Most is feltehető, hogy a gráf összefüggő, mivel ha olyan minimális szeparátort nézünk, ami komponensek közötti, az az üres halmaz lesz és a tétel állítása teljesül rá nyilvánvaló módon. Azaz ha a tétel igaz összefüggő gráfokra, akkor tetszőleges gráfra is.

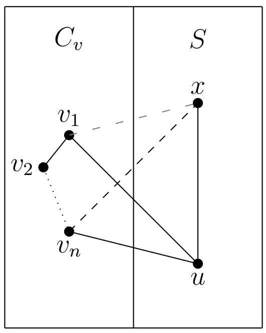
Az eddig is használtakkal megegyezően legyek $G(V \setminus S)$-nek v, w-hez tartozó komponensei rendre C_v, C_w. Ekkor tetszőleges $x \in C_v$, $y \in C_w$ csúcsokra teljesül az $N(x) \cap N(y) \subset S$ tartalmazás. Mivel S (v, w)-szeparátor és így egy C_v és C_w beli csúcsnak csak itt lehet közös szomszédja.

Ekkor elegendő megmutatni a fordított irányú tartalmazáshoz, hogy vannak olyan $v_1 \in C_v$, $w_1 \in C_w$ csúcsok, amire $N(v_1) \cap N(w_1) \supset S$. Azaz az általánosság megsértése nélkül elegendő azt megmutatni, hogy $\exists v_1 \in C_v$, hogy $\forall u \in S$ csúcsra $\{v_1, u\}$ él.

Ezt megtehetjük indirekt, azaz tegyük fel, hogy $v_1 \in C_v$ az a C_v beli csúcs, aminek a legtöbb S beli szomszédja van és mégis létezik $x \in S$, hogy $\{x, v_1\} \notin E$. Ekkor létezik $P = (v_1, v_2, \dots, v_n, x)$ legrövidebb út, ahol $\forall i \in \{1, \dots, n\} : \ v_i \in C_v$. (lásd a 3.2 ábrán) Az x-re való feltételből az következik, hogy $n \geq 2$ és az úton nincsen belső él se, mivel legrövidebb volt az út. Legyen $u \in N(v_1) \cap S$ csúcs. Ilyen van, mert különben C_v egyetlen csúcsának se lenne szomszédja S-ben, ami összefüggő gráf esetén nem lehetséges. Ekkor $\{v_1, u\} \in E$ és $\{x, u\} \in E$, mivel S egy klikk a 3.1.3 tétel

alapján. Így $K = (u, v_1, v_2, \dots, v_n, x, u)$ egy kör, ami legalább 4 hosszú, így van húrja, mert G merev körű. Mivel P-nek nincs belső éle és $\{x, v_1\} \notin E$, ezért csak olyan húrja lehet K-nak, ami u-ból valamely v_i $(i \in \{2, 3, \dots, n\})$ csúcsba vezet és legalább egy ilyen éle van is. De szükségszerűen $\{v_n, u\} \in E$ is teljesül, mivel ha $k < n$ lenne a legnagyobb olyan egész, hogy $\{v_k, u\} \in E$, akkor $(u, x, v_n, v_{n-1} \dots, v_k, u)$ egy legalább négy hosszú húr nélküli kör lenne, ami viszont nem lehet. Ezzel viszont megmutattuk, hogy v_n szomszédos minden $u \in N(v_1) \cap S$ csúccsal. És v_n még x-el is szomszédos. Ez ellentmond annak, hogy v_1-nek van a legtöbb szomszédja S-ben a C_v beli csúcsok közül. Azaz ha $v_1 \in C_v$-nek maximális számú szomszédja van S-ben a C_v-beli csúcsok közül, akkor szükségszerűen $S \subset N(v_1)$.
Hasonlóan igazolható, hogy $\exists w_1 \in C_w$, hogy $S \subset N(w_1)$. Ezzel beláttuk, hogy ezen módszerrel kiválasztott v_1, w_1 csúcsokra a $S \subset N(v_1) \cap N(w_1)$ tartalmazás valóban fennáll. □

G gráf



3.2. ábra.

3.2. Szimpliciális csúcs

3.2.1. Definíció. *Egy irányítatlan gráf v csúcsát* szimpliciálisnak *nevezzük, ha ezen csúcs szomszédai $N(v)$ teljes részgráfot alkotnak. Azaz $\forall u, w \in N(v) : \{u, w\} \in E$.*

Tegyünk néhány megjegyzést általános gráfban a szimpliciális csúcsról. Először is megjegyezhetjük, hogy minden egy fokú csúcs szimpliciális.
Valamint egy v szimpliciális csúcs zárt környezete $N(v) \cup \{v\}$ egy klikket alkot és ez az egyetlen olyan maximális klikk, ami tartalmazza v-t. Ennek belátásához elég azt észrevenni, hogy az összes olyan csúcshalmaz, ami teljes és tartalmazza v-t annak csak $N(v) \cup \{v\}$-ben lehetnek csúcsai, mivel az ilyen halmaz összes elemébe vezet v-ből él. Így mivel $N(v) \cup \{v\}$ teljes, ezért ez az egyértelmű maximális teljes részgráf,

ami tartalmazza v-t. Azaz ez az egyetlen v-t tartalmazó maximális klikk.
Továbbá ha u nem szimpliciális és $v, w \in N(u)$ nem szomszédos csúcsok (azaz $\{v, w\} \notin E$), akkor u szerepel minden (v, w)-szeparátorban, mivel ha $u \notin S \subset V$, akkor v, u, w út szerepel $G(V \setminus S)$-ben, azaz S nem lehetett (v, w)-szeparátor. Azaz minden nem szimpliciális csúcs legalább egy minimális elvágó csúcshalmazhoz tartozik, mivel ha u nem szimpliciális, akkor létezik $v, w \in N(u)$, hogy $\{v, w\} \notin E$ a szimplicialitás definíciója alapján.
Azonban merev körű gráfok esetén ennél több is teljesül. Ebben az esetben, ahogy a következő két tétel majd mutatni fogja tudjuk, hogy szimpliciális csúcs létezik is. Ezen eredmények forrása Dirac [5] és Rose [6].

3.2.2. Tétel. (Dirac [5]) *Minden $G = (V, E)$ merev körű gráfnak van szimpliciális csúcsa, sőt, ha G nem teljes, akkor létezik két nem szomszédos szimpliciális csúcsa is.*

Bizonyítás. Elég a tételt összefüggő gráfra bizonyítani, mivel egy merev körű gráf összefüggőségi komponensei is merev körűek. Egy nem összefüggő gráfnak legalább két komponense van és ha a tétel igaz összefüggő esetben, akkor mindegyik komponensben van szimpliciális csúcs. Így ekkor van legalább két szimpliciális csúcs.
A bizonyítás alapötlete egy csúcsszám $n := |V|$ szerinti indukció. Amennyiben $n = 1$, akkor a gráf teljes és az egyetlen csúcsa szimpliciális.
Most tegyük fel, hogy G egy $n \geq 2$ csúcsú gráf és tudjuk, hogy az állítás teljesül minden n-nél kisebb csúcsszámú gráfra. Ekkor ha G teljes, akkor minden csúcsa szimpliciális és szomszédosak egymással a csúcsok. Így van szimpliciális csúcsa és ha G teljes, akkor ennyit elég is megmutatni.
Másik eset, ha G nem teljes, akkor van két nem szomszédos csúcs, legyenek ezek v, w. Ekkor legyen S egy minimális (v, w)-szeparátor, és $G(V \setminus S)$-nek C_v, C_w azon összefüggőségi komponensei, amik rendre v-t és w-t tartalmazzák. A 3.1.3 tétel alapján S ekkor teljes. Vizsgáljuk a $S \cup C_v$ és $S \cup C_w$ részgráfokat.
A célunk, hogy $S \cup C_v$ és $S \cup C_w$ részgráfokban találjunk olyan v_1, w_1 szimpliciális csúcsokat, amik rendre C_v, C_w-ben vannak. Ez elég, mivel ha v_1 $S \cup C_v$-ben szimpliciális, akkor G-ben is az, mivel minden G beli szomszédja $S \cup C_v$-ben van. Hasonlóan w_1 is szimpliciális lesz ekkor G-ben és $v_1 \in C_v, w_1 \in C_w$ miatt v_1 és w_1 nem szomszédos.
A szimmetria miatt elég megmutatni, hogy mindig létezik $v_1 \in C_v$ csúcs, ami $S \cup C_v$-ben szimpliciális. Mivel $G(S \cup C_v)$ a G merev körű gráf valódi feszített részgráfja, így ő is merev körű a 2.2.2 miatt és mivel kisebb, így használható rá az indukciós feltevés.

Ha $S \cup C_v$ nem klikk, akkor az indukcióból kell legyen két nem szomszédos szimpliciális csúcsa, és a 3.1.3 tételből ismert, hogy S egy klikk, így az egyik szimpliciális csúcs C_v-be kell essen. Ha pedig $S \cup C_v$ klikk, akkor minden csúcsa szimpliciális, így tetszőleges $v_1 \in C_v$ is. Azaz mindenképpen van a $G(S \cup C_v)$ részgráfnak olyan v_1 szimpliciális csúcsa, amely C_v-be esik. A szimmmetria miatt $S \cup C_w$-nek is van w_1 szimpliciális csúcsa, ami C_w-be esik. Ezzel pedig a tételt beláttuk. □

3.2.3. Következmény. (Rose [6]) *Egy nem teljes G merev körű gráfnak minden teljes részgráfjára teljesül, hogy van G-nek olyan szimpliciális csúcsa, ami nem esik az adott teljes részgráfba.*

Bizonyítás. Ez a 3.2.2 tétel miatt nyilvánvaló, mivel ekkor a tétel szerint van két nem szomszédos szimpliciális csúcsa G-nek, amiből legfeljebb egy eshet egy teljes részgráfba. □

3.3. Szimpliciális sorrend

Ehhez szükségünk lesz a csúcsok rendezésének fogalmára, amit egy halmazon értelmezünk. A *részbenrendezés* az egy reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív reláció az alaphalmazon. A *teljes rendezés* egy olyan részbenrendezés, amiben tetszőleges két eleme az alaphalmaznak összehasonlítható.
A $G = (V, E)$ *gráf csúcsainak egy rendezésén* egy olyan $\sigma = v_1, \dots v_n$ felsorolását értjük a csúcsoknak, ahol $n = |V|$, és azt mondjuk, hogy $v_i \prec_\sigma v_j$, ha $i < j$. Ha a σ egyértelmű, akkor azt el is hagyhatjuk a jelölésben $v_i \prec_\sigma v_j \Leftrightarrow v_i \prec v_j$.
Ekkor $\forall i \in \{1, \dots n\}$ esetén jelölje v_i-nek σ-ban balra levő szomszédait $N^-(v_i) = \{v_j : \{v_i, v_j\} \in E \text{ és } v_j \prec v_i\}$ és a jobbra lévő szomszédokat pedig jelölje $N^+(v_i) = \{v_j : \{v_i, v_j\} \in E \text{ és } v_i \prec v_j\}$.
Azaz $i \neq j$, $\{v_i, v_j\} \in E$ esetén $v_j \in N^-(v_i)$, ha $v_j \prec v_i$ és $v_j \in N^+(v_i)$, ha $v_i \prec v_j$.

3.3.1. Definíció. *A csúcsok egy $\sigma = v_1, \dots, v_n$ sorrendjét* szimpliciális sorrendnek *nevezzük, ha $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén az $N^+(v_i)$ csúcsok teljes részgráfot feszítenek.*

1965-ben mutatta meg Fulkerson és Gross, hogy ez a tulajdonság karakterizálja a merev körű gráfokat [11].

3.3.2. Tétel. (Fulkerson, Gross [11]) *Egy $G = (V, E)$ gráf merev körű akkor és csak akkor, ha van szimpliciális sorrendje.*

Bizonyítás. Az egyik irány bizonyításához tegyük fel, hogy G-nek van szimpliciális sorrendje, amit jelöljön σ. Tegyük fel, hogy van benne egy $K = (w_0, w_1, \ldots w_{k-1}, w_0)$ feszített kör valamely $k \geq 4$ esetén. Ekkor tekinthetjük azon w_j-t, amire $w_j \prec_\sigma w_i$, minden olyan i-re, hogy $j \neq i \in \{1, \ldots, k\}$, azaz w_j a kör σ szerint legkisebb csúcsa. Mivel a csúcsok a K körben vannak, ezért $\{w_{i-1}, w_i\}, \{w_i, w_{i+1}\} \in E$ $i = 0, \ldots k-1$ (itt az indexekre mod k tekintünk). Ami viszont azt jelenti, hogy $w_{j-1}, w_{j+1} \in N^+(w_j)$, így $\{w_{j-1}, w_{j+1}\} \in E$ hiszen σ szimpliciális sorrend volt, ami ellentmondás, mert így K nem lehetett legalább 4 hosszú feszített kör. Azaz nincs ilyen kör G-ben, tehát G merev körű.

A másik irány bizonyításához használjuk a 3.2.2 tételt. Ez azt mondja, hogy G-nek van szimpliciális csúcsa, legyen ez v_0. Ekkor a 2.2.2 következmény miatt $G(V \setminus \{v_0\})$ is merev körű. Innen csúcsszám szerinti indukcióval következik a szimpliciális sorrend létezése, mivel $n = 1$ esetén nyilván létezik szimpliciális sorrend. És ha $n-1$-re létezik, akkor az előző észrevétellel legyen $G(V \setminus \{v_0\})$-nek $\sigma_0 = v_1, \ldots, v_{n-1}$ a szimpliciális sorrendje, ekkor $\sigma = v_0, v_1, \ldots v_{n-1}$ a G-nek is szimpliciális sorrendje lesz, mivel a definícióban szereplő tulajdonság megmarad v_i $i \in \{1, \ldots, n-1\}$-re, mert csak a rendezésben a tőlük jobbra lévő csúcsok lényegesek. És a tulajdonság v_0-ra is teljesül, mivel $N^+(v_0) = N(v_0)$ teljes v_0 szimpliciális tulajdonsága miatt. $\square$

4. fejezet

Algoritmusok merev körű gráfokon

Ebben a fejezetben néhány olyan gráfelméleti problémát említünk meg, amik megoldása általában NP-teljes, de a merev körű gráfok osztályára szorítkozva polinomiális vagy akár lineáris időben is megoldhatóak. Az alábbi fejezet alapjául elsődlegesen a [2, 5.fejezet] és [8, 3-9.oldal] források szolgáltak.

Először az előző fejezetben bevezetett szimpliciális sorrend algoritmikus meghatározásával fogunk foglalkozni. Majd a szimpliciális sorrendet felhasználva fogunk különböző feladatokra hatékony algoritmusokat adni. Mivel azt láttuk, hogy a szimpliciális sorrend létezése karakterizálja a merev körű gráfokat, így a fejezet mélyebben tárgyalt algoritmusai ilyen gráfokon fognak megfelelő módon működni.

4.1. Merev körű gráfok algoritmikus felismerése

Ebben a fejezetben a lexikografikus szélességi keresést fogjuk tárgyalni. A lexikografikus szélességi keresés egy lineáris futásidejű ($\mathcal{O}(|V|+|E|)$) algoritmus a $G = (V, E)$ gráf csúcsainak rendezésére. Ez a merev körű gráfokban a szimpliciális sorrendet határozza meg. Fontos, hogy mivel ez egy lineáris algoritmus lesz a szimpliciális sorrend keresésére, így a 3.3.2 tétel alapján ez az algorimus fel is ismeri a merev körű gráfokat lineáris időben.

Az algorimusban az alábbi jelöléseket használjuk: A $label(v)$ objektumok kezdetben üres listák, amiknek a végéhez hozzátehetünk elemeket. A $LexMax$ a lexikografikus maximum rövidítése és a $label(v)$ listákon értelmezett lexikografikus rendezés szerinti maximális elem. A lexikografikus rendezésben $(x_1, x_2, \dots x_k) \prec (y_1, y_2, \dots y_k)$, ha a legkisebb i indexnél, ahol $x_i \neq y_i$, ott $x_i \prec y_i$. A két lista hosszának azonos volta feltehető, ugyanis a rövidebbett üres elemekkel kiegészítve ugyanolyan hosszú listát kapunk. Megjegyzendő, hogy $\forall a \neq \emptyset : \; a \prec \emptyset$ teljesül.

Algorithm 1 LexBFS - lexikografikus szélességi keresés

Input: $G = (V, E)$ gráf és v_0 gyökér, $n = |V|$

Output: Egy σ rendezése V-nek

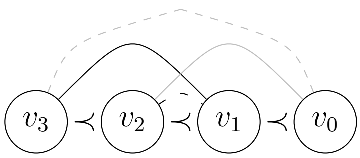
```
∀v ∈ V : label(v) := (), σ(v) = ∅; label(v_0)+ = n
for i = n, n − 1, . . . 1 do
    Legyen v, amire LexMax{label(v)| σ(v) = ∅} felvétetik
    σ(v) = i, és legyen v meglátogatott
    for w ∈ N(v) és w nem meglátogatott do
        label(w) végéhez hozzá rakjuk i-t
    end for
end for
```

Ekkor a kapott rendezés σ úgy kapható meg, hogy a rendezésben v az i-edik helyen áll, ha $\sigma(v) = i$.

4.1.1. Tétel. *Egy $G = (V, E)$ merev körű gráfon a $LexBFS$ algoritmus által adott σ rendezés egy szimpliciális sorrend.*

A tétel bizonyításához először egy lemmát fogunk belátni, amely eredmény Dragan, Nicolai és Brandstädtól származik [17].

4.1.2. Lemma. (Dragan, Nicolai, Brandstädt [17, The LexBFS 4 Point Condition]) *Egy $G = (V, E)$ gráf csúcsainak σ rendezése $LexBFS$ rendezés akkor, ha minden hármas $v_3 \prec v_2 \prec v_1$ esetén, ha $\{v_1, v_3\} \in E$,$\{v_1, v_2\} \notin E$, akkor létezik $v_0 \in V$, hogy $v_1 \prec v_0$ és $\{v_2, v_0\} \in E$. $\{v_0, v_3\} \notin E$. (lásd a 4.1 ábrát)*



4.1. ábra.

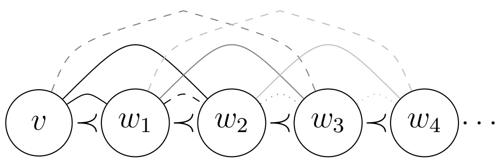
Bizonyítás. Az algoritmusból, miszerint mindig az a csúcs kerül a legnagyobb, még szabad helyre, ahol $LexMax\{label(v)| \sigma(v) = \emptyset\}$ felvétetik, az következik, hogy $v \prec w$ csak a kapott rendezés szerinti $N^+(v), N^+(w)$ csúcsoktól függ. Hogyha ismert $N^+(v) \neq N^+(w)$, akkor $v \prec w$ teljesülése ekvivalens azzal, hogy $N^+(v) \setminus N^+(w)$ σ szerint legnagyobb eleme az nagyobb, mint $N^+(w) \setminus N^+(v)$ legnagyobb eleme.

Ezt használhatjuk $v_3 \prec v_2$-re, mert azok szomszédai különböznek. Így az előzőből azt kapjuk, hogy mivel $v_1 \in N^+(v_3) \setminus N^+(v_2)$, így létezik $v_0 \in N^+(v_2) \setminus N^+(v_3)$, amire teljesül $v_1 \prec v_0$. Ezzel a lemmát beláttuk.

$\square$

Ennek segítségével most következik a 4.1.1 tétel bizonyítása. (lásd a 4.2 segédábra)

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy merev körű gráfban a $LexBFS$ által adott σ nem szimpliciális sorrend. Legyen v a σ szerint legnagyobb olyan csúcs, hogy $N^+(v)$ nem teljes. Ekkor létezik $v \prec w_1 \prec w_2$, hogy $\{w_1, v\}, \{w_2, v\} \in E$, de $\{w_1, w_2\} \notin E$. Most a 4.1.2 lemma miatt létezik $w_2 \prec w_3$, hogy $\{w_3, w_1\} \in E$, $\{w_3, v\} \notin E$. Ha $\{w_3, w_2\} \in E$ lenne, akkor $K = (w_3, w_1, v, w_2, w_3)$ egy négy hosszú feszített kör lenne, ami ellentmond a G merev körűségének. Azaz $\{w_3, w_2\} \notin E$, így viszont $w_1 \prec w_2 \prec w_3$-re lehet megint a 4.1.2 lemmát alkalmazni. Azaz létezik w_4, hogy $\{w_4, w_2\} \in E$, $\{w_4, w_1\} \notin E$ és $w_3 \prec w_4$. Ekkor az előzőhöz hasonló módon adódik, hogy ha G merev körű, akkor $\{w_4, w_3\} \notin E$, mivel különben $C = (w_4, w_2, v, w_1, w_3, w_4)$ egy kör lenne, aminek minimális $\{w_3, w_4\}$-et tartalmazó feszített részköre legalább 4 hosszú lenne, mivel $\{w_2, w_3\} \notin E$. Ezen eljárást a végtelenségig tudjuk ismételni és minden lépésben új csúcs kerül be, mivel a rendezésben az összes eddiginél nagyobb a bekerülő csúcs. Ez viszont ellentmondásra vezet legfeljebb $n = |V|$ lépés után. $\square$



4.2. ábra.

4.2. Színezési probléma

Egy $G = (V, E)$ gráf csúcsainak színezésére tekinthetünk úgy, mint a gráf V csúcsainak $V = \dot{\bigcup}_{i=1}^{k} C_i$ partíciójára. Azaz gondolhatunk úgy rá, hogy minden partíció osztályra eső csúcsokat egy adott színnel megszínezünk. Ez alapján a $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ partíció osztályra használhatjuk a *színosztály* kifejezést. *Színezésről*, vagy *jó csúcsszínezésről* akkor beszélhetünk, ha minden E-beli él két végpontjához tartozó csúcs különböző színosztályba esik. Egy ilyen színezéshez szükséges minimális partícióosztályok számát szokás *kromatikus számnak* nevezni, és $\chi(G)$-vel jelölni.

4.2.1. Minden merev körű gráf perfekt

A második fejezetben a példák közt láttunk néhány részosztályát a merev körű gráfoknak. Most a merev körű gráfok egy nagyobb osztályba való tartozását fogjuk megmutatni. Nevezetesen azt, hogy minden merev körű gráf perfekt is.
Ehhez a tételhez szükségünk lesz a következő fogalmakra.

4.2.1. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ gráf* perfekt*, ha minden H feszített részgráfjára $\chi(H) = \omega(H)$.*

Először bizonyítás nélkül fogunk közölni néhány, a perfekt gráfokról ismert tételt, majd ezek segítségével fogjuk belátni az előbb említett állítást.

4.2.2. Tétel. (Lovász, (Gyenge) perfektgráf-tétel [9]) *Egy gráf akkor és csak akkor perfekt, ha a komplementere perfekt.*

4.2.3. Tétel. (Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas, Erős perfektgráf-tétel [10]) *Egy $G = (V, E)$ gráf akkor és csak akkor perfekt, ha sem G, sem $\overline{G}$ nem tartalmaz feszített részgráfként legalább öt hosszú páratlan sok csúcsból álló kört.*

4.2.4. Tétel. (Dirac [5]) *A merev körű gráfok perfektek.*

Bizonyítás. Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges merev körű gráf. Ekkor az erős perfektgráf-tétel miatt elegendő megmutatni, hogy G-ben és $\overline{G}$-ben sincs feszített részgráfként legalább öt hosszú páratlan sok csúcsból álló kör. Azt könnyű látni, hogy G-ben nincs, mivel G-ben a leghosszabb feszített kör 3 hosszú. Most tegyük fel, hogy $\overline{G}$ tartalmaz egy K páratlan sok csúcsból álló kört ami legalább 5 hosszú. Először is mivel C_5 komplementere C_5 lenne, ezért K nem lehet 5 hosszú. Ekkor biztos, hogy K legalább 7 hosszú, azaz létezik két éle a K-nak $\{v_1, v_2\}$ és $\{w_1, w_2\}$, hogy v_i és w_j nem szomszédos $i, j \in \{1, 2\}$ esetén. Ekkor G-ben a K komplementerében v_1, w_1, v_2, w_2 csúcsok egy 4 hosszú kört feszítenek. Ez ellentmond annak, hogy G merev körű. Azaz $\overline{G}$ se tartalmazhat feszített részgráfként legalább öt hosszú páratlan sok csúcsból álló kört. $\square$

4.2.2. A kromatikus szám néhány tulajdonsága

Mielőtt a merev körű gráfokon vizsgálnánk a színezési problémát, néhány alapvető eredményt említsünk meg általánosságban a kromatikus számról.
Mutatunk rá felső becslést a gráf csúcsszámát, élszámát és maximális fokszámát használva, majd egy alsó becslést a klikkszámot használva.
$1 \leq \chi(G) \leq |V|$ minden G egyszerű gráf esetén fennáll, mivel legfeljebb n színnel létezik jó színezés, mivel ekkor minden csúcs különböző színű lehet. A teljes gráfoknál ez a felső becslés éles is.
Egy másik egyszerű felső becslés tehető az élszámokat használva. Egy optimális színezés olyan, hogy tetszőleges két színosztály közt kell, hogy legyen él, mert különben ezen két színosztályt egybeolvaszthatnánk. Ennek következtében a $\chi(G)(\chi(G) - 1) \leq 2|E|$ egyenlőtlenség is mindig fennáll.
A gráf maximális fokszámánál, amit Δ-val jelölünk, legfeljebb egyel lehet nagyobb a kromatikus szám. Azaz a $\chi(G) \leq \Delta + 1$ mindig teljesül. Ez a mohó algoritmusból következik. Mivel ennyi szín esetén egyesével meg tudjuk színezni a csúcsokat. Adott lépésben a soron lévő csúcs megszínezhető, mivel legfeljebb Δ különböző színű szomszédja lehet, de ekkor is találunk még legalább egy színt, amivel ezen csúcs is megszínezhető.
A klikkszámra $\omega(G)$ pedig teljesül az alábbi reláció: $\chi(G) \geq \omega(G)$. Mivel a klikkszám a maximális elemszámú klikk mérete, azaz G-nek részgráfja $K_{\omega(G)}$, azaz a $\omega(G)$ csúcsú teljes gráf. Ezen csúcsok mindegyike különböző színű kell legyen egy jó színezésben.

4.2.3. Színezési algoritmusok

Általánosságban egy gráf színezése NP-teljes feladat, sőt egy gráf k-színezhetőségének eldöntése is NP-teljes. Exponenciális algoritmust azonban ismerünk, ez brute-force alapon is működik. k-színezhetőség eldöntésére elég k^n lehetőség végignézése. Ennél léteznek gyorsabb algoritmusok is, amik ezen problémát $\mathcal{O}(n2^n)$ időben is eldöntik [3].
A perfekt gráfokra van polinomiális algoritmus [4].

4.2.4. Merev körű gráfok színezési algoritmusa

Mivel a merev körű gráfok perfektek is, így $\omega(G) = \chi(G)$. Így elegendő olyan algoritmust mutatni, amely $\omega(G)$ színt használ. Ez működik mohó algoritmussal.

Az algoritmus leírása során a színezésre úgy fogunk tekinteni, mint egy függvény, ami a csúcsokhoz pozitív egészeket rendel. És egy színosztályba azon számok fognak tartozni, amikhez ez a függvény ugyanazt a számot rendeli.

Algorithm 2 GreedyCOL

Input: $G = (V, E)$ gráf és egy $\sigma = v_n, v_{n-1}, \ldots v_1$ rendezése a csúcsoknak

Output: Egy jó színezése G-nek

for $i = 1, 2, \ldots n$ **do**
  v_i-hez rendeljük a legkisebb olyan színt, ami nincs még $N^+(v_i)$ csúcsok között használva.
end for

Algorithm 3 GreedyMC

Input: $G = (V, E)$ gráf, $v_j \in V$ és egy $\sigma = v_n, v_{n-1}, \ldots v_1$ rendezése a csúcsoknak

Output: S maximális v_j-t tartalmazó klikkje G-nek, K maximális elemszámú klikk

$K = \emptyset$, $S = \{v_j\}$
for $i = 1, 2, \ldots n$ **do**
  if $|N^+(v_i)| + 1 > |S|$ és $v_j \in N^+(v_i)$ **then**
    $S := N^+(v_i) \cup v_i$
  end if
  if $|N^+(v_i)| + 1 > |K|$ **then**
    $K := N^+(v_i) \cup v_i$
  end if
end for

A (2. algorithm, GreedyCOL) általában nem ad jó csúcsszínezést. Például legyen $P = (v_1, v_3, v_4, v_2)$ egy négy hosszú út a triviális rendezéssel, ekkor a *GreedyCOL* algoritmus három színnel színezi a csúcsokat az optimális 2 szín helyett.
Azonban amennyiben σ szimpliciális sorrend, akkor ez az algoritmus egy jó színezést fog adni, ami $\chi(G)$ színt használ.

4.2.5. Tétel. *Tetszőleges G gráf esetén ha σ szimpliciális sorrend, akkor a* 2. algorithm, GreedyCOL *egy optimális színezést fog adni.*

Bizonyítás. $\forall i:$ v_i-nek $|N^+(v_i)|$ jobb szomszédja van, így az algoritmus legfeljebb $\max_i |N^+(v_i)| + 1$ színt használ a színezéshez. Mivel v_i szomszédos minden $N^+(v_i)$

beli csúcsal és a rendezés szimpliciális volta miatt $N^+(v_i)$ klikk, így $N^+(v_i) \cup \{v_i\}$ is klikk minden csúcsra. Azaz $\omega(G) \geq |N^+(v_i) \cup \{v_i\}| = |N^+(v_i)| + 1$ minden i-re. Azaz ez a színezést legfeljebb $\omega(G) \leq \chi(G)$ színt használva készítettük. Azaz $\chi(G) = \omega(G) = \max_i |N^+(v_i)| + 1$ és a kapott színezés egy optimális színezés lesz. □

Jegyezzük még meg, hogy merev körű gráfokban ezen algoritmus egy alternatívájával (3. algorithm, GreedyMC) v_i-t tartalmazó maximális klikket és legnagyobb klikket (klikkszám méretűt) is tudunk keresni, felhasználva, hogy mivel minden klikknek van σ szerint legnagyobb eleme, ezért minden tovább nem bővíthető klikk előáll $N^+(v_i) \cup v_i$ alakban valamely i-re.

4.3. Maximális független csúcshalmaz

Egy $G = (V, E)$ egyszerű gráfban $\alpha(G)$ jelöli a *maximális független csúcshalmaz* méretét. Az alábbiakban majd azt fogjuk megmutatni, hogy merev körű gráfban a mohó algoritmussal egy maximális független csúcshalmaz is meghatározható.
A maximális független csúcshalmaznak általánosságban köze van az előző algoritmussal megtalálható maximális elemszámú klikk problémához, ugyanis ezek éppen komplementer problémák. Azonban jelen esetben ez nem segít rajtunk, ugyanis általánosságban egy merev körű gráf komplementere nem merev körű és az algoritmusunk kihasználta az input gráf ezen tulajdonságát azzal, hogy létezik szimpliciális sorrendje. Azonban a Split gráfok esetében, ezen eljárás is használható lenne, mivel ők éppen azon merev körű gráfok, amiknek a komplementere is merev körű, mint azt az 5.1.2 tételben bizonyítani fogjuk.

4.3.1. Maximális független csúcshalmaz algoritmikus meghatározása

Általánosságban a maximális független csúcshalmaz keresése egy NP-nehéz probléma. Létezik rá a brute force algoritmus $\mathcal{O}(n^2 2^n)$-es hatákonyságánál jobb megoldás. Egy 2017-es eredmény alapján ismerünk a problémára $\mathcal{O}(1.1996^n)$ futásidejű algoritmust [14]. Speciális gráfosztályokra ismert polinomiális algoritmus is[4]. És merev körű gráfok esetében létezik lineáris algoritmus súlyozott csúcsok esetére is a maximális súlyú független csúcshalmaz megtalálására [15]. A következőkben súlyozatlan esetben fogunk egy algoritmust mutatni maximális független csúcshalmaz keresésére.

Algorithm 4 GreedyIS

Input: $G = (V, E)$ gráf és egy $\sigma = v_1, v_2, \dots v_n$ rendezése a csúcsoknak

Output: Egy független S csúcshalmaz

```
S = ∅
for i = 1, 2, ... n do
    if v_i ∉ N(S) then
        S := S ∪ v_i
    end if
end for
```

4.3.1. Tétel. *Ha $G = (V, E)$ merev körű, σ szimpliciális sorrend, akkor a* GreedyIS *algoritmus egy maximális független csúcshalmazt ad vissza.*

Bizonyítás. Ezen állítást beláthatjuk indirekt. Először jegyezzük meg, hogy a kapott S csúcshalmaz független ráadásul tovább nem bővíthető. Így elég azt megmutatni, hogy maximális. Tegyük fel, hogy létezik az algoritmus által adott S csúcshalmaznál nagyobb H független csúcshalmaz. Ekkor legyen $M = S \cap H$, $M_S = S \setminus H$ és $M_H = H \setminus S$. Egyrészt vegyük észre, hogy M-ből se M_S, se M_H halmazokba nem vezet él, mert ez vagy S, vagy H függetlenségének mondana ellent. Másrészt tudjuk, hogy $\forall w \in M_H, \exists v \in M_S$, hogy $\{v, w\} \in E$, mivel különben w is be került volna S-be. És $v \in M_S$ feltehető, mivel $v \in S \setminus M_S = M$ nem lehet, mert akkor $\{v, w\} \in H$ lenne, ami ellentmondás. Ekkor mivel $|H| > |S|$ ezért $\exists v \in M_S : \exists w_1, w_2 \in M_H$, hogy $\{w_1, v\}, \{w_2, v\} \in E$. Tekintsük az ilyen v-k közül azt, ami az σ rendezés szerint a legkisebb, azaz a futás során a leghamarabb kerül erre az indexre a sor. Legyen ez v_j és az ő szomszédai M_H-ban v_l, v_k. Ekkor teljesül, hogy a σ rendezés szerint $j < l, k$, ugyanis tegyük fel, hogy $l < j$, és vizsgáljuk az algoritmus futását $i = l$ ciklusban, ami ekkor korábban futna le j-nél. Ekkor $v_l \notin S$ és ekkor nem lehetett S-ben olyan csúcs, aminek v_l szomszédja lenne, mivel M-ben nem lehet ilyen S-beli csúcs, mert nincs $M \setminus M_H$ él. M_S-beli szomszédai közül v_l-nek pedig v_j a futásban legkorábban sorra kerülő indexű. Viszont azt tettük fel, hogy $l < j$, azaz l-re hamarabb kerül sor a futásban. Azaz az algoritmus ezen lépésben v_l-t beveszi S-be. Ez ellentmond annak, hogy $v_l \in M_H$. Tehát valóban $j < l, k$ teljesül.
Vizsgáljuk v_l, v_k csúcsokat. Mivel $j < l, k$ és $\{v_j, v_l\}, \{v_j, v_k\} \in E$, így $v_l, v_k \in N^+(v_j)$, azaz egy klikkben vannak, így $\{v_l, v_k\} \in E$. Ez ellentmond annak, hogy H független. Azaz megmutattuk, hogy nincsen S-nél nagyobb méretű független csúcshalmaz G-ben. □

5. fejezet

A merev körű gráfok alosztályai

A következőkben egy áttekintést fogunk adni a 2.2.1 fejezetben szereplő alosztályairól a merev körű gráfoknak. A bemutatás elsődleges célja az egyes osztályok karakterisztikus jellemzése és az osztályok egymással való kapcsolatának bemutatása lesz. Mivel a célunk egy áttekintő kép bemutatása, így az alábbiakban néhány tétel és állítás bizonyítását mellőzni fogjuk, vagy csak vázlatosan közöljük, ám azok megtalálhatóak a hivatkozott forrásokban.

5.1. A Split gráfok karakterizációja

Az alábbiakban a split gráfokra (lásd 2.2.11 definíció) fogunk adni egy karakterizációt a merev körű gráf fogalmának használatával. Ezen túl érdekes a split gráfokkal kapcsolatban [20], hogy majdnem minden merev körű gráf split gráf, ami a következő értelemben teljesül.

5.1.1. Tétel (Bender, Richmond, Wormald [20])**.** *Adott $\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ekkor ha G egy véletlen merev körű gráf n csúcson, azaz minden n csúcsú merev körű gráfot azonos eséllyel választunk, akkor annak a valószínűsége, hogy G split gráf az legalább* $1 - \alpha^n$

5.1.2. Tétel (Földes, Hammer [19])**.** *Egy $G = (V, E)$ gráf split gráf akkor és csak akkor, ha ő és a komplementere is merev körű.*

A bizonyítást a [18, 6.3 Tétel] forrással egybevágó módon vázoljuk. Azaz a következő három állítás ekvivalenciáját mutatjuk meg:

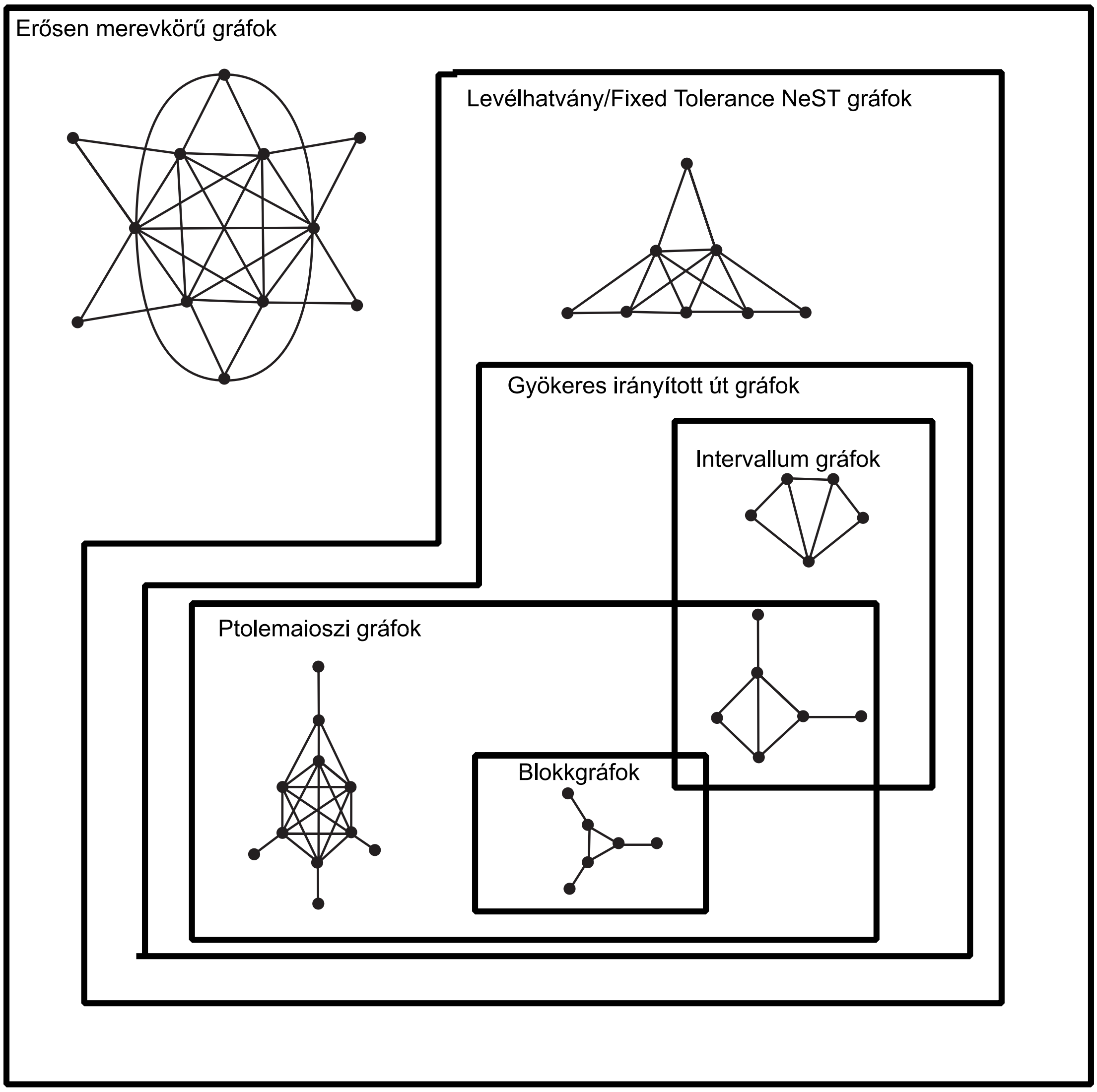
i) G split gráf
ii) G és $\overline{G}$ is merev körű
iii) G nem tartalmaza feszített részgráfként a következőket $2K_2, C_4$, vagy C_5

Bizonyítás. Először az $i) \Rightarrow ii)$ irányt látjuk be. A 2.2.12 következmény alapján $i)$-ből következik, hogy G és $\overline{G}$ is split gráf és ekkor a 2.2.13 állításból adódik ez az irány.
Ezután a $ii) \Rightarrow iii)$ irányt fogjuk megmutatni. A 2.2.1 definícióból következik, hogy ha G merev körű, akkor nem tartalmaz C_4, C_5-öt. És mivel $\overline{G}$ is merev körű $ii)$ szerint, ezért $\overline{G}$ se tartalmaz C_4-et, azaz G nem tartalmaz $2K_2$-t feszített részgráfként. Ezzel a $ii) \Rightarrow iii)$ irányt is beláttuk.
Már csak a $iii) \Rightarrow i)$ következtetést kell igazolni. Legyen G-nek K olyan maximális klikkje, melyre $G(V \setminus K)$ a legkevesebb élet tartalmazza. Ekkor megmutatjuk, hogy $I = V \setminus K$ független. Tegyük fel, hogy létezik $\{v, w\} \in E$ él, ahol $v, w \in I$. Ekkor léteznek $v_1, w_1 \in K$ különböző csúcsok, hogy $\{v, v_1\} \notin E$ és $\{w, w_1\} \notin E$. Ez azért van így, mert a K maximalitása miatt létezik K-ban olyan csúcs, ami nem szomszédja v-nek és olyan is, ami nem szomszédja w-nek. Valamint, ha csak egyetlen csúcsa lenne K-nak, ami nem szomszédos sem v-vel, sem w-vel, akkor e helyett a csúcs helyett v-t és w-t is a klikkbe véve nagyobb klikket kapnánk, ami megint ellentmond K maximalitásának. Használva, hogy G nem tartalmaz $2K_2$-t és C_4-et sem azt kapjuk, hogy $\{v, w_1\}$ és $\{w, v_1\}$ közül pontosan az egyik éle G-nek. Feltehető, hogy $\{v, w_1\} \in E$ és $\{w, v_1\} \notin E$. Ekkor vizsgáljunk egy $u \in K \setminus \{w_1, v_1\}$ csúcsot. Amennyiben $\{v, u\} \notin E$ és $\{w, u\} \notin E$, akkor a v, w, v_1, u feszített $2K_2$-t alkotna. Azonban ha $\{v, u\} \notin E$ és $\{w, u\} \in E$, akkor a v, w_1, u, w egy négy hosszú kört feszít, ami ellentmondás. Így azt kaptuk, hogy szükségszerűen v szomszédos minden elemével $K \setminus \{v_1\}$-nek, azaz $K' = K \setminus \{v_1\} + \{v\}$ is egy maximális klikk. A K definíciója miatt $G(V \setminus K')$-nek legalább annyi éle van, mint $G(V \setminus K)$-nak. És mivel $\{v, w\} \in E$ és $\{w, v_1\} \notin E$, így kell legyen $v \neq x \in V \setminus K$, ami szomszédos v_1-gyel, de nem szomszédos v-vel. Ekkor viszont $\{w, x\} \in E$, mivel különben x, v, w, v_1 egy $2K_2$ lenne. És $\{x, w_1\} \notin E$, mivel különben w_1, x, w, v egy C_4 lenne. Ez viszont ellentmondás, mivel így az adódna, hogy x, v_1, w_1, v, w egy C_5 lenne, amit kizártunk. Tehát kiderült, hogy I az egy független csúcshalmaz. Azaz G split gráf. $\square$

A tétel bizonyítása során az $i) \Leftrightarrow iii)$ ekvivalencia bizonyításával a split gráfoknak egy tiltott részgráfokon alapuló karakterizációját is megadtuk.

5.2. Erősen merev körű gráfok és alosztályai

Először néhány eredményt fogunk bemutatni az erősen merev körű gráfok (lásd 2.2.3 definíció) karakterizációjáról, majd pedig az erősen merev körű gráfok alosztályainak a vizsgálatára fogunk áttérni. Mindehhez elsődlegesen a [21] és [22] forrásokat fogjuk használni.



5.1. ábra.

5.2.1. Az erősen merev körű gráfok karakterizációi

5.2.1. Definíció. Erős szimpliciális sorrendnek *nevezzük egy* $G = (V, E)$ *gráf csúcsainak egy* $\sigma = v_1, \ldots, v_n$ *rendezését, ha minden olyan* i, j, k *és* l *indexre, ahol* $i < j, k < l$ *és* $\{v_k, v_i\}, \{v_l, v_i\}, \{v_k, v_j\} \in E$ *teljesül, akkor teljesül az is, hogy* $\{v_l, v_j\} \in E$.

Itt megjegyzendő, hogy ez a definíció karakterizálja az erősen merev körű gráfokat. Továbbá szokás az erősen merev körű gráfokat úgy is definiálni, hogy olyan gráf, aminek csúcsai rendezhetőek úgy, hogy a rendezés egy erős szimpliciális sorrendet adjon meg. Ennek a definíciónak a 2.2.3 definícióval való ekvivalenciájának bizonyítása a [21, 6.1 Tétel] hivatkozásban olvasható.
Érdemes még megjegyezni, hogy az erős szimpliciális sorrend megtalálására létezik polinomiális algoritmus [21, 3.4 Megjegyzés], így az erősen merev körű gráfok polinom időben felismerhetőek.

5.2.2. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ gráfot* n-napnak *nevezünk $n \geq 3$ esetén, ha $|V| = 2n$ és a csúcsok két azonos méretű részre oszthatóak úgy, hogy $K = \{k_1, \ldots k_n\}$ egy teljes részgráf és $H = \{h_1, \ldots h_n\}$ egy független csúcshalmaz, és $i = 1, \ldots n$ esetén $\{h_i, k_j\}$ pontosan akkor él, ha $i \equiv j$ vagy $i \equiv j + 1$ $(mod\ n)$.*

Ennek a definíciónak a segítségével is jellemezhetőek az erősen merev körű gráfok, mégpedig egy tiltott részgráf struktúrát használó ekvivalencia áll fent. Ez azért érdekes, mivel a merev körű gráfok definíciója is eleve ilyen volt. A következő tétel bizonyítása megtalálható a [21, 4.1 Tétel] alatt.

5.2.3. Tétel. *Egy G gráf erősen merev körű pontosan akkor, ha nem tartalmaz feszített részgráfként C_k-t semely $k \geq 4$ esetén és n-napot semely $n \geq 3$ esetén.*

Érdekesség még az erősen merev körű gráfokról, hogy Lubiw [24] megmutatta, hogy az erősen merev körű gráfok hatványai is erősen merev körűek.

5.2.2. A levélhatvány gráfok és karakterizációjuk

Az alábbiakban a levélhatvány gráfok (lásd 2.2.9 definíció) egy karakterizációjáról lesz szó.

5.2.4. Tétel. *Minden levélhatvány gráf erősen merev körű.*

A tétel nyilvánvalóan következik az előző rész végén megemlített állításból és a 2.2.4 következményből, mivel a levélhatványok előállnak, mint egy fa hatványának feszített részgráfjai. És a fa gráfok erősen merev körűek, így a hatványaik is és azok feszített részgráfjai is.

5.2.5. Következmény. *Minden levélhatvány gráf merev körű.*

A levélhatvány gráfok ekvivalensek a fixed tolerance NeST gráfok osztályával [22, 4. Tétel]. Ahhoz, hogy ezt az eredményt megérthessük, definiálnunk kell a

fixed tolerance NeST gráfok osztályát.
Először a NeST (neighborhood subtree tolerance) gráfok fogalmával ismerkedjünk meg [23]. Ehhez először egy $T = (V, E)$ fa gráf euklideszi síkba való beágyazásával kell megismerkedjünk. Egy $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^2$ a T gráf euklideszi síkba való beágyazása, ha T élei a síkon pozitív hosszúságú egyenes szakaszoknak felelnek meg, amiknek csak a végpontjaik lehetnek közös pontok. És a T csúcsai megfeleltethetőek a szakaszok végpontjainak. Az így kapott síkba való beágyazásnál figyelhetjük $\mathcal{T}$ tetszőleges, akár eredetileg T-ben élhez tartozó pontjait is. Ekkor $x, y \in \mathcal{T}$ esetén jelölje $P(x, y)$ az egyértelmű utat x-ből y-ba $\mathcal{T}$ pontjain. Definiáljuk a $d(x, y)$ távolságot $P(x, y)$ hosszával. Erről a távolságról belátható, hogy metrika a $\mathcal{T}$ pontjain. Azaz d szimmetrikus, szubadditív és teljesül rá, hogy $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
Ekkor $\mathcal{T}$-nek $c \in \mathcal{T}$ középpontú és $r \geq 0$ sugarú *neighborhood subtree*-jének nevezzük a $\mathcal{T}(c, r) = \{u \in \mathcal{T} : d(u, c) \leq r\}$ halmaz pontjait. Mivel $\mathcal{T}(c, r)$ összefüggő része $\mathcal{T}$-nek, így ez egy részfája is. Ekkor lehet $\mathcal{T}(c, r)$ átmérőjéről is beszélni, ami $2r$ és a $|\mathcal{T}(c, r)|$ jelölést fogjuk rá használni. Valamint a következő részben ugyanezen jelölés használatakor $|\emptyset| = 0$ konvencióval fogunk élni.

5.2.6. Lemma. *Adott $\mathcal{T}$ síkba ágyazott fa esetén és $\mathcal{T}(c_1, r_1), \mathcal{T}(c_2, r_2)$ neighborhood subtree-k. Ekkor ha $\mathcal{T}(c_1, r_1) \cap \mathcal{T}(c_2, r_2) \neq \emptyset$, akkor ez a metszet neighborhood subtree-je $\mathcal{T}$-nek.*

Ennek a precíz bizonyítása megtalálható [23, 2.1 Lemma] alatt. A bizonyítás lényege, hogy mivel ez nem az üres halmaz, így vehetjük a $P(c_1, c_2)$ út felezőpontját (ez legyen c_0) és $r_0 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2 - d(c_1, c_2))$. Ekkor belátható, hogy $\mathcal{T}(c_1, r_1) \cap \mathcal{T}(c_2, r_2) = \mathcal{T}(c_0, r_0)$.

5.2.7. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ gráf* NeST gráf, *amennyiben van egy olyan a síkba ágyazott $\mathcal{T}$ fa, $S = \{\mathcal{T}(c_v, r_v) : v \in V\}$ neighborhood subtree-k egy halmaza és $\tau = \{\tau_v : v \in V\}$ pozitív számokból álló számhalmaz, hogy $\{x, y\}$ $(x, y \in V)$ pontosan akkor éle G-nek, amennyiben $|\mathcal{T}(c_x, r_x) \cap \mathcal{T}(c_y, r_y)| \geq min(\tau_x, \tau_y)$. Ekkor $(\mathcal{T}, S, \tau)$-t a G gráf* NeST reprezentációjának *nevezzük.*

Ez a fogalom jól definiált, mert az előző lemma alapján $|\mathcal{T}(c_x, r_x) \cap \mathcal{T}(c_y, r_y)|$ kifejezés értelmes.

5.2.8. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ gráf* fixed tolerance NeST gráf *vagy* konstans

NeST gráf *amennyiben van egy* $(\mathcal{T}, S, \tau)$ *NeST reprezentációja, ahol* $\forall v \in V: \ \tau_v = c$ *valamely* $c > 0$ *esetén.*

Így most már a megfelelő fogalmak ismeretében értelmet nyert az alábbi tétel.

5.2.9. Tétel. [22, 4. Tétel] *A levélhatvány gráfok éppen a fixed tolerance NeST gráfok.*

5.3. Gyökeres irányított út gráfok

Az alábbiakban definiáljuk a gyökeres irányított út gráfokat (rooted directed path graph) és néhány alosztályát. Ezek vizsgálata azért érdekel minket, mivel [22, 5. Tételben] bebizonyították, hogy a gyökeres irányított út gráfok osztálya egy valódi részhalmaza a levélhatvány gráfoknak. Így tulajdonképpen a következőkben a levélhatvány gráfok alosztályairól lesz szó és azok karakterizációjáról.

5.3.1. Definíció. *Egy* $G = (V, E)$ *gráfot a* H *halmaz* részhalmazainak metszetgráfjának *nevezünk, ha létezik* $\Phi : V \to H$ *függvény, hogy* $\forall x \neq y \in V$ *esetén* $\{x, y\} \in E$ *pontosan akkor, ha* $\Phi(x) \cap \Phi(y) \neq \emptyset$.

5.3.2. Definíció. *Egy* $G = (V, E)$ *gráf* gyökeres irányított út gráf, *hogyha* G *az egy* $\mathcal{P}$ *úthalmaz metszet gráfja. Azaz* x, y *él, ha a nekik megfeleltetett útjai* $\mathcal{P}$*-nek rendelkeznek közös csúccsal, ahol* $\mathcal{P}$ *egy* $T = (N, A)$ v_0 *gyökerű irányított fa irányított útjainak részhalmaza. És* T*-ben minden* v_0*-ból* $w \in N$*-ba vezető út az* v_0*-tól* w *fele van irányítva.*

5.3.1. Intervallumgráfok

A következő fejezetben arról lesz szó, hogy az intervallumgráfok (lásd 2.2.5 definíció) egyben gyökeres irányított út gráfok, és így erősen merev körűek is. Valamint egy karakterizációját is ismertetjük az intervallumgráfoknak, amely ekvivalens jellemzés egyik fele éppen az, hogy az intervallumgráfok merev körűek, lásd a 2.2.6 állítást.

5.3.3. Állítás. *Az intervallumgráfok megkaphatók egy* $\mathcal{P}$ *úthalmaz metszet gráfjaként, ahol* $\mathcal{P}$ *az egy* P *irányított út részútjaiból áll.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az intervallumgráfot reprezentálja n darab intervallum és jelölje az intervallumok halmazát $\mathcal{I}$. Ekkor $x_i \quad (\forall i = 1, \ldots, 2n)$ legyen a $2n$ db intervallum végpont növekvő sorrendbe rendezve. A P irányított út csúcsai legyenek

(x_i, x_{i+1}) $(\forall i = 1, \ldots, 2n-1)$ és az élei legyenek $\{(x_i, x_{i+1}), (x_{i+1}, x_{i+2})\}$ $(\forall i = 1, \ldots, 2n-2)$ növekvő irányítás szerint. Ekkor adott $[x_i, x_j]$ intervallumhoz rendeljük a (x_i, x_{i+1})-ből (x_{j-1}, x_j)-be vezető egyértelmű irányított utat, amit jelöljünk $P(x_i, x_j)$-vel. Ekkor $\mathcal{P} = \{P(x_i, x_j) : [x_i, x_j] \in \mathcal{I}\}$ választás mellett a $\mathcal{P}$ metszetgráfja éppen megegyezik az $\mathcal{I}$ intervallumok metszetgráfjával, azaz minden intervallumgráf megkapható egy $\mathcal{P}$ úthalmaz metszeteként. $\square$

5.3.4. Következmény. *Az intervallumgráfok egyben gyökeres irányított út gráfok is.*

5.3.5. Megjegyzés. *Van olyan gyökeres irányított út gráf, ami nem intervallumgráf. Példa az 5.1 ábrán szerepel.*

Az intervallumgráfok egy másik karakterizációját adta Gilmore és Hoffman [26]. Ennek a megértéséhez újabb definíciókra lesz szükségünk.

5.3.6. Definíció. Összehasonlíthatósági gráfnak *nevezünk egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráfot, hogyha létezik $(S, \prec)$ részbenrendezett halmaz, hogy $V = S$ és $x, y \in V$ esetén $\{x, y\} \in E$ pontosan akkor, hogyha $x \prec y$.*

5.3.7. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ gráf $K = v_1, \ldots v_l$ körének* háromszög húrjának *nevezzük az alábbi húrokat $\{v_i, v_j\}$, ahol $i \equiv j + 2$ (mod l).*

5.3.8. Tétel. [26, 1 Tétel] *Egy gráf pontosan akkor összehasonlíthatósági gráf, hogyha minden páratlan hosszú körének van legalább egy háromszög húrja.*

5.3.9. Tétel. [26, 2 Tétel] *Egy gráf pontosan akkor intervallumgráf, hogyha minden négy hosszú körének van húrja és a komplementerében minden páratlan hosszú körének van legalább egy háromszög húrja.*

5.3.10. Következmény. *Az előző két tételből rögtön következik, hogy egy gráf pontosan akkor intervallumgráf, ha merev körű és a komplementere pedig összehasonlíthatósági gráf.*

5.3.2. Ptolemaioszi gráfok

A következő részben a ptolemaioszi gráfokról lesz szó és arról, hogy ők is gyökeres irányított út gráfok, így erősen merev körűek is. Ezen túl egy, a merev körűséget használó ekvivalens jellemzését is megadjuk a ptolemaioszi gráfoknak. Valamint a blokkgráfokról, mint a ptolemaioszi gráfok alcsaládjáról is szót ejtünk.

A következő fejezetben az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy a szóban forgó gráfok összefüggőek. Az állítások különben komponensenként megtartanák igazságtartalmukat és nagyon hasonló tételek lennének kimondhatóak.

5.3.11. Definíció. *Egy G gráfot* ptolemaioszi gráfnak *nevezünk, hogyha tetszőleges négy csúcsára (u, v, w, x) fennáll $d(u, v)d(w, x) + d(u, x)d(v, w) \geq d(u, w)d(v, x)$ egyenlőség. Azaz tetszőleges négy csúcs által meghatározott négyszögben a szemközti csúcspárok gráfbeli távolságának szorzata kisebb kell legyen, mint a szemközti oldalak gráfbeli hosszának szorzatainak összege.*

Több különböző karakterizációja ismert a ptolemaioszi gráfoknak. Ezek közül néhány bizonyítása a [27] cikkben megtalálható. Az alábbiakban egy ekvivalens jellemzését fogunk csak megadni.

5.3.12. Definíció. *Egy G gráf akkor* távolság-örökletes (distance-hereditary)*, ha bármely H feszített részgráfjába tartozó u és v csúcsokra igaz, hogy a G gráfban köztük húzódó legrövidebb utak közül valamelyiknek a H feszített részgráfban is benne kell lennie; tehát u és v H-beli távolsága ugyanakkora, mint a G-beli távolságuk.*

Howorka megmutatta [28], hogy a távolság-örökletes gráfok éppen azok, amelyekben minden legalább 5 hosszú körnek van két metsző húrja. Azaz olyan $\{v_1, v_2\}$, $\{w_1, w_2\}$ húrjai a körnek, hogy a kör által meghatározott két v_1-ből v_2-be vezető út egyikén van w_1, másikon pedig w_2 található.
Számos további ekvivalens jellemzése ismert még a távolság-örökletes gráfoknak, melyek közül több megtalálható a [29]-ben. Többek között egy másik érdekes jellemzés, hogy pontosan azok a véges összefüggő gráfok távolság-örökletesek, amelyek egy K_2-ből megkaphatók az alábbi három lépést véges sokszor ismételve:

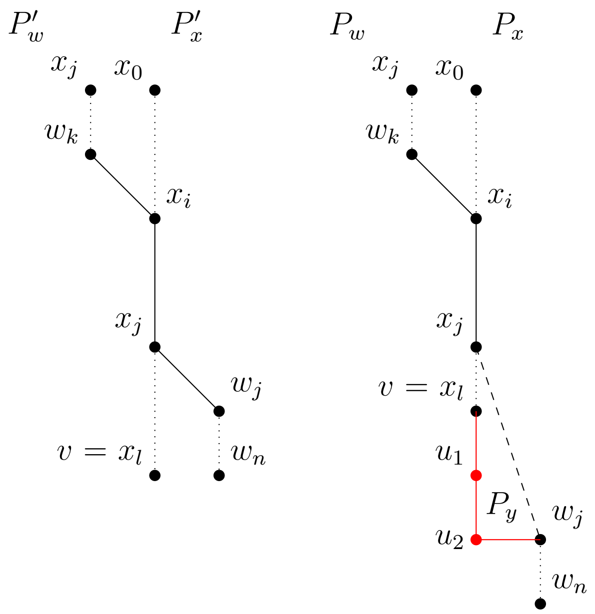
1. egy új csúcs hozzávétele pontosan egy szomszéddal
2. új csúcs összekötése egy már meglévő csúccsal és annak a szomszédaival
3. egy új csúcs összekötése egy már meglévő csúcs szomszédaival

5.3.13. Tétel. [27, 2.1 Tétel] *G gráf ptolemaioszi pontosan akkor, ha merev körű és távolság-örökletes.*

5.3.14. Tétel. *A ptolemaioszi gráfok részhalmazát alkotják a gyökeres irányított út gráfoknak.*

Bizonyítás. A távolság-örökletes gráfok ekvivalens jellemzéséből és a ptolemaiszi gráfok előző karakterizációjából adódik, hogy G ptolemaioszi pontosan akkor, hogyha K_2-ből kiindulva megkapható az $1-3$ lépések alkalmazásával. Valamint itt minden lépésben az új csúcs szomszédai klikket kell alkossanak. Mivel az előző tétel

miatt a ptolemaioszi gráfok is merev körűek, és tudjuk, hogy a gráf összefüggő volt ezen művelet előtt is, így ha az újonnan bevett csúcs szomszédai közül van kettő nem szomszédos, akkor a már köztük meglevő legrövidebb úttal kapnánk egy legalább 4 hosszú feszített kört, ami a későbbi lépésekben se szűnhetne meg, ami ellentmond a merev körűségnek.
Így elég megmutatni, hogyha $G' = (V, E)$ ptolemaioszi és van egy $(T', \mathcal{P}')$ gyökeres irányított út modellje, akkor tetszőleges $x \in G'$-re a fenti 3 lépés bármelyikét egy új y csúccsal végrehajtva mag tudjuk adni $G = G' + y$-nak egy $(T, \mathcal{P})$ gyökeres irányított út modelljét.
Jelölje továbbá $\Phi' : V' \to \mathcal{P}'$ és $\Phi : V \to \mathcal{P}$ a hozzárendeléseket, valamint jelölje $\Phi(z) = P_z$ a z-t reprezentáló utat és P'_x irányítás szerinti végpontja legyen v. Itt az irányítást úgy tekintjük, hogy a P'_x egy tetszőleges homogén irányítását vesszük és a többi utat is ezzel összhangban irányítjuk meg egy irányban.
Ha 1-es lépést hajtunk végre, akkor legyen $T = T' + (v, u_1) + (u_1, u_2)$, ahol u_1, u_2 új csúcsai a fának. És legyen $P_x = P'_x + (v, u_1) + (u_1, u_2)$ és $P_y = (u_1, u_2)$. Ez jó lesz.
Ha 2-es lépést hajtunk végre, akkor elég a $P_y = P'_x$ változtatást végrehajtani.
Ha 3-as lépést hajtunk végre, akkor használjuk ki a fent említett tényt, hogy $N(x)$ klikk. Ekkor legyen P'_x irányított út $x_1, \ldots, x_l = v$ (lásd 5.2 ábra). Ha egy $w \in N(x)$ csúcsra P'_w irányított útnak P'_x-el közös csúcsaiból x_i az első és x_j az utolsó $(T', \mathcal{P}', \Phi')$ esetén, akkor T-be vegyünk be $(v, u_1), (u_1, u_2)$ új éleket, valamint legyen $P_y = (u_1, u_2)$. És minden $w \in N(x)$-re ha van (x_j, w_j) kilépő éle P_w-nek P_x-ből, akkor cseréljük le a mögöttes fát és T-ben (x_j, w_j) él helyett legyen (u_2, w_j) él. Valamint P_w-ben a P'_w-beli (x_j, w_j) él helyett legyenek benne $(x_j, x_{j+1}), \ldots (x_{l-1}, x_l), (x_l, u_1), (u_1, u_2), (u_2, w_j)$ élek. Ez még mindig út és P_x-en és u_1, u_2-n kívül ugyanazon metszeteket produkálja, mint P'_w. A $P_x \cup u_1 \cup u_2$ csúcsokon való metszetei nem számítanak, mert itt csak $N(x) \cup \{x\}$-beli csúcsoknak megfelelő utakkal és y útjával van közös metszete w útjának.
Ezzel megmutattuk, hogy minden ptolemaioszi gráf gyökeres irányított út gráf is. $\square$



5.2. ábra.

5.3.15. Megjegyzés. *Van olyan gyökeres irányított út gráf, ami nem ptolemaioszi gráf. Példa az 5.1 ábrán szerepel.*

A következőkben a blokkgráfot fogjuk definiálni és megmutatjuk róla, hogy ptolemaioszi. Ehhez szükséges lesz a *kétszeresen összefüggő gráf komponens* fogalmára, ami alatt egy maximális kétszeresen összefüggő részgráfot értünk. A *kétszeresen összefüggő részgráf* pedig olyan feszített részgráf, amiből tetszőleges csúcsot elhagyva a részgráf még mindig összefüggő marad.

5.3.16. Definíció. *Egy gráfot* blokkgráfnak *nevezünk, hogyha minden kétszeresen összefüggő komponense klikk.*

5.3.17. Állítás. *A blokkgráfok a ptolemaioszi gráfok részcsaládját alkotják.*

Bizonyítás. Elég megmutatni az 5.3.13 tétel szerint, hogy ha egy G gráf blokkgráf, akkor merev körű és távolság-örökletes.
Kezdjük a merev körűséggel. Legyen K egy kör G-ben. Ekkor K csúcsai egy kétszeresen összefüggő komponenst alkotnak, így a blokkgráf definíciója miatt egy klikket alkotnak. Azaz minden kör csúcsai teljes részgráfot alkotnak, amiből következik, hogy G merev körű.
A távolság-örökletes gráfok azon ismertetett ekvivalens jellemzését használjuk, hogy egy gráf pontosan akkor távolság-örökletes, hogyha minden legalább 5 hosszú körének van 2 metsző húrja. Az előző gondolatmenet miatt, ha K egy legalább 5 hosszú kör G-ben, akkor csúcsai teljes részgráfot alkotnak. Így ez a feltétel teljesül. □

6. fejezet

A k-adik levélhatványok osztályai

Az alábbiakban a k-adik levélhatványokról fogunk beszélni fix k esetén. Először egy áttekintést adunk a k-adik levélhatvány osztályok egymáshoz való viszonyáról, majd $k = 2, 3$ esetén karakterizációt is mutatunk a k-adik levélhatványokra. A következő eredményeket Brandstädt [30] cikke alapján ismertetjük.

6.1. A tartalmazási struktúrája a k-adik levélhatványok osztályainak

Jelölje $k \geq 2$ esetén $L(k)$ a k-adik levélhatványok osztályát. Ekkor könnyen látható, hogy $L(k) \subset L(k+2)$. Mivel ha G egy k-adik levélhatvány, aminek T a $k-$adik levélgyöke, akkor G a $k+2$-edik levélhatványa azon T' fának, amit T-ből úgy kapunk, hogy a T minden leveléhez még egy élet és csúcsot hozzáveszünk. Hasonló módon láthatóak az $L(k) \subset L(2k-2)$ és $L(k) \subset L(2k-1)$ tartalmazások is. Itt a T fának a nem levél éleit duplázzuk meg, azaz minden $\{u, v\}$ nem levél éle helyett T-nek legyen T'-ben $\{u, w\}, \{w, v\}$ él, ahol w egy új csúcs, azaz osszuk fel $\{u, v\}$ élet egy csúccsal. Ekkor ha T-ben két levél csúcs távolsága l volt, akkor T'-ben ezen két levél csúcs távolsága $2l - 2$ lesz. Ebből a $L(k) \subset L(2k-2)$ tartalmazás nyilvánvalóan adódik. Ezzel a $L(k) \subset L(2k-1)$ tartalmazást is megmutattuk, mivel ehhez elég, hogy ha két levél csúcs távolsága T-ben nagyobb k-nál, akkor T'-ben a távolságuk nagyobb $2k-1$-nél. Ez teljesül, mivel a T'-ben nyilvánvaló, hogy ez a távolság nagyobb $2k-2$-nél és a T' konstrukciójából adódik, hogy bármely két levél távolsága páros, így $2k-1$ nem lehet.

Ezekből következik a $L(2) \subset L(3) \subset L(4)$ tartalmazási lánc és az $L(4) \subset L(6), L(4) \subset L(7)$ tartalmazás is.

Általánosságban tetszőleges két levélhatvány osztályról pontosan ismert, hogy mikor áll fent köztük tartalmazás. Erről szól Brandstädt és Wagner [31, 1. Tétel] eredménye. Ez azt állítja, hogy $k \geq 2, l \geq 1$ egészek esetén $L(k+l) \not\subset L(k)$. Valamint azt is, hogy $L(k) \not\subset L(k+l)$ pontosan akkor, hogyha $l \leq k-3$.

6.2. A 2-ik levélhatvány gráfok

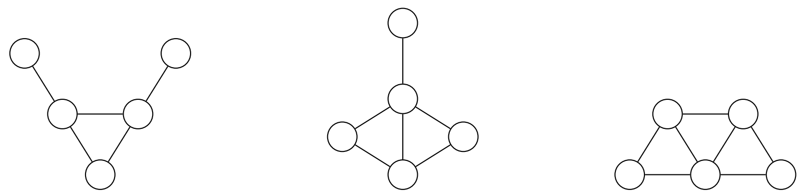
Egy gráf 2-ik levélhatvány pontosan akkor, hogyha *klasztergráf*, azaz olyan gráf, aminek az összefüggő komponensei klikkek.
A klasztergráfok 2-ik levélhatvány gráfok, mivel ha adott egy $G = \dot\bigcup_{i\in\mathcal{I}} K_i$ klikkekből álló gráf, ahol $i \in \mathcal{I}$ esetén K_i egy klikk, aminek csúcshalmaza V_i, akkor G-nek 2-ik levél gyöke az a T fa, amit úgy kapunk, hogy $\forall i \in \mathcal{I}$ esetén a K_i klikkhez rendelünk egy w_i csúcsot a fában, amit összekötünk minden V_i-beli csúccsal, illetve minden w_i csúcsot még egy u csúccsal is összekötünk.
A 2-ik levélhatvány gráfok pedig klasztergráfok. Ehhez elég megmutatni, hogyha $G = (V, E)$ egy 2-ik levélhatvány, aminek k-adik levélgyöke T akkor $\{x, y\}, \{x, z\} \in E$ esetén $\{y, z\} \in E$ is teljesül. Ez pedig igaz, mert ha $\{v, u\} \in E$ ez azt jelenti, hogy T-ben v, u levelek ugyanahhoz a csúcshoz kapcsolódnak. Ezért ha x, y és x, z levelek T-ben ugyanahhoz a csúcshoz kapcsolódnak, akkor mivel a levél tulajdonságuk miatt pontosan egy szomszédjuk van, így szükségszerűen y, z leveleknek is ugyanahhoz a csúcshoz kell T-ben kapcsolódniuk.
Ezzel megmutattuk, hogy a 2-ik levélhatvány gráfok éppen a klasztergráfok. Megjegyzendő a klasztergráfokról, hogy nyilvánvaló módon ekvivalensek a feszített P_3-mentes gráfokkal, azaz azon gráfokkal, amik nem tartalmaznak feszített részgráfként 2 hosszú utat. Valamint a blokkgráfok alosztályát alkotják.
Érdemes megjegyezni még azt is, hogy algoritmikusan is hatékonyan felismerhetőek a klassztergráfok a kötött struktúrájuk miatt.

6.3. A 3-ik levélhatvány gráfok

A 3-ik levélhatványoknak több ekvivalens karakterizációja is létezik. A [33]-ben megmutatta Brandstädt és Le, hogy a 3-ik levélhatványok éppen azok a gráfok, amik egyetlen csúcsból kiindulva *pendant vertex* operációkat követően, *true twin* operációkkal létrehozható. A pendant vertex operáció egy új y csúcs felvétele, ami az eddigiek közül egyetlen egy x csúccsal szomszédos. És a true twin operáció olyan csúcs hozzáadását jelenti, ami egy korábbi csúccsal szomszédos és a hozzávétel után

a szomszédaik megegyeznek.
Ezenkívül más karakterizációkat is adtak, amiknek a segítségével megmutatták a 3-ik levélhatványok lineáris időben való felismerhetőségét.
A következőkben a [32] forrás alapján ismertetjük egy bizonyítását a 3-ik levélhatványok tiltott részgráfokat használó karakterizációjának.

Először definiáljuk azon gráfokat, amiket a karakterizáció használ.



bull dart gem

6.1. ábra.

6.3.1. Tétel. *A G gráf 3-ik levélhatvány pontosan akkor, hogyha nem tartalmaz feszített részgráfként bull, dart, vagy gem részgráfot.*

Ennek a bizonyításához először szükségünk lesz a kritikus klikk fogalmára.

6.3.2. Definíció. *Egy K klikkjét a G gráfnak* kritikus klikknek *nevezzük, hogyha K tartalmazásra nézve maximális az olyan klikkek között, amiknek minden csúcsának szomszédai $G \setminus K$-ban megegyeznek.*

6.3.3. Lemma. *Amennyiben $G = (V, E)$ egy 3-ik levélhatvány gráf, és K G-nek egy klikkje, akkor K legfeljebb 2 kritikus klikket tartalmazhat.*

Bizonyítás. Először jegyezzük meg, hogy ha $H \subset K$ kritikus, akkor minden H beli csúcs $G \setminus K$-beli szomszédai megegyeznek és az összes olyan K-beli csúcs, aminek ezek a szomszédai $G \setminus K$-ban, az benne van H-ban. Mivel $K \setminus H$ részen ismerjük a szomszédságokat, valamint ha H kritikus, akkor definíció szerint maximális tartalmazásra nézve, azaz ha egy $v \in K \setminus H$ szomszédai $G \setminus K$-ban megegyeznének H szomszédaival, az ellentmondana H maximalitásának, mert ekkor még v is be lehetne venni H-ba.
Ez alapján elég azt megmutatni, hogy $v \in K$ csúcsoknak legfeljebb két különböző szomszédsági csúcshalmaza lehet $G \setminus K$-ban. Vizsgáljuk, hogy a T 3-ik levél gyökében G-nek a K csúcsainak milyen szomszédjai lehetnek. Mivel levelek és páronkénti távolságuk a fán legfeljebb három, ezért ők G-ben csak úgy alkothatnak klikket,

hogyha vagy két egymással összekötött nem levél csúcshoz csatlakozik minden K-beli levél csúcs, vagy pedig egyetlen egy nem levél csúcshoz csatlakozik minden K-beli levél csúcs. Ez azért teljesül, mert szigorúan csak azt tudjuk, hogy T-ben a K beli levél csúcsokhoz szomszédos csúcsok egy klikket alkotnak, de ez csak egy vagy két elemű lehet, mivel T fa.
Ekkor mindkét lehetséges esetben világos, hogy a további szomszédokat G-ben determinálja, hogy egy levél csúcs melyik nem levél csúcshoz csatlakozik. Azaz megmutattuk, hogy a K-beli csúcsok $G \setminus K$ beli szomszédai legfeljebb kétfélék lehetnek és hogy ezen különböző szomszédsági halmazok száma felső becslést ad a K klikkben található kritikus klikkek számára nézve. □

6.3.4. Lemma. *Egy G merev körű gráfban az alábbiak ekvivalensek:*

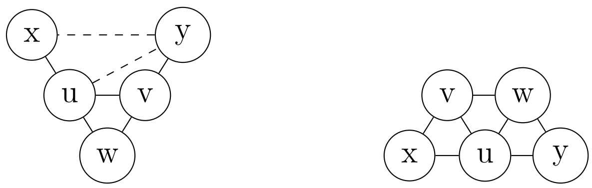
1. *Van olyan K klikk G-ben, ami legalább 3 kritikus klikket tartalmaz.*
2. *G tartalmaz bull, dart, vagy gem struktúrákat feszített részgráfként (lásd 6.1 ábra).*

Bizonyítás. **1⇒2:** Legyen $u, v, w \in K$ olyan csúcsok, amik különböző kritikus klikkekbe esnek. A tartalmazásra nézve maxiális tulajdonság miatt ilyenek léteznek. Ekkor két eset lehetséges:

a) Létezik olyan x csúcs, ami u, v, w csúcsok közül pontosan egyhez csatlakozik csak. Tegyük fel, hogy csak u csúcshoz. Ekkor mivel különböző kritikus klikkbe vannak, így van olyan y csúcs, ami v és w közül csak az egyikhez csatlakozik, tegyük fel, hogy v-hez (6.2 a) ábra). Mivel ha nem lenne, akkor a v és w-t tartalmazó kritikus klikknek a szomszédai megegyeznének és a tartalmazásra nézve maximális tulajdonság miatt ekkor a két klikk uniója lenne kritikus, ami vagy a két klikk különbözőségének, vagy legalább az egyik kritikus voltának mondana ellent.
Ekkor az $\{x, y\}$ és $\{u, y\}$ lehetnek élek, vagy nem élek, azzal a megkötéssel, hogy ha $\{y, x\}$ él, akkor $\{y, u\}$ is, mivel különben x, y, v, u egy négy hosszú feszített kör lenne. Ekkor a kapott három eset: egyik se él (bull), csak $\{u, y\}$ él (dart) és mindkettő él (gem).
b) Tegyük fel ebben az esetben, hogy nem létezik olyan csúcs, ami u, v, w csúcsok közül pontosan egyhez csatlakozik csak. Ekkor van olyan x csúcs, ami pontosan kettőhöz csatlakozik, mivel nem lehet a három kritikus klikk szomszédainak halmaza mind azonos, mert akkor ahhoz, hogy kritikusak lehessenek szükségszerűen egybeesnének, mert különben az uniójuk miatt nem lennének

tartalmazásra nézve maximálisak. Tegyük fel, hogy az u és v csúcsokhoz csatlakozik x (6.2 b) ábra). Azt is tudjuk, hogy van olyan csúcs is, ami az u, v közül csak az egyikhez csatlakozik, mivel más kritikus klikkben vannak. Legyen ez a csúcs y és tegyük fel, hogy az u-hoz csatlakozik. Ekkor y w-hez is csatlakozik a b) pont alapfeltevése miatt. És x és y választásai olyanok voltak, hogy azok a harmadik csúcshoz nem kapcsolódnak, így u, v, w, x, y egy feszített gem részgráfot ad.

2⇒1: Tegyük fel, hogy a gráf tartalmaz feszített részgráfként bull, dart, vagy gem struktúrát. Ekkor találhatóak u, v, w csúcsok, amik egy háromszöget alkotnak (a gem esetében válasszuk azon háromszöget, amiből a 2 kettő fokú csúcs marad ki). Ekkor u, v, w egy klikket alkot és mindhárom különböző kritikus klikkben van, mivel a kimaradó két csúcs más részhalmaza szomszédos a klikket alkotó három csúcs mindegyikével. Valamint minden csúcsból kiindulva kaphatunk egy kritikus klikket. □



6.2. ábra.

6.3.5. Állítás. *A 3-ik levélhatvány gráfok olyan merev körű gráfok, amik nem tartalmaznak bull, dart, vagy gem gráfot feszített részgráfként.*

Bizonyítás. Amennyiben egy gráf 3-ik levélhatvány, akkor 5.2.5 következmény miatt merev körű és a 6.3.3 és 6.3.4 lemmákból következik, hogy nem tartalmaz bull, dart, vagy gem gráfot feszített részgráfként. □

A bizonyítás másik iránya a kritikus klikk gráf fogalmát használja.

6.3.6. Definíció. *Egy adott $G = (V, E)$ gráfnak legyen $\mathcal{C}$ a kritikus klikkjeinek a halmaza. Ekkor a G gráf* kritikus klikkjeinek a gráfja $CC(G) = (\mathcal{C}, E_{\mathcal{C}})$, *ahol $(K_i, K_j) \in E_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow \forall u \in K_i,\ v \in K_j :\ \{v, u\} \in E$. Azaz a kritikus klikkek gráfjának a csúcsai a klikkek és két csúcs közt vezet él, ha a megfelelő két kritikus klikk uniója egy klikket alkot.*

6.3.7. Lemma. *Legyen $G = (V, E)$ gráf és $CC(G)$ a kritikus klikkjeinek a gráfja. Ekkor $\forall v \in V : \exists! K \in CC(G)$, hogy $v \in K$. Azaz G minden csúcsához létezik egy őt tartalmazó kritikus klikk.*

Bizonyítás. Először mutassuk meg, hogy bármely csúcshoz létezik őt tartalmazó kritikus klikk. Mivel minden csúcsra az egyelemű csak őt tartalmazó klikk megfelelő a tartalmazásra nézve maximalitáson kívül, így nem üres halmazban keresünk tartalmazásra maximális elemet, azaz lesz ilyen elem, így valamely kritikus klikkbe benne lesz az adott csúcs.
Az állítás másik felét lássuk be indirekt. Tegyük fel, hogy $v \in K_1$, $v \in K_2$, ahol K_1, K_2 különböző kritikus klikkek. Ekkor definícióból K_1 szomszédai $G(V \setminus K_1)$-ben megegyeznek v itteni szomszédaival és K_2 szomszédai $G(V \setminus K_2)$-ben megegyeznek v ottani szomszédaival. Aminek következtében $K_1 \cup K_2$ is klikket kell alkosson, mert az előző tulajdonságok miatt itt mindenki mindenkivel össze van kötve. Továbbá minden itteni csúcs $G(V \setminus (K_1 \cup K_2))$-beli szomszédsága v itteni szomszédaival egyezik meg. Ezzel ellentmondásra jutottunk, mert $K_1 \cup K_2$ legalább K_1, K_2 közül az egyiknél nagyobb, ami ellentmond a tartalmazásra nézve maximalitásának. □

6.3.8. Lemma. *Amennyiben egy $G = (V, E)$ gráf semelyik klikkje se tartalmaz kettőnél több kritikus klikket, akkor a $CC(G)$ nem tartalmaz kettőnél nagyobb méretű klikket.*

Bizonyítás. Indirekt, legyen $K_1, K_2, K_3 \in \mathcal{C}$ olyan kritikus klikk, hogy tetszőleges kettő közt $E_{\mathcal{C}}$-ben vezessen él. Ekkor $C_{i,j} = K_i \cup K_j$ $(i, j \in \{1, 2, 3\})$ definíció szerint klikket alkot. Viszont ebből következik, hogy $C_{1,2,3} = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ is klikket alkot, hiszen ha $u \in K_i, v \in K_j$ csúcsok, akkor, mivel $C_{i,j}$ klikk, így $\{u, v\} \in E$. Azaz tetszőleges két $C_{1,2,3}$-beli csúcsot él köt össze, azaz tényleg klikk. Viszont $C_{1,2,3}$ olyan klikk, ami tartalmaz kettőnél több kritikus klikket, ami ellentmondás. □

6.3.9. Lemma. *Legyen G merev körű. Ekkor $CC(G)$ is merev körű*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $K_1, K_2, \ldots, K_l$ egy $l \geq 4$ hosszú feszített kör $CC(G)$-ben. Ekkor tetszőleges $v_i \in K_i$ $(i \in \{1, 2, \ldots l\})$ csúcsokra $v_1, v_2, \ldots, v_l$ feszített kör G-ben. Mivel ha K_i, K_j nem él $CC(G)$-ben, akkor a kritikus klikk tulajdonság használatával, azaz hogy a szomszédok megegyeznek, azt kapjuk, hogy $v_i \in K_i, v_j \in K_j$ esetén v_i, v_j nem él G-ben. Azaz v_i, v_j közt pontosan akkor vezet él, hogyha K_i, K_j között vezet él, így tényleg $v_1, v_2, \ldots, v_l$ is feszített kör lenne, ami ellentmond annak, hogy G merev körű. □

6.3.10. Állítás. *Amennyiben egy G gráf merev körű és nem tartalmaz bull, dart, vagy gem gráfot feszített részgráfként, akkor G egy 3-ik levélhatvány.*

Bizonyítás. A 6.3.9 lemma miatt $CC(G)$ merev körű, így a 6.3.4 és a 6.3.8 lemmák miatt $CC(G)$ merev körű és nem tartalmaz kettőnél nagyobb klikket, így egy erdőt alkot. Ekkor $CC(G)$ minden összefüggőségi komponensére egy levélgyököt tudunk az alábbiak alapján konstruálni. Minden csúcsához a fának annyi új levelet csatolunk ahány csúcs van a fa csúcs által reprezentált kritikus klikkben. Illetve vegyünk egy új csúcsot és a $CC(G)$ erdő minden fájának egy tetszőleges pontjával kössük össze. Az így kapott T gráf fa és T egy 3-ik levél gyöke G-nek, mivel ha u, v a G különböző csúcsai, akkor ők G ben éllel vannak összekötve pontosan akkor, hogyha vagy egy kritikus klikkbe tartoznak, vagy pedig különböző, de egymással $CC(G)$-ben összekötött kritikus klikkekhez tartoznak. Ez pedig pont azzal ekvivalens, hogy a megfelelő reprezentáló levelek távolsága T-ben 2 vagy 3. □

A 6.3.5 és 6.3.10 állításokkal pedig a 6.3.1 tétel mindkét irányát beláttuk.

6.4. A k-adik levélhatvány gráfok ($k \geq 4$)

A $k = 4$ esetén ismert a gráfnak több karakterizációja. A [38]-ben Rautenbach adott tiltott részgráf struktúrát használó karakterizációt. Egy másik karakterizácó segítségével Brandstädt, Le és Sritharan [34] egy lineáris idejű algoritmust is adott a 4-ik levélhatványok felismerésére.
A $k = 5, 6$ esetben is ismeretesek polinomiális algorimtusok a k-adik levélhatványok felismerésére. Ezen algoritmusok igazából a Steiner gyök fogalmát használják.

6.4.1. Definíció. *$G = (V, E)$ gráfnak a $T = (V', E')$ fa, ahol $V \subset V'$, a* k-adik Steiner gyöke, *ha $G = T^k(V)$.*

[36]-ből ismeretes, hogy a k-adik levélgyök keresés ekvivalens a $k-2$-edik Steiner gyök kereséssel.

6.4.2. Állítás. *Egy G gráf k-adik levélhatvány, ha a $CC(G)$-nek van $k-2$-edik Steiner gyöke.*

Bizonyítás. Legyen $T = (V', E')$ a $CC(G) = (C, E_{\mathcal{C}})$-nek egy olyan $k-2$-edik Steiner gyöke, amire $V' \setminus C$-ben nincs levél csúcs. Ezzel a feltevéssel élhetünk, mert tudjuk, hogy van Steiner gyök és a levélgyökből minden $V' \setminus C$ levélcsúcsot elhagyhatunk, még mindig Steiner gyök marad. Ezt a lépést iterálhatjuk, amíg nem marad ilyen levél az adott Steiner gyökön, ekkor a maradék éppen azon fa, amit úgy kapunk, hogy a C-beli csúcsok közti egyértelmű utakat uniózzuk. Ekkor ha minden $K_i \in C$-hez annyi levelet csatolunk, ahány elemből áll az általa reprezentált kritikus klikk, akkor az így kapott fa éppen G-nek lesz a k-adik levélgyöke. $\square$

A [35], [37] cikkekben találhatóak algoritmusok a 3-ik és 4-ik Steiner gyök keresésére. Amiket az előbbi módon a $CC(G)$-re alkalmazva éppen G-ben való 5-ik és 6-ik levél gyök keresést tudunk végezni.

Ezentúl még érdekességként megemlítem, hogy ma már ismert egy 2021 októberi cikkből [39] Lafond révén egy csúcsszámban polinomiális algoritmus a k-adik levélhatványok felismerésére fix $k \geq 2$ esetén. Megjegyzem, hogy ez az algoritmus nem túl praktikus a gyakorlatban, mivel adott k-ra garantált $\mathcal{O}(n^{f(k)})$ futásidőben $f(k) \in \Omega(k \uparrow\uparrow (3k))$, azaz $f(k)$ nagy k esetén legalább $c \cdot (k \uparrow\uparrow (3k))$, ahol c egy konstans.

Irodalomjegyzék

[1] JEROME J. KARAGANIS, On the cube of a graph. *, Canad. Math. Bull.*, **11**, (1968), 295–296.

[2] L. VANDENBERGHE, M. S. ANDERSEN, Chordal graphs and semidefinite optimization. *Foundations and Trends in Optimization*, **1**, (2014), 241–433.

[3] M. KOIVISTO, An $\mathcal{O}*(2^n)$ Algorithm for Graph Coloring and Other Partitioning Problems via Inclusion–Exclusion. *47th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, (2006), 583–590.

[4] M. GRÖTSCHEL, L. LOVÁSZ, A. SCHRIJVER, Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization. *Springer-Verlag*, (1988)

[5] G. A. DIRAC, On rigid circuit graphs. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, **25(1-2)**, (1961), 71–76.

[6] D. J. ROSE, Triangulated graphs and the elimination process. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **32**, (1970), 597–609.

[7] P. BUNEMAN, A characterization of rigid circuit graphs *Discrete Mathematics*, **9**, (1974), 205–212.

[8] L. MOUATADID , Graph Searching & Perfect Graphs. *lecture notes*

[9] L. LOVÁSZ, Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture. *Discrete Mathematics*, **2**, (1972), 253–267.

[10] M. CHUDNOVSKY, N. ROBERTSON, P. SEYMOUR, R. THOMAS, The strong perfect graph theorem. *Annals of Mathematics*, **Volume 164**, (2006), 51–229.

[11] D. R. FULKERSON, O. GROSS, Incidence matrices and interval graphs. *Pacific Journal of Mathematics*, **15**, (1965), 835–855.

[12] J.A. BONDY, U.S.R. MURTY, Graph Theory. *Graduate Texts in Mathematics*, **244**, (2008), oldalszám 235–237.

[13] P. ERDŐS, T. GALLAI, Gráfok előírt fokszámú pontokkal. *Matematikai Lapok*, **11**, (1960), 264–274.

[14] M. XIAO, H. NAGAMOCHI, Exact algorithms for maximum independent set. *Information and Computation*, **255**, (2017),126–146. arXiv:1312.6260

[15] A. FRANK, Some polynomial algorithms for certain graphs and hypergraphs. *Congressus Numerantium*, **XV**, (megjelenés éve), 211—226.

[16] D. J. ROSE, R. E. TARJAN, G. S. LUEKER,Algorithmic aspects of vertex elimination on graphs. *SIAM Journal on computing*, **5**, (1976), 266—283.

[17] F. F DRAGAN, F. NICOLAI, A. BRANDSTÄDT, Lexbfs-orderings and powers of graphs. *International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, (1996), 166—180.

[18] M. C. GOLUMBIC, Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs. *Elsevier*, **2nd edition**, (2004)

[19] S. FOLDES, P. L. HAMMER, Split graphs, *University of Waterloo, CORR*, (1976)

[20] BENDER E., RICHMOND L., WORMALD N. , Almost all chordal graphs split. *Journal of the Australian Mathematical Society. Series A. Pure Mathematics and Statistics*, **38(2)**, (1985), 214–221. doi:10.1017/S1446788700023077

[21] M. FARBER, Characterizations of strongly chordal graphs. *Discrete Mathematics*, **43(2)**, (1983), 173–189.

[22] A. BRANDSTÄDT, C. HUNDT, F. MANCINI, P. WAGNER, Rooted directed path graphs are leaf powers. *Discrete Mathematics*, **310(4)**, (2010), 897–910.

[23] E. BIBELNIEKS, P.M.DEARING, Neighborhood subtree tolerance graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **43(1)**, (1993), 13–26.

[24] A. LUBIW, Γ-free matrices, *Master's thesis, University of Waterloo,* (1982)

[25] R.B HAYWARD, P. KEARNEY, Investigating NeST graphs. *technical report*, *TR-CS-04-93*, (1993)

[26] P. C. Gilmore, A. J. Hoffman, A Characterization of Comparability Graphs and of Interval Graphs. *Canadian Journal of Mathematics*, **16**, (1964), 539–548.

[27] E. Howorka, A Characterization of Ptolemaic Graphs. *Journal of Graph Theory*, **5**, (1981), 323–331.

[28] E. Howorka, A characterization of distance-hereditary graphs. *The Quarterly Journal of Mathematics*, **28(4)**, (1977),417—420.

[29] H.J. Bandelt, Distance-Hereditary Graphs . *Journal of Comninatorial Theory*, **41**, (1986), 182–208.

[30] A. Brandstädt, On Leaf Powers. *Publised as technical report*, (2009) https://users.informatik.uni-rostock.de/ ab/ps-files/leafpwsurvey2.pdf

[31] P. Wagner, A. Brandstädt, The Complete Inclusion Structure of Leaf Power Classes. *Theoretical Computer Science*, **410(52)**, (2009), 5505–5514.

[32] M. Dom, J. Guo, F. Hüffner, R. Niedermeier, Error Compensation in Leaf Root Problems. *Algorithms and Computation, 15th International Symposium*, (2004), 389–401.

[33] A. Brandstädt, V. B. Le, Structure and linear time recognition of 3-leaf powers. *Information Processing Letters*, **98(4)**, (2006), 133–138.

[34] A. Brandstädt, V. B. Le, R. Sritharan, Structure and Linear-Time Recognition of 4-Leaf Powers. *ACM Transactions on Algorithms*, **5**, (2008)

[35] C. Maw-Shang, K. Ming-Tat, The 3-Steiner Root Problem. *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, 33rd International Workshop*, **Revised Papers**, (2007), 109–120.

[36] M. Dom, J. Guo, F. Hüffner, R. Niedermeier, Extending the Tractability Border for Closest Leaf Powers. *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, 31st International Workshop*, **Revised Selected Papers**, (2005), 397–408.

[37] G. Ducoffe, Polynomial-time Recognition of 4-Steiner Powers. (2019) arXiv:1810.02304v3

[38] D. RAUTENBACH, Some remarks about leaf roots. *Discrete Math*, **306**, (2006), 1456–1461.

[39] M. LAFOND, Recognizing k-leaf powers in polynomial time, for constant k. *Proceedings of the 2022 Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, 1384–1410, (2021), arXiv:2110.15421

[40] M. C. GOLUMBIC, The Wonderful World of Chordal Graphs. *The 32nd European Conference on Combinatorial Optimization, ECCO XXXII, Malta,* (2019)