

# Sokdimenziós ARMA folyamatok Kronecker index becslése



Kátai Tamara

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék, Matematika Intézet

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Budapest

A dolgozat benyújtva

*‘alapokleveles matematikus - elemző szakirány’*

*minősítés megszerzésének céljával*

Témavezető: Pröhle Tamás

2022. december

# Nyilatkozat

## NYILATKOZAT

Név: KÁTAI TAMARA

ELTE Természettudományi Kar, szak: MATEMATIKA, ELEMZŐ SZAKIRÁNY

NEPTUN azonosító: UFP 13D

Szakedolgozat címe: SOGDIMENZIÓS ARMA FOLYAMATOK,  
KRONECKER, INDEX BEGSLÉSE

A **szakedolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022. DECEMBER



a hallgató aláírása

## Köszönetnyilvánítás

Köszönöm szüleimnek a gondtalan gyermekkort, mikor minden tanítási nap végén beülhettünk a barátokkal az iskola melletti könyvtárba beszélgetni, és annyit olvashattam, amennyit csak bírtam.

Köszönöm férjemnek, hogy stresszesen is elvisel, az utolsó simítások közben összeomlott számítógépet, programokat fél nap alatt újrategeszt, és közben öleléssel bátorít. Köszönöm kisfiamnak, Ivánnak, hogy hónapokon át bekísért az egyetemre, és csak az utolsó zh után 39 órával bújt ki a nagyvilágba. Igaz, nem lenne nehéz összeszámolni, hány éjszakát aludt végig az elmúlt négy és fél évben, de nekem ő a legnagyobb csoda, ha ránézek, átjár a szeretet.

Köszönöm Molnár Bea, és Szentandrásai Ilona tanító néniknek, hogy az általános és középiskolában megszerettették velem a matematikát, szakköröket szerveztek, versenyekre készítettek fel.

A legnagyobb köszönet viszont Próhle Tamás tanár urat illeti, aki nélkül ez a dolgozat nem jöhetett volna létre. Az utolsó pillanatig lelkesített és támogatott. Hálás vagyok a türelemért, a sok konzultációért, és hogy bármikor elérhettem. Mindent köszönök!

## Kivonat

A többdimenziós **ARMA** folyamat a sztochasztikus folyamatok egy olyan modellezési eszköze, amely lehetővé teszi több párhuzamos véletlen folyamat egy közös modellel való leírását.

Már az egy dimenziós **ARMA** modelleknek is fontos, nehezen becsülhető paramétere az a két fokszám paraméter, amely azt mutatja, hogy a folyamat jelenbeli értékét a saját múltjának és a folyamat véletlenségét generáló korrelálatlan zajnak időben legfeljebb hány korábbi értéke befolyásolja.

Egydimenziós folyamatok esetén a feladatot egyszerűsíti, hogy a folyamat meghatározza, a szóbanforgó két fokszám paraméter értékét, míg a többdimenziós folyamatok esetén a megfelelő fokszámok a folyamat koordináták esetleges keresztthatásainak okán függenek a modelfelírás egyéb paramétereitől is.

Az említett fokszámoknak a sokdimenziós folyamatok esetén, egy kanonikus felírás mellett, az úgynevezett Kronecker indexek felelnek meg. A dolgozat célja ezen indexek kanonikus korrelációkon alapuló becslésének szimulációs vizsgálata.

A dolgozatot a kanonikus korreláció néhány egyenértékű értelmezésével kezdem, ezután bemutatom a sokdimenziós folyamatok ekvivalens felírhatóságából származó problémákat és a lehetséges kanonikus felírási módokat. Leírom azt a módszert, amivel egy kanonikus felírás mellett a Kronecker indexek becsülhetők. Végül megfelelően fejlesztett szoftvereszközökkel szimulációk alapján statisztikusan vizsgálom ezen becslési módszer megbízhatóságát.

# Tartalomjegyzék

Nyilatkozat	ii
Köszönetnyilvánítás	iii
Kivonat	iv
1. Kanonikus korreláció	1
2. ARMA folyamatok	6
3. VARMA folyamatok	9
4. Kronecker index	15
5. Az index becslés szimulációs vizsgálata	19
6. Összegzés	23
7. Függelék	25
Irodalomjegyzék	28

# 1.

## Kanonikus korreláció

Az általunk vizsgálni szándékozott Kronecker indexek azt mérik, hogy egy lineáris, stacionárius folyamat egymástól milyen távoli megfigyeléseit vizsgálva találunk a folyamat múltja és jövője közt olyan komponenspárt, amik már egymásból nem megmagyarázhatóak. Azt, hogy egy ilyen komponens található, a komponenspár korrelációja alapján fogjuk eldönteni. Magát a komponenspárt pedig a kanonikus korreláció módszerével fogjuk keresni.

Ebben a fejezetben előbb a korrelációval, utóbb pedig a parciális korrelációval kapcsolatban foglaljuk össze a szempontunkból vett legfontosabbakat.

---

### A korreláció

A korreláció két változó közti kapcsolat erősségét mérő  $[-1, 1]$ -beli valósszám. Pontosabban, ha  $\xi$  és  $\eta$  két véletlen mennyiség, akkor a

$$\rho = \frac{\mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta))}{\mathbb{D}(\xi)\mathbb{D}(\eta)}$$

a  $\xi$  és az  $\eta$  korrelációja. A mi szempontunkból vett jelentősége abban áll, hogy a korreláció abszolút értéke megadja azt, hogy lineáris függvényeket alkalmazva, az egyik változó szórásának hányad része magyarázható meg a másik változó segítségével.

Ugyanis, ha  $\ell_Y(\xi)$  az  $\eta$  lineáris regressziója  $\xi$ -n, azaz ha

$$\ell_Y(\xi) = a + b\xi$$

ahol  $b = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}^2(\xi)}$  és  $a = \mathbb{E}\eta - b\mathbb{E}\xi$ , akkor

$$\mathbb{D}^2(\ell_Y(\xi))/\mathbb{D}^2(\eta) = \frac{\text{cov}^2(\xi, \eta)}{\mathbb{D}^4(\xi)} \mathbb{D}^2(\xi)/\mathbb{D}^2(\eta) = \varrho^2$$

Tehát a lineárisan megmagyarázható varianciarány valóban  $\varrho^2$ .

A korreláció további fontos tulajdonsága, hogy ha  $(\xi, \eta)$  független, akkor 0. Viszont fordítva ugyanez általánosan nem igaz. Lehetséges, hogy két változó nem független, mégis 0 a korrelációja. Fontos kivétel a normális eloszlású változók esete, amelyek esetén a korrelálatlan változók biztosan függetlenek is.

A mondott asszimetria persze nem különös, hiszen két változó függetlensége azt jelenti, hogy minden a két változó által generálható eseménypár független egymástól. Ugyanakkor mint láthatjuk, a korreláció 0 volta mindössze *egy* összefüggés a két változó legfeljebb másodrendű momentumai közt. Másfelől persze az is igaz, ha  $|\varrho| = 1$  akkor létezik három olyan  $a, b, c$  valós szám, amelyre 1 valószínűséggel  $a + b\xi + c\eta = 0$ , azaz a két véletlen mennyiség egymás lineáris képe. Ezeket is figyelembe véve szokás a korrelálatlanságot *lineáris függetlenség*nek is nevezni.

A dolgozat harmadik részében azt vizsgáljuk, hogy egy folyamat, egy későbbi időpontig vett jövőjének van-e olyan komponense, ami a múlt lineáris függvényeivel már nem magyarázható meg. Itt ezt a komponenst a mondottaknak megfelelően a 0-val egyenlő korrelációja alapján fogjuk tudni meghatározni. Mindezt úgy, hogy előzőleg a múltból és a jövőből is kivesszük az erősebben korreláló komponenseket és azt vizsgáljuk, hogy ‘ami marad’, az 0 korrelációjú-e. Azt a technikát, amivel a nagy korrelációjú komponenseket azonosítani fogjuk, kanonikus korreláció modellnek nevezzük.

### A kanonikus korreláció ekvivalens definíciói

A kanonikus korrelációt három különböző módon mutatjuk be.

A kanonikus korrelációt először a klasszikus, korreláció maximalizálásos módon definiáljuk. Ezután bemutatjuk azt a szinguláris felbontáson alapuló módszert, amit az általunk is alkalmazott R-függvény is használ a kanonikus korrelációk kiszámítására. Végül megmutatjuk azt a projekciós értelmezést is, ami az idő-soros alkalmazás szempontjából jobban mutatja, hogy milyen tulajdonság is az, ami miatt a kanonikus korreláció modell a többdimenziós idősorok fokszámanak megbecslésére alkalmas.

Tegyük fel, hogy a  $q$  dimenziós  $\eta$  és a  $p$  dimenziós  $\xi$  változópárra  $n$  megfigyelés áll rendelkezésre az  $n \times q$  méretű  $Y$ , illetve az  $n \times p$  méretű  $X$  mátrix formájában. Keressük azt a  $q$  dimenziós  $a$ , illetve  $p$  dimenziós  $b$  vektort, amelyre a

$$\rho = \frac{(Ya)^T(Xb)}{\|Ya\| \|Xb\|} = \frac{a^T Y^T X b}{\|Ya\| \|Xb\|}$$

korreláció maximális. Az optimumot adó  $(a_1, b_1)$  vektorpárt az első *kanonikus loading*-nak, azaz első kanonikus együtthatóknak, az  $n$  dimenziós  $Ya_1$  és  $Xb_1$  vektorpárt az első *kanonikus score*-nak, azaz első kanonikus faktoroknak, korrelációjukat az első kanonikus korrelációnak nevezzük.

Azért nevezzük a fenti maximalizálási feladat megoldásait elsőnek, mert a kanonikus faktorpárok keresése folytatható, ugyanis kereshetjük ismét a fenti korreláció maximumát, most már azzal a megkötéssel, hogy az új faktorpár ortogonális legyen az elsőre. Ezzel megtaláljuk a második kanonikus korrelációt, valamint a hozzá tartozó második együtthatópárt és faktorpárt. Az eljárás folytatható, míg az összes lehetséges  $\min(p, q)$  számú kanonikus tényezőt megtaláljuk.

A szekvenciális módszernek megfelelően a megtalált kanonikus korrelációk egy monoton csökkenő sorozatot alkotnak. Ezek a korrelációk a maximalizálás okán nem negatívak lesznek, figyelembe véve azt is, hogy egy változópár korrelációjának az előjele az ellentétére vált, ha az egyikének a  $(-1)$ -szeresét vesszük.

Ha az  $\eta$  és a  $\xi$  független egymástól, akkor mindegyik kanonikus korreláció 0 lesz. Ám az is lehetséges, hogy a kanonikus korrelációk közül csak néhány utolsó 0. Ez utóbbi esetre hivatkozunk úgy, hogy a változópárnak van (lineárisan) független komponense.



Numerikus módszer a kanonikus modell megtalálására

Ha  $Y = Q_Y F_Y$  és  $X = Q_X F_X$  valamely  $Q_Y$  illetve  $Q_X$  ortonormált transzformációra, ahol az  $F_Y$  és az  $F_X$  invertálható, valamint a keresett  $(a, b)$ -re  $(t, s) = (F_Y a, F_X b)$ , akkor mivel

$$\rho = \frac{a^T Y^T X b}{\|Y a\| \|X b\|} = \frac{a^T F_Y^T Q_Y^T Q_X F_X b}{\|Q_Y F_Y a\| \|Q_X F_X b\|} = \frac{t^T Q_Y^T Q_X s}{\|t\| \|s\|}$$

elég az  $\rho$  korrelációt az  $Y$  és  $X$  egy tetszőleges ortonormált  $(Q_Y, Q_X)$  faktor párján maximalizálni, és a keresett optimális  $(a, b)$  paraméterek az  $a = F_Y^{-1} t$  illetve a  $b = F_X^{-1} s$  transzformációval adódnak.

Vegyük tehát az  $Y$  és  $X$  mátrixok QR felbontását, ami legyen  $Y = Q_Y R_Y$  illetve  $X = Q_X R_X$ , ahol a  $Q_Y$  és  $Q_X$  két ortonormált mátrix,  $R_Y$  illetve  $R_X$  két jobb felsőháromszög mátrix.

Az előző levezetés szerint tehát a  $q \times p$  méretű  $Q_Y^T Q_X$  mátrixot kell közelítenünk.

Az eredetileg Erhard Schmidt által megoldott Eckart–Young–Mirsky tétel szerint a  $Q_Y^T Q_X$  mátrix szukcessív növekvő legjobb  $k$ -ad rangú közelítését a  $Q_Y^T Q_X$  mátrix  $k$  legnagyobb szinguláris értékéhez tartozó szinguláris faktorai adják. Vagyis, ha

$$Q_Y^T Q_X = U \Sigma V^T = \sum_{i=1}^{\min(q,p)} \sigma_i u_i v_i^T$$

a  $Q_Y^T Q_X$  szinguláris felbontása, és ha a  $\sigma_i$  egy monoton csökkenő sorozat akkor

$$\sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T$$

a  $Q_Y^T Q_X$  legjobb közelítése kvadratikusság értelemben.

Tehát az  $(Y, X)$  kanonikus korreláció modelljének megtalálásához venni kell előbb az  $Y$  és  $X$  mátrixok QR felbontását, majd e felbontásból az ortonormált mátrixok szorzatának SVD felbontását.

Az **R** általunk használt `stats::cancor()` szubrutinja is ezt a módszert követi.

A kanonikus korreláció modell értelmezése szemponjából igen jelentős a kanonikus együtthatók és faktorok projekciókkal való meghatározása.

Tekintsük az  $\mathbb{R}^n$  térnek az  $Y$  illetve az  $X$  oszlopai által kifeszített  $\mathcal{L}_Y$  illetve  $\mathcal{L}_X$  lineáris alterét. Azt az  $(s_Y, s_X)$  vektorpárt kell megtalálni, amelyik egymáshoz a legközelebbi, feltéve, hogy  $s_Y \in \mathcal{L}_Y$  és  $s_X \in \mathcal{L}_X$ .

Ehhez nyilvánvaló az szükséges, hogy az  $s_Y$  és az  $s_X$  egymás lineáris vetületei legyenek. Ezáltal, ha  $P_Y = Y(Y^T Y)^{-1} Y^T$  és a  $P_X = X(X^T X)^{-1} X^T$  azaz az  $\mathcal{L}_Y$ -ra illetve az  $\mathcal{L}_X$ -re való vetítés, akkor a keresett vektorpár közül az  $\mathcal{L}_Y$ -beli  $s_Y$  a  $P_Y P_X$  szorzat, az  $\mathcal{L}_X$ -beli  $s_X$  pedig a  $P_X P_Y$  szorzat legnagyobb sajátértékéhez tartozó sajátvektor.

Ezeket a vektorokat szokás bal illetve jobb (első) kanonikus faktornak nevezni. A további faktorpárok a projekció szorzatok második, harmadik stb sajátértékéhez tartoznak.

A faktorokhoz tartozó együtthatóknak azokat a vektorokat nevezzük, amelyek megadják az  $Y$  illetve  $X$  oszlopainak azon lineáris kombinációját, ami a megfelelő faktorokkal egyenlő.

Ezek a vektor együtthatók, egy-egy regressziós feladatot megoldva adhatóak meg. De az együtthatók megtalálását lényegesen megkönnyíti, ha figyelembe vesszük, hogy azok egyrészt a  $W_Y = V_{YY}^{-1} V_{YX} V_{XX}^{-1} V_{XY}$  másrészt a  $W_X = V_{XX}^{-1} V_{XY} V_{YY}^{-1} V_{YX}$  mátrixok sajátvektorai. Ahol a  $V_{YY}$ ,  $V_{YX}$ ,  $V_{XY}$  és a  $V_{XX}$  mátrixok, az  $(Y|X)$  mátrixok önmaguk transzponáltjával vett szorzatok értelemszerűen vett részei. Azaz  $V_{YY} = Y^T Y$ ,  $V_{YX} = Y^T X$ ,  $V_{XY} = X^T Y$  és a  $V_{XX} = X^T X$

## 2.

# ARMA folyamatok

Vizsgálataink a többdimenziós, lineáris modellel leírható stacionárius folyamatokra vonatkoznak. Ezért előbb – ebben a fejezetben – az egydimenziós lineáris, stacionárius modellekkel foglalkozunk, majd a következő fejezetben a többdimenziósakkal, bemutatva azokat a specialitásokat is, amelyek a többdimenziósakat lényegesen megkülönböztetik az egydimenziósaktól.

Egy  $\xi_t$ ,  $t = \dots, 0, 1, 2, \dots$  diszkrét idejű, valósszám értékű folyamatot  $p$ -ed rendű autoregresszív, azaz AR( $p$ ) folyamatnak nevezünk, ha vannak olyan  $a_1, a_2, \dots, a_p$  valósszám együtthatók és egy olyan korrelálatlan 0 várhatóértékű  $\dots, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  zaj sorozat, amire

$$\xi_t = a_1 \xi_{t-1} + a_2 \xi_{t-2} + \dots + a_p \xi_{t-p} + \varepsilon_t$$

Jelentse  $L$  azt az operációt, ami tetszőleges folyamat esetén a folyamat  $t$  időpontbeli értékéhez a folyamat  $t - 1$  időpontbeli értékét rendeli hozzá. Vagyis például legyen  $L\xi_t = \xi_{t-1}$ . Legyen tetszőleges  $k$  nem-negatív egészszámra  $L^{k+1} = L^k L$ . Vagyis például legyen  $L^2 \xi_t = LL\xi_t = \xi_{t-2}$ .

Ha  $A(z)$  azt a polinomot jelöli, amelyre  $A(z) = 1 - a_1 z - a_2 z^2 - \dots - a_p z^p$ , akkor az AR( $p$ ) fenti definíciója a

$$A(L)\xi_t = \varepsilon_t$$

ekvivalens formába írható.

Egy  $\xi_t$ ,  $t = \dots, 0, 1, 2, \dots$  diszkrét idejű valószínűség értékű folyamatot  $q$ -ed rendű mozgóátlag, azaz  $\text{MA}(q)$  folyamatnak nevezünk, ha vannak olyan  $m_1, m_2, \dots, m_q$  valószínűség együtthatók és egy olyan korrelálatlan 0 várhatóértékű  $\dots, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  zaj sorozat, amire

$$\xi_t = \varepsilon_t - m_1\varepsilon_{t-1} - m_2\varepsilon_{t-2} - \dots - m_q\varepsilon_{t-q}$$

Ha  $M(z)$  azt a polinomot jelöli, amelyre  $M(z) = 1 - m_1z - m_2z^2 - \dots - m_qz^q$ , akkor az  $\text{MA}(q)$  fenti definíciója a

$$\xi_t = M(L)\varepsilon_t$$

ekvivalens formába írható.

Ha az  $M(z)$  polinom minden gyöke az egységkörön kívüli, akkor azt mondjuk, hogy a folyamat invertálható: felírható egy végtelen rangú  $\text{AR}(\infty)$  folyamat formájában is. Vagyis a  $\xi_t$  megfigyelések alapján az  $\varepsilon_t$  sorozat meghatározható.

Hasonló módon, ha egy  $\text{AR}(p)$  folyamat stabil, azaz az  $A(z)$  polinom minden gyöke az egységkörön kívüli, akkor a folyamat értékei felírhatóak mint az  $\varepsilon_t$  zajfolyamat egy, időben a mínusz végtelenbe nyúló lineáris kombinációja, azaz mint egy  $\text{MA}(\infty)$  folyamat.

Ennek értelmében minden véges  $\text{AR}$ , illetve véges  $\text{MA}$  folyamat felírható  $\text{MA}$ , illetve  $\text{AR}$  folyamatként is, ám ezek a felírások már nem lesznek véges rangúak. Ez a tulajdonság csak az egydimenziós folyamatokra érvényes. A többdimenziós folyamatok esetén – mint majd látni fogjuk – lehetséges, hogy egy folyamatnak az  $\text{AR}$  és  $\text{MA}$  verziója is véges rangú.

Ha a  $\xi_t$ ,  $t = \dots, 0, 1, 2, \dots$  diszkrét idejű valószínűség értékű folyamat olyan, hogy megfelelő  $a_1, \dots, a_p$  illetve  $m_1, m_2, \dots, m_q$  valószínűség együtthatókkal és egy korrelálatlan 0 várhatóértékű  $\dots, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  zaj sorozattal a

$$\xi_t = a_1\xi_{t-1} + a_2\xi_{t-2} + \dots + a_p\xi_{t-p} + \varepsilon_t - m_1\varepsilon_{t-1} - m_2\varepsilon_{t-2} - \dots - m_q\varepsilon_{t-q}$$

formába írható, akkor a  $\xi_t$  folyamatot  $\text{ARMA}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , azaz egy  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  rendű autoregresszív mozgóátlag folyamatnak nevezzük.

Ha  $A(z)$  azt a polinomot jelöli, amelyre  $A(z) = 1 - a_1z - a_2z^2 - \dots - a_pz^p$ , és  $M(z)$  azt a polinomot jelöli, amelyre  $M(z) = 1 - m_1z - m_2z^2 - \dots - m_qz^q$ , akkor az  $\text{ARMA}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  folyamat fenti definíciója az

$$A(L)\xi_t = M(L)\varepsilon_t$$

ekvivalens formába írható.

Ha az  $A(z)$  és az  $M(z)$  relatívprím-polinomok, akkor a fenti felírást a folyamat *kanonikus* felírásának, a polinomok fokszámát pedig a megfelelő ARMA folyamat rendjének nevezzük. Az egydimenziós valós ARMA folyamatok kanonikus felírása egyértelmű.

Egy ARMA folyamat, ugyanúgy mint egy AR folyamat, pontosan akkor stabil stacionárius folyamat (szűkebb értelemben), ha az  $A(z)$  polinom minden gyöke a komplex egységkörön kívüli.

### 3.

## VARMA folyamatok

Ha a  $d$  dimenziós  $\xi_t$ ,  $t = \dots, 0, 1, 2, \dots$  diszkrét idejű  $\mathbb{R}^d$  értékű folyamat olyan, hogy megfelelő  $A_1, A_2, \dots, A_p$  illetve  $M_1, M_2, \dots, M_q$  valósszámok feletti  $d \times d$  méretű mátrixokkal, és egy  $d$  dimenziós korrelálatlan, azonos eloszlású, 0 várhatóértékű  $\dots, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  zaj sorozattal a

$$\xi_t = A_1\xi_{t-1} + A_2\xi_{t-2} + \dots + A_p\xi_{t-p} + \varepsilon_t - M_1\varepsilon_{t-1} - M_2\varepsilon_{t-2} - \dots - M_q\varepsilon_{t-q}$$

formába írható, akkor a  $\xi_t$  folyamatot VARMA( $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ ), azaz egy  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  rendű vektor autoregresszív mozgóátlag folyamatnak nevezzük.

Ha az  $A(z)$  az  $A(z) = 1 - A_1z - A_2z^2 - \dots - A_pz^p$ , az  $M(z)$  pedig az  $M(z) = 1 - M_1z - M_2z^2 - \dots - M_qz^q$  mátrix együtthatós polinomot jelöli, akkor a VARMA( $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ ) folyamat fenti definíciója az

$$A(L)\xi_t = M(L)\varepsilon_t$$

ekvivalens formába írható.

Az  $A(z)$  és az  $M(z)$  polinomok  $p$  illetve  $q$  fokszáma a folyamat rendje.

Egy VAR illetve VARMA folyamat pontosan akkor stacionárius (szűkebb értelemben) ha a  $\det(\mathbf{A}(z))$  polinom minden gyöke a komplex egységkörön kívüli. Valamint pontosan ekkor igaz, hogy a VARMA folyamat invertálható, azaz megadható a megfigyelt  $\xi_t$  értékek alapján a folyamatot generáló  $\varepsilon_t$  folyamat.

Egy stacionárius VARMA folyamathoz mindig található olyan  $d \times d$  dimenziós mátrixokból álló  $\Psi_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  együtthető sorozat amelyek segítségével a  $\xi_t$  folyamat  $\text{MA}(\infty)$  formába írható:

$$\xi_t = \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i \varepsilon_{t-i} = \Psi(L)\varepsilon_t$$

Egy VARMA felírást, az  $(A, M)$  mátrixokra vonatkozó esetleges feltételezésekkel együtt identifikálhatónak nevezünk, ha a megfelelő feltételek szerinti  $(A(z), M(z))$  polinomokat az  $\text{MA}(\infty)$  felírás egyértelműen meghatározza.

A VARMA folyamatok felírása nem értelmű, ha csak a  $(p, q)$  fokszámokat adjuk meg.

### Példa 1.

*Az alábbi 2 dimenziós  $\xi_t$  folyamat tekinthető VMA(1) és VAR(1) folyamatnak is*

Vegyük ugyanis azt a folyamatot ami a

$$\begin{pmatrix} \xi_{1,t} \\ \xi_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix}$$

egyenlet szerinti, így véve a  $\xi_t$  egy olyan VMA(1) folyamat, amelynek az  $M(z)$  karakterisztikus polinomja:

$$M(z) = \begin{pmatrix} 1 & -2z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ennek segítségével az esetünkben a  $\xi_t$  folyamat a következő módon is megadható:

$$\xi_t = M(L)\varepsilon_t$$

Mivel az  $M(z)$  polinom mátrix determinánsa konstans:

$$\det(M(z)) = 1$$

az  $M(z)$  polinom mátrix inverze is polinom mátrix:

$$M^{-1}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 2z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ha ezzel az inverzzel a  $\xi_t$  egyenletét balról szorozzuk, akkor azt kapjuk, hogy:

$$M^{-1}(L)\xi_t = M^{-1}(L)M(L)\varepsilon_t = \varepsilon_t$$

Ez a felírás ekvivalens az előzővel, ugyanis ha most ezt az egyenletet balról az  $M(z)$  mátrixszal megszorozzuk, akkor visszanyerjük a folyamat eredeti definíciós egyenletét. Ha kifejtjük a kapott egyenletet, akkor azt láthatjuk, hogy:

$$\begin{pmatrix} \xi_{1,t} \\ \xi_{2,t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{1,t-1} \\ \xi_{2,t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix}$$

ami azt mutatja, hogy az adott VMA(1) folyamatot VAR(1) modell formában is fel tudjuk írni.

A bemutatott példa számolásai, a foksámok és a folyamat dimenziójának alacsony volta miatt ‘kézzel’ is könnyen követhetőek, ám ugyanez, ha a mondott körülmények nem állnak fenn, egy igen időigényes feladat, ezért röviden bemutatjuk azt a programrészletet amelynek segítségével, felhasználva a `polyMatrix` [1] kiegészítést a nyíltkódú R-project-nek [2], a hasonló feladatok könnyedén megoldhatóak:

```
# install.packages("polyMatrix")
library(polyMatrix)
rm(list=ls())

(M <- parse.polyMatrix("1, -2x", "0,1"))
# 1 -2x
# 0 1
det(M) # 1
(Minv <- parse.polyMatrix("1, 2x", "0,1"))
# 1 2x
# 0 1
Minv%*%M # identitás (bal inverz)
M%*%Minv # identitás (nyilván, jobb inverz is)
```

Mint láthatjuk, ha a folyamat olyan, hogy az együtthatóinak megfelelő karakterisztikus polinom mátrix determinánsa konstans, akkor ezzel a módszerrel a VMA



folyamat VAR formába írható, és fordítva. Ugyanis a determináns konstans volta a feltétele annak, hogy egy polinommatrix inverze is polinommatrix legyen. A példában egy  $2 \times 2$  méretű, elsőfokú polinomokat tartalmazó mátrixot látunk amelynek a determinánsa konstans, de természetesen ugyanez nagyobb és magasabb fokszámú polinom mátrixok esetén is előfordulhat.

Ugyanez – mármint az, hogy egy véges MA folyamat véges AR formában is felírható, vagy fordítva, – az egydimenziós folyamatok esetén nem fordulhat elő, hiszen, ha az  $1 \times 1$  méretű, polinommatrix olyan, amelynek az (egyetlen) eleme nem konstans polinom (tehát amikor nem a triviális esetről van szó), akkor szükségszerűen a karakterisztikus polinommatrix determinánsa sem konstans.

### Példa 2.

*Egy 2 dimenziós folyamat felírása több ekvivalens VARMA(1, 1) folyamat formában*

Ha a  $\xi_t$  folyamat kielégíti a

$$\begin{pmatrix} \xi_{1,t} \\ \xi_{2,t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.8 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{1,t-1} \\ \xi_{2,t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix}$$

egyenletet, akkor a

$$\begin{pmatrix} \xi_{1,t} \\ \xi_{2,t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{1,t-1} \\ \xi_{2,t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.3 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix}$$

egyenletet is kielégíti. Ekkor ugyanis az első egyenlet szerint:

$$A(z) = \begin{pmatrix} 1 - 0.8z & -2z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M(z) = \begin{pmatrix} 1 - 0.3z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tehát, ha az egyenletet balról, például a

$$T(z) = \begin{pmatrix} 1 & 2z \\ 1 & 1 + 2z \end{pmatrix}$$

mátrixal beszorozzuk, akkor a

$$T(z)A(z) = \begin{pmatrix} 1 - 0.8z & 0 \\ 1 - 0.8z & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(z)M(z) = \begin{pmatrix} 1 - 0.3z & 2z \\ 1 - 0.3z & 1 + 2z \end{pmatrix}$$

karakterisztikus polinomnak megfelelő egyenletekhez jutunk, ami pont a második egyenletnek felel meg. Sőt mivel  $\det(T(z)) = 1$  a  $T(z)$  transzformáció invertálható is:

$$T^{-1}(z) = \begin{pmatrix} 1 + 2z & -2z \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tehát a  $\xi_t$  folyamat két felírása tényleg ekvivalens.

Az alábbi pár soros **R** szkript mutatja a számolásaink helyes voltát [1].

```
rm(list=ls())

(A1 <- parse.polyMatrix("1-.8x, -2x", "0,1"))
# 1 - 0.8x      -2x
#           0      1
polyroot(det(A)) # 1.25

(M1 <- parse.polyMatrix("1-.3x, 0", "0,1"))
# 1 - 0.3x      0
#           0      1
polyroot(det(M)) # 10/3

(T <- parse.polyMatrix("1, 2x", "1,1+2x"))
# 1      2x
# 1  1 + 2x
det(T) # 1

(A2 <- T%*%A1)
# 1 - 0.8x      0
# 1 - 0.8x      1

(M2 <- T%*%M1)
# 1 - 0.3x      2x
# 1 - 0.3x  1 + 2x

(Tinv <- parse.polyMatrix("1+2x, -2x", "-1,1"))
```

```

# 1 + 2x    - 2x
#          -1     1
Tinv%*%T
# 1  0
# 0  1

```

A 2. példa azt mutatja, hogy a VARMA folyamatok identifikációjához, szemben az egydimenziós ARMA folyamatokkal nem elégséges a  $(q, p)$  fokszámok megadása.

Többféle olyan feltételrendszer létezik, ami mellett a VARMA folyamatok felírása egyértelmű. Az ilyen feltételrendszerek gyűjtő neve: ‘kanonikus forma’. A kanonikus formák közül az egyik legfontosabb az ‘echelle’ – azaz a ‘létra’ – kanonikus forma. Az echelle forma esetén az  $A(z)$  és  $M(z)$  polinomok redukáltak és relatív prímek, ám a forma megadásához fel kell használni a folyamat koordinátáinak Kronecker indexét is.

A Kronecker index pontosabb definícióját a következő fejezet rekurzív bázis alkotó algoritmusával adjuk meg. A mostaniakhoz elégséges a következő meghatározás. A VARMA folyamatok koordinátáihoz tartoznak olyan  $(k_1, \dots, k_d)$  Kronecker indexnek nevezett nemnegatív egészszámok, amelyek azt adják meg, hogy az adott koordináta, figyelembe véve a folyamat felsorolás szerint előző koordinátáit is, hány előző megfigyeléstől függ ténylegesen.

Egy  $(k_1, \dots, k_d)$  Kronecker indexű VARMA( $p, q$ ) folyamat felírása echelle kanonikus forma, ha  $p = q = \max\{k_1, \dots, k_d\}$ ,  $A_0 = M_0$  és az  $(A(z), M(z))$  mátrixok  $i$ . sorában a polinomok fokszáma  $k_i$ , de az  $A(i, j)$  polinomnak csak a  $\min(k_i + 1, k_j)$  legnagyobb fokszámú tagja nem strukturálisan 0.

## 4.

# Kronecker index

Egy  $d$  dimenziós VARMA folyamat minden koordinátájához tartozik egy úgynevezett Kronecker index, ami egy nemnegatív egészszám. A folyamat  $(k_1, \dots, k_d)$  Kronecker indexeinek  $\sum_{i=1}^d k_i = \mu$  összege a folyamat McMillan fokával egyenlő.

A folyamat McMillan fokszáma egy olyan, a koordináták sorrendjétől független természetes szám értékű konstans, ami a folyamat leírás szabadságfokával egyenlő. Egy folyamat Kronecker indexeinek nem csak az összege, hanem a halmaza is független a koordináták sorrendjétől. Viszont az már függhet a koordináták sorrendjétől, hogy egy adott koordinátához melyik Kronecker index tartozik.

Másképpen mondva: a Kronecker indexek halmaza a koordináták permutációjára invariáns. A sorcserékkel mindig elérhető, hogy a sorok Kronecker indexei egy csökkenő sorozatot alkossanak, de nem minden folyamat esetén érhető el, hogy a Kronecker indexek növekvő sorrendben legyenek.

Az egyes koordináták Kronecker indexének a definíciója legegyszerűbben az indexek megtalálására használható algoritmussal adható meg.

A Kronecker index keresésési algoritmusát röviden így írható le:

"Megkeressük a múlttól legalább részben függő jövő egy bázisát".

A kitűzött feladat megoldásához, a folyamat  $\mathcal{P}$  múltját rögzítetten, egy adott  $m$ -re a  $t - 1, t - 2, \dots, t - m$  időpontokbeli megfigyelések alapján írjuk le. A jövőbeli megfigyelések közül viszont lépésenként, a koordinátákat ciklikusan vizs-

gálva választjuk ki a koordináták jövőbeli megfigyelései közül azokat, amelyekből a múlttól legalább részben függő  $\mathcal{F}$  jövő egy bázisát építjük fel.

A ‘múlttól nem-független jövő’ bázisának lépésenkénti, ciklikus kiválasztása a következőt jelenti. Az  $\mathcal{F}$  jövő bővíthetőségét, egyrészt lépésenként egyre távolabbi jövőbeli értékeket, másrészt a koordinátákat ciklikusan egyenként, index sorrendben véve vizsgáljuk.

Azt nézzük, hogy ha az adott koordináta adott jövőbeli megfigyelését hozzá vennénk az  $\mathcal{F}$  jövőt aktuálisan leíró, korábban már kiválasztott változók halmazához, akkor volna-e az  $\mathcal{F}$ -nek a  $\mathcal{P}$ -től független komponense. Ha ilyen független komponens *nem* találunk, akkor az aktuálisan vizsgált megfigyelést hozzávesszük az  $\mathcal{F}$  jövő leírásához. Ha pedig találunk, és a vizsgált megfigyelés a  $\xi_{t+h,j}$  volt (azaz a  $j$ . koordináta  $t+h$  időpontbeli megfigyelése) akkor egyrészt feljegyezzük, hogy a  $j$ . koordináta Kronecker indexe  $h$  másrészt a  $j$ . koordináta további jövőbeli értékeit a  $\mathcal{F}$  meghatározása során, már nem vizsgáljuk.

Ily módon tehát a Kronecker index azt mutatja, hogy a jövő leírást lépésenként, ciklikusan bővítve, az adott koordinátának hány olyan jövőbeli értéke van, ami még (az algoritmus szerint korábban a bázisba választott változókkal együtt) nem ad a múlttól független (a múlttal korrelálatlan) jövőbeli komponens.

Tekintsük a folyamat koordináták alábbi két felsorolását.

MÚLT	ezek a változók alkotják a $\mathcal{P}$ múlt bázisát
	$(\xi_{t-m,1}, \dots, \xi_{t-2,1}, \xi_{t-1,1})$ $\vdots$ $(\xi_{t-m,d}, \dots, \xi_{t-2,d}, \xi_{t-1,d})$

Ez a táblázat azt mutatja, hogy mely változókból áll a  $\mathcal{P}$  leírása. Ebből az látható, hogy ez a halmaz mindegyik változó  $t$  időpont előtti  $m$ , tehát összesen  $d \cdot m$  megfigyelésből áll.

Az alábbi táblázatban azt soroltuk fel, hogy mely változók közül választjuk ki *a felsorolásnak megfelelő sorrendben, egyenként*, a  $\mathcal{P}$  múlttól való függetlenség alapján az  $\mathcal{F}$  bázisát.

Ez a lista a kiválasztás során változik. A háralévő listarész fogy. Az algoritmus lefutásakor ennek a hossza nulla, ugyanis egy koordináta minden következő megfigyelése törlésre kerül, amikor az adott koordináta egy jövőbeli megfigyelése mellett függetlenséget diagnosztizálunk.

JÖVŐ	az $\mathcal{F}$ jövő bázisának elemeit az alábbiak közül választjuk ki
$h = 0$	$\xi_{t,1}$ $\vdots$ $\xi_{t,d}$
$h = 1$	$(\xi_{t,1}, \xi_{t+1,1})$ $\vdots$ $(\xi_{t,d}, \xi_{t+1,d})$
$h = 2$	$(\xi_{t,1}, \xi_{t+1,1}, \xi_{t+2,1})$ $\vdots$ $(\xi_{t,d}, \xi_{t+1,d}, \xi_{t+2,d})$
$h=3$	...
	$\vdots$

Azt, hogy az aktuálisan vizsgált  $\xi_{t+h,j}$  jövőbeli megfigyeléssel bővített  $\mathcal{F}$  jövő, tartalmaz-e a  $\mathcal{P}$  múlttól független komponenst, a  $(\mathcal{P}, \{\mathcal{F}, \xi_{t+h,j}\})$  változópár kanonikus korrelációja alapján vizsgáljuk. Pontosabban azt teszteljük, hogy ennek a  $(\mathcal{P}, \{\mathcal{F}, \xi_{t+h,j}\})$  múlt-jövő párnak van-e olyan kanonikus faktorpárja, amelyek korrelációja 0.

Látszik, hogy a  $\mathcal{P}$  múlt leírása, a  $h$  értékétől függetlenül, mindig ugyanannak az  $d \times m$  változónak a megfigyeléséből származik. A  $\mathcal{F}$  jövő leírását alkotó változók halmaza viszont növekszik. Addig bővül, míg az összes koordináta ki nem kerül a vizsgálandók köréből.

Az eljárás kezdetén az  $\mathcal{F}$  halmaz üres. Először  $h = 0$  mellett a  $\xi_{t,1}$ -et próbáljuk az  $\mathcal{F}$ -be bevenni, utána a  $\xi_{t,2}$ -öt, majd az adott ciklus végén  $\xi_{t,d}$ -t. Innét csak akkor lépünk tovább a  $h = 1$  értékre, ha van olyan koordináta amit az  $\mathcal{F}$ -be

bevettünk. Hiszen a következő ciklusban már csak azoknak a koordinátáknak a  $t + 1$  időpontbeli megfigyelését vizsgáljuk, amelyeknek a megfigyelését az előző lépésben a ( $t$  időpontbeli megfigyelések értékelésekor) bevettük.

Tehát, ha az egyes koordináták Kronecker indexe  $(k_1, \dots, k_d)$ -nek adódik, akkor az azt jelenti, hogy a múlttól független komponenst nem tartalmazó jövő  $\mathcal{F}$  bázisaként koordinátánként felsorolva a  $\xi_{t,1}, \dots, \xi_{t+k_1-1,1}; \xi_{t,2}, \dots, \xi_{t+k_2-1,2}; \dots ; \xi_{t,d}, \dots, \xi_{t+k_d-1,d}$  megfigyeléseket választottuk ki.

A szekvenciális kiválasztás okán nyilvánvalóan lehetséges, hogy a koordináták más sorrendben való felsorolásakor más koordináták adódhatnak mint az  $\mathcal{F}$  kiegészítői. Noha a koordináták permutációja nem feltétlenül egyezik meg az indexek permutációjával bizonyítható, hogy a Kronecker indexek  $\{k_1, \dots, k_d\}$  halmaza a permutációkra invariáns.

## 5.

# Az index becslés szimulációs vizsgálata

A többdimenziós ARMA folyamatok és a kapcsolódó Kronecker indexek viszonyának összetettsége okán, az indexek előző fejezetekben leírt becslési pontosságát mindössze három speciális esetben vizsgáljuk meg.

A vizsgálathoz az R-project [2] programkörnyezetét használjuk, a többdimenziós VARMA folyamatok kezelésére alkalmas MTS [3] ‘A Multivariate Time Series’ kiegészítő csomaggal együtt. E csomag alkalmas a többváltozós lineáris idősorok elemzésére és a többváltozós volatilitási modellek becslésére is. Kezeli nemcsak a Kronecker indexek szerinti echelle kanonikus formát, hanem az úgynevezett skalárkomponens modelleket is.

Az általunk vizsgált három modell Lütkepohl [4] klasszikus ‘New Introduction to Multiple Time Series Analysis’ tankönyvének három mintapéldájával azonos. A Kronecker indexek becslési megbízhatósága azonos technikával tetszőleges ARMA folyamat esetén vizsgálható volna.

Az első vizsgált modell egy háromdimenziós VARMA(1,0) modell, a második egy kétdimenziós VARMA(2,0) modell, a harmadik pedig egy szintén kétdimenziós VARMA(2,1) modell.



A 'Model.1' egy  $d = 3$  dimenziós VARMA(1, 0) folyamat modell:

$$A(z) = I - \Phi_1 z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} \cdot z$$

$$M(z) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2.25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.74 \end{pmatrix}$$

A 'Model.2' egy  $d = 2$  dimenziós VARMA(2, 0) folyamat modell:

$$A(z) = I - \Phi_1 z - \Phi_2 z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot z - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.25 & 0 \end{pmatrix} \cdot z^2$$

$$M(z) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.09 & 0 \\ 0 & 0.04 \end{pmatrix}$$

A 'Model.3' egy  $d = 2$  dimenziós VARMA(2, 1) folyamat modell:

$$\Phi(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot z - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.25 & 0 \end{pmatrix} \cdot z^2$$

$$\Theta(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix} \cdot z$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.09 & 0 \\ 0 & 0.04 \end{pmatrix}$$

Szimulációval előállított folyamatok segítségével azt vizsgáljuk, hogy az egyes folyamatok esetén, különböző hosszúságú szimulátumok mellett az egyes Kronecker index kombinációk mekkora relatív gyakorisággal fordulnak elő.

A szimulációk eredményeit az alábbi táblázatok foglalják össze. A felhasznált programok lényegi részeit a 'Függelék'-ben mutatjuk be. Az eredmények értékelését a következő, 'Összegzés' fejezet tartalmazza.

Az első modellnek megfelelő  $T = 250$  megfigyelés hosszú generátumok esetén  $n = 100$  kísérlet alapján a következőt kaptuk:

McMillan fok	Kronecker index	előfordulási gyakoriság
2	(1,0,1)	10
2	(1,1,0)	83
3	(1,1,1)	7

Tehát a vizsgált háromdimenziós VARMA(1, 0) modell esetén a Kronecker indexek alapján számolt különböző McMillan index értékek előfordulási gyakorisága:

McMillan fok	2	3
Gyakoriság	93	7

A tapasztalat tehát azt mutatja, hogy a 'Model.1' folyamat esetén egy 250 hosszú generált megfigyélő sor alapján a becsült Kronecker indexek 3, a megfelelő McMillan fokok pedig a véletlentől függetlenül 2 félenek adódnak.

A második modellnek megfelelő  $T = 250$  megfigyelés hosszú generátumok esetén  $n = 100$  kísérlet alapján a következőt kaptuk:

McMillan fok	Kronecker index	előfordulási gyakoriság
1	(1,0)	12
2	(1,1)	2
2	(2,0)	4
3	(1,2)	3
3	(2,1)	47
4	(2,2)	31
5	(3,2)	1

Tehát a vizsgált kétdimenziós VARMA(2,0) modell esetén a Kronecker indexek alapján számolt különböző McMillan index értékek előfordulási gyakorisága:

McMillan fok	1	2	3	4	5
Gyakoriság	12	6	50	31	1

A táblázatok azt mutatják, hogy a ‘Model.2’ folyamat esetén egy 250 hosszú generált megfigyélő sor alapján a becsült Kronecker indexek 7, a megfelelő McMillan fokok pedig a véletlentől függően 5 félenek adódnak.

A harmadik modellnek megfelelő  $T = 250$  megfigyelés hosszú generátumok esetén  $n = 100$  kísérlet alapján a következőt kaptuk:

McMillan fok	Kronecker index	előfordulási gyakoriság
3	(1,2)	81
3	(2,1)	10
4	(2,2)	7
5	(2,3)	1
5	(3,2)	1

Tehát a vizsgált kétdimenziós VARMA(2,1) modell esetén a Kronecker indexek alapján számolt különböző McMillan index értékek előfordulási gyakorisága:

McMillan fok	3	4	5
Gyakoriság	91	7	2

Végül a ‘Model.3’ folyamat esetén egy 250 hosszú generált megfigyélő sor alapján a becsült Kronecker indexek 5, a megfelelő McMillan fokok pedig a véletlentől függően 3 félenek adódtak.

## 6.

# Összegzés

Az volt a célunk, hogy a többdimenziós ARMA folyamatok egy nehezen becsülhető paraméterét, a Kronecker indexeket bemutassuk. Ennek érdekében először részletesen tárgyaltuk és értelmeztük a becslési módszer fő eszközét, a kanonikus korrelációt, majd bemutattuk a folyamatok egyértelmű felírhatóságának azt a problémáját, aminek egyfajta feloldása pont a Kronecker indexeken alapul. Végül szimulációs módszerrel megvizsgáltuk néhány többdimenziós folyamat-modell esetén az indexek becslésének stabilitását.

Három egyszerű, H. Lütkepohl [4] könyvéből vett klasszikus VARMA modell esetén vizsgáltuk a becsült Kronecker index érték stabilitását. A vizsgálatokhoz modelenként 100, egyenként 250 megfigyelés hosszú megfigyeléssort generáltunk, és az eredményeket a előző fejezet táblázataiba foglaltuk össze. Vizsgálatainkhoz az **R**-project program környezetét [2] és annak kiegészítéseit [1, 3] vettük igénybe.

A tapasztalat azt mutatja, hogy a kanonikus korreláció módszerével keresett Kronecker indexek a ‘Model.1’ folyamat esetén  $\frac{83}{100}$  relatív gyakorisággal adódtak  $(1, 1, 0)$ -nak. A ‘Model.2’ folyamat esetén viszont két típus emelkedett ki, a  $(2, 1)$  és  $(2, 2)$  indexek relatív gyakorisága  $\frac{47}{100}$  illetve  $\frac{31}{100}$ . Az utolsó, ‘Model.3’ folyamat esetén újra egy domináns tag adódott, az  $(1, 2)$  indexpár, melyhez tartozó relatív gyakoriság  $\frac{81}{100}$ .

Ezt összefoglalva elmondható, hogy a Kronecker indexek mintegy 80%-os pontossággal mutatnak stabilitást, oly módon, hogy a második modell esetén ez a mintegy 80% két típusra bomlik. Ezenfelül az is megjegyzendő, hogy a két utóbbi modell esetén a tipikustól eltérő becslések igen nagy szórást mutatnak.

További kutatás lehetősége:

Vizsgálataink bevezető jellegűek. Azt mutatják, hogy a Kronecker indexek becslésére alkalmazott, a kanonikus korrelációkon alapuló módszer még bizonytalan eredményű. Ennek okát célszerű volna egy lényegesen kiterjedtebb kísérletsorozattal megkeresni.

---

## 7.

# Függelék

A vizsgálathoz felhasznált utasítás szkriptek három fázisa:

- a vizsgált modellek definíciója
- adott modell szerinti folyamat generálás
- a folyamat Kronecker indexeinek megállapítása

valamint a kapott eredmények összegzése.

Folyamat definíciók

```
# install.packages("polyMatrix")
# install.packages("MTS")
library(polyMatrix)
library(MTS)

rm(list=ls())
A1 <- parse.polyMatrix("1-.5x,0,0",
                      "-.1x,1-.1x,1-.3x",
                      "0,-.2x,1-.3x")
A1 # a karakterisztikus polynom
#   1 - 0.5x      0      0
#   - 0.1x   1 - 0.1x   1 - 0.3x
#           0      - 0.2x   1 - 0.3x
det(A1) # 1 - 0.7*x + 0.07*x^2 + 0.015*x^3
polyroot(det(A1)) # 2 1/3 -10
all(Mod(polyroot(det(A1)))>1) # stabil-e? TRUE
```

```

ph1 <- -A1@coef[,-(1:A@ncol)]
ph1 # az A1 együttható mátrix
# 0.5 0.0 0.0
# 0.1 0.1 0.3
# 0.0 0.2 0.3
v1 <- matrix(c(2.25,0,0,0,1,.5,0,.5,.74),3,3)
v1 # a hiba kovariancia
# 2.25 0.0 0.00
# 0.00 1.0 0.50
# 0.00 0.5 0.74
model.1 <- list(ph=ph1,th=NULL,v=v1,d=3,p=1,q=0)

A2 <- parse.polyMatrix("1-.5x,-.1x","-.4x-.25x^2,1-.5x")
ph2 <- -A2@coef[,-(1:A2@ncol)]
v2 <- matrix(c(.09,0,0,.04),2,2)
model.2 <- list(ph=ph2,th=NULL,v=v2,d=2,p=2,q=0)

A3 <- parse.polyMatrix("1-.5x,-.1x","-.4x-.25x^2,1-.5x")
ph3 <- -A3@coef[,-(1:A3@ncol)]
M3 <- parse.polyMatrix("1-.6x,-.2x","0,1-.3x")
th3 <- -M3@coef[,-(1:M3@ncol)]
v3 <- matrix(c(.09,0,0,.04),2,2)
model.3 <- list(ph=ph3,th=th3,v=v3,d=2,p=2,q=1)

rm(list=setdiff(ls()),c("model.1","model.2","model.3"))

```

Modellenként 100 generátum becsült Kronecker indexei

```

gen_varma <- function(M)
{
  T <- 250
  n <- 100
  W <- matrix(0,n,M$d)
  set.seed(123)
  for(k in 1:n)
  {
    yt <- if(is.null(M$th)) # $
      VARMAsim(T,ph=M$ph,sig=M$v,ar=M$p)$series else
      VARMAsim(T,ph=M$ph,th=M$th,sig=M$v,ar=M$p,ma=M$q)$series
    W[k,] <- Kronid(yt)$index
  }
}

```

```
    }  
    return(W)  
  }  
G1 <- gen_varma(model.1)  
G2 <- gen_varma(model.2)  
G3 <- gen_varma(model.3)
```

Az index becslések statisztikái

```
# model.1  
table(apply(G1,1,function(x) paste(x,collapse="")))  
# 101 110 111  
# 10 83 7  
  
# model.2  
table(G2[,1],G2[,2])  
# 0 1 2  
# 1 12 2 3  
# 2 4 47 31  
# 3 0 0 1  
  
# model.3  
table(G3[,1],G3[,2])  
# 1 2 3  
# 1 0 81 0  
# 2 10 7 1  
# 3 0 1 0
```



# Irodalomjegyzék

- [1] T. PRÓHLE; N. RYZHKOV ET AL. [polyMatrix: Infrastructure for Manipulation Polynomial Matrices](#), 2021. R package version 0.9.16. (11), (13), (23)
- [2] R CORE TEAM. [R: A Language and Environment for Statistical Computing](#). R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2021. (11), (19), (23)
- [3] RUEY S. TSAY AND DAVID WOOD. [MTS: All-Purpose Toolkit for Analyzing Multivariate Time Series \(MTS\) and Estimating Multivariate Volatility Models](#), 2021. R package version 1.0.3. (19), (23)
- [4] H. LÜTKEPOHL. [New Introduction to Multiple Time Series Analysis](#). Springer Berlin-Heidelberg-NewYork, 2005. (19), (23)