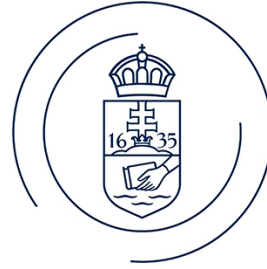




BUDAPESTI  
**CORVINUS**  
**EGYETEM**



**ELTE**  
EÖTVÖS LORÁND  
TUDOMÁNYEGYETEM

# Részvényindex kockázatának kezelése eladási opciók alkalmazásával

**GAJDÓCSI GERGELY**

Biztosítási és Pénzügyi Matematika MSc  
Kvantitatív Pénzügyek szakirány

TÉMAVEZETŐ

**Dr. Vidovics-Dancs Ágnes**

BUDAPEST

2022

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>1</b>
<b>2. Az elemzés célkitűzése és módszertana</b>	<b>3</b>
<b>3. Az S&amp;P 500 index modellezése</b>	<b>5</b>
3.1. Idősor (statisztikai) tulajdonságai . . . . .	5
3.2. GARCH modell . . . . .	8
3.3. Általánosított hiperbolikus eloszlás . . . . .	10
3.4. Modellillesztés . . . . .	12
3.5. Tesztelés . . . . .	13
3.6. Értékelés . . . . .	17
<b>4. Európai put opció árazása</b>	<b>19</b>
4.1. A Black-Scholes formula korlátai . . . . .	19
4.2. Variancia Gamma folyamat . . . . .	20
4.3. Alaptermék árfolyamalakulása . . . . .	22
4.4. Árazás gyors Fourier transzformációval (FFT) . . . . .	22
<b>5. Stratégiák teljesítménye</b>	<b>26</b>
5.1. Hozam . . . . .	26
5.2. Kockázat . . . . .	26
5.3. Hozam-kockázat mutatók . . . . .	30
<b>6. Összegzés</b>	<b>33</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>35</b>

## Ábrák jegyzéke

1.	Az S&P500 index napi loghozamainak időszora . . . . .	5
2.	Az S&P 500 index a) napi, b) heti és c) havi loghozamainak eloszlása normális eloszlás illesztésével . . . . .	6
3.	Autokorrelációs függvény napi loghozamokra (S&P500) . . . . .	7
4.	Autokorrelációs függvény a napi loghozamok négyzetére (S&P500) . . . . .	7
5.	Klasztereződő volatilitástól szűrt, sztenderdizált loghozam hisztogram . . . . .	8
6.	Néhány, 10 éves időtávra szimulált trajektória . . . . .	13
7.	Szimulált 60 éves időszakok loghozamainak momentumai (pirossal az S&P 500 1962 és 2021 között) . . . . .	14
8.	QQ ábra – Múltbeli és szimulált hozamok . . . . .	14
9.	A szimulált hozamok eloszlása a) napi, b) éves és c) tízéves időtávon . . . . .	15
10.	Az eredeti (piros) és a szimulált (kék) hozamok autokorrelációi (fent) és abszolút értékük autokorrelációi (lent) . . . . .	16
11.	Klasztereződő volatilitástól szűrt, sztenderdizált loghozam hisztogram a szimulált hozamokra . . . . .	16
12.	A historikus S&P 500 napi loghozam eloszlásának (piros) összehasonlítása szimulált adatsorokkal (kék) . . . . .	18
13.	Példa a volatilitás felületre . . . . .	19

## Táblázatok jegyzéke

1.	Az S&P 500 index napi loghozamainak nevezetes kvantilisei . . . . .	5
2.	Az S&P 500 index napi loghozamainak nevezetes momentumai . . . . .	5
3.	A GJR-GARCH(1,1) modell paraméterei . . . . .	13
4.	Az eredeti és a szimulált index napi loghozamainak nevezetes kvantilisei . . . . .	15
5.	A put stratégiák hozamai a benchmark indexhez hasonlítva . . . . .	26
6.	A put stratégiák szórásai a benchmark indexhez hasonlítva . . . . .	27
7.	A put stratégiák éves $VAR_{95\%}^{1\text{év}}$ értékei a benchmark indexhez hasonlítva . . . . .	28
8.	A put stratégiák éves $VAR_{95\%}^{1\text{év}}$ és $ES_{95\%}^{1\text{év}}$ értékeinek összehasonlítása a benchmark indexhez hasonlítva . . . . .	29
9.	A put stratégiák átlagos maximális visszaesései a benchmark indexhez hasonlítva . . . . .	30
10.	A put stratégiák hozam-kockázat mutatóinak összehasonlítása . . . . .	31

# 1. Bevezetés

A koronavírushoz hasonló, váratlan külső sokkok okozta rövid, de mély visszaesések és a fokozatosan elmélyülő hosszú válságok a világgazdaság és a részvényt piacok természetes jelenségei. Bár sosem tudhatjuk, hogy mikor jön és mi okozza a következő összeomlást, abban biztosan lehetünk, hogy jönni fog.

A válságok minden professzionális befektető és alapkezelő számára nagy eséllyel okoznak anyagi veszteségeket, a kockázatkezelést lazábban kezelő részük számára pedig akár csődöt is hozhat. A kisbefektetők még jobban veszélyeztetve vannak. A tudás és tapasztalat gyakran terén fennálló hátrányok mellett sokkal kitettebbek a pszichológiai kockázatokkal szemben is. Az átlagos kisbefektető együtt mozog a tömeggel és rendszerint a csúcson vásárol, majd a mélyponton ad el.

Az elmúlt évtizedben a passzív, indexkövető stratégiák térnyerését láthatjuk a nyíltvégű alapok terén. Kapitalizáció alapján a 2000-es évek elején még 10% alatt maradt a részarányuk, ez 2012-re 16,8%-ra, 2019-re 35%-ra emelkedett [23]. A megközelítés népszerűségét az adja, hogy sok kutatás rámutatott, hogy a passzív stratégiák nagy valószínűséggel teljesítik felül az aktívan kezelt alapok eredményét [15]. Szintén hozzájárul a folyamathoz, hogy ma már bárki könnyen és akár minimális tranzakciós költségekkel vásárolhat indexkövető ETF-eket.

De vajon tényleg a passzív befektetési stratégiák a legjobb választások egy kisbefektető számára? Ha a piaci index pár hónap alatt 70%-ot veszít az értékéből, akkor is passzív tudna maradni a stratégia, nem válik aktívan kapkodóvá? Milyen megközelítés a legbiztonságosabb, és amelyet nyugodt szívvel ajánlanánk a kisbefektetőknek?

Az elemzésemben a lehetséges alternatívák közül a put opciókkal kombinált passzív, indexkövető stratégia teljesítményét járom körül.

Felteszem, hogy van egy befektető, aki egy, az S&P 500 indexet követő ETF-ben tartja a teljes vagyonát és pontosan 10 év múlva, nyugdíjas korában adja el a pozícióit, amit életjáradékra vált. Célja a minél nagyobb vagyonnövekedés, miközben minél kevesebb árfolyamingadozással és szélsőséges veszteséggel szeretne szembenézni, ugyanis ezek növelik a fentebb említett pszichológiai kockázatokat. A számára megfelelő stratégia egyszerűen kivitelezhető, akár automatizálható, és nem tartalmaz összetett pénzügyi termékeket. Az indexkövető ETF és az ahhoz védelemként kapcsolt eladási opció megfelelhet ennek a célnak, így a következőkben megvizsgálom, hogy a hozam és a kockázatok oldaláról nézve is elég jó alternatíva-e.

A szakdolgozatom felépítésében a 2. fejezet fekteti le az alapokat, amelyben megfogalmazom a kutatási kérdést és röviden összefoglalom az elemzés módszertanát. A részletes szakmai háttérrel és matematikai formulákat a lineáris szerkezet igénye végett a későbbi fejezetekben, az alkalmazásukkal egy helyen, közvetlenül azok előtt mutatom be. A fejezet második felében a

befektetési stratégiák működését írom le.

A 3. fejezetben a piaci index modellezését írom le. A modell alapjául szolgáló adatsor statisztikai tulajdonságai után a GJR-GARCH modell módszertanát, illetve az innovációként használt általánosított hiperbolikus eloszlást vázolom. Ezután következik a modellillesztés és a kapott modell tesztelése.

A 4. fejezetben az európai put opció árazásához használt módszertant mutatom be. A Variancia Gamma folyamathoz kapcsolódó definíciók és tulajdonságok körüljárása után az árazóképlet levezetése, végül az ár rövidebb számításigényű megadásához használt gyors Fourier transzformáció algoritmus leírása következik.

Az 5. fejezetben az előző két szakasz modelljeivel kiszámolt portfólió szintű hozamok teljesítményének mérését és összehasonlítását végeztem el a hozamok és a kockázatok vizsgálatával. A hozam-kockázat mutatók megadásával már befektetési döntések is meghozhatók.

Az összegzésben az előző fejezetre építve befektetési javaslatot tettem, ugyanakkor kiemelve a modell limitációit és kockázatait. Az elemzésemet a bővítési lehetőségek és ötletek felsorolásával zártam.

## 2. Az elemzés célkitűzése és módszertana

Az elemzés során azt vizsgálom, hogy mennyire hatékony eszközök az eladási opciók egy kockázatkerülő befektető számára. Egy pénzügyi instrumentumot hatékonynak tekintek, ha az jelentősen képes csökkenteni a befektetés kockázatát, miközben a hozamáldozat mérsékelt. A kutatási kérdésem az, hogy *megéri-e eladási opciókat alkalmazni egy passzív, indexkövető stratégia mellett?*

A kutatási kérdés megválaszolásához egy eladási opciókkal védett indexkövető befektetési stratégia kilenc kombinációját tesztelem szimulált adatsorokon.

A szimulációt 1 000 trajektórián, 10 éves időtávon, Monte Carlo végzem, amelyhez a 3. fejezetben felépített GARCH modellt és a 4. fejezetben bemutatott opcióárazási modellt használok. A modellparaméterek kalibrációjához az S&P 500 index osztalékokkal módosított, 60 évet lefedő historikus adatait használok 1962. január 2-ától 2021. szeptember 30-áig. Az időszak összesen 14 919 kereskedési napot tartalmaz, amely során változatos piaci körülményekkel szembesültek a befektetők.

Az elemzés során néhány feltevéssel és egyszerűsítéssel élek. Ezek egy része a kutatás fókuszának szűkítése miatt szükséges, míg néhány feltevés nélkül a modellek komplexitása meghaladná a dolgozatom kereteit. A felvételek hatásaira az utolsó, összefoglaló fejezet limitációkat tárgyaló szakaszában térek ki.

Egy év 252 kereskedési nappól, egy hónap 21 kereskedési nappól áll. A fix, kockázatmentes kamatláb 2%, amelyen hitel felvétele és betét elhelyezése is lehetséges. A piacon megengedett a rövidre eladás, továbbá a törtrészvények és törtopciók kereskedése, valamint nincsenek adók és tranzakciós költségek. Kis szereplőként a befektető tranzakciói nem hatnak a piaci árakra. Az ügyletet lebonyolító brókercéggel kapcsolatban eltekintek a partnerkockázattól, míg az S&P 500 ETF esetében nem számolok a követési hibával.

Az elemzés számolásait és a befektetési stratégiákat R programnyelvben írom<sup>1</sup>. A historikus adatokhoz a *quantmod*, az eloszlások illesztéséhez *fitdistrplus*, az általánosított hiperbolikus eloszláshoz a *ghyp*, az egydimenziós GARCH modellhez a *rugarch* programcsomagokat használok. A Variance Gamma folyamatra építő opcióárazáshoz a *VarianceGamma*, végül a stratégiák teljesítményének értékeléséhez a *PerformanceAnalytics* csomagot alkalmazom<sup>2</sup>. Minden más számoláshoz az R alapfüggvényeit hívom segítségül.

A fejezet további részében bemutatom a befektetési stratégiákat. A stratégiák mindegyike egy

---

<sup>1</sup>A kód elérhető a következő linken: <https://github.com/gajdocsig/szakdolgozat>

<sup>2</sup>A programcsomagok hivatkozása az irodalomjegyzékben a következő számokkal érhető el: [6] [7] [17] [18] [19] [20] [22]

long S&P 500 index és egy erre az indexre, mint alaptermékre kötött long put opció együtteséből áll. Három-három különböző futamidő és relatív kötési árfolyam kombinációjával jön létre a kilenc stratégia.

A futamidő lehet egyhónapos, negyedéves vagy éves, a relatív kötési árfolyam az éves opciónál vásárlás napján érvényes spot árfolyam 60, 80 és 100 százaléka, negyedéves opciónál 80, 90 és 100 százaléka, míg egyhónapos opciónál 88,45, és 94,23, valamint 100 százaléka (mély, mérsékelt és szintbeli opciók).

A stratégiák a következő egyszerű módszerrel működnek: kezdéskor a befektető rendelkezésére áll a teljes összeg<sup>3</sup>, amelyet a vizsgált 10 éves időtáv során már nem egészít ki további összegekkel. A nulladik időpontban a befektető elkölte a teljes vagyont  $n$  darab S&P 500 indexkövető ETF-re  $S_0$  áron és ugyancsak  $n_0$  darab eladási opcióra  $p_0$  díjért. A megvásárolandó mennyiség,  $n_0$  megkapható az alábbi egyenlőségből:

$$n_0 \cdot (S_0 + p_0) = W_0$$

$$n_0 = \frac{W_0}{S_0 + p_0}$$

Az opciót lejáratig ( $t = 1$ ) tartja, majd ha ITM pozícióban zárult az időszak, akkor lehívja, ha OTM pozícióban, akkor pedig értéktelenül lejár. Az opció lejáratának napján egyúttal az indexet is eladja<sup>4</sup>, így a befektető vagyona az  $n_0$  darab részvényindex értéke az opciós díjjal csökkentve. Természetesen ha az index értéke a kötési árfolyama alá esne, akkor a veszteséget ellensúlyozná az ITM opció értéke, így a kötési árfolyam adja meg a befektető  $t = 1$ -beli  $W_1$  vagyont:

$$W_1 = n_0 \cdot (\max(K, S_1) - p_0).$$

Az így rendelkezésre álló  $W_1$  vagyont újra teljesen elkölte a fenti módszerrel. Ez a láncolt befektetési megközelítés 10 évig tart, ennek leteltével megvizsgáljuk, hogy milyen eredménnyel járt a stratégia.

---

<sup>3</sup>Ennek mennyisége a hozamok és a kockázatok számításánál a tört termékek vásárlásának lehetősége miatt nem fontos, a kódot  $W_0 = \$1\,000\,000$ -ra írtam.

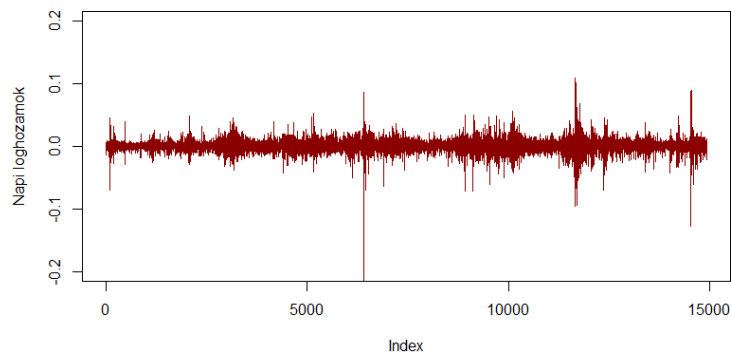
<sup>4</sup>Mivel feltettük, hogy nincsenek tranzakciós költségek, így a teljes részvénycsomag eladása módszertanilag egyszerűbb, mint a megfelelő átsúlyozás.

### 3. Az S&P 500 index modellezése

A fejezet célja, hogy az S&P 500 index ("piaci index") hozamait és árfolyamalakulását modellezze. A megfelelő modell azonosításához először a napi loghozamok statisztikai tulajdonságait vizsgálom meg.

#### 3.1. Idősor (statisztikai) tulajdonságai

A közel 60 éves vizsgált időszak során a piac átlagos napi hozama 0,047% volt 1,042%-os szórással. A rázósbab időszakok közül kiemelkedik a Fekete Hétfő, amikor egy nap alatt 22,9%-ot esett a tőzsde. A legnagyobb emelkedés a 2007-2010-es válság idejére esik, amikor egy nap 10,957%-os visszattanásnak örülhettek a befektetők.



1. ábra. Az S&P500 index napi loghozamainak időszora

Az 1. ábrán az index loghozam idősorát ábrázolom, jól követhető, hogyan követték egymást a békésebb és hullámzóbb időszakok. A grafikus illusztrációt követően a 1. és a 2. táblázatok a hozamok nevezetes kvantiliseit és momentumait összegzi.

<b>min</b>	<b>1%</b>	<b>10%</b>	<b>25%</b>	<b>50%</b>	<b>75%</b>	<b>90%</b>	<b>99%</b>	<b>max</b>
-22,90%	-2,83%	-1,05%	-0,43%	0,05%	0,52%	1,08%	2,70%	10,96%

1. táblázat. Az S&P 500 index napi loghozamainak nevezetes kvantilisei

<b>várható érték</b>	0,047%
<b>szórás</b>	1,042%
<b>ferdeség</b>	-1,019
<b>csúcsosság</b>	29,190

2. táblázat. Az S&P 500 index napi loghozamainak nevezetes momentumai

Az S&P 500 indexre is igazak a Cont által leírt stilizált empirikus tények. Ezek időtávától és

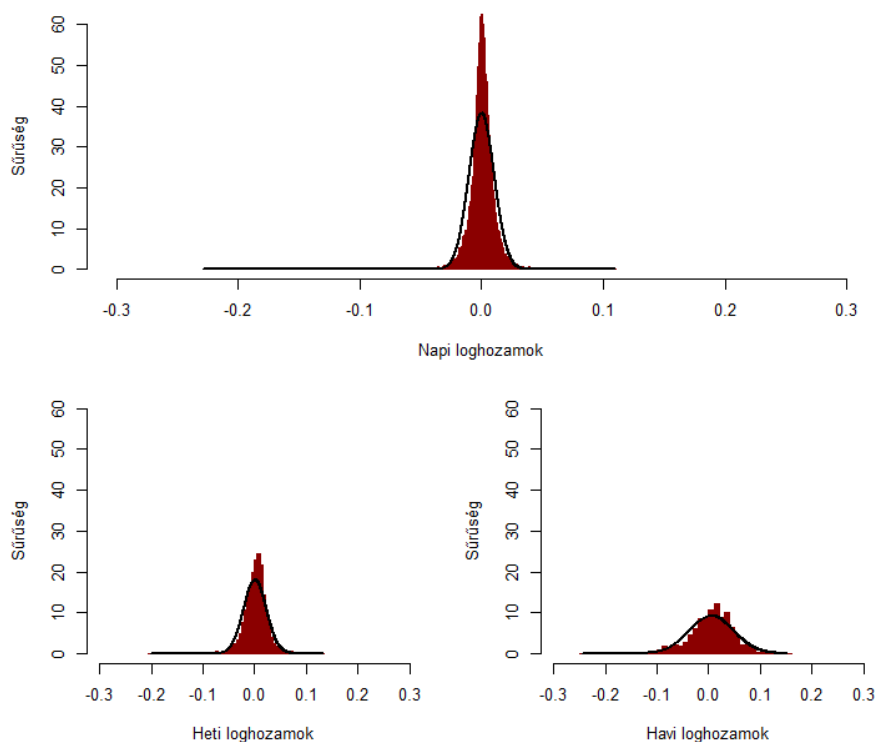


a vizsgált eszközök típusától függetlenül általánosan igazak pénzügyi idősorokra<sup>5</sup>. Az alábbiakban röviden végigveszem az elemzés szempontjából releváns stilizált tényeket, amelyek a *nyereség-veszteség aszimmetria*, a *vastag szélek*, az *aggregált normalitás*, az *autokorreláció hiánya*, a *hozamok abszolút értékeinek autokorrelációja*, a *feltételes vastag szélek* és a *tőkeáttételi hatás*. A modellezés során alapvető elvárás, hogy a modell teljesítse ezeket.

A nyereség-veszteség aszimmetria jelentése, hogy a veszteségek átlagosan nagyobbak, mint a nyereségek. Mivel a 2. táblázatból kiolvasható, hogy a napi loghozamok eloszlása negatív ferdeségű, így a nyereség-veszteség aszimmetria igaz. A negatív ferdeség megállapítható a 2/a. ábrán látható hisztogramról is, amelyen kivehető, hogy az eloszlás bal széle vastagabb.

A hozamok vastag szélű eloszlást követnek, vagyis a sűrűségfüggvényük a normálisnál csúcsosabb és a szélek súlya nagyobb. Az S&P 500 index hisztogramjára illesztett normális eloszlású görbe jól mutatja mindezt (2/a. ábra), csakúgy mint a 2. táblázat.

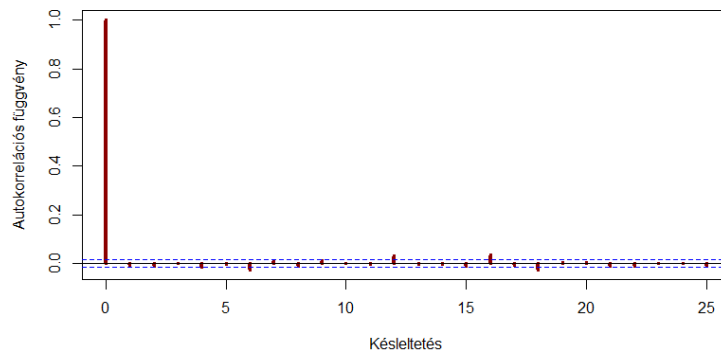
A hozam időtávjának növelésével az eloszlás általában a normálishoz közelít, azaz érvényes az aggregált normalitás. A napi, heti és havi loghozamokat egy ábrán összehasonlítva (2. ábra) grafikusan igazolható a közeledés a piaci index esetén is.



2. ábra. Az S&P 500 index a) napi, b) heti és c) havi loghozamainak eloszlása normális eloszlás illesztésével

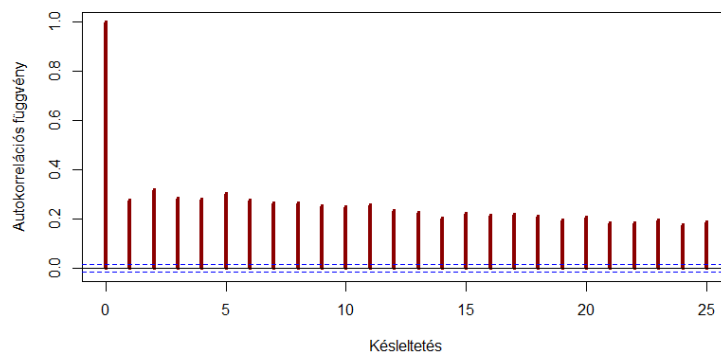
<sup>5</sup>A stilizált tények elemzésében Cont cikkére és Márkus László egyetemi előadására támaszkodom [5] [13]

Az eszközhozamok további tulajdonsága, hogy az autokorreláció inszignifikáns, kivéve a rövid, legfeljebb 20 perces időskálákat [5]. Mivel az elemzés napi loghozamokkal foglalkozik, így az autokorreláció függvény a várakozások szerint azonnal lecseng – a 3. ábrán igazolja a várakozást. A konfidencia-intervallumból enyhén kilógó értékek szakmailag nem indokolhatók, mivel nem az első értékek lógnak ki és nincs is bennük periodikus ismétlődés, így ezek figyelmen kívül hagyhatók.



3. ábra. Autokorrelációs függvény napi loghozamokra (S&P500)

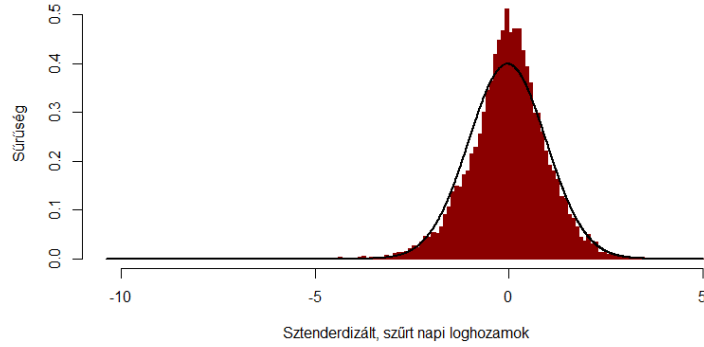
Míg az idősor nem tartalmaz autokorrelációt, a hozamok abszolút értékének autokorrelációja szignifikáns és lassan lecsengő. Ez jól követhető a 4. ábrán, ahol az első késleltetés után nagyon lassú a lecsengés, ami hosszú emlékezetű idősként interpretálható.



4. ábra. Autokorrelációs függvény a napi loghozamok négyzetére (S&P500)

A klasztereződő volatilitással korrigált hozamok eloszlása általában továbbra is vastagfarkú, de kevésbé, ezt feltételes vastag széleknek nevezzük. Az eredeti (2/a. ábra) és a korrigált (5. ábra) eloszlások közötti különbség grafikus módszerrel is jól kivehető.

Végül a tőkeáttételi hatás is érvényes az eszközhozamokra, amelynek jelentése, hogy a jövőbeli volatilitás negatívan korrelált a múltbeli hozammal. Ez intuitíven annyit jelent, hogy esés után nő, hozamemelkedés után csökken a volatilitás. A hatás vizsgálatához a napi hozamok és az azokat követő 10 nap volatilitásának korrelációját véve -0.04-es értéket kaptam, azaz a tőkeáttételi hatás egyértelműen kimutatható, de gyenge.



5. ábra. *Klasztereződő volatilitástól szűrt, sztenderdizált loghozam hisztogram*

Az S&P 500 statisztikai vizsgálata alapján olyan modellt kell felállítani, amely a megállapított tulajdonságokat vissza tudja adni, erre egy ARMA-GARCH modell lehet megfelelő.

Különösen jól visszaadhatók a hozam idősor tulajdonságai, ha a modell innovációit nem a két-paraméteres normális eloszlásból, hanem ennél összetettebb eloszlásból veszem. A következő két alfejezetben az ezek használatához szükséges elméleti alapokat mutatom be.

### 3.2. GARCH modell

Az ARMA–GARCH modellek erős eszközt nyújtanak a pénzügyi hozam idősorok vizsgálatához és az előrejelzéshez, mert meg tudják ragadni azok számos jellegzetességét.

Ebben az alfejezetben először néhány alapvető idősorelemzési definíciót adok meg. Ezek kimondását szükségesnek tartom, mert később hivatkozni fogok rájuk és az itt bevezetett jelöléseket fogom alkalmazni.<sup>6</sup> Ezután röviden bemutatom a 3.4. alfejezetben alkalmazott GARCH modell elméleti hátterét. Mivel ugyanitt rámutatok, hogy az idősor fehér zaj és ezért ARMA modellezésre nincs szükség, ezért annak leírásától eltekintek.

Egy idősorról eldönteni, hogy fehér zaj-e, a stacionaritás fogalmának bevezetésével lehetséges.

**3.1. Definíció.** Egy  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  idősor **gyengén stacionárius**, (vagy másodrendben stacionárius), ha a várható értéke valamilyen konstans, az autokovariancia pedig csak az időkülönbség függvénye, azaz eltolásinvariáns:

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \mu, & t &\in \mathbb{Z}, \\ \gamma(t, s) &= \gamma(t+k, s+k), & t, s, k &\in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

**3.2. Definíció.** Egy  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  idősor **erősen stacionárius**, ha az idősor és az eltoltja eloszlásban

<sup>6</sup>A definíciókat Embrechts et al [14] alapján mondom ki.

megegyeznek, azaz

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+k}, \dots, X_{t_n+k})$$

minden  $t_1, \dots, t_n, k \in \mathbb{Z}$ -re és minden  $n \in \mathbb{N}$ -re.

**3.3. Definíció.** Az  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  folyamat **fehér zaj**, ha gyengén stacionárius és az autokorreláció függvénye

$$\rho(h) = \begin{cases} 1, & h = 0, \\ 0, & h \neq 0, \end{cases}$$

ahol  $h$  jelöli a késleltetést. Ha  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  független, azonos eloszlású, véges varianciájú valószínűségi változók sorozata, akkor **erős fehér zajról** beszélhetünk.

A stacionaritás statisztikai tesztekkel vizsgálható. Általánosan használt próba a bővített Dickey-Fuller teszt (ADF-teszt).

**3.4. Definíció.** Az **ADF-teszt** nullhipotézise az, hogy az idősor egységgyököt tartalmaz ( $\gamma = 0$ ). Az alternatív hipotézis az, hogy a minta gyengén stacionárius ( $\gamma < 0$ ).

A tesztstatisztika Dickey-Fuller eloszlású:

$$DF_\tau = \frac{\hat{\gamma}}{SE(\hat{\gamma})}$$

A GARCH modellt a volatilitás modellezésére használhatjuk, mivel alkalmas olyan hozam idősor leírására, amelyben a volatilitás heteroszkedasztikus, tehát például klasztereződik. A GARCH folyamatok fehér zaj, de nem feltétlenül erős fehér zaj folyamatok.

**3.5. Definíció.** Egy  $X_t$  folyamat **GARCH(1,1)**, ha gyengén stacionárius és kielégíti a következő egyenleteket:

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2,$$

ahol  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\beta_1 \geq 0$  és  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ , valamint  $\varepsilon_t$  fehér zaj folyamat 0 várható értékkel és egységnyi szórással.

A GJR-GARCH a klasszikus GARCH általánosítása [8]. A segítségével lehetővé válik, hogy kezeljük a tőkeáttételi hatást, azaz a negatív hírek erőteljesebb hatását az árfolyam alakulásában. Ezt a második egyenlet második tagjának módosításával tesszük, ahol a  $\gamma$  határozza meg a tőkeáttételi hatás erősségét.

**3.6. Definíció.** Egy  $X_t$  folyamat **GJR-GARCH(1,1)**, ha gyengén stacionárius és kielégíti a kö-

vetkező egyenleteket:

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 (|X_{t-1}| - \gamma X_{t-1})^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2,$$

ahol  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_1 \geq 0$  és  $\beta_1 \geq 0$ , valamint  $\varepsilon_t$  fehér zaj folyamat 0 várható értékkel és egységnyi szórással.

A GJR-GARCH folyamat innovációjaként erős fehér zaj használata szükséges. Erre független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozatának alkalmazása a legkézenfekvőbb megoldás.

Az empirikus tények alapján megállapítható, hogy a normálisnál vastagabb szélű eloszlás szükséges az S&P 500 index modellezéséhez. Alternatívaként egy folytonos eloszlást, az általánosított hiperbolikus eloszlást (*GH eloszlás*) használom.

### 3.3. Általánosított hiperbolikus eloszlás

A GH eloszláscsalád széles körben használt a pénzügyi modellezésben. Ennek egyik oka az az előnyös tulajdonsága, hogy minden általánosított hiperbolikus eloszláshoz konstruálható olyan Lévy folyamat, hogy a folyamat értékének megváltozása tetszőleges időtávon GH eloszlású legyen.<sup>7</sup>

Az általánosított hiperbolikus eloszlás egy folytonos, hatparaméteres eloszlás, amelynek általános paraméterei megkaphatók abból a tulajdonságából, hogy a GH egy *normális középérték-variancia kevert eloszlás*,<sup>8</sup> amelynek keverő eloszlása általánosított inverz Gauss eloszlású. A következő két definíció ezt formalizálja.

**3.7. Definíció.** Az  $X$  valószínűségi változó eloszlása *egydimenziós normális középérték-variancia kevert eloszlás*, ha

$$X \stackrel{d}{=} m(W) + \sqrt{W} \sigma Z,$$

ahol

- (i)  $Z \sim N(0, 1)$ ,
- (ii)  $W \geq 0$   $Z$ -től független tetszőleges valószínűségi változó,
- (iii)  $\sigma \geq 0$  konstans, és
- (iv)  $m: [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$  mérhető függvény és

$$m(W) = \mu + W\gamma,$$

<sup>7</sup>A 3.3. alfejezetben McNeil et al (2015) és Barndorff-Nielsen et al (2001) munkáira támaszkodtam. [14] [3]

<sup>8</sup>Saját fordítás, eredeti: *normal mean-variance mixture distribution*

ahol  $\mu$  és  $\gamma$  konstans paraméterek.

**3.8. Definíció.** Az *általánosított hiperbolikus eloszlás* megkapható a 3.7. definíciót alkalmazva, ahol a keverő eloszlás

$$W \sim N^-(\lambda, \chi, \psi)$$

általánosított inverz Gauss (GIG) eloszlású. Az így kapott hatparaméteres eloszlás az itt és a 3.7. definícióban bevezetett jelölések alapján az alábbi formában írható:

$$X \sim GH(\lambda, \chi, \psi, \mu, \sigma, \gamma).$$

A GH eloszlás 3.8. definíciójában használt általános paraméterezés jól alkalmazható, ha az eloszlást egyszerűbb építőkövekből szeretnénk létrehozni, ugyanakkor a paraméterekből nem olvashatók ki könnyen az eloszlás statisztikai tulajdonságai. Erre a célra legjobban a következő paraméterezés alkalmazható

$$X \sim GH(\lambda, \delta, \alpha, \mu, \Delta = 1, \beta)$$

amely néhány egyszerű átalakítással megkapható a 3.8. definícióban felírt eredeti paraméterekből:

$$\sigma = \Delta$$

$$\beta = \frac{\gamma}{\sigma} \text{ ferdeségi paraméter}$$

$$\delta = \sqrt{\chi} \text{ skálaparaméter}$$

$$\alpha = \sqrt{\psi + \frac{\gamma^2}{\sigma}}$$

Az eloszlás sűrűségfüggvénye ekkor az új paraméterekkel zárt alakban írható

$$f_{GH}(x) = \frac{(\gamma/\delta)^\lambda}{\sqrt{2\pi}K_\lambda(\delta\gamma)} e^{\beta(x-\mu)} \frac{K_{\lambda-1/2}\left(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}\right)}{\left(\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}/\alpha\right)^{1/2-\lambda}},$$

ahol  $K_\lambda$  másodrendű módosított Bessel-függvény.

A várható érték és a variancia egyszerű formában, de szintén csak a  $K_\lambda$  másodrendű módosított

Bessel függvény segítségével adható meg:

$$\mathbb{E}(X) = \mu + \frac{\delta \beta K_{\lambda+1}(\delta \gamma)}{\gamma K_{\lambda}(\delta \gamma)}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{\delta K_{\lambda+1}(\delta \gamma)}{\gamma K_{\lambda}(\delta \gamma)} + \frac{\beta^2 \delta^2}{\gamma^2} \left( \frac{K_{\lambda+2}(\delta \gamma)}{K_{\lambda}(\delta \gamma)} - \frac{K_{\lambda+1}^2(\delta \gamma)}{K_{\lambda}^2(\delta \gamma)} \right)$$

A GH korlátlanul osztható eloszlás és zárt az affín transzformációkra. Kedvező tulajdonsága, hogy sok ismert eloszlás levezethető a speciális eseteként. Ha  $\lambda = 1$ , akkor hiperbolikus eloszlást, ha a  $\lambda = -0.5$ , akkor normális inverz Gauss (NIG) eloszlást kapunk, míg ha a  $\delta = 0$ , akkor variancia-gamma (VG) eloszlásúvá szelődül a GH eloszlás. A teljesség igénye nélkül levezethető a GH-ból továbbá a Laplace-eloszlás és  $t$  eloszlás is, az utóbbiból pedig már könnyen megkapható a normális eloszlás.

### 3.4. Modellillesztés

A cél tehát egy GH eloszlású innovációkkal meghajtott GARCH modell illesztése az S&P 500 index napi loghozam idősorára.

Az idősor nem tartalmaz autokorrelációt (3. ábra) és az ADF teszt alapján 25-ös késleltetésre 99%-os szignifikancia-szinten gyengén stacionárius,<sup>9</sup> így fehér zaj. Fehér zaj folyamat esetén ARMA modellezésre nincs szükség.

Az abszolút értékek lassan lecsengő autokorrelációja miatt (4. ábra) viszont nem erős fehér zaj az idősor, így GJR-GARCH(1,1) modellre mindenképpen szükség van. Az alábbi formában írható ekkor a modell:

$$X_t = \mu + \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 (|X_{t-1} - \mu| - \gamma(X_{t-1} - \mu))^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2,$$

ahol  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_1 \geq 0$  és  $\beta_1 \geq 0$ , valamint  $\mu$  a független átlag és  $\varepsilon_t$  általánosított hiperbolikus eloszlású erős fehér zaj folyamat nulla várható értékkel és egységnyi szórással.

A paraméterbecslést quasi-maximum likelihood módszerrel (QMLE) végzem.<sup>10</sup> Embrechts és szerzőtársai alapján a QMLE olyan esetekben alkalmazandó, ahol a GARCH modell innovációi nem Gauss eloszlásúak. Ezzel a módszerrel a folyamat paramétereit ML becsléssel, Gauss eloszlású innovációkat feltételezve határozzuk meg. Ekkor bár a aszimptotikus kovariancia mátrix megváltozik, a becslés konzisztens lesz és aszimptotikus normalitás teljesül [14].

<sup>9</sup>a  $DF_{\tau}$  értéke  $-25,292$ , a  $p$  érték  $0,01$ -nél kisebb, így 99%-os szignifikancia szinten a nullhipotézis elvethető

<sup>10</sup>A *rugarch* csomag *ugarchfit* függvénye segítségével.

A GJR-GARCH(1,1) modell paramétereire a becslés a 3. táblázatbeli értékeket adja.

$\mu$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\gamma$
0,0005	0,0000	0,0281	0,9081	0,1138

3. táblázat. A GJR-GARCH(1,1) modell paramétere

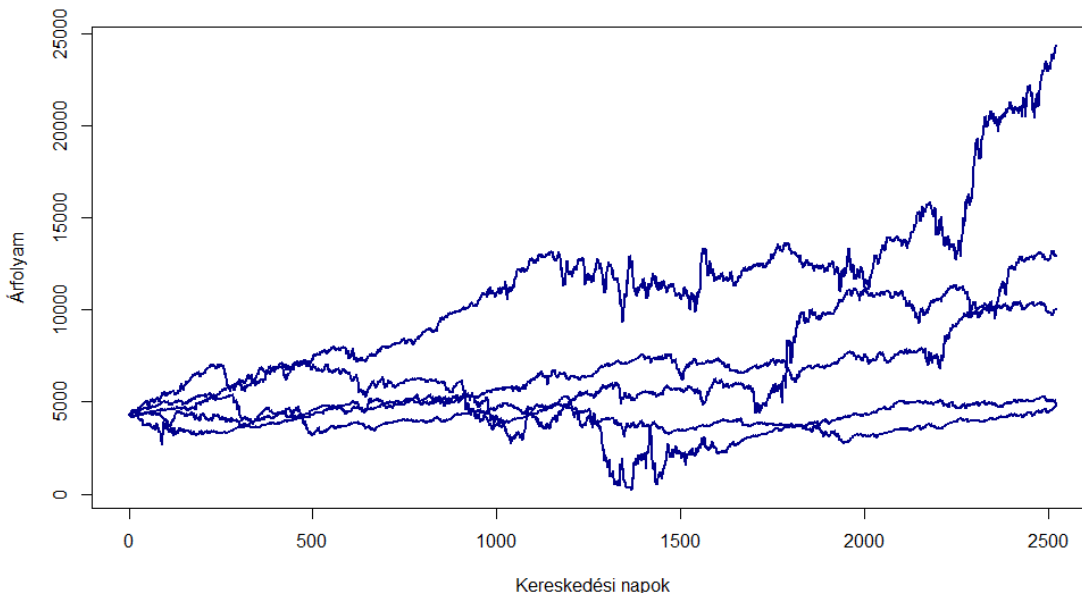
A modellt meghajtó  $\varepsilon_t$  innováció paramétere pedig az alábbiak. Rögtön észrevehető, hogy a  $\beta$ , vagyis a ferdeségi paraméter negatív.

$$\varepsilon_t \sim GH(\lambda = 2.09, \delta = 2.33, \alpha = 0.23, \mu = 0.2, \Delta = 1, \beta = -0.2)$$

Készen áll tehát a historikus adatok alapján illesztett, az S&P 500 indexet leíró modell. Mivel azonban a 4. fejezet opcióárazási modelljével szemben nem egy bevett, sokat hivatkozott módszertant alkalmaztam, így a következő szakaszban górcső alá veszem a modell teljesítményét.

### 3.5. Tesztelés

A GJR-GARCH – GH modell tesztelését grafikus módszerrel kezdem. A 6. ábrán kirajzoltam néhány néhány 10 éves trajektóriát, amelyek 2021. október 1-jén a szeptember végi záróárfolyamról indulnak. Szakmai szemmel a árfolyamok alakulása hihető, így továbblépek az empirikus tények vizsgálatára.



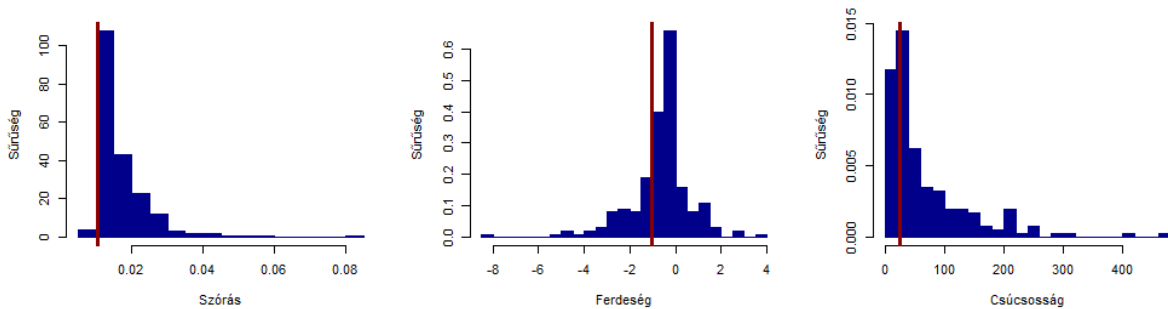
6. ábra. Néhány, 10 éves időtávra szimulált trajektória

Az idősor tulajdonságainak vizsgálatához 2 és fél millió napra futtattam a szimulációt, ami



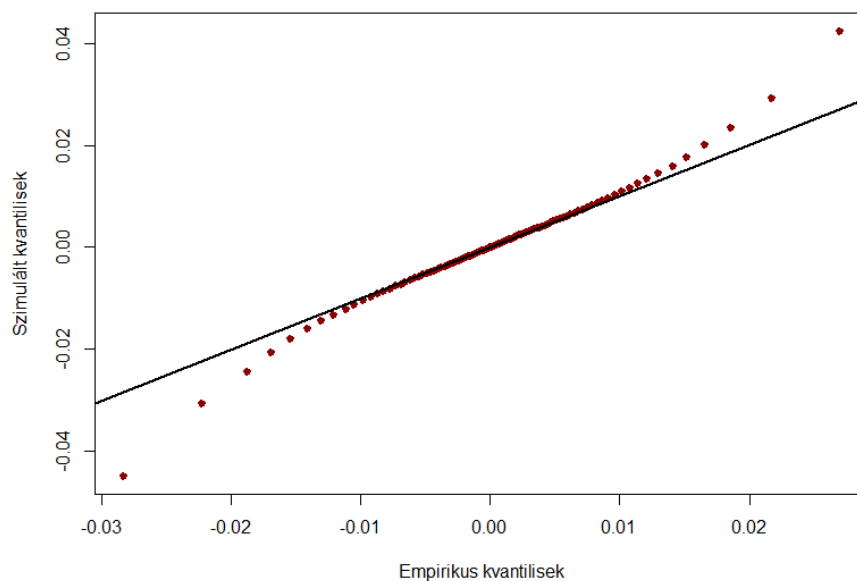
körülbelül 10 000 éves időtáv. Ez elég nagy minta ahhoz, hogy a historikus adatokat ehhez hasonlítsam és ahhoz is, hogy ha szükséges, akkor elegendő mennyiségű hosszabb időszakra is felosztható legyen.

A tesztelés második lépése a leíró statisztikák összehasonlítása, majd az empirikus tények összevetése a két adatsor esetén. A 7. ábrán a szimulációval kapott értékeket 60 éves időszakokra osztottam és ezen időszakok momentumait hisztogramon ábrázoltam. A piros függőleges vonal az 1962 és 2021 közötti időszak historikus adatainak momentumai jelöli.



7. ábra. Szimulált 60 éves időszakok loghozamainak momentumai (pirossal az S&P 500 1962 és 2021 között)

A 8. ábrán és a 4. táblázatban a historikus és szimulált idősor kvantiliseit hasonlítottam össze grafikus, és néhány nevezetes értéket kiemelve táblázatos formában.



8. ábra. QQ ábra – Múltbeli és szimulált hozamok

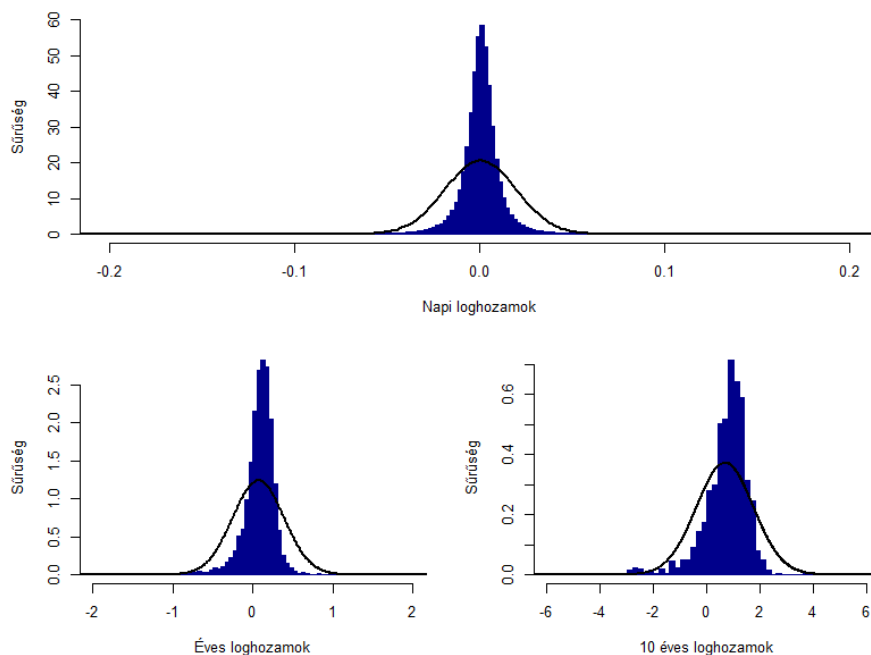
	1%	10%	25%	50%	75%	90%	99%
<b>empirikus</b>	-2,831%	-1,054%	-0,430%	0,046%	0,516%	1,078%	2,696%
<b>szimulált</b>	-4,464%	-1,122%	-0,446%	0,054%	0,539%	1,163%	4,229%

4. táblázat. Az eredeti és a szimulált index napi loghozamainak nevezetes kvantilisei

A modell által adott várható érték megegyezik a múltbeli adatsorral, napi 0,047%, viszont a szórás jelentősen nagyobb, ami a vastagabb szélekből adódik. A ferdeség a modellben is negatív, ezáltal a nyereség-veszteség aszimmetriát jól visszaadja a modell. A csúcsosság szintén a várakozásoknak megfelelően szinte minden mintában sokkal magasabb a normális eloszlásra jellemző értéknél.

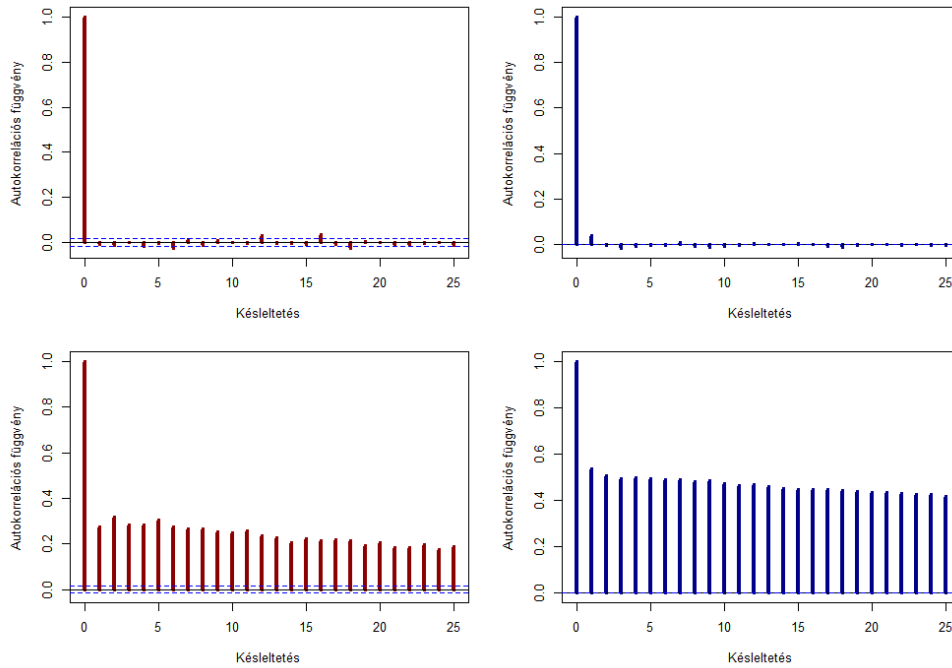
Ahogy a momentumokból látható volt, a kvantilisek is mutatják, hogy a modell jól megragadja a vastag széleket, sőt még az empirikus adatoknál is vastagabb a szimulált loghozam eloszlás (4. táblázat és 8. ábra).

A 9. ábrán látható, hogy az időtáv növelésével a szimulált adatok is tartanak, igaz az eredetinél lassabban a normális eloszláshoz, így az aggregált normalitás részben teljesül.



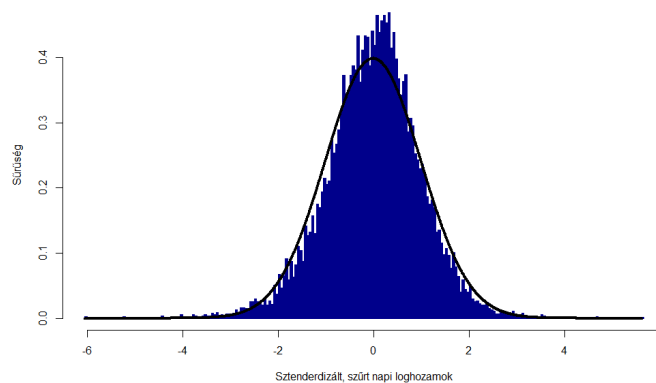
9. ábra. A szimulált hozamok eloszlása a) napi, b) éves és c) tízéves időtávon

Az autokorreláció hiánya nem teljesül maradéktalanul. Bár a szimulált adatsor sokkal több adatpontból áll, így nagyon szűkek a konfidencia intervallumok, az első késleltetésre a függvény értéke egyértelműen kilóg a tartományból. Az erősebb autokorreláció az alsó ábrán is látszik. Ez az ábra mutatja továbbá, hogy az abszolút értékek autokorrelációja lassan lecsengő, ez megfelel az eredeti adatoknak.



10. ábra. Az eredeti (piros) és a szimulált (kék) hozamok autokorrelációi (fent) és abszolút értékű autokorrelációi (lent)

A feltételes vastag szélek teljesülnek, mivel a korrigált hozameloszlás közel normális, de annál vastagabb farkú eloszlás (11. ábra).



11. ábra. Klasztereződő volatilitástól szűrt, sztenderdizált loghozam hisztogram a szimulált hozamokra

A tőkeáttételi hatásért a GJR-GARCH modell  $\gamma = 0,11$  paramétere felel. A modelltől szimulált hozamokra  $-0,0024$ -es értéket kaptam, ami gyenge tőkeáttételi hatást mutat. A relatív gyengeség oka, hogy a modell volatilitás tagjában az előző időszak volatilitás súlya  $\beta_1 = 0,9081$ , míg az előző időszak hozamé (amit korrigálok a tőkeáttételi hatás paraméterével) csupán  $\alpha_1 = 0,0281$ .

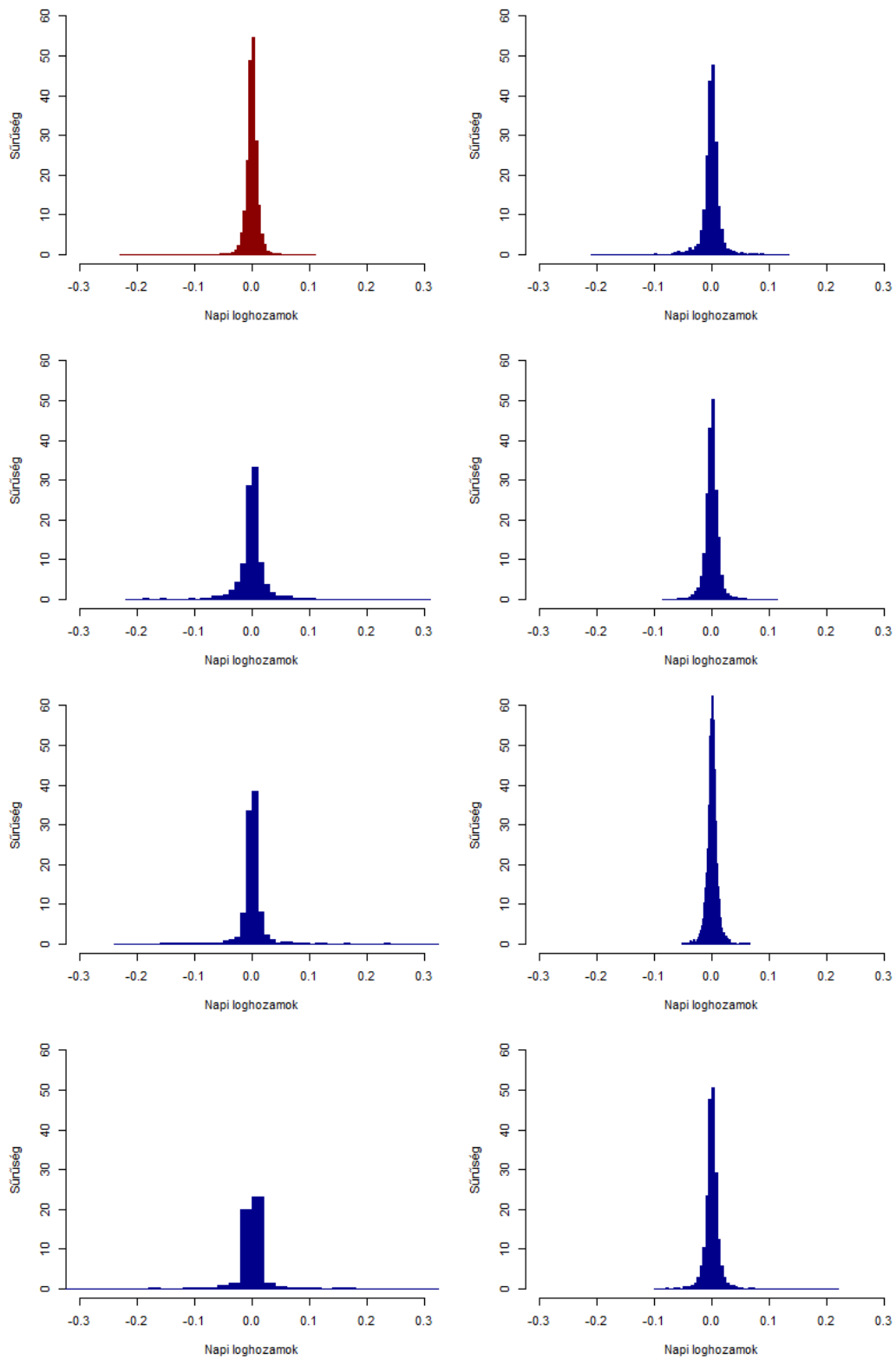
### 3.6. Értékelés

A kapott modell összesen 10 paraméterrel dolgozik, 5 a GJR-GARCH modellben és 5 az GH eloszlású innovációnál. A szimulált adatsor a grafikus és numerikus teszteken jól szerepelt, az empirikus tényeket jól visszaadja. Az elsőrendű autokorreláció jelenléte és a vártnál vastagabb szélek ugyanakkor nem elhanyagolhatók, a modell használatakor figyelembe kell venni ezek hatását az elemzés eredményére.

A vastag szélekhez ugyanakkor egy gyakorlati közgazdasági megjegyzést kell tenni. Ha feltételezzük, hogy létezik egy, a *valóságot generáló háttérmodell*, ami természetesen számunkra ismeretlen, az jó eséllyel vastagabb szélű, mint amit az elmúlt 60 évben az S&P500 indexre generált, és közelebb lehet az illetett modellhez, mint az elmúlt 60 év empirikus adataihoz. Az 1962 óta tartó időszak, bár számos külső és belső sokk okozott turbulenciákat, az amerikai nagyvállalatok számára virágzó időszak volt.

Ha a következő 60 évre tekintek, elképzelhetőnek tartok hasonlóan kedvező alakulást, de a jelenlegi szakmai ismereteimmel mégis valamivel vastagabb farkú, nagyobb volatilitású napi loghozam idősort jósolnék. Ennek két fő okát látom.

Először, a versenytárs országok felzárkózása az Egyesült Államokhoz, ami kiélezettebb versenyt fog hozni a gazdasági szereplők között és kiszámíthatatlanabb üzleti környezetet, növekvő kockázatokat a politika oldaláról. Másodsor, az értékpapírpiacokra való belépés korlátai várhatóan tovább csökkennek, így a kereskedésben részt vevő szereplők átlagos szakértelme csökken, ami volatilisabb árfolyamalakulást okozhat.



12. ábra. A historikus S&P 500 napi loghozam eloszlásának (piros) összehasonlítása szimulált adatsorokkal (kék)

## 4. Európai put opció árazása

### 4.1. A Black-Scholes formula korlátai

Egy európai put opció árazásának legegyszerűbb módja a Black-Scholes formula alkalmazása, amely öt paramétert használ és vele zárt alakban megadható az ár. A formula által adott ár pontos, ha néhány feltevés érvényesül.

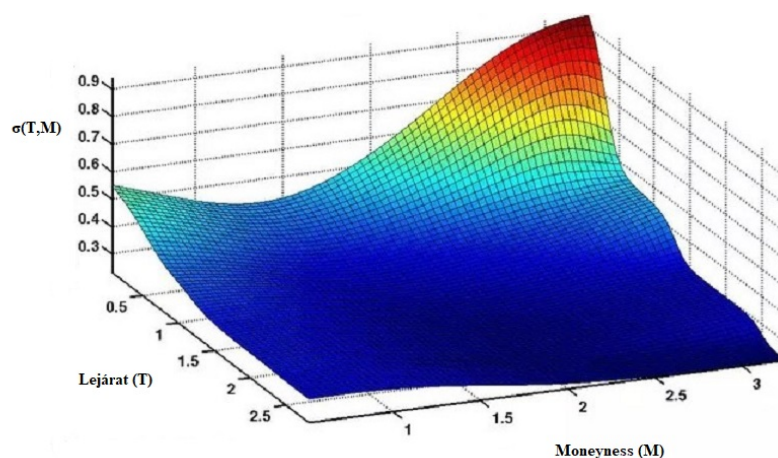
A Black-Scholes modell felteszi, hogy a részvényárfolyam dinamikáját geometriai Brown mozgás írja le:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW,$$

ahol  $\mu$  és  $\sigma$  konstans. Szükséges továbbá, hogy a kereskedés folytonos legyen, engedélyezve legyen a rövidre eladás, ne legyenek tranzakciós költségek, adók, valamint a derivatíva futamideje alatt osztalékok, az értékpapírok tökéletesen oszthatók legyenek. Nem lehet a piacon kockázatmentes arbitrázslehetőség. Az  $r$  kockázatmentes kamatláb konstans legyen minden lejáratra, azaz vízszintes legyen a hozamgörbe [9].

A valós piacokon ezek a feltételek nem, vagy csak részben teljesülnek, így a modell egyszerűsítéseinek ára a pontatlanság. Az empirikus adatokat vizsgálva két jelenség azonosítható, a volatilitás mosoly és a ferdeségi felár [12].

A volatilitás mosoly azt jelenti, hogy a kötési árfolyamtól távolodva az ITM és OTM opcióknál az implikált volatilitás megnő, holott a Black-Scholes formula szerint konstansnak kéne lennie. A ferdeségi felár azt jelenti, hogy a Black-Scholes formulát alkalmazva alulárzott put árakat kapunk a callhoz képest, azaz a volatilitás mosoly a kötési árfolyammal lejt (volatilitás grimasz). A két jelenség megfigyelhető egy általános példán a 13. ábrán [1], ahol egy harmadik változó, a lejáratig hátralévő futamidő is megjelenik.



13. ábra. Példa a volatilitás felületre

Az elemzésemhez egy olyan összetettebb modellt használok, amelyben külön paraméterrel tudom kezelni a ferdeséget és a csúcosságot, így kiigazítva a Black-Scholes modell gyengeségeit. Ez a Madan és szerzőtársai által bevezetett opcióárazási megközelítés, amely az árfolyamok logaritmusát driftes Wiener folyamat helyett Variancia Gamma folyamattal modellezi és erre ír fel egy, a Black-Scholes képletre hasonlító szemianalitikus formulát, ami a Carr – Madan formulával adja meg az opcióárat. A modell kedvező tulajdonsága, hogy a Black-Scholes modell ennek egy paraméteres speciális esete [4] [12].

A modellen alapuló opcióárazás konzisztens a piacon megfigyelhető árakkal annak ellenére, hogy a loghozamok független növekményűsége miatt a volatilitás klasztereződését az alaptermekre felírt dinamika nem tudja előállítani.

## 4.2. Variancia Gamma folyamat

A Variancia Gamma folyamat alap építőkövei az aritmetikai Brown mozgás és a gamma folyamat. Intuitíven úgy írható le, hogy egy aritmetikai Brown mozgásra gamma eloszlású véletlen időközönként tekintünk rá. A nevét is innen kapta, a normális eloszlás konstans volatilitás tagját gamma eloszlásra cseréljük. A folyamat matematikai alapjait a következő négy definícióval mutatom be, amelyek kimondása a továbbiakban használatos egységes jelölést is szolgálják.<sup>11</sup>

**4.1. Definíció (Gamma folyamat).** *A gamma folyamat olyan 0-ból induló, független növekményű, tiszta ugró, sztochasztikus Lévy folyamat, amely növekményei gamma eloszlásúak.*

A folyamat jelölése  $\Gamma(t; \gamma, \lambda)$ , ahol  $\gamma$  felel az ugrások gyakoriságáért,  $\lambda$  pedig fordítottan arányos az ugrásnagyságokkal. A továbbiakban viszont nem ezt, hanem egy alternatív, de gyakran használt paraméterezés alkalmazok:  $\Gamma(t; \mu, \nu)$ . Ez a 4.1. definícióból a következő helyettesítésekkel kapható meg:  $\gamma = \frac{\mu^2}{\nu}$  és  $\lambda = \frac{\mu}{\nu}$ .

### 4.2. Definíció (Gamma folyamat tulajdonságai).

1. *Mivel a gamma eloszlás a pozitív félsíkon értelmezett, így a gamma folyamat monoton növekvő. Mivel monoton növekvő Lévy folyamat, így időskála folyamat.*
2. *Intenzitás mértéke:  $\nu(x) = \gamma x^{-1} \exp(-\lambda x)$ .*
3. *Az  $[x, x + dx)$  mérettartományba eső ugrások száma  $\nu x dx$  intenzitású Poisson-folyamatot követnek.*

**4.3. Definíció (Variancia Gamma folyamat).** *Az  $X(t)$  Variancia Gamma folyamat egy háromparaméteres tiszta ugró Lévy folyamat, amely megkapható idő-átskálázott driftes Brown*

<sup>11</sup>Az alfejezetben megadott definíciók alapjául [2] [12] és [13] szolgált.

mozgásként

$$X(t) = \theta Y(t) + \sigma W(Y(t)),$$

ahol  $Y(t) = \Gamma(t; 1, \nu)$  gamma időskála folyamat.

#### 4.4. Definíció (A Variancia Gamma folyamat tulajdonságai).

1. Végtelen aktivitású, de korlátos változású folyamat.
2. Az általánosabb CGMY folyamatosztály tagja, amely azon temperált stabilis folyamatokat tartalmazza, melyeknek létezik reprezentációja átskálázott Brown mozgásként.
3. A paraméterekkel a centrális momentumok kontrollálhatók, igaz nem közvetlenül:  $\sigma$  a volatilitást,  $\theta$  a ferdeséget ( $\theta = 0$  esetén nincs ferdeség), míg a  $\nu$  a csúcsosságot befolyásolja.

$$\mathbb{E}[X(t)] = \theta t$$

$$\mathbb{E}[(X(t) - \mathbb{E}[X(t)])^2] = (\theta^2 \nu + \sigma^2)t$$

$$\mathbb{E}[(X(t) - \mathbb{E}[X(t)])^3] = (2\theta^3 \nu^2 + 3\sigma^2 \theta \nu)t$$

$$\mathbb{E}[(X(t) - \mathbb{E}[X(t)])^4] = (3\sigma^4 \nu + 12\sigma^2 \theta^2 \nu^2 + 6\theta^4 \nu^3)t + (3\sigma^4 + 6\sigma^2 \theta^2 \nu + 3\theta^4 \nu^2)t^2$$

#### 4. Sűrűségfüggvény:

$$f_{X(t)}(X) = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi g}} \exp\left(-\frac{(X - \theta g)^2}{2\sigma^2 g}\right) \frac{g^{\frac{t}{\nu}-1} \exp\left(-\frac{g}{\nu}\right)}{\nu^{\frac{t}{\nu}} \Gamma\left(\frac{t}{\nu}\right)} dg$$

#### 5. Karakterisztikus függvény:

$$\phi_{X(t)}(u) = \mathbb{E}\left(e^{iuX(t)}\right) = \left(\frac{1}{1 - i\theta \nu u + \left(\frac{\sigma^2 \nu}{2}\right)u^2}\right)^{\frac{t}{\nu}}$$

#### 6. Ito-Lévy dekompozíció:

$$X(t) = t\mathbb{E}(X(1)) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x(\mu - k)(ds, dx),$$

ahol  $\mu$  az ugrásmérték,  $k$  a Lévy-mérték.

#### 7. Lévy-mérték:

$$k_X(x)dx = \frac{\exp\left(\frac{\theta x}{\sigma^2}\right)}{\nu|x|} \exp\left(-\frac{\sqrt{\frac{2}{\nu} + \frac{\theta^2}{\sigma^2}}|x|}{\sigma}\right) dx$$



### 4.3. Alaptermék árfolyamalakulása

Az alaptermék logaritmusát a Black-Scholes modellben driftes Wiener folyamattal adjuk meg, ezt most Variancia Gamma folyamatra cseréltem. Az árfolyamalakulást így geometriai Brown mozgás helyett exponenciális Variancia Gamma folyamat fogja leírni [11] [12] [13]:

$$S(t) = S(0) \exp(Z(t)) = S(0) \exp(mt + X(t; \sigma, \nu, \theta) + \omega t),$$

ahol az  $\sigma$ ,  $\nu$ ,  $\theta$  a Variancia Gamma folyamat paraméterei,  $m$  a várható hozam,  $\omega$  pedig egy kompenzációs tag, amely biztosítja a martingál tulajdonságot és megkapható a karakterisztikus függvény  $u = 1/i$  helyen vett kiértékelésével

$$\omega = \frac{1}{\nu} \ln \left( 1 - \theta \nu - \frac{\sigma^2 \nu}{2} \right).$$

Ekkor a folyamat  $t$  helyen vett várható értéke

$$\mathbb{E}(S(t)) = S(0) \exp(mt),$$

az áralakulás logaritmusának karakterisztikus függvénye pedig

$$\varphi_T(u) = \exp \left( \log(S_0 + (r + \omega)T) (1 - i\theta \nu u + \sigma^2 u^2 \frac{\nu}{2}) \right)^{-\frac{T}{\nu}}$$

Az  $X(t)$  folyamat paramétereit Nelder és Mead optimalizáló algoritmusával határoztam meg [16], amivel a következő paramétereket kaptam:<sup>12</sup>

$$m = 0,00071, \sigma = 0,01158, \theta = -0,00047, \nu = 1,63558.$$

A várakozásoknak megfelelően a negatív  $\theta$  a negatív ferdeséget, a 0-nál nagyobb  $\nu$  pedig a normális eloszlásnál jelentősen nagyobb csúcsosságot mutatja.

### 4.4. Árazás gyors Fourier transzformációval (FFT)

Az európai opció árazásának elve a szokásos, meg kell keresni azt a  $Q$  martingálmértéket, amely mellett a diszkontált értékfolyamat martingál. (Mivel egy Lévy folyamattal adott piac nem teljes, így sok ilyen  $Q$  mértéket találhatunk.) Ekkor a diszkontált kifizetésfüggvény  $Q$  szerinti várható értéke adja meg az opció árát:

$$C(K, T) = e^{-rT} \mathbb{E}_Q[\max(S(T) - K, 0)].$$

---

<sup>12</sup>A *VarianceGamma* csomag *vgFit* függvénye segítségével.

Ha ismert a  $Q$  kockázatmentes mérték alatti  $\phi(u)$  karakterisztikus függvény, akkor Madan és szerzőtársai [12] alapján európai opció ára megkapható a jól ismert Black Scholes-jellegű formulából

$$C(K, T) = S(0)\Pi_1 - Ke^{-rT}\Pi_2,$$

ahol  $\Pi_1$  a delta és  $\Pi_2$  a valószínűsége annak, hogy az opció a lejáratkor ITM:

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left( \frac{e^{-iu \ln(K)} \phi_T(u-i)}{iu \phi_T(-i)} \right) du$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left( \frac{e^{-iu \ln(K)} \phi_T(u)}{iu} \right) du.$$

A  $Q$  meghatározásának legegyszerűbb módja az Esscher-transzformáció. A kapott formula numerikus módszerekkel történő kiértékelésével megkapható a call ár. Ez azonban számításigényes, lassú. Az elemzésem során több mint egymillió opcióárat számolok ki, ehhez jelent megoldást a gyorsabb, FFT-vel történő árazás.

A gyors Fourier transzformációval történő árazáshoz azonban egy másik, a *közép korrekciós martingálmértékre* építő megközelítést alkalmazok. Ezzel egy diszkontált értékfolyamat martingállá alakítható úgy, hogy egy  $X_t$  Lévy folyamathoz egy megfelelő konstans driftet adunk, ez Schoutens [11] [21] alapján megkapható a következő azonossággal

$$m' = r - \ln \phi(-i)$$

Ekkor a  $X_t$  folyamat és a hozzá tartozó  $\phi(u)$  karakterisztikus függvény helyett  $\tilde{X}_t$ -t és  $\tilde{\phi}(u)$ -t kapjuk:

$$\tilde{X}_t = X_t + m't$$

$$\tilde{\phi}(u) = \phi(u) \exp(ium')$$

A levezetés további részében Iacus könyvére támaszkodom, amely elsősorban Madan és szerzőtársai, illetve Carr és Madan cikkeit veszi alapul az opcióárazáshoz [4] [11] [12]. Legyen tehát  $\phi(u)$  az árfolyam logaritmusának karakterisztikus függvénye

$$\phi(u) = \mathbb{E}[\exp(iu \ln(S(T)))],$$

Bevezetem a következő jelöléseket. Legyen  $k = \ln K$ ,  $s_T = \ln(S(T))$ , jelölje  $C_T(k)$  a  $T$ -ben lejáratú,  $\exp(k)$  lehívási árfolyamú call opció árát  $T$ -ben, végül  $q_T$  az ekvivalens martingálmérték sűrűségfüggvényét.

Ekkor  $q_T$  karakterisztikus függvénye

$$\phi_T(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{ius} q_T(s) ds,$$

és

$$C_T(k) = \int_k^{\infty} e^{-rT(e^s - e^k)} q_T(s) ds.$$

Mivel a jobboldal négyzetesen nem integrálható, egy  $\alpha$ -tól függő exponenciális tompító tényező bevezetésével tesszük azzá:

$$c_T(k) = e^{\alpha k} C_T(k).$$

Ekkor  $c_T(k)$  karakterisztikus függvénye

$$\psi_T(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iuk} c_T(s) dk.$$

A következő lépés, hogy kifejezzük  $C_T(k)$ -t  $\psi_T(u)$ -val:

$$C_T(k) = \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-iuk} \psi_T(u) du, \quad (1)$$

végül az itt szereplő  $\psi$ -t kifejezzük  $\phi$ -vel, így már alkalmazható lesz az FFT algoritmus  $C_T(k)$ -ra:

$$\psi_T(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iuk} \int_k^{\infty} e^{\alpha k} e^{-rT(e^s - e^k)} ds dk = \frac{e^{-rT} \phi_T(u - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - u^2 + i(2\alpha + 1)u} \quad (2)$$

Egy ismeretlen, az  $\alpha$  meghatározása maradt hátra. Ha  $\alpha = 0$ , akkor  $c_T(k) = C_T(k)$ , így ez alsó korlát. A felső korlát meghatározható (2) egyenletből és az alábbi feltételből

$$\mathbb{E}[S_T^{\alpha+1}] < \infty.$$

Madan és szerzőtársainak javaslata az volt, hogy a felső korlát negyede egy jó választás  $\alpha$  értékére.

Az árazás numerikus implementációja során szintén Madan és szerzőtársainak levezetését követem, akik az átláthatóság kedvéért az (1) egyenletre mutatták be az implementációt. Ebbe kell még utólag behelyettesíteni a  $\psi$  értékét.

A trapéz szabály alapján (1) közelíthető:

$$C_T(k) \approx \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-iv_j k} \psi_T(v_j) \eta, \quad (3)$$

ahol  $v_j = \eta(j-1)$ .  $k$  az alábbi értékeket veheti fel:

$$k_u = -b + \lambda(u-1), \quad u = 1, \dots, N,$$

ahogy a  $k$  értékei  $-b = -0.5N\lambda$  és  $b = 0.5N\lambda$  között lehetnek  $\lambda$  nagyságú lépésközökkel. Ezeket behelyettesítve (3)-be a

$$C_T(k_u) \approx \frac{e^{-\alpha k_u}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i\lambda\eta(j-1)(u-1)} e^{ibv_j} \psi_T(v_j) \eta \quad (4)$$

egyenletet kapjuk.

Végül az FFT transzformációhoz szükséges

$$\lambda\eta = \frac{2\pi}{N}$$

feltétel behelyettesítésével és a Simpson-módszerrel<sup>13</sup> megkapjuk a végső alakot:

$$C_T(k_u) \approx \frac{e^{-\alpha k_u}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}j} e^{ibv_j} \psi_T(v_j) \frac{\eta}{3} (3 + (-1)^j - \delta_{j-1}), \quad (5)$$

ahol  $\delta_0 = 1$  és minden egyéb esetben  $\delta = 0$ .

A levezetést összefoglalva az árazó algoritmus működése hat lépésben a következő:

1. Bemeneti paraméterek:  $S_0, K, r, T, \phi(u), \theta, v$  és  $\sigma$ .
2. Egyéb köztes paraméterek:  $\alpha = 1, N = 2^{12}$  és  $\eta = 0,25$ .
3. A közép korrekciós transzformáció alkalmazása.
4. A transzformált  $\tilde{\phi}(u)$  karakterisztikus függvényből  $\psi(u)$  kiszámolása.
5. A  $\psi(u)$  behelyettesítésével kapott kifejezés invertálása az R *fft* (gyors Fourier transzformáció) függvényével.
6. Kimeneti paraméter:  $C_T$  call ár.

A call árból ezután könnyen megkaphatók a számomra érdekes put árak a put-call paritás segítségével:

$$C_T + e^{-rT}K - S = P_T$$

---

<sup>13</sup>

**4.5. Definíció** (Simpson-módszer).  $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$

## 5. Stratégiák teljesítménye

A szakdolgozat kutatási célja egy piaci részvényportfólió kockázatának csökkentése. A fejezetben bemutatom, hogy az előző két fejezet modelljeit felhasználva a különböző stratégiák milyen mértékben képesek ezt a célt megvalósítani és ezért mekkora hozamról kell lemondania a befektetőnek.

Az összehasonlítás alapjául a piaci index szolgál, továbbá a stratégiák teljesítményét egymáshoz is hasonlítom. A hozam és a kockázati mértékek értékeit a szimulált adatokból, historikus módszerrel kapom meg.

### 5.1. Hozam

Az opciós díjak levonása utáni éves loghozamok terén máris nagy eltérés van az egyes stratégiák között. A kockázat teljes kiküszöbölése, azaz szintbeli put opció vásárlása mindhárom futamidő esetén jelentősen rontja, nagyjából a felére csökkenti hozamot, ezek vásárlása nem termeli ki az opció magas árát.

A mérsékelt és mély put opciók esetén a futamidő rövidítésével javul a teljesítmény, a havi opciók hozama alig marad el a piaci portfóliótól. Az eredményeket az alábbi táblázatban foglaltam össze:

STRATÉGIA	ÉVES HOZAM
Egyhónapos opció – Szintbeli put	5,03%
Egyhónapos opció – Mérsékelt put	11,45%
Egyhónapos opció – Mély put	11,37%
Negyedéves opció – Szintbeli put	5,58%
Negyedéves opció – Mérsékelt put	9,96%
Negyedéves opció – Mély put	9,72%
Éves opció – Szintbeli put	6,25%
Éves opció – Mérsékelt put	8,68%
Éves opció – Mély put	8,30%
S&P 500 index	11,88%

5. táblázat. A put stratégiák hozamai a benchmark indexhez hasonlítva

### 5.2. Kockázat

A kockázat különböző dimenzióit a kockázati mértékek segítenek egy számmal megragadni. Mivel nincs olyan mutató, amely a kockázat minden aspektusát kifejezi és egyúttal egyszerű is, így érdemes több metrikát alkalmazni. Az elemzésem a kockázatot a szórással, a kockázatotott értékkel, a várható alsóági veszteséggel és a maximális visszaeséssel méri.

A kockázati mértékekkel szembeni követelmény, hogy teljesítsék a koherencia kritériumokat: a monotonitást, szubadditivitást, a pozitív homogenitást és a translációs invarianciát, illetve azt az alapfeltételt, hogy az üres portfólió kockázata zérus legyen.

A spektrális kockázati mértékek a kockázati mértékek általánosításai, ahol a veszteségeloszlást egy tetszőleges kockázatkerülési függvénnyel transzformáljuk. Ha a kockázatkerülési függvény a nagyobb veszteség felé haladva monoton nő, akkor a kockázati mérték biztosan koherens.

A következőkben megvizsgáltam, hogy az egyes kockázati mértékek szerint mennyire tudta csökkenteni a put opció a befektetés kockázatát. Várhatóan a legtöbb esetben csökkenni fog a kockázat, azonban előfordulhatnak olyan esetek, amikor az opciós díj okozta *veszteség* miatt nem ez történik.

A *szórás* a leggyakrabban használt kockázati mutató, a volatilitás mérésének általános eszköze. Míg a variancia nem koherens, mert nem teljesíti a pozitív homogenitás és a szubadditivitás feltételét, addig a szórás koherens. Hátránya, hogy szimmetrikus, így nem képes megkülönböztetni a befektető számára kedvező és kedvezőtlen árfolyammozdulások hatásait.

A várakozásoknak megfelelően az összes stratégia csökkenti a szórással mért kockázatot, mivel a put opció kötési árfolyama alá eső kimeneteleknél kiküszöböli változékonyságot, miközben a többi megfigyelés értéke nem módosul. Szintén magától értetődő, hogy a mély felől a szintbeli put felé haladva a kockázat csökken. Kivételt jelentenek a havi opciók, ahol a gyakrabban esedékes opciós díjak gyakran veszteségbe fordítják a portfólió teljesítményét, ha az index nem emelkedett eléggé.

STRATÉGIA	ÉVES SZÓRÁS
Havi opció – Szintbeli put	25,55%
Havi opció – Mérsékelt put	25,15%
Havi opció – Mély put	24,94%
Negyedéves opció – Szintbeli put	18,16%
Negyedéves opció – Mérsékelt put	20,13%
Negyedéves opció – Mély put	21,54%
Éves opció – Szintbeli put	16,25%
Éves opció – Mérsékelt put	19,50%
Éves opció – Mély put	21,77%
S&P 500 index	32,19%

6. táblázat. A put stratégiák szórásai a benchmark indexhez hasonlítva

A szórás alapján az éves és a negyedéves szintbeli eladási opciós stratégiák a legkevésbé kockázatosak, az S&P 500 indexhez képest közel felére csökkentették a kockázatot, míg a legkevesebb segítséget a havi opciókra építő stratégiák nyújtják.

A *kockázatotott érték* (*Value at Risk, VaR*) a szórással szemben, ami szimmetrikus kockázati

mérték, a lehetséges veszteségek felől közelíti meg a kockázatot. Megmutatja, hogy mi az a mennyiség, amelynél egy befektetés adott konfidenciaszinten és időtávon, normál piaci körülmények között nem fog többet veszíteni [10].

Kvantitatív módszereket alkalmazó pénzügyi szakemberek már az 1980-as évek előtt is alkalmazták a VaR-hoz hasonló mutatókat, amelyekkel a veszteségeloszlás szélét igyekeztek egy számmal megragadni. A szakma széleskörben az 1987-es Fekete Hétfő után kezdte alkalmazni a megközelítést. A VaR mutató sztenderdizált alkalmazása a J.P.Morganhez köthető. A bank elnöke bonyolult napi kockázati riportok helyett egy számot várt a bank összesített kockázatáról [10]. A VaR hamarosan, a Basel II-től kezdve a szabályozások alapkövévé vált először a piaci kockázatok, majd a kockázatkezelés minden területén.

A metrika előnye az egyszerűségében rejlik, ugyanakkor hátránya, hogy a küszöb feletti veszteségekről nem mond semmit, továbbá nem is koherens kockázati mérték, mert nem teljesíti a szubadditivitás feltételt. Ez azt az anomáliát okozza, hogy olykor a diverzifikáció növeli a VaR-ral mért kockázatot, ami természetesen életszerűtlen. A spektrális mértékek definíciójából is levezethető a koherencia hiánya, ugyanis a VaR felfogható úgy, hogy a veszteségeloszlást egy olyan kockázatkerülési függvénnyel transzformáljuk, amelynél a teljes súly a megadott VaR küszöbre esik, minden más esetben pedig zérus – ez természetesen nem monoton függvény.

Mivel a put opció a veszteségeloszlás szélét vágja le, így a kapott VaR érték szinte minden esetben kedvezőbb a benchmark indexhez képest. A legjobb teljesítményt a szintbeli opciók nyújtották, amelyek akár 8 – 12%-ra csökkentették a 95%-os konfidenciaszinten várható veszteséget, ami látványos eredmény és nagy könnyebbséget nyújthat a befektetőnek. Ezalatt az éves futamidejű mély put opció a VaR szerint semmilyen védelmet nem nyújt.

<b>STRATÉGIA</b>	<b><math>VAR_{95\%}^{1év}</math></b>
<b>Havi opció – Szintbeli put</b>	11,81%
<b>Havi opció – Mérsékelt put</b>	11,94%
<b>Havi opció – Mély put</b>	17,16%
<b>Negyedéves opció – Szintbeli put</b>	9,98%
<b>Negyedéves opció – Mérsékelt put</b>	14,63%
<b>Negyedéves opció – Mély put</b>	20,29%
<b>Éves opció – Szintbeli put</b>	8,11%
<b>Éves opció – Mérsékelt put</b>	23,03%
<b>Éves opció – Mély put</b>	27,45%
<b>S&amp;P 500 index</b>	27,44%

7. táblázat. A put stratégiák éves  $VAR_{95\%}^{1év}$  értékei a benchmark indexhez hasonlítva

A várható alsóági veszteség (*expected shortall, ES*) a VaR-hoz hasonlóan a veszteségeloszlás szélét vizsgálja. Megmutatja, hogy mekkora veszteséget szenved el egy befektetés adott

időtávon, normál piaci körülmények között, feltéve hogy a veszteség elér egy megadott küszöbértéket. Az  $ES_{95\%}^{1\text{év}}$  kifejezés jelentése tehát az, hogy egyéves időtávon, a veszteségeloszlás legrosszabb 5%-át tekintve várhatóan átlagosan mekkora veszteséget kell elkönyvelnie a befektetésnek [10].

Az ES előnye a VaR-ral szemben, hogy az eloszlás széléről pontosabb képet ad, ráadásul koherens kockázati mérték. A kockázatkerülési függvény monoton növekvő, hiszen a veszteségeloszlás alsó 95 percentilisében zérus, a legmagasabb 5 percentilisében pedig nullánál nagyobb konstans. A Basel III szabályozás a piaci kockázatokra VaR helyett már ES alapú kockázatmérést ír elő [10].

Az ES mutató alapján az S&P 500 index a kimenetek legrosszabb 5%-ában, loghozammal számolva átlagosan 73,65%-os veszteséget ér el egyéves időtávon, azaz az értékének több mint felét elveszíti:

$$S_1 = S_0 \cdot \exp(-r) = 100 \cdot \exp(-0,7365) = 47,88.$$

Ehhez képest a put opciók a kockázatot kivétel nélkül jelentősen mérséklék, sőt az éves szintbeli opció esetén akár tizedére csökkenti. A legjobb teljesítményt a várakozásoknak megfelelően a szintbeli opciók hozzák, a leggyengébbet pedig a hosszabb futamidejű mély put opciók.

Érdekes megfigyelni a 8. táblázatban, hogy az éves szintbeli opció esetében megegyezik a VaR és az ES mutató értéke, itt a kimenetek legrosszabb 5%-ában már nem érheti meg a befektetőt, mindenképpen csak az opció díját (8,11%) veszítheti el.

STRATÉGIA	$VAR_{95\%}^{1\text{év}}$	$ES_{95\%}^{1\text{év}}$
Havi opció – Szintbeli put	11,81%	14,11%
Havi opció – Mérsékelt put	11,94%	19,00%
Havi opció – Mély put	17,16%	28,75%
Negyedéves opció – Szintbeli put	9,98%	11,99%
Negyedéves opció – Mérsékelt put	14,63%	22,70%
Negyedéves opció – Mély put	20,29%	33,82%
Éves opció – Szintbeli put	8,11%	8,11%
Éves opció – Mérsékelt put	23,03%	25,13%
Éves opció – Mély put	27,42%	43,35%
S&P 500 index	27,44%	73,65%

8. táblázat. A put stratégiák éves  $VAR_{95\%}^{1\text{év}}$  és  $ES_{95\%}^{1\text{év}}$  értékeinek összehasonlítása a benchmark indexhez hasonlítva

A maximális visszaesés (*maximum drawdown, MDD*) mérték azt mutatja, hogy egy adott időtávon mekkora az a legnagyobb visszaesés, amit a részvényárfolyam elszenved a csúcshoz képest, mielőtt új csúcsra emelkedik:



$$\text{MDD}(T) = \max_{\tau \in (0, T)} D(\tau) = \max_{\tau \in (0, T)} \left[ \max_{t \in (0, \tau)} X(t) - X(\tau) \right].$$

Az MDD az előző, loghozamokat vizsgáló metrikákhoz képest az árfolyamalakulásról nyújt képet, így a vizsgált eszköz teljesítményének egy másik dimenzióját vehetjük figyelembe. Egy gyenge ES érték kedvezőtlen, de ha nagy emelkedések is járnak az esésekkel, a részvény árfolyama akár felfelé mutató trendet is mutathat.

Az elemzésem során minden szimulált trajektóriára kiszámoltam az MDD értékét, majd ezek számtani átlagát vettem, ez szerepel a 9. táblázatban.

Az eredmények hasonlóak a VaR és az ES esetén látottakhoz. Minden stratégia felülteljesíti az MDD mutató alapján is a benchmarkot. A legjobban a havi mérsékelt opció, illetve a negyedéves és éves szintbeli put opció teljesített, melyek közel negyedére csökkentették a kockázatot. A legkevesebb javulás az éves mély put opció érte el.

STRATÉGIA	átlagos MDD
Havi opció – Szintbeli put	19,97%
Havi opció – Mérsékelt put	12,94%
Havi opció – Mély put	19,30%
Negyedéves opció – Szintbeli put	12,60%
Negyedéves opció – Mérsékelt put	16,15%
Negyedéves opció – Mély put	23,76%
Éves opció – Szintbeli put	11,75%
Éves opció – Mérsékelt put	22,46%
Éves opció – Mély put	31,23%
S&P 500 index	46,26%

9. táblázat. A put stratégiák átlagos maximális visszaesései a benchmark indexhez hasonlítva

### 5.3. Hozam-kockázat mutatók

A portfóliók teljesítményének mérésére általánosan használt eszközök a hozam-kockázat mutatók, amelyek a nevükből fakadóan egy befektetés teljesítményét a két legfontosabb dimenzió szerint értékelik. A következőkben három mutatóval mérem az egyes stratégiákat, mindegyik ugyanazon az elven működik, egy-egy kockázati mérték egységére eső hozamprémiumot adják meg. Minél nagyobb ez az érték, annál kedvezőbb. Hátrányuk, hogy nincs mértékegységük, így nehéz értékelni, hogy két érték között mekkora a különbség, egy befektető számára mely értékek jelentenek "jó" vagy "rossz" eredményt. Az elemzésem során összehasonlításra használok őket, amelyre tökéletesen alkalmasak.

A Sharpe-mutató a szórás egységére, a RoES (Return on Expected Shortfall) az ES egységére,

míg a Calmar-ráta az MDD egységre eső hozamprémiumot adja meg:

$$\text{Sharpe-ráta} = \frac{r_p - r_f}{\sigma}$$

$$\text{RoES} = \frac{r_p - r_f}{ES}$$

$$\text{Calmar-ráta} = \frac{r_p - r_f}{MDD}$$

ahol  $r_p$  a portfólió hozama,  $r_f$  a kockázatmentes kamatláb,  $\sigma$  a portfólió szórása,  $ES$  a portfóliót jellemző  $ES_{95\%}^{1\text{év}}$  mutató, az MDD pedig a maximális visszaesés mutató.

A mutatók értékeit a 10. táblázatban foglaltam össze, ahol sötétszürkével jelöltem a kimagaslóan magas, világosszürkével a benchmarknál nagyobb értékeket. Megállapítható, hogy minden stratégia jobb eredményt nyújt, mint a piaci index, azaz érdemes put opciót használni.

A táblázat alapján megállapítható, hogy a legjobb teljesítményt a havi, mérsékelt put opció nyújtja, amely a gyakorisága révén úgy nyújt folytonos védelmet a komolyabb visszaesések ellen, hogy mindez nem jelent nagy költséget a befektetőnek. Érdekes, hogy a leggyengébb eredményt szintén egy havi opció, az előzőnél valamivel nagyobb kötési áron vásárolt szintbeli opció nyújtja, amely csak a RoES mutatóban tudja felülmúlni az S&P 500 indexet.

A RoES mutató terén az éves szintbeli put opció a legjobb. Körülbelül 3 százalékpontos hozamáldozatért cserébe szinte teljesen kiküszöböli a szélsőséges események jelentette veszélyt, miközben a Sharpe-ráta esetén kicsivel átlag alatt, a Calmar-ráta esetén átlag felett teljesít.

STRATÉGIA	Sharpe-ráta	RoES	Calmar-ráta	C-mutató
Havi opció – Szintbeli put	0,12	0,21	0,15	12
Havi opció – Mérsékelt put	0,38	0,50	0,73	56
Havi opció – Mély put	0,38	0,33	0,49	48
Negyedéves opció – Szintbeli put	0,20	0,30	0,28	28
Negyedéves opció – Mérsékelt put	0,40	0,35	0,49	52
Negyedéves opció – Mély put	0,36	0,23	0,32	31
Éves opció – Szintbeli put	0,26	0,70	0,36	47
Éves opció – Mérsékelt put	0,34	0,29	0,30	31
Éves opció – Mély put	0,30	0,15	0,20	15
S&P 500 index	0,31	0,13	0,21	13

10. táblázat. A put stratégiák hozam-kockázat mutatóinak összehasonlítása

A hozam-kockázat mutatók alapján készítettem egy összesített mérőszámot (C), amellyel azonnal leolvasható, hogy melyik a legjobb stratégia. A mutató módszertana egyszerű, mindhárom hozam-kockázat mutató alapján sorba rendezem a 9 + 1 portfóliót, a legjobbnak 10 pontot adok, majd egyesével haladva a leggyengébbnek 1 pont jár.

Az így kapott pontszámokat súlyozom. A RoES mutató háromszoros súlyt kap, mivel az elemzésem fő célja a váratlan, szélsőséges eseményekkel szembeni védelem. A Calmar-ráta kétszeres súlyt kap, ezzel erősítve azt, hogy az árfolyam visszaeséseivel szemben a befektető erősen kockázatkerülő. A Sharpe-ráta egyszeres súlyt kap, mivel a szórás szerepe kevésbé fontos, ugyanakkor a hozamok változékonysága is kedvezőtlen a befektető számára.

A C-mutató alapján a legjobb teljesítményt elérő stratégiákat az aranyszín árnyalataival emeltem ki a 10. táblázat utolsó oszlopában. A legjobb eredményt a havi mérsékelt, a negyedéves mérsékelt és a havi mély opciók érték el. Ezek a stratégiák érték el a legmagasabb hozamot, miközben kivétel nélkül csökkentették a kockázatokat is.

A szélesesemények kockázatának csökkentésében az éves szintbeli put opció teljesített legjobban. Ennek azonban ára van, a várható hozam közel felére esik.

## 6. Összegzés

Az elemzésem során azt vizsgáltam, hogy put opciókkal mennyire lehet megóvni a befektetőt az árfolyamváltozásból fakadó piaci kockázatoktól és ezért mekkora hozamáldozatot kell vállalnia. Ehhez három különböző futamidőből és három különböző kötési árfolyamból kombináltam stratégiákat.

Az *eredmények* meggyőzőek, a kutatási kérdésre, miszerint *megéri-e alkalmazni egy passzív, indexkövető stratégia mellett*, egyértelműen igenlő választ adhatok. Bár minden stratégia esetén le kell mondani valamennyi hozamról (0,43% – 6,85%), a kockázatok mind a négy kockázati mérték szerint mérséklődtek. A hozam-kockázat mutatók alapján a put opcióval védett index a legtöbb esetben jobb befektetés a tiszta S&P 500 indexnél.

A hozam-kockázat mutatók alapján számolt relatív teljesítmények alapján a legjobb befektetés egy havonta megújuló put opció, amelynek a kötési árfolyama mérsékelten, 5,77%-kal van az index spot árfolyama alatt. Ennek várható hozama megközelíti az benchmark hozamot (11,45%, illetve 11,88%), miközben minden kockázati mérték szerint jelentősen csökkenne a kockázat.

A nagyon kockázatkerülő befektetőnek évente megújuló put opciót javasolnék, amelynek kötési árfolyama a vásárlás napján érvényes árfolyam lenne. Az ilyen befektetés várható hozama 6,25% lenne, de ezért cserébe felére csökkenne az éves szórás, míg a szélsőséges kimenetek ellen szinte teljes védelmet élvezhetne.

Az elemzésem eredményeit természetesen kellő óvatossággal, a modellek *limitációinak* figyelembe vételével kell kezelni. Három olyan feltevés van, ami a piaci környezettől függően akár jelentős mértékben kedvezőtlenül befolyásolhatja a vizsgált stratégiák eredményességét. A tranzakciós költségek és az adók hiánya, valamint a piacon érvényes konstans 2%-os kockázatmentes kamatláb miatt a put opciós stratégiák követése az egyszerű indexkövető stratégiához képest várhatóan alacsonyabb hozamot és magasabb kockázatokat jelentene a modell által jósolthoz képest. A 9 stratégia egymáshoz hasonlításához viszont megbízhatóan használható a modell.

Nem elhanyagolhatók a modellkockázatok sem. Az indexet leíró, GH innovációkkal meghajtott GJR-GARCH modell nagyszerű teljesítményt nyújt az empirikus tények reprodukálásában, de a 3.5. alfejezetben összefoglalt pontatlanságai közel sem elhanyagolhatók. Az európai put opció árazásához használt, VG-folyamatra építő módszertan megbízhatóan és konzisztensen adja vissza a piaci árakat, ugyanakkor nem hibátlan: konstans kamatlábat használ és az FFT algoritmus bár pontos, a legtöbb numerikus módszerhez hasonlóan nem tökéletes.

A szakdolgozatomban egy teljes, kerek elemzést vezettem végig, ahol egy jól definiált problémára könnyen kiértékelhető eredményeket kaptam. A terjedelmi korlátok és a számítási kapa-

citások miatt ugyanakkor számos ötlet kifejtése szükségszerűen elmaradt. Az alábbiakban ezek közül említek meg néhányat, melyek egy következő kutatás témájaként szolgálhatnak.

Az általam használt modellek összetettek, jóval több input paraméterrel dolgoznak, mint az egyszerűbb alternatívái. Ennek köszönhető, hogy a 3. fejezetben leírt modellel sokkal életszerűbb trajektóriák szimulálhatók, mint egy Wiener folyamattal vagy geometriai Brown mozgással, vagy hogy a 4. fejezetben bemutatott opcióárazási megközelítés a piacon megfigyelhető árakkal konzisztensebb eredményeket ad, mint az alap Black-Scholes formula.

Ennek ellenére építhetők ezeknél matematikailag összetettebb, pontosabb modellek, amelyekkel az elemzésem eredményeinek megbízhatósága is tovább javítható. A konstans kamatláb helyett sztochasztikus, akár a benchmark indexszel korreláló kamatlábmodell egy újabb réteget hozhatna egy ehhez hasonló kutatásba. Kiterjedt irodalma van a sztochasztikus volatilitás modelleknek és a többfaktoros árfolyammodelleknek is.

A fent tárgyalt opciókkal kombinált befektetési stratégiák megfelelőek lehetnek a gyakorlati alkalmazásra, ugyanakkor számos egyéb alternatívát is megfontolhat egy befektető. Egyrészt a fent vázolt megközelítés tesztelhető más indexekre, akár más országok piaci indexeire is, de alapterméként részvényportfóliók, befektetési alapok vagy teljesen eltérő eszközosztályok is alkalmazhatók. Kipróbálhatók az enyémtől eltérő opciós vagy nem opciós stratégiák is.

A stratégiák teljesítményének vizsgálata során is számos további lehetőség merülhet fel. A szimulált jövőbeli árfolyamok alapján elemezhető a portfóliók hozama és kockázata emelkedő, csökkenő vagy oldalazó trend esetén, de akár a koronavírushoz hasonló gyors visszaesést követő azonnali visszapattanás időszakában is. A kutatás kiegészíthető további kockázati mértékekkel és hozam-kockázati mutatókkal is.

## Irodalomjegyzék

- [1] C. Anthony, *The Volatility Surface Explained*, 2022. cím: <https://www.investopedia.com/articles/stock-analysis/081916/volatility-surface-explained.asp> (elérés dátuma 2022. 12. 12.).
- [2] D. Applebaum, *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge University Press, 2009.
- [3] O. E. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch és S. I. Resnick, *Lévy processes: theory and applications*. Springer Science & Business Media, 2001.
- [4] P. Carr és D. B. Madan, “Option valuation using the fast Fourier transform”, *Journal of Computational Finance*, 2. évf., 4. sz., 61–73. old., 1999.
- [5] R. Cont, “Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues”, *Quantitative finance*, 1. évf., 2. sz., 223. old., 2001.
- [6] M. L. Delignette-Muller és C. Dutang, “fitdistrplus: An R Package for Fitting Distributions”, *Journal of Statistical Software*, 64. évf., 4. sz., 1–34. old., 2015.
- [7] A. Ghalanos, *rugarch: Univariate GARCH models*. 2022.
- [8] L. R. Glosten, R. Jagannathan és D. E. Runkle, “On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks”, *The Journal of Finance*, 48. évf., 5. sz., 1779–1801. old., 1993.
- [9] J. C. Hull, *Opciók, határidős ügyletek és egyéb származtatott termékek*. Panem–Prantice-Hall, 1999.
- [10] ———, *Risk Management and Financial Institutions*. John Wiley & Sons, 2018.
- [11] S. M. Iacus, *Option Pricing and Estimation of Financial Models with R*. John Wiley & Sons, 2011.
- [12] D. B. Madan, P. P. Carr és E. C. Chang, “The variance gamma process and option pricing”, *Review of Finance*, 2. évf., 1. sz., 79–105. old., 1998.
- [13] L. Márkus, *Pénzügyi folyamatok matematikája II. [egyetemi előadás]*, Eötvös Loránd Tudományegyetem, 2021.
- [14] A. J. McNeil, R. Frey és P. Embrechts, *Quantitative risk management: concepts, techniques and tools-revised edition*. Princeton University Press, 2015.
- [15] E. Napoletano és J. Schmidt, *Active Vs Passive Investing: What’s The Difference?*, 2022. cím: <https://www.forbes.com/advisor/investing/passive-investing-vs-active-investing/> (elérés dátuma 2022. 12. 03.).
- [16] J. A. Nelder és R. Mead, “A Simplex Method for Function Minimization”, *The Computer Journal*, 7. évf., 4. sz., 308–313. old., 1965.
- [17] B. G. Peterson és P. Carl, *PerformanceAnalytics: Econometric Tools for Performance and Risk Analysis*, 2020.

- [18] R Core Team, *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2022.
- [19] J. A. Ryan és J. M. Ulrich, *quantmod: Quantitative Financial Modelling Framework*, 2022.
- [20] D. Scott és C. Y. Dong, *VarianceGamma: The Variance Gamma Distribution*, 2018.
- [21] W. Scoutens, *Lévy processes in finance: pricing financial derivatives*. John Wiley Sons, 2003.
- [22] M. Weibel, D. Luethi és W. Breymann, *ghyp: Generalized Hyperbolic Distribution and Its Special Cases*, 2022.
- [23] R. Wigglesworth, *How passive are markets, actually?*, 2022. cím: <https://www.ft.com/content/73a6527d-cd59-498e-9923-af5143cbb952> (elérés dátuma 2022. 12. 03.).