Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapesti Corvinus Egyetem
Közgazdaságtudományi Kar

Több-állapotú frakcionális modellek a biztosításban

— Szakdolgozat —

Témavezető:
Dr. Michaletzky György
egyetemi tanár
Valószínűségszámítási és Statisztika Tanszék

Készítette:
Bodolai Előd István
Biztosítási és pénzügyi matematika MSc.
aktuárius specializáció

Budapest, 2022

Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt szeretném ezúton kifejezni hálámat témavezetőmnek, Dr. Michaletzky György tanár úrnak, hogy mérhetetlen gondosságával és pontosságával segített e szakdolgozat megírásában. Köszönöm neki a rám szánt idejét, e lapok gondos átolvasását, az építő tanácsait és legfőképpen a szakmai beszélgetéseket.

Köszönöm továbbra is a családomnak, hogy az egyetemi éveim alatt szilárd támaszt nyújtottak. E dolgozat megírásáért is hálával tartozom nekik; édesanyámnak és húgomnak, akik anyanyelvünk területén oly jártasak, illetve édesapámnak a legmesszebb menő precizitásért.

Köszönöm továbbá barátaimnak, szaktársaimnak, hogy mindig számíthattam rájuk, segítségükre.

És hálás vagyok a Gondviselésnek, amiért eljuthattam e mondatok megírásáig. Szolgálják ezek is az Igazságot...

Tartalomjegyzék

Bevezető

Általános tapasztalatok

A pénzügyek területén kiemelt feladat az adott pénzügyi instrumentumokban rejlő kockázatok felmérése, értékelése és monitorozása. A kockázatértékeléshez mind a banki, mind a biztosítási területen klasszikus modellek állnak rendelkezésünkre, gondolva itt például az európai opció árfolyam-alakulását leíró Black–Scholes-modellre vagy a biztosítóintézet csődvalószínűségére vonatkozó Cramér–Lundberg-modellre. Ami közös e két modellben, hogy háttérben egy stacionárius, független növekményű sztochasztikus folyamatot feltételeznek: a részvényár geometriai Brown-mozgást követ, a kárszámfolyamat pedig Poisson-folyamat.

De mi történik akkor, amikor új piaci információk hatására pánikszerűen felgyorsulnak a piaci tranzakciók (2022. április 5-én az Európai Bizottság jogállamisági eljárás alá vonta Magyarországot, aminek hatására az euró 371 forintos szintről közel 377 forintos szintre erősödött a bankközi piacon közel 2 óra alatt[1]), vagy amikor az erős szél miatt több kár történik (a 2022. január 30-i szélvihar kapcsán egy napra harmadannyi kárbejelentés történt, mint a 2021-es négyhónapos viharszezonra[2])?

Első esetben a valós adatok is azt mutatják, – különösen egy részvényár alakulásánál – hogy vannak olyan időszakok, amikor a jegyzések kis eltérést mutatnak, vagy egyáltalán nem változnak, [8]. Az alapmodellek ezeket a megfigyeléseket nem kezelik megfelelően. Első megoldási ötlet a paraméterek általánosabb leírásában rejlik. Ennek egy lehetséges megvalósítása, amikor a Brown-mozgás időparaméterét egy másik sztochasztikus folyamattal helyettesítjük, egy inverz α-stabilis Lévy-szubordinációs folyamattal, [12]. Az említett idő-átskálázással elérünk olyan időszakokat, ahol a Brown-mozgás megáll, viszont a Markov-tulajdonságot és a szemimartingalitást elveszítjük vele. A konstrukciót szokás *frakcionális Brown-mozgás*nak is nevezni, maga a konstrukció pedig manapság egyre népszerűbb a pénzügyi területen.

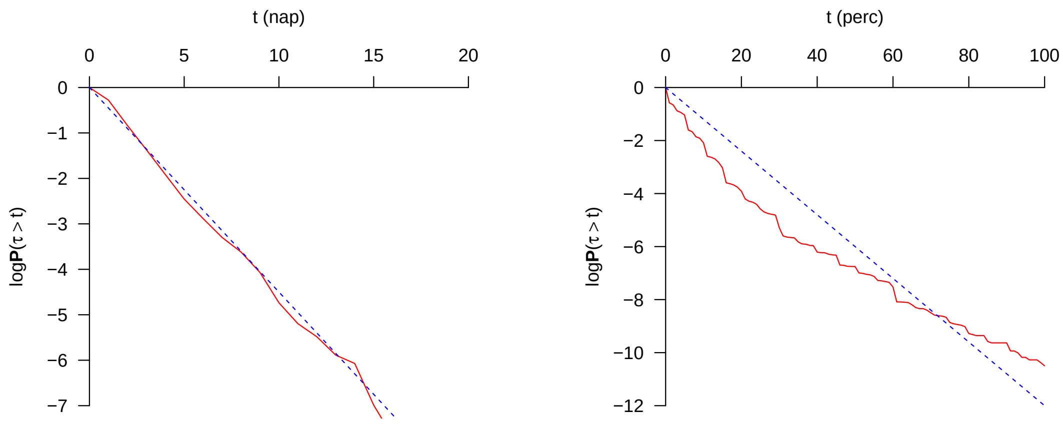
A biztosítóintézet szemszögéből egy adott biztosítási szerződés alatti kárfolyamat legalább ennyire fontos. A klasszikus Poisson-folyamat azonban itt sem tud eleget tenni néhány – szintén valós adatokon nyugvó – megfigyelt viselkedésnek. Az ugrások között eltelt idők itt független exponenciális eloszlású változók, ami a fenti szélvihar esetén ellentmond az intuíciónknak. Sok esetben a károk között eltelt idő jellemzően vastagabb farkú, szubexponenciális eloszlást követ. Ezt demonstrálja az `R`-ben elkészített 1. ábra.

[1] https://www.portfolio.hu

[2] https://mabisz.hu

Az 1.a) grafikont a dán tűzkárok 1980. január 1. és 1990. december 31. közötti adatbázisára alapozva készítettük, és az időben szomszédos tűzesetek között eltelt időhosszak túlélésfüggvényét ábrázolja logaritmikus skálán. Az vizsgált évtizedben mintegy 2 167 megfigyeléssel tudtunk számolni. A referenciaegyenes egy exponenciális eloszlás túlélésfüggvénye, ehhez mérten az adatsornál a Poisson-folyamat feltételezés teljesen helytállónak bizonyul.

Az 1.b) elkészítéséhez a chicagói autóbalesetek[3] 2015. szeptember 1. és 2022. április 9. közötti károkat tekintettük a nappali időszakban 9:00 és 17:00 között (291 803 megfigyeléssel). Ugyanúgy a balesetek között eltelt idő túlélésfüggvényét ábrázoltuk logaritmikus skálán, itt az eloszlás jellege inkább szubexponenciálisnak mondható.



1. ábra. A a) dán tűzkárok és a b) chicagói autóbalesetek szomszédos káridőpontjai között eltelt idők logaritmikus túlélésfüggvényei (összehasonlítva az exponenciális eloszlás túlélésfüggvényével)

Ez utóbbi megfigyelést szintén követné a már ismertetett módszer, ha a Poisson-folyamatot át-időskálázzuk egy inverz stabilis Lévy-szubordinátorral. Ezzel közelebb kerülünk a valósághoz: lesznek olyan időszakok, amikor "megáll az idő", és amikor felgyorsul, több kár következik be. Az ugrások között eltelt idő Mittag–Leffler-eloszlású lesz, ami az exponenciálisnál vastagabb farokeloszlással bír. A *frakcionális Poisson-folyamat*tal és a biztosítási alkalmazhatósággal, a rizikófolyamattal részletesen foglalkozik [11].

Az így megalkotott duplán sztochasztikus rendszerek *frakcionális* általános elnevezése gyakorlatilag a sztochasztikát leíró frakcionális differenciálegyenletekkel magyarázhatók, amely reprezentációkban megjelennek nem csak egész rendű deriváltak is.

Egészségbiztosítási szerződések

Most vizsgáljuk speciálisan az egészségbiztosítási szerződések csoportját. Ezen termékek aktuáriusi árazásának egyik központi eleme a biztosítottak egészségügyi állapotának felmérése, és az állapotok közötti átmenetek (megbetegedés, gyógyulás, rokkantság, elhalálozás) modellezése. Ehhez egy természetes megközelítést adhatnak a folytonos idejű,

[3] https://data.cityofchicago.org

véges állapotterű homogén Markov-láncok, amennyiben az állapotokat a biztosított – szerződésben is megkülönböztetett – egészségügyi állapotaival feleltetjük meg.

Bár az említett tulajdonságú Markov-láncoknak széleskörű irodalma van, analitikailag leírhatók, mégis az egészségbiztosítási területen ezek a viselkedések furcsának, irreálisnak bizonyulnak. Gondolunk itt arra, hogy – egyes biztosítottak esetén – a valóságban a megbetegedés valószínűsége nagyban függ az életkortól, a rehabilitáció pedig mind az életkortól, mind a betegségben addig eltöltött időtől. Ezt a jelenséget egy Markov-lánc nem tudja helyén kezelni, éppen a Markov-tulajdonság miatt az állapotváltozások között eltelt idők független exponenciális eloszlást követnek, így a modell csak az aktuális állapotot veszi figyelembe, a betegen eltöltött időt már nem.

Másik észszerű felételezés, hogy amennyiben a biztosított egészségügyi állapota leromlik, a kezelése során felszínre kerülhet több – korábban még nem diagnosztizált – betegsége, amire a szerződés fedezetet nyújt, és amit a diagnózistól számított rövid időszakon belül ellátnának. Ezzel párhuzamban ha az egy állapotban eltöltött időt exponenciális eloszlás helyett olyan eloszlásúnak tekintenénk, mely a farkakra nagyobb hangsúlyt helyez, az modellként szolgálna mindazon egyénekre, akik szokatlanul gyorsan, vagy lassan haladnak át az állapotokon. Ebbe implicit beleérthetjük a biztosító szemszögében egyik legrelevánsabb hosszúélet-kockázatot.

A problémát 3 állapotra (egészséges, rokkant, elhalálozott) tárgyalja [7]. Megoldásként itt egy három-állapotú nem-homogén szemi-Markov-modellt vizsgálnak. A konstrukcióhoz egy homogén Markov-lánc állapotterét növelik meg, ezzel szabályozva a varianciát. A halálozás eloszlása ekkor fázis-típusú eloszlást követ.

E szakdolgozat keretében egy másik modellt mutatunk be, mely kezelni képes az említett jelenségeket. Nevezetesen a már közölt gondolatmenet segítségével azt a duplán sztochasztikus rendszert tekintjük, ahol magának a Markov-láncnak az időparaméterét feleltetjük meg egy α-stabilis Lévy-szubordinátor inverzfolyamatának. Az így nyert konstrukcióval az idő telését befolyásoljuk a Markov-modell esetén is bizonyos szakaszokon megállítva, illetve felgyorsítva azt.

A modell részletében fellelhető a 2021-es [6] cikkben, e dolgozat lapjain erősen támaszkodunk az ott leírtakra. Mint látni fogjuk részleteiben is, az így megalkotott modell valóban visszatükrözi a fent leírt elvárásokat.

A dolgozat célja

A dolgozat célja, hogy részleteiben fogalmazzuk meg, mutassuk be a fent nevezett frakcionális egészségbiztosítási modellt, adott paraméterek mentén beárazzuk, illetve aktuáriusi szemszögből értékeljük azt tetszőleges időpontban (vagyis matematikai tartalékot határozzunk meg).

Mint már említettük, a sztochasztikus átskálázás hátránya az, hogy a Markov- és szemimartingál-tulajdonságok csak a kezdeti megkötési időpontban teljesülnek, későbbi időpontokban nem áll rendelkezésünkre zárt képlet az értékeléshez. Matematikailag árazni ezért csupán a kötvény aláírásának időpontjában tudunk.

A későbbi időpontokra megoldást jelenthet a Monte-Carlo-szimuláció, azonban az összetett sztochasztika kétszeresen összetett szimulációhoz vezetne, ami rendkívül számolásigényes. Ezt a problémát e dolgozat lapjain belül úgy kívánjuk orvosolni, hogy a frakcionális Markov-lánc folyamatot feltételesen nézzük a szubordináció filtrációjára. Mint szintén látni fogjuk, ezekkel az eredményekkel a tartalék szimulációja leredukálódik egy szimulációs ágra, a Lévy-folyamatéra, ezzel nem csak fair díjat, hanem a biztosítási szerződések tetszőleges időpontbeli értékét (matematikai tartalékot) is meg tudjuk becsülni.

A szakdolgozat 1. fejezetében az ehhez kacsolódó matematikát állítjuk főszerepbe, a folytonos paraméterű véges állapotterű homogén Markov-láncok és az α-stabilis Lévy-szubordinátorok elméletét, valamint kiszámoljuk az összetett sztochasztikus folyamatra vonatkozó azon feltételes várható értékeket, melyek a későbbi tartalék felírásánál előjönnek. Kitérőként megnézzük, hogyan kapcsolódnak a frakcionális differenciálegyenletek a felírt modellhez, illetve a frakcionális fázis típusú eloszlások keretében vizsgáljuk azt az esetet, amikor a halál-állapot bevezetésével egy elnyelő állapotot definiálunk a rendszerben.

A 2. fejezetben a klasszikus Markov-láncon nyugvó alapmodell vizsgálata után definiáljuk a több-állapotú frakcionális modellt, majd egyszerűbb képletet adunk a kezdeti díjra, illetve a tetszőleges időpontban vett feltételes tartalékra. Ezekre építve Monte-Carlo-szimuláljuk a tartalékot egy adott szerződéskonstrukcióra a 3. fejezetben, érzékenységvizsgálatot végzünk, végül összefoglaljuk a kritikákat és lehetséges általánosításokat az utolsó oldalakon.

Alkalmazott jelölések

A dolgozatban a következő jelöléseket használjuk.

$\mathbb{N}$	a természetes számok halmaza
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{C}$	a komplex számok halmaza
$\operatorname{Re} z$	a z komplex szám valós része
$\operatorname{Im} z$	a z komplex szám képzetes része
$a \wedge b$	$\min(a, b)$
$a \vee b$	$\max(a, b)$
$X \stackrel{d}{=} Y$	az X és Y valószínűségi változók eloszlásban megegyeznek
$X_n \stackrel{d}{\to} Y$	az X_n valószínűségi változók határeloszlása Y
$X \sim$	az X valószínűségi változó eloszlása
$\mathbb{1}_H$	a H mérhető halmaz indikátorfüggvénye
$\mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$	$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$-paraméterű stabilis eloszlás
$\mathrm{PH}\,(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{Q})$	$(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{Q})$-paraméterű fázis típusú eloszlás
$\mathbf{1}_n$	az n-elemű csupa 1 vektor
$\mathbf{e}_i$	az i-edik komponensében 1, a többiben 0 vektor (adott vektortérben)
$\mathbf{I}_n$	az $n \times n$ méretű egységmátrix
$\operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$	a $d_1, d_2, \ldots, d_n$ elemekből képzett $n \times n$ méretű diagonálmátrix
$\operatorname{Sp}(\mathbf{M})$	az $\mathbf{M}$ mátrix spektruma
$\rho(\mathbf{M})$	az $\mathbf{M}$ mátrix spektrálsugara
$\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$	$\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ azonos méretű mátrixok Hadamard- (elemenkénti) szorzata
$\#H$	a H halmaz elemeinek száma
$E_{\alpha,\beta}(x), \boldsymbol{E}_{\alpha,\beta}(\mathbf{M})$	a skalár illetve mátrix értékű Mittag–Leffler-függvény
$\operatorname{supp} f$	az f függvény tartója
D_x^α	a Caputo-féle frakcionális deriváltoperátor az x változóban
$f(x) = O(g(x))$	a megfelelő határátmenetben létezik $C \geq 0$ konstans, amire $\lvert f(x)\rvert \leq Cg(x)$
$f(x) = o(g(x))$	a megfelelő határátmenetben $f(x) = O(g(x))$, és $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$
$f(x) \sim g(x)$	a megfelelő határátmenetben $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$

1. fejezet

Frakcionális sztochasztikus folyamatok

Első fejezetünkben egyfajta megközelítésben bevezetjük a frakcionális sztochasztikus folyamatok elméletét, és explicite kiszámoljuk néhány jellemző tulajdonságukat. Az ide vonatkozó matematikai fogalmak, összefüggések azonban megkövetelik, hogy megjelöljük mindazon alapokat, amikre építhetünk, azokat az elveket, amik mentén el tudunk indulni a bevezetőben tárgyalt cél felé.

1.1. Folytonos paraméterű Markov-láncok

Mindenekelőtt egy speciális sztochasztikus folyamatot tekintünk át a maga egyszerűségében: a Markov-folyamatot. Remek összefoglalója megtalálható az [9] és [10] könyvekben, részletekbe menően pedig [4] foglalkozik vele. Jelölésekben következetesen mi az előbbiekben foglaltakat alkalmazzuk.

Tekintsük az $(\theta_t)_{t\geq 0}$ sztochasztikus folyamatot az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn, tehát $\theta_t \colon \Omega \to \mathcal{X}$ egy valószínűségi változó bármely $t \geq 0$ mellett. (Itt az $\mathcal{X}$ absztrakt halmazt *állapottér*nek, vagy *fázistér*nek nevezzük, a továbbiakban $\mathbb{R}$-rel illetve annak bizonyos részhalmazával fogjuk azonosítani.) A folyamat *természetes filtráció*ját $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ jelöli, vagyis $\mathcal{G}_t = \sigma\{\theta_s \colon 0 \leq s \leq t\}$ szigma-algebra (ez közismerten a "t időpontig rendelkezésünkre álló információ" analógiája, egy bővülő szigma-algebrasorozat).

1.1.1. Definíció. *A fenti jelölések mellett $(\theta_t)_{t\geq 0}$ Markov-folyamat az $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ filtrációban, ha θ adaptált $\mathcal{G}$-hez és tetszőleges $0 \leq s \leq t$, $A \subset \mathbb{R}$ esetén*

$$\mathbb{P}(\theta_t \in A \mid \mathcal{G}_s) = \mathbb{P}(\theta_t \in A \mid \theta_s) =: P(s, x; t, A).$$

Megjegyezzük, hogy a definíció tetszőleges filtrációban értelmezi a tulajdonságot, nem csupán a természetes filtrációban. Maga a tulajdonság praktikusan azt jelenti, hogy a folyamat jövőbeli alakulása csak "az aktuális állapoton keresztül függ a múlttól". A definiált $P(s, x; t, A)$ függvényeket a Markov-folyamat *átmenetvalószínűség-függvény*einek nevezzük.

A fogalomkör meglehetősen általános, egyéb megkötések mellett ismertebb példák a Poisson- és Wiener-folyamatok. Az elkövetkezendőkben a folytonos idejű homogén

Markov-láncokat, és az ahhoz kapcsolódó valószínűségi változókat, összefüggéseket ismertetjük.

1.1.2. Definíció. *A diszkrét állapotterű Markov-folyamatokat Markov-láncoknak nevezzük.*

1.1.3. Definíció. *Amennyiben a Markov-folyamat átmenetvalószínűség-függvényére fennáll minden lehetséges h érték mellett az*

$$P(s, x; t, A) = P(s + h, x; t + h, A) = P(0, x; t - s, A)$$

egyenlőség, úgy azt stacionárius, vagy (idő)homogén Markov-folyamatnak nevezzük.

Amennyiben egy homogén Markov-lánc állapottere az $I = \{0, 1, 2, \ldots\}$ (esetleg véges) indexhalmaz, az átmenetvalószínűség-függvény egyszerűbb jelölésére van lehetőségünk:

$$p_{i,j}(t) = P(0, i; t, \{j\}), \tag{1.1}$$

(annak a valószínűsége, hogy az i állapotból indulva t idő alatt j-be érünk).

A továbbiakban mi csakis olyan homogén Markov-láncokról fogunk tárgyalni, melyek állapottere véges, legyen $I = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Ezen feltételezés sok "szép" tulajdonságot magával ránt számunkra a későbbiekben. E szerint a terminológia szerint állást foglalunk amellett, hogy (1.1) egyváltozós függvényt jobbról folytonos, balról határértékkel rendelkező (továbbiakban *càdlàg* tulajdonságú) függvényekként értelmezzük. Ezekből kiindulva elkészíthetjük a folyamat *átmenetvalószínűség-mátrix*át:

$$\boldsymbol{P}(t) = \left[p_{i,j}(t)\right]_{i,j=0,0}^{n,n}.$$

A mátrixról megköveteljük a továbbiakban, hogy teljesítse a

$$p_{i,j}(0) = \lim_{t \to 0+} p_{i,j}(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases} \tag{1.2}$$

limesztulajdonságot, vagyis Markov-lánc legyen *standard*.

1.1.4. Állítás. *A Markov-lánc $\boldsymbol{P}(t)$ átmenetvalószínűség-mátrixának elemeire fennállnak az alábbi tulajdonságok:*

(a) $p_{i,j}(t) \geq 0, \quad \forall t > 0;$

(b) $\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j}(t) = 1, \quad \forall t > 0;$

(c) teljesülnek az ún. Chapman–Kolmogorov-egyenletek[1]*:*

$$p_{i,k}(s + t) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j}(s) p_{j,k}(t), \quad \forall s, t \geq 0;$$

[1] Az egyenlőség teljes általánosságban megfogalmazható Markov-folyamatokra, hogyha az állapotteret $I \subseteq \mathbb{R}$ jelöli, akkor minden $0 < s \leq t \leq u$ és $A \subset I$ esetén:

$$P(s, x; u, A) = \int_I P(t, y; u, A) P(s, x; t, \mathrm{d}y).$$

(d) tetszőleges $t, h \geq 0$ számok és $i, j \in I$ állapotok esetén

$$|p_{i,j}(t+h) - p_{i,j}(t)| \leq 1 - p_{i,i}(t).$$

Az átmenetvalószínűség-függvény càdlàg típusából kifolyólag megfogalmazható az alábbi tétel.

1.1.5. Tétel. *Létezik $\boldsymbol{P}(t)$-nek 0-beli (elemenkénti) deriváltja, vagyis a*

$$\boldsymbol{P}'(0) = \lim_{h \to 0+} \frac{\boldsymbol{P}(h) - \boldsymbol{P}(0)}{h} =: \mathbf{Q} = \left[q_{i,j}\right]_{i,j=0,0}^{n,n}$$

mátrix, továbbá a főátlón kívüli deriváltak nemnegatívak és végesek, a főátlóban levők pedig nempozitívak és nem feltétlenül végesek.

Az 1.1.5. Tételhez fűzzük azt a kiegészítést, hogy a benne foglalt $\mathbf{Q}$ mátrixot a Markov-lánc *intenzitásmátrix*ának nevezzük, valamint elemeire

$$|q_{i,i}| < \infty \tag{1.3}$$

teljesülése esetén – az 1.1.4. Állítás (b) részéből kifolyólag – fennáll tetszőleges $i \in I$ mellett, hogy $q_i := -q_{i,i} = \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} q_{i,j}$ nemnegatív. Csupán tautológia, de számításaink során hasznosabb lesz számunkra az

$$p_{i,j}(h) = q_{i,j}h + o(h), \qquad h \to 0+ \tag{1.4}$$

felírás. A következőkben a Markov-láncoknál beleértjük a (1.3) feltételt is. Az eredményt karöltve a 1.1.4. Állítás (c) részével az alábbi kijelentést fogalmazzuk meg.

1.1.6. Tétel (Kolmogorov-féle előrehaladó és hátráló differenciálegyenletek)**.** *Egy Markov-lánc $\boldsymbol{P}(t)$ átmenetvalószínűség-függvénye és $\mathbf{Q}$ intenzitásmátrixa a kielégítik az alábbi differenciálegyenleteket:*

$$\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{P}(t)\mathbf{Q}, \quad \text{és} \quad \boldsymbol{P}'(t) = \mathbf{Q}\boldsymbol{P}(t), \qquad \forall t \geq 0. \tag{1.5}$$

Tulajdonképpen azt látjuk, hogy minden $t \geq 0$ mellett $\boldsymbol{P}(t)$ és $\mathbf{Q}$ mátrixok felcserélhetők, valamint az (1.5) differenciálegyenlet megoldása a $\boldsymbol{P}(0) = \mathbf{I}_{n+1}$ kezdeti feltétel mellett explicite meghatározott:

$$\boldsymbol{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t}, \qquad \forall t \geq 0, \tag{1.6}$$

ahol egy tetszőleges $\mathbf{M}$ mátrix esetén $e^{\mathbf{M}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{M}^k}{n!}$, vagyis $\mathbf{Q}$ egyértelműen meghatározza az átmenetvalószínűségeket.

Az (1.6) mátrixreprezentáció praktikus következménye, hogy a $h \to 0+$ határátmenetben tetszőleges $i, j \in I$ indexekre

$$p_{i,j}(h) - \delta_{i,j} - q_{i,j}h = \left[\boldsymbol{P}(h) - \mathbf{I}_{n+1} - \mathbf{Q}h\right]_{i,j} = O(h^2), \tag{1.7}$$

ahol $\delta_{i,j}$ a Kronecker-delta függvény, illetve $\mathbf{I}_{n+1}$ jelöli az $(n+1) \times (n+1)$-es egységmátrixot.

1.1.7. Megjegyzés. *Véges állapottér, illetve diagonalizálóható* $\mathbf{Q}$ *mátrix esetén legegyszerűbb eljárás a* $\boldsymbol{P}(t)$ *mátrixok előállítására a következő. Jelöljék* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *a* $\mathbf{Q}$ *mátrix sajátértékeit, valamint* $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *a hozzájuk tartozó jobboldali sajátvektorokat. A*

$$\mathbf{\Lambda}(t) = \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_0 t}, e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\right) \qquad \textit{és} \qquad \mathbf{U} = \left(\mathbf{u}_0 \mid \mathbf{u}_1 \mid \ldots \mid \mathbf{u}_n\right)$$

mátrixok mellett ekkor $\boldsymbol{P}(t) = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}(t)\mathbf{U}^{-1}$.

Ez az előállítás csupán a $\mathbf{Q}$ *mátrix spektrálfelbontásán múlik, ami pontosan akkor létezik, ha a sajátvektorok az egész tér bázisát alkotják.*

Azt is észrevehetjük, hogy az (1.6) egyenlet szerint $\boldsymbol{P}(t)$ *mátrix-logaritmálásával kaphatjuk a* $\mathbf{Q}$ *intenzitásmátrixot. Véges (valós) mátrixok esetén a valós logaritmus létezésének és egyértelműségének feltételei ismertek. Egyrészt a logaritmálandó mátrixnak regulárisnak kell lennie, másrészt a Jordan-normálalakban a negatív sajátértékhez tartozó Jordan-blokkoknak páros számú alkalommal kell előfordulniuk, [5].*

Tetszőleges $i \in I$ állapotra jelölje T_i az *ott töltött idő* valószínűségi változóját, vagyis

$$T_i = \inf\{\tau \geq 0\colon \theta_\tau \neq i, \theta_0 = i\}. \tag{1.8}$$

A homogenitás miatt az adott állapotban töltött hátralevő idő eloszlása nem függ attól, melyik időpontban kerülünk az i állapotba. Alább e változó ismert tulajdonságát elevenítjük fel.

1.1.8. Állítás. *A Markov-lánc várakozási idejeire tetszőleges* $i \in I$ *állapotban* q_i *paraméterű exponenciális eloszlást követ, pontosabban*

$$\mathbb{P}(T_i > h) = e^{-q_i t}.$$

Az állítás mögötti heurisztika a homogenitásból nyert ún. örökifjú tulajdonság, eredménye összhangban van a Poisson-folyamatok várakozási idő-eloszlásának exponencialitásával. Alább egy új valószínűségi változót vezetünk be, a számlálófolyamatot, amire a későbbiekben nagy szükségünk lesz.

1.1.9. Definíció. *Tetszőleges* $i \neq j$ *állapotokra az*

$$N^{i,j}_{(s,t]} := \#\{u \in (s,t]\colon \theta_{u-} = i, \theta_u = j\}, \quad \textit{és} \quad N^X_{(s,t]} := \#\{u \in (s,t]\colon \theta_{u-} \neq \theta_u\}$$

jelölések mellett egy Markov-lánc i-j-számlálófolyamatán az $N^{i,j}_t := N^{i,j}_{(0,t]}$, *átmenet-számlálófolyamatán pedig az* $N^X_t := N^X_{(0,t]}$ *t-folyamatot értjük.*

A számlálófolyamat fogalmának ismeretében az (1.4) egyenlethez hasonló összefüggések fogalmazhatók meg az 1.1.8. Állítás következményeként.

1.1.10. Következmény.

$$\mathbb{P}\left(N^X_h = 0 \mid \theta_0 = i\right) = 1 - q_i h + o(h),$$
$$\mathbb{P}\left(N^X_h = 1 \mid \theta_0 = i\right) = q_i h + o(h),$$
$$\mathbb{P}\left(N^X_h \geq 2 \mid \theta_0 = i\right) = o(h).$$

1.1.11. Állítás. *Az $(\theta_t)_{t\geq 0}$ Markov-lánc i-j-számlálófolyamatára teljesül az alábbi összefüggés*

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\mathbb{E}\left(N^{i,j}_{t+h} - N^{i,j}_t \mid \mathcal{G}_t\right)}{h} = q_{i,j}\ \mathbb{1}_{\{\theta_t=i\}}.$$

Bizonyítás. Átalakítások után felhasználjuk a Markov-tulajdonságot, majd kifejtjük a diszkrét változó várható értékét.

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\mathbb{E}\left(N^{i,j}_{t+h} - N^{i,j}_t \mid \mathcal{G}_t\right)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\mathbb{E}\left(N^{i,j}_{(t,t+h]} \mid \theta_t\right)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0+} \frac{\sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\left(N^{i,j}_{(t,t+h]} \mid \theta_t = k\right)\ \mathbb{1}_{\{\theta_t=k\}}}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0+} \left[\underbrace{\frac{\mathbb{P}\left(N^{i,j}_{(t,t+h]} = 1 \mid \theta_t = i\right)}{h}}_{A} + \underbrace{\sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{\ell\ \mathbb{P}\left(N^{i,j}_{(t,t+h]} = \ell \mid \theta_t = i\right)}{h}}_{B} \right] \mathbb{1}_{\{\theta_t=i\}} +$$
$$+ \lim_{h\to 0+} \sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \left[\underbrace{\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\ell\ \mathbb{P}\left(N^{i,j}_{(t,t+h]} = \ell \mid \theta_t = k\right)}{h}}_{C} \right] \mathbb{1}_{\{\theta_t=k\}}.$$

Először a B kifejezést becsüljük. Rögzített $\ell \geq 2$-re az események tartalmazásban felülről becsülhetők az állapotban eltöltött időkkel, mégpedig ha $T^{(\cdot)}_i$ és $T^{(\cdot)}_j$ egymástól független i- és j-várakozási időket jelölnek, akkor

$$\{N^{i,j}_{(t,t+h]} = \ell \mid \theta_t = i\} \subset \{T^{(1)}_i, T^{(2)}_i, \ldots, T^{(l)}_i \leq h,\ \text{és}\ T^{(1)}_j, T^{(2)}_j, \ldots, T^{(l-1)}_j \leq h\}.$$

A valószínűségekre így fennáll

$$B \leq \sum_{\ell=2}^{\infty} \ell\ \frac{\mathbb{P}(T_i \leq h)^{\ell}\ \mathbb{P}(T_j \leq h)^{\ell-1}}{h} =$$
$$= \frac{1-e^{-q_i h}}{h} \sum_{\ell=2}^{\infty} \ell \left[\left(1-e^{-q_i h}\right)\left(1-e^{-q_j h}\right)\right]^{\ell-1} =$$
$$= \frac{1-e^{-q_i h}}{h} \left(-1 + \frac{1}{\left(e^{-(q_i+q_j)h} - e^{-q_i h} - e^{-q_j h}\right)^2}\right) \quad \to 0,$$

midőn $h \to 0+$. Így persze $B \geq 0$ miatt $B \to 0$ is teljesül. (Az utolsó egyenlőségnél felhasználtuk a $\sum_{\ell=2}^{\infty} \ell x^{\ell-1} = -1 + \frac{1}{(1-x)^2}$ azonosságot.)

A C értékénél hasonlóképpen számolhatunk, a nagyságrend annak esetén is $o(h)$ lesz.

Áttérhetünk végül az A értékének vizsgálatára. A $G = \left\{N^X_{(t,t+h]} = 1, \theta_t = i, \theta_{t+h} = j\right\}$ eseményhalmazt bevezetve egyszerűen megtehetjük a becslést, hiszen ekkor

$$G \subset \left\{N^{i,j}_{(t,t+h]} = 1 \mid \theta_t = i\right\} \subset G \cup \left\{N^X_{(t,t+h]} \geq 2\right\}. \tag{1.9}$$

Tegyük fel, hogy a G esemény esetén az egyetlen állapotváltozás (természetesen i-ből j-be) a $\tau \in (t, t+h]$ időpontban történik. Ekkor az intervallumot n^* egyenlő részre felosztva találunk olyan $0 \leq m < n^*$ egész számot, amire $\tau \in (t+\frac{m}{n^*}h, t+\frac{m+1}{n^*}h]$. Vezessük be a

$$G_{n^*} = \bigcup_{m=0}^{n^*-1} \left\{ \theta_s = i,\ t \leq s \leq t + \frac{m}{n^*}h; \quad \theta_u = j,\ t + \frac{m+1}{n^*}h \leq u \leq t+h \right\},$$

eseményhalmazokat. Ekkor nyilvánvalóan teljesülni fog

$$\liminf_{n^*} G_{n^*} \subset G \subset \limsup_{n^*} G_{n^*},$$

amivel így $\lim_{n^*\to\infty} \mathbb{P}(G_{n^*}) = \mathbb{P}(G)$. A G_{n^*} halmaz diszjunkt unióként áll elő, így az 1.1.8. Állítás eredményeit felhasználva

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G_{n^*}) &= \sum_{m=0}^{n^*-1} \exp\left(-q_i \cdot \frac{m}{n^*}h\right) p_{i,j}\left(\frac{h}{n^*}\right) \exp\left(-q_j \cdot \frac{n^*-m-1}{n^*}h\right) = \\
&= \sum_{m=0}^{n^*-1} \exp\left(-q_i \cdot \frac{m}{n^*}h\right) \frac{p_{i,j}\left(\frac{h}{n^*}\right)}{\frac{h}{n^*}} \exp\left(-q_j \cdot \frac{n^*-m-1}{n^*}h\right) \cdot \frac{h}{n^*}.
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a fenti egyenlet jobb oldala egy Riemann-integrál közelítőösszege, ez pontosan azt fogja jelenteni az $n^* \to \infty$ határátmenetben, hogy

$$\mathbb{P}(G) = \lim_{n^*\to\infty} \mathbb{P}(G_{n^*}) = \int_{t-h}^{t} e^{-q_i(\tau-t+h)} q_{i,j} e^{-q_j(t-\tau)} \mathrm{d}\tau = q_{i,j} e^{-q_j h}(h + o(h)). \tag{1.10}$$

Visszatérve A értékének meghatározásához induljunk ki az (1.9) tartalmazásokból, amire immár az 1.1.10. Következmény szerint teljesülni fog

$$\frac{\mathbb{P}(G)}{h} \leq A \leq \frac{\mathbb{P}(G) + o(h)}{h}.$$

Itt a $h \to 0+$ limeszt véve az (1.10) egyenlet és a rendőr-elv szerint megkapjuk az állításunkat. □

1.1.12. Megjegyzés. *Az 1.1.11. Állítás tükrében áttérünk egy másfajta jelölésre, $i \neq j$ állapotok és $s \leq t$ esetén*

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\mathbb{E}\left(N^{i,j}_{t+h} - N^{i,j}_t \mid \mathcal{G}_s\right)}{h} =: \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}\left(N^{i,j}_t \mid \mathcal{G}_s\right).$$

Csupán jelzésértékű megállapítás, hogy az i-j-számlálófolyamat t-beli jobb oldali deriválhatóságáról van szó.

A toronyszabály szerint a fönti képletet tovább írhatjuk,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}\left(N^{i,j}_t \mid \mathcal{G}_s\right) &= \lim_{h\to 0+} \frac{\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(N^{i,j}_{t+h} - N^{i,j}_t \mid \mathcal{G}_t\right) \mid \mathcal{G}_s\right)}{h} = \\
&= \mathbb{E}\left(\lim_{h\to 0+} \frac{\mathbb{E}\left(N^{i,j}_{t+h} - N^{i,j}_t \mid \mathcal{G}_t\right)}{h} \;\middle|\; \mathcal{G}_s\right) = \\
&= q_{i,j}\ \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\theta_t = i\}} \mid \theta_s\right) = \\
&= q_{i,j} \sum_{k=0}^{n} p_{k,i}(t-s)\ \mathbb{1}_{\{\theta_s = k\}}.
\end{aligned}$$

A levezetés során a Markov-tulajdonságon túl a Lebesgue-tételt használtuk, ahol az integrálható majoráns változó kiolvasható az előző bizonyításában foglalt felső becslésekből. Ennek a kifejezésnek a későbbi alapmodellünk egy speciális pénzáramánál lesz kulcsszerepe.

1.2. α-stabilis Lévy-szubordinátorok

A továbbiakban áttérünk egy másik Markov-típusú folyamat vizsgálatára, a Lévy-folyamatokéra. Már önmagukban a Lévy-folyamatokkal való modellezés nem egy idegen elképzelés a pénzügyi területeken (például az ökonometriában), ugyanis segítségükkel rugalmasan lekezelhetők az empirikus stilizált tények, historikus adatok. Célunkként azonban a Bevezetőben tárgyalt sztochasztikus óra értelmezését, és matematikai vizsgálódását tűzzük ki.

Az alfejezet alaptémájával Lévy-folyamatokról, szubordinátorokról részletekbe menően foglalkozik [16], a számunkra legfontosabb ismeretanyagot pedig [2] könyv foglalja össze. A stabilis eloszlások tartalmas ismertetője [15] irodalom. Az írások mindegyik más aspektusban közelíti meg a dolgozatunk eszközeit. Alább csak a legfontosabb ismereteket, összefüggéseket gyűjtjük össze.

1.2.1. Definíció. *Egy $(X_t)_{t\geq 0}$ folyamatot Lévy-folyamatnak hívunk, ha*

(1) $X_0 = 0$*;*

(2) független növekményű folyamat, vagyis $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ *időpontokra*

$$X_{t_0}, \quad X_{t_1} - X_{t_0}, \quad \ldots, \quad X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

független valószínűségi változók;

(3) stacionárius folyamat, tehát $0 \leq s < t$*-re valamint tetszőleges* $h \geq 0$*-ra*

$$X_{t+h} - X_{s+h} \stackrel{d}{=} X_t - X_s;$$

(4) és sztochasztikusan folytonos, ennélfogva minden $\varepsilon > 0$ *esetén*

$$\lim_{h\to 0} \mathbb{P}\left(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

A definíció (2) tulajdonságából látszik, hogy egy Lévy-folyamat Markov-folyamat is egyben, átmenetvalószínűség-függvényére pedig – az időhomogenitáson túl – teljesül a térhomogenitási tulajdonság is, vagyis

$$\mathbb{P}(s, x; t, A) = \mathbb{P}(0, 0; t - s, A - x).$$

(Formulánkban $A - x$ a szokásos Minkowski-összeget jelöli.)

A klasszikus Markov-tulajdonságon felül lényegesebbet is állíthatunk. Egy Lévy-folyamatra teljesül az *erős Markov-tulajdonság* is, vagyis ha $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ jelöli a folyamat természetes filtrációját, és ebben tekintünk egy τ 1-valószínűséggel véges megállási időt, akkor tetszőleges $s > 0$-ra

$$\mathbb{P}\left(X_{\tau+s} \in A \mid \mathcal{F}_\tau\right) = \mathbb{P}\left(X_{\tau+s} \in A \mid X_\tau\right).$$

Trajektóriák szempontjából is lényeges tulajdonság, hogy minden Lévy-folyamatnak létezik càdlàg típusú modifikációja.

Most rátérünk egy speciális Lévy-folyamat leírására egy kézenfekvő feltétel megkövetelése mellett, amit önhasonlóságnak nevezünk. E tulajdonság a pénzügyi modellezés területén teljesen általános, rengeteg egyszerűsítést hordoz magában.

1.2.2. Definíció. *Az $(X_t)_{t\geq 0}$ folyamatot önhasonlónak nevezzük, ha létezik olyan $H > 0$ kitevő, amire tetszőleges $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ felosztás és $a > 0$ mellett*

$$\left(X_{at_1}, X_{at_2}, \ldots, X_{at_n}\right) \stackrel{d}{=} \left(a^H X_{t_1}, a^H X_{t_2}, \ldots, a^H X_{t_n}\right).$$

Nagyobb általánosságban a^H helyett szokás egy $b(a)$ függvénnyel hivatkozni az önhasonlóság rendjére. Azonban némi számolással belátható, hogy e mögött hatvány lépték rejlik. Ezt a H-val jelölt hatványkitevőt szokás az *önhasonlóság exponensé*nek, speciálisabb körökben a folyamat *Hurst-index*ének nevezni. Utóbbi elnevezés használatos a hosszú emlékezetű idősoros modellek területén (gondolva itt például az ARIMA típusú modellekre), illetve a Wiener-folyamatnál (ahol speciálisan $H = \frac{1}{2}$).

1.2.3. Definíció. *Az Y valószínűségi változó stabilis eloszlású, amennyiben rögzített n-re az $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ Y-nal azonos eloszlású, tőle és egymástól is független változókhoz léteznek olyan $c(n)$ és $d(n)$ számok, melyekre*

$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n \stackrel{d}{=} c(n)Y + d(n).$$

Amennyiben $d(n) = 0$ minden n esetén, úgy Y szigorúan stabilis eloszlású.

Az előző definícióban szereplő $c(n)$ normáló konstansra több is igaz (a stabilis és szigorúan stabilis eloszlásoknál egyaránt), tudniillik alkalmas $\alpha \in (0, 2]$ esetén értéke

$$c(n) = n^{1/\alpha}.$$

Itt az α-t a stablis eloszlás *stabilitási index*ének hívjuk, vagy a rövidség kedvéért az eloszlást *α-stabilis*nak.

Ennek tükrében az $(X_t)_{t\geq 0}$ Lévy-folyamatot *stabilis (szigorúan stabilis) folyamat*nak nevezzük, amennyiben X_1 eloszlása stabilis (szigorúan stabilis). A fent nevezett két objektum között szoros kapcsolat áll fenn.

1.2.4. Állítás. *Az $(X_t)_{t\geq 0}$ Lévy-folyamat pontosan akkor önhasonló a H exponenssel, ha szigorúan stabilis α stabilitási indexszel. Továbbá teljesül $\alpha = 1/H$.*

Értelemszerűen következik, hogy egy önhasonló Lévy-folyamat esetén $H \geq \frac{1}{2}$ szükséges feltétel.

Visszatérve az eloszlásokhoz, amennyiben X α-stabilis eloszláscsaládból származik, úgy annak karakterisztikus függvénye felírható négy paraméter segítségével, nevezetesen

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \begin{cases} \exp\left(-\sigma^\alpha |t|^\alpha \left(1 - i\beta \operatorname{sgn}(t) \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\mu t\right), & \text{ha } \alpha \neq 1 \\ \exp\left(-\sigma |t| \left(1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(t) \ln |t|\right) + i\mu t\right), & \text{ha } \alpha = 1 \end{cases}$$

alakban, ahol

$\alpha \in (0,2]$	a már ismertetett stabilitási index,
$\beta \in [-1,1]$	a csúcsossági paraméter,
$\sigma \geq 0$	skálaparaméter és
$\mu \in \mathbb{R}$	az eltolásparaméter.

Ezt a továbbiakban egyszerűen $X \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, \sigma, \mu)$-val fogjuk jelölni.

Meg kell említsük még azt a lényeges tulajdonságot is, miszerint minden stabilis eloszlású változó abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre nézve, így létezik azoknak sűrűségfüggvénye (habár nem feltétlenül tudjuk zárt formában felírni – néhány kivételtől eltekintve). A paraméterezés önmagában rengeteg információt hordoz magában az eloszlást illetően, ezek közül a számunkra legszükségesebbeket az alábbi állításban fogjuk egybe.

1.2.5. Állítás. *(1) Ha $X_i \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta_i, \sigma_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$ független valószínűségi változók, akkor $X_1 + X_2 \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, \sigma, \mu)$, ahol*

$$\beta = \frac{\beta_1 \sigma_1^\alpha + \beta_2 \sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}, \qquad \sigma = \left(\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha\right)^{1/\alpha}, \qquad \mu = \mu_1 + \mu_2.$$

(2) Ha $X \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, \sigma, \mu)$ és $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $d \in \mathbb{R}$ konstansok, úgy

$$X + d \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, \sigma, \mu + d), \quad cX \sim \begin{cases} \mathcal{S}(\alpha, \operatorname{sgn}(c)\beta, |c|\sigma, c\mu), & \text{ha } \alpha \neq 1 \\ \mathcal{S}\left(1, \operatorname{sgn}(c)\beta, |c|\sigma, c\mu - \frac{2}{\pi} c (\ln |c|) \sigma\beta\right), & \text{ha } \alpha = 1 \end{cases}.$$

(3) Az eloszlás pontosan akkor szigorúan stabilis, ha $\alpha \neq 1$ és $\mu = 0$, vagy ha $\alpha = 1$ és $\beta = 0$.

(4) Az eloszlás pontosan akkor szimmetrikus (a 0 pontra), ha $\beta = \mu = 0$.

(5) $\alpha < 1$ és $\beta = 1$ értékek mellett a sűrűségfüggvény tartója a $[\mu, \infty)$ félegyenes.

(6) Az abszolút momentumokra teljesülnek a következők:

$$\mathbb{E}|X|^p \begin{cases} < \infty, & 0 < p < \alpha \\ = \infty, & \alpha \leq p \end{cases}.$$

Eloszlás	α	β	σ	μ
Normális eloszlás, $\mathcal{N}(\mu, 2\sigma^2)$	2	0	$(0,\infty)$	$\mathbb{R}$
Cauchy-eloszlás	1	0	$(0,\infty)$	$\mathbb{R}$
Lévy-eloszlás	$1/2$	1	$(0,\infty)$	$\mathbb{R}$
Stabilis szubordinátor	$(0,1)$	1	$(0,\infty)$	0

1. táblázat. Példák stabilis eloszlásokra, paramétereik szerint.

Az 1. táblázatban összegyűjtöttük néhány ismertebb stabilis eloszlás paraméterét. Itt fontos megjegyeznünk, hogy a stabilis szubordinátor most eloszlást jelent szemben a szubordinátor folyamattal, melyet hamarosan szintén definiálunk. Ezt az eloszláscsaládot azonban előtte részletesebben áttekintjük.

1.2.6. Állítás. *Legyen $X \sim \mathcal{S}(\alpha, 1, \sigma, 0)$ stabilis szubordinátor eloszlású, és jelölje annak sűrűségfüggvényét $f_X(x)$. Ekkor igazak az alábbiak.*

(1) $\operatorname{supp} f_X = [0,\infty)$, *és így* $\mathbb{P}(X \leq 0) = 0$*;*

(2) A tartó végpontjaiban igazak az alábbi aszimptotikák ([13]):

$$f_X(x) \sim \frac{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-\frac{1-\alpha/2}{1-\alpha}}}{\sqrt{2\pi\alpha(1-\alpha)}} e^{-(1-\alpha)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}}, \qquad \textit{amint } x \to 0+$$
$$f_X(x) \sim \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha-1}, \qquad \textit{amint } x \to \infty.$$

(3) Létezik a változó Laplace-transzformáltja, ami $\sigma = \left(\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right)^{1/\alpha}$ *esetén*

$$\mathbb{E}\left(e^{-\lambda X}\right) = e^{-\lambda^\alpha}.$$

1.2.7. Definíció. *Egy 1-valószínűséggel monoton növekedő Lévy-folyamatot (Lévy-)szubordinátornak hívunk. Továbbá ha a folyamat önhasonló is, akkor az α-stabilis Lévy-szubordinátor.*

E definícióval immár teljessé válik a fogalomkör. A korábbi megjegyzéseinket ötvözve tehát amennyiben $(U_t)_{t\geq 0}$ α-önhasonló Lévy-szubordinátor, úgy tetszőleges $0 \leq s < t$ esetén annak növekményére fennáll

$$U_t - U_s \stackrel{d}{=} (t-s)^{1/\alpha} U_1, \tag{1.11}$$

vagyis a növekmények stabilis szubordinátor eloszlásúak. A továbbiakban a szubordinátor kifejezést következetesen a folyamatra fogjuk használni, nem az eloszlásra.

Az (1.11) alakból, valamint az 1.2.5. Állítás (1) és (2) pontjából az is látszik, hogy egy szóba jövő α-stabilis Lévy-szubordinátor folyamatot át tudunk paraméterezni úgy, hogy

$$U_1 \sim \mathcal{S}\left(\alpha, 1, \left(\cos\frac{\alpha\pi}{2}\right)^{1/\alpha}, 0\right) \tag{1.12}$$

fennálljon. Ez az eljárás a későbbiekben rendkívül hasznos lesz számunkra, a Laplace-transzformáltakra ekkor ugyanis teljesül tetszőleges $t > 0$ mellett, hogy

$$\mathbb{E}\left(e^{-\lambda U_t}\right) = e^{-t\lambda^\alpha}. \tag{1.13}$$

Tekintve ezt a folyamatot az U_t változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét jelölje rendre $F_{U_t}(x)$, illetve $f_t(x)$. Az (1.11) eloszlás-egyenlet segítségével az α-önhasonlóság felírható az eloszlás- és sűrűségfüggvények segítségével, nevezetesen tetszőleges $t, s > 0$-ra

$$F_{U_t}(x) = F_{U_s}\left(\left(\tfrac{t}{s}\right)^{-1/\alpha} x\right), \qquad \text{ebből pedig} \qquad f_t(x) = \left(\tfrac{t}{s}\right)^{-1/\alpha} f_s\left(\left(\tfrac{t}{s}\right)^{-1/\alpha} x\right). \tag{1.14}$$

1.2.8. Megjegyzés. *Az alszakasz utolsó megjegyzéseként állítjuk, hogy – a karakterisztikus függvény konvergenciájából kifolyólag – az $\alpha \to 1-$ limesszel $U_1 \to 1$ 1-valószínűséggel. Eszerint a későbbi $\alpha = 1$ jelöléssel a nem át-időskálázott folyamatra kívánunk utalni.*

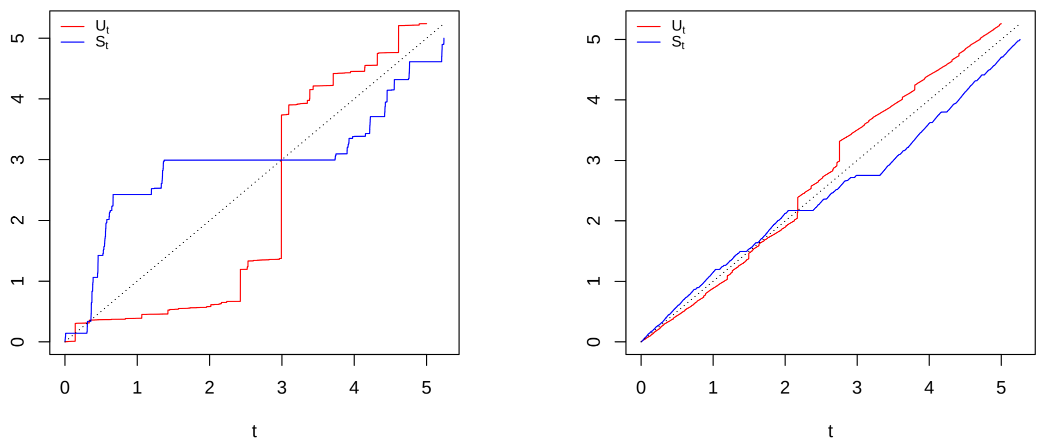
1.3. Inverz stabilis szubordinátorok

Következő alszakaszunkban a már korábban látottak segítségével bevezetünk egy új szubordinációs folyamatot. Maradjunk továbbra is az (1.12) által meghatározott $(U_t)_{t\geq 0}$ α-stabilis Lévy-szubordinátornál, és a korábban felvezetett jelölésrendszerénél, illetve jelöljük a természetes filtrációját $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-val. A jelzett folyamat inverzfolyamata alatt azt az $(S_t)_{t\geq 0}$ folyamatot értjük, amit az

$$S_t = \inf\{\tau \geq 0\colon U_\tau \geq t\}. \tag{1.15}$$

szintelérési idők határoznak meg.

Két ilyen folyamat trajektóriáját szemlélteti a 2. ábra, pirossal a Lévy-szubordinátorét, kékkel annak inverzét. A bal oldalin észrevehetjük azt, hogy az $[1.5, 3.5]$ intervallumon a folyamat megáll. Az ilyen véletlen szakaszokat később az idő megállásával fogjuk azonosítani.



2. ábra. α-stabilis Lévy-szubordinátor és inverzfolyamata, a) $\alpha = 0.5$, b) $\alpha = 0.95$.

Definícióból következően az új mozgás valóban szubordinátor marad, trajektóriája 0-ból indul, ám a trajektóriák balról folytonosak, jobbról határértékkel rendelkeznek, ezáltal

$$\{S_t \leq \tau\} = \{U_\tau \geq t\}, \tag{1.16}$$

minden $s \geq 0$-re $s \leq U_{S_s}$, továbbá az inverzfolyamat nem feltétlenül lesz Lévy-folyamat többé: a független növekményűség és stacionaritás – így a markovitás is – kivész belőle.

Nem szabad szem elől tévesztenünk továbbra sem, a szakdolgozat célja a bevezetés alatt álló módszerek biztosítási területen való megszólaltatása. Egy élő szerződés esetében ugyanis elengedhetetlen, hogy azt a tartama alatt bármely időpontban értékelni tudjuk pénzügyi, kockázati szempontból (nem csak a megkötés időpontjában). Ez indokolja, hogy ebben a részben kiemelt hangsúlyt fektetünk olyan feltételes vizsgálatokra, melyek kellő időbeli rugalmasságot biztosítanak, illetve pótolják a korábban megemlített hiányosságokat.

Mindez technikailag azt jelenti, hogy tulajdonképpen feltételesen vagyunk kíváncsiak az $(S_t)_{t\geq 0}$ folyamat növekményeire. Formalizálva valamely $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ függvényre minden $0 \leq s \leq t$ mellett szeretnénk kiszámolni az

$$\mathbb{E}\left(g\left(S_t - S_s\right) \mid \mathcal{F}_{S_s}\right)$$

feltételes várható értéket (ahol ez létezik). A következő állítások során a [6] logikai gondolatmenetét fogjuk alkalmazni, néhány helyen kiegészítve, illetve másfajta bizonyítást adva.

Vegyük észre, hogy – definíciójából kifolyólag – minden $\tau \geq 0$-ra $\{S_s \leq \tau\} \in \mathcal{F}_{S_s}$, valamint 1-valószínűséggel véges, tehát $\mathcal{F}$-megállási idő. Nyilván az erős Markov-tulajdonságot kihasználva a feltételes eloszlásfüggvény felírható, mint

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(S_t - S_s \leq \tau \mid \mathcal{F}_{S_s}\right) &= \mathbb{P}\left(S_t \leq \tau + S_s \mid \mathcal{F}_{S_s}\right) = \mathbb{P}\left(U_{\tau+S_s} \geq t \mid \mathcal{F}_{S_s}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(U_{S_s+\tau} - U_{S_s} \geq t - U_{S_s} \mid U_{S_s}\right).\end{aligned}$$

Mivel az egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezés – a növekmények függetlensége miatt – független a feltételtől, a jobb oldal pedig mérhető arra nézve, így alkalmas h függvényre teljesül

$$\mathbb{P}\left(S_t - S_s \leq \tau \mid \mathcal{F}_{S_s}\right) = h\left(U_{S_s}\right),$$

ami a stacionaritás alapján pedig

$$h(u) = \mathbb{P}\left(U_{S_s+\tau} - U_{S_s} \geq t - u\right) = \mathbb{P}\left(U_\tau \geq t - u\right).$$

A fenti alakból u és t nagyságrendje szerinti eseteket különböztethetünk meg (ami természetesen $\mathcal{F}_{S_s}$-mérhető). Így ha a feltételből kiolvasható $t < u = U_{S_s}$ teljesül, akkor $\mathbb{P}\left(U_\tau \geq t - u\right) = 1$. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy a $\{t < U_{S_s}\}$ eseményhalmazokon az inverzfolyamat megáll az s és t időpillanatok között.

Az $u \leq t$ tartományon (1.14) azonosságból kiindulva átírhatjuk más alakra a valószínűséget, ha elvégezzük az $y = \left(\frac{t-u}{x}\right)^{\alpha}$ helyettesítést:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(U_\tau \geq t-u\right) &= \int_{(t-u)\tau^{-1/\alpha}}^{\infty} f_1(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^\tau \frac{t-u}{\alpha} y^{-1/\alpha-1} f_1\left((t-u)y^{-1/\alpha}\right)\,\mathrm{d}y = \int_0^\tau \frac{t-u}{\alpha y} f_y(t-u)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy $\{U_{S_s} \leq t\}$ eseményhalmazokon az $S_t - S_s$-nek $\mathcal{F}_{S_s}$-ra vonatkozó feltételes eloszlásának létezik reguláris változata, létezik a $g\left(\tau \mid U_{S_s}\right)$-sel jelölt feltételes sűrűségfüggvény és értéke $\tau \geq 0$-ra

$$g_t(\tau \mid U_{S_s})\, \mathbb{1}_{\{U_{S_s} \leq t\}} = \frac{t - U_{S_s}}{\alpha\tau}\, f_\tau\left(t - U_{S_s}\right)\, \mathbb{1}_{\{U_{S_s} \leq t\}}. \tag{1.17}$$

Összefoglalva az eddig számoltakat:

1.3.1. Állítás. *Az $S_t - S_s$ $\mathcal{F}_{S_s}$-re vonatkozó feltételes eloszlása felírható, mint*

$$\mathbb{P}\left(S_t - S_s \leq \tau \mid \mathcal{F}_{S_s}\right) = \mathbb{P}\left(S_t - S_s \leq \tau \mid U_{S_s}\right)\, \mathbb{1}_{\{U_{S_s} \leq t\}} + \mathbb{1}_{\{t < U_{S_s}\}},$$

és amennyiben $u \leq t$, úgy

$$\mathbb{P}\left(S_t - S_s \leq \tau \mid U_{S_s} = u\right) = \mathbb{P}\left(U_\tau \geq t-u\right).$$

Az előzményekből látszik, hogy sok esetben a feltételes várható értékek abban az esetben lesznek érdekesek nekünk, amikor a kiolvasható $0 \leq s \leq U_{S_s} \leq t$ nagyságrendi eset áll fenn. A továbbiakban rátérünk ezen kifejezések számolására, melyben segítségünkre lesz a következő segédállítás.

1.3.2. Lemma. *Az* (1.17) *egyenletben foglalt feltételes sűrűségfüggvény önhasonló a következő értelemben, tetszőleges $x > 0$-ra*

$$g_t(\tau \mid U_{S_s})\, \mathbb{1}_{\{U_{S_s} \leq t\}} = \left(\frac{t - U_{S_s}}{x}\right)^{-\alpha} g_{U_{S_s}+x}\left(\tau \left(\frac{t-U_{S_s}}{x}\right)^{-\alpha} \,\middle|\, U_{S_s}\right)\, \mathbb{1}_{\{U_{S_s} \leq t\}}.$$

Bizonyítás. Az (1.14) és (1.17) egyenlőségek egymás utáni alkalmazásával:

$$\begin{aligned} g_t(\tau \mid U_{S_s})\, \mathbb{1}_{\{U_{S_s} \leq t\}} &= \frac{t-U_{S_s}}{\alpha\tau} f_\tau(t - U_{S_s})\, \mathbb{1}_{\{U_{S_s} \leq t\}} = \\ &= \frac{t-U_{S_s}}{\alpha\tau} \left(\frac{\tau}{x}\right)^{-1/\alpha} f_x\left((t-U_{S_s})\left(\frac{\tau}{x}\right)^{-1/\alpha}\right)\, \mathbb{1}_{\{U_{S_s} \leq t\}} = \\ &= \frac{x}{\alpha\tau} f_{\tau\left(\frac{x}{t-U_{S_s}}\right)^{\alpha}}(x)\, \mathbb{1}_{\{U_{S_s} \leq t\}} = \\ &= \left(\frac{t-U_{S_s}}{x}\right)^{-\alpha} g_{U_{S_s}+x}\left(\tau\left(\frac{t-U_{S_s}}{x}\right)^{-\alpha} \,\middle|\, U_{S_s}\right)\, \mathbb{1}_{\{U_{S_s} \leq t\}}, \end{aligned}$$

amivel az igazolandó egyenlőséget kaptuk vissza. $\square$

1.3.3. Állítás. *Tetszőleges $p > 0$ esetén $S_t - S_s$-nek létezik $\mathcal{F}_{S_s}$-re vett feltételes p-edik momentuma, ami*

$$\mathbb{E}\left((S_t - S_s)^p \mid \mathcal{F}_{S_s}\right) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p\alpha+1)} \left(t - U_{S_s}\right)^{p\alpha} \ \mathbb{1}_{\{U_{S_s} \le t\}}.$$

Bizonyítás. Legyen $v \ge U_{S_s} = u$, és induljunk ki U_{v-u} Laplace-transzformáltjából, ami az (1.13) azonosság alapján felírható, mint

$$e^{-(v-u)\lambda^\alpha} = \mathbb{E}\left(e^{-\lambda U_{v-u}}\right) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} f_{v-u}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Válasszunk egy rögzített $t \ge U_{S_s} = u$ számot. Használva az (1.17) és (1.3.2) index-áttéréseket, az egyenlőséget tovább folytathatjuk:

$$\begin{aligned} e^{-(v-u)\lambda^\alpha} &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{\alpha\,(v-u)}{x} g_{u+x}\left(v - u \mid U_{S_s} = u\right)\,\mathrm{d}x = \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{v-u}{x} \left(\frac{x}{t-u}\right)^{-\alpha} g_t\left((v-u)\left(\frac{x}{t-u}\right)^{-\alpha} \,\Big|\, U_{S_s} = u\right)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Szorozva az egyenlet két oldalát $(v-u)^{p-1}$-gyel, majd integrálva azt v szerint az $\left[u, \infty\right)$ intervallumon a jobb oldal éppen

$$\int_u^\infty (v-u)^{p-1}\, e^{-(v-u)\lambda^\alpha}\,\mathrm{d}v = \int_0^\infty v^{p-1} e^{-v\lambda^\alpha}\,\mathrm{d}v = \lambda^{-p\alpha} \int_0^\infty w^{p-1} e^{-w}\,\mathrm{d}w = \lambda^{-p\alpha}\Gamma(p).$$

A bal oldal nagyon hasonlóan – helyettesítésekkel, és a Fubini-tétellel –

$$\begin{aligned} &\alpha \int_u^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(v-u)^p}{x} \left(\frac{x}{t-u}\right)^{-\alpha} g_t\left((v-u)\left(\frac{x}{t-u}\right)^{-\alpha} \,\Big|\, U_{S_s} = u\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = \\ &= \alpha \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{y^p}{x} \left(\frac{x}{t-u}\right)^{-\alpha} g_t\left(y\left(\frac{x}{t-u}\right)^{-\alpha} \,\Big|\, U_{S_s} = u\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \alpha \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{x^{\alpha(p-1)-1}}{(t-u)^{\alpha(p-1)}} \left(y\left(\frac{x}{t-u}\right)^{-\alpha}\right)^p g_t\left(y\left(\frac{x}{t-u}\right)^{-\alpha} \,\Big|\, U_{S_s} = u\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{x^{\alpha(p-1)-1}}{(t-u)^{\alpha(p-1)}} \int_0^\infty \left(y\left(\frac{x}{t-u}\right)^{-\alpha}\right)^p g_t\left(y\left(\frac{x}{t-u}\right)^{-\alpha} \,\Big|\, U_{S_s} = u\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{x^{p\alpha-1}}{(t-u)^{p\alpha}} \int_0^\infty z^p g_t(z \mid U_{S_s} = u)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\ &= \alpha\,(t-u)^{-p\alpha}\,\mathbb{E}\left((S_t - S_s)^p \mid U_{S_s} = u\right) \int_0^\infty e^{-\lambda x} x^{p\alpha-1}\,\mathrm{d}x = \\ &= \alpha\,(t-u)^{-p\alpha}\,\mathbb{E}\left((S_t - S_s)^p \mid U_{S_s} = u\right) \lambda^{-p\alpha}\Gamma(p\alpha). \end{aligned}$$

Összevetve az eddig számoltakat

$$\mathbb{E}\left((S_t - S_s)^p \mid U_{S_s} = u\right) = (t-u)^{p\alpha} \frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha\Gamma(p\alpha)} = (t-u)^{p\alpha} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p\alpha+1)},$$

ha $u \le t$. Egyszerűen ellenőrizhető az is, hogy $\mathbb{E}\left((S_t - S_s)^p \mid \mathcal{F}_{S_s}\right) \ \mathbb{1}_{\{t < U_{S_s}\}} = 0$, amivel állításunkat beláttuk. □

Az imént számolt feltételes momentumok összefüggésben állnak a stabilis eloszlású U változók negatív momentumaival, habár ez magában az 1.3.3. Állításban nem tükröződik. Ezt a kapcsolatot alább fogalmazzuk, és indokoljuk meg.

1.3.4. Állítás. *Az $S_t - S_s$-nek $\mathcal{F}_{S_s}$-re vonatkozó $p > 0$-edik feltételes momentumára tetszőleges $\tau > 0$ mellett fennáll az alábbi összefüggés:*

$$\mathbb{E}\left((S_t - S_s)^p \mid \mathcal{F}_{S_s}\right) = (t - U_{S_s})^{p\alpha} \tau^p \mathbb{E}\left(U_\tau^{-p\alpha}\right) \mathbb{1}_{\{U_{S_s} \le t\}}.$$

A bizonyításhoz az alábbi lemmát fogjuk felhasználni.

1.3.5. Lemma. *Legyen $X\colon \Omega \to \mathbb{R}_+$ valószínűségi változó és $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ függvény, mely alkalmas $\phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ függvénnyel előáll $\Phi(x) = \Phi(0) + \int_0^x \phi(t)\,\mathrm{d}t$ integrálalakban. Ekkor*

$$\mathbb{E}\left(\Phi \circ X\right) = \Phi(0) + \int_0^\infty \phi(t)\mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t.$$

Észrevehetjük, hogy deriválható függvény esetén magával a deriválttal teljesül az előállítás. Az 1.3.5. Lemma segítségével könnyűszerrel igazolhatjuk az 1.3.4. Állításban foglaltakat.

Bizonyítás. Korábban láttuk, hogy az $\{t < U_{S_s}\}$ eseményeken a momentumok értéke 0, szorítkozzunk hát az $\{U_{S_s} \le t\}$ halmazokra.

Az $S_t - S_s$ pozitív értékű valószínűségi változó és a $\Phi(t) = t^p$ függvénynek minden $p > 0$ mellett létezik a fenti integrál-előállítása ($\phi(x) = px^{p-1}$), így alkalmazható az 1.3.5. Lemma. Ezen kívül számolunk az (1.17), (1.14) egyenletekkel és a Fubini-tétellel.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left((S_t - S_s)^p \mid U_{S_s} = u\right) &= \int_0^\infty \phi(x)\mathbb{P}\left(S_t - S_s > x \mid U_{S_s} = u\right)\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^\infty \int_x^\infty \phi(x)\,\frac{t-u}{\alpha y}\left(\frac{y}{\tau}\right)^{-1/\alpha} f_\tau\left((t-u)\left(\frac{y}{\tau}\right)^{-1/\alpha}\right)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^\infty \int_0^{(t-u)\left(\frac{\tau}{x}\right)^{1/\alpha}} \phi(x)\, f_\tau(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^\infty f_\tau(z) \int_0^{\left(\frac{(t-u)}{z}\right)^\alpha \tau} \phi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \\
&= \int_0^\infty f_\tau(z)\,\left[x^p\right]_{x=0}^{\left(\frac{(t-u)}{z}\right)^\alpha \tau}\,\mathrm{d}z = \\
&= (t-u)^{p\alpha}\tau^p \int_0^\infty z^{-p\alpha} f_\tau(z)\,\mathrm{d}z = (t-u)^{p\alpha}\tau^n \mathbb{E}\left(U_\tau^{-p\alpha}\right),
\end{aligned}$$

és ezzel állításunk bizonyítást nyert. □

Egy lépést téve a momentumok segítségével kiszámoljuk a szóban forgó eloszlás feltételes Laplace-transzformáltját.

1.3.6. Állítás. *Az $S_t - S_s$-nek $\mathcal{F}_{S_s}$-re vonatkozóan létezik feltételes Laplace-transzformáltja, és az*

$$\mathbb{E}\left(e^{-\lambda(S_t - S_s)} \mid \mathcal{F}_{S_s}\right) = E_{\alpha,1}\left(-\lambda(t - U_{S_s})^\alpha\right) \mathbb{1}_{\{U_{S_s} \le t\}} + \mathbb{1}_{\{t < U_{S_s}\}}.$$

Itt $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta > 0$ számokra $E_{\alpha,\beta}$ jelöli a *Mittag–Leffler-függvény*t, mely $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ egész függvény, és

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)}.$$

Bizonyítás. A $\{t < U_{S_s}\}$ esetben az $\mathbb{E}\left(e^{-\lambda(S_t - S_s)} \mid \mathcal{F}_{S_s}\right) \mathbb{1}_{\{t < U_{S_s}\}} = 1$ egyenlőség könnyen meggondolható, így elegendő $\{U_{S_s} \leq t\}$-re vizsgálódnunk. Fejtsük Taylor-sorba az exponenciális részt. Mivel az 1.3.3. Állításban kiszámoltuk a feltételes momentumokat, a konvergencia teljesülése mellett igazolható az állítás. És valóban a Fubini-tétel miatt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-\lambda(S_t - S_s)} \mid U_{S_s} = u\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda(S_t - S_s))^k}{\Gamma(k+1)} \;\Big|\; U_{S_s} = u\right) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\left((S_t - S_s)^k \mid U_{S_s} = u\right)(-\lambda)^k}{\Gamma(k+1)} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda(t-u)^{\alpha})}{\Gamma(k\alpha + 1)} = E_{\alpha,1}\left(-\lambda(t-u)^{\alpha}\right),
\end{aligned}$$

ami pedig éppen a bizonyítandó formulát adja vissza. □

A Laplace-transzformált és az α-stabilis Lévy-szubordinátor és inverzfolyamatának az 1.3.4. Állításbeli kapcsolata lehetőséget ad annak az ismert ténynek egy alternatív belátására, miszerint $U_t^{-\alpha}$ Laplace-transzformáltja

$$\mathbb{E}\left(e^{-\lambda U_t^{-\alpha}}\right) = E_{\alpha,1}\left(-\frac{\lambda}{t}\right). \tag{1.18}$$

Érdemes még arra is kitérnünk, hogy a Laplace-transzformáltra adott képlet mátrixok esetén is érvényben marad. Tetszőleges $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra

$$\mathbb{E}\left(e^{\mathbf{M}(S_t - S_s)} \mid \mathcal{F}_{S_s}\right) = \boldsymbol{E}_{\alpha,1}\left(\mathbf{M}\left(t - U_{S_s}\right)^{\alpha}\right) \mathbb{1}_{\{U_{S_s} \leq t\}} + \mathbf{I}_n \, \mathbb{1}_{\{t < U_{S_s}\}},$$

ahol $\boldsymbol{E}_{\alpha,1}(\mathbf{M}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{M}^k}{\Gamma(k\alpha+1)}$ a *mátrix Mittag–Leffler-függvény.*

A későbbiekben megnézzük, hogy viselkedik több dimenzióban az eloszlásfüggvény. Ezt esetek szerint kezelve alább adjuk meg, a bizonyítása hasonlatos a már kiszámolt egydimenziós 1.3.1. Állítás eloszlásfüggvényéhez.

1.3.7. Állítás. *A $0 \leq s \leq t_1 \leq t_2$ indexelés esetén $(S_{t_1} - S_s, S_{t_2} - S_s)$-nek $\mathcal{F}_{S_s}$-re vonatkozó feltételes eloszlása $\tau_1, \tau_2 \geq 0$-ra*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(S_{t_1} - S_s \leq \tau_1, S_{t_2} - S_s \leq \tau_2 \mid \mathcal{F}_{S_s}\right) = \\
&\quad = \mathbb{P}\left(S_{t_1} - S_s \leq \tau_1, S_{t_2} - S_s \leq \tau_2 \mid U_{S_s}\right) \mathbb{1}_{\{U_{S_s} \leq t_1 \leq t_2\}} + \\
&\qquad + \mathbb{P}\left(S_{t_2} - S_s \leq \tau_2 \mid U_{S_s}\right) \mathbb{1}_{\{t_1 < U_{S_s} \leq t_2\}} + \mathbb{1}_{\{t_1 \leq t_2 < U_{S_s}\}}.
\end{aligned}$$

Itt a második tag az 1.3.1. Állításból kifolyólag $t_1 < u \leq t_2$-re

$$\mathbb{P}\left(S_{t_2} - S_s \leq \tau_2 \mid U_{S_s} = u\right) = \mathbb{P}\left(U_{\tau_2} \geq t_2 - u\right),$$

az első tagnál pedig τ_1 és τ_2 nagyságrendje szerinti további esetszétválasztással élve $u \le t_1$-re

$$\mathbb{P}\left(S_{t_1} - S_s \le \tau_1, S_{t_2} - S_s \le \tau_2 \mid U_{S_s} = u\right) =$$
$$= \begin{cases} \mathbb{P}\left(U_{\tau_1} \ge t_1 - u, U_{\tau_2} \ge t_2 - u\right), & \text{ha } \tau_1 \le \tau_2 \\ \mathbb{P}\left(U_{\tau_2} \ge t_2 - u\right), & \text{ha } \tau_2 < \tau_1 \end{cases}.$$

Végül a $0 \le s \le t_1 \le t_2$ nagyságrendek mellett az együttes eloszlások segítségével $(S_{t_2} - S_{t_1})$ két függvényének feltételes várható értékét szeretnénk kiszámolni, amikre a későbbiekben erősen támaszkodunk. Egyrészt a Laplace-transzformáltját, másrészt pedig a második momentumát. Mindkét levezetésnél alkalmazni fogjuk az 1.3.5. Lemma többdimenziós megfelelőjét, mely a következő.

1.3.8. Lemma. *Legyenek $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}_+$ valószínűségi változók, és $\Phi\colon \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+^2$ olyan kétváltozós függvény, mely alkalmas $\phi_x, \phi_y, \phi_{x,y} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ függvényekkel előáll a*

$$\Phi(x,y) = \Phi(0,0) + \int_0^x \phi_x(u,0)\,\mathrm{d}u + \int_0^y \phi_y(0,v)\,\mathrm{d}v + \int_0^x \int_0^y \phi_{x,y}(u,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$

integrálalakban. Ekkor teljesül, hogy

$$\mathbb{E}\left(\Phi \circ (X,Y)\right) = \Phi(0,0) + \int_0^\infty \phi_x(u,0)\mathbb{P}(X > u)\,\mathrm{d}u + \int_0^\infty \phi_y(0,v)\mathbb{P}(Y > v)\,\mathrm{d}v +$$
$$+ \int_0^\infty \int_0^\infty \phi_{x,y}(u,v)\mathbb{P}(X > u, Y > v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

1.3.9. Állítás. *Tetszőleges $0 \le s \le t_1 \le t_2$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ értékek mellett fennáll az alábbi egyenlőség,*

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda\left(S_{t_2} - S_{t_1}\right)} \mid \mathcal{F}_{S_s}\right) = \mathbb{E}\left(e^{\lambda\left(S_{t_2} - S_{t_1}\right)} \mid U_{S_s}\right) \mathbb{1}_{\{U_{S_s} \le t_1\}} +$$
$$+ \mathbb{E}\left(e^{\lambda\left(S_{t_2} - S_s\right)} \mid U_{S_s}\right) \mathbb{1}_{\{t_1 < U_{S_s} \le t_2\}} + \mathbb{1}_{\{t_2 < U_{S_s}\}} =$$
$$= \frac{-\alpha\lambda}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{t_1 - U_{S_s}} x^{\alpha-1} E_{\alpha,1}\left(\lambda(t_2 - U_{S_s} - x)^\alpha\right)\,\mathrm{d}x\, \mathbb{1}_{\{U_{S_s} \le t_1\}} +$$
$$+ E_{\alpha,1}\left(\lambda\left(t_2 - U_{S_s}\right)^\alpha\right) \mathbb{1}_{\{U_{S_s} \le t_2\}} + \mathbb{1}_{\{t_2 < U_{S_s}\}}.$$

Bizonyítás. A $\{t_2 < U_{S_s}\}$ eseményeken triviális az állítás, a $\{t_1 < U_{S_s} \le t_2\}$ halmazok esetén pedig vegyük észre, hogy $S_{t_1} - S_s = 0$ miatt

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda\left(S_{t_2} - S_{t_1}\right)} \mid \mathcal{F}_{S_s}\right) \mathbb{1}_{\{t_1 < U_{S_s} \le t_2\}} = \mathbb{E}\left(e^{\lambda\left(S_{t_2} - S_s\right)} \mid \mathcal{F}_{S_s}\right) \mathbb{1}_{\{t_1 < U_{S_s} \le t_2\}},$$

1.3.6. Állítás szerint pedig ez a bizonyítandó formulát indukálja.

Az $\{U_{S_s} \le t_1\}$ esetben alkalmazzuk az 1.3.8. Lemmát a $\Phi(x,y) = e^{c(x-y)}$ függvényre, ami eleget tesz az

$$e^{\lambda(x-y)} = 1 + \int_0^x \lambda e^{\lambda u}\,\mathrm{d}u + \int_0^y -\lambda e^{-\lambda v}\,\mathrm{d}v + \int_0^x \int_0^y -\lambda^2 e^{\lambda(u-v)}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$

formának, valamint az $X = S_{t_2} - S_s$ és $Y = S_{t_1} - S_s$ változókra F_{S_s}-re való feltételes várható értéket véve. Így nyerjük az

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda(S_{t_2}-S_{t_1})} \mid U_{S_s}=u\right) = 1 + \underbrace{\int_0^\infty \lambda e^{\lambda\tau_2}\mathbb{P}\left(S_{t_2}-S_s > \tau_2 \mid U_{S_s}=u\right)\,\mathrm{d}\tau_2}_{A} -$$

$$-\underbrace{\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda\tau_1}\mathbb{P}\left(S_{t_1}-S_s > \tau_1 \mid U_{S_s}=u\right)\,\mathrm{d}\tau_1}_{B} -$$

$$\underbrace{-\int_0^\infty\int_0^\infty \lambda^2 e^{\lambda(\tau_2-\tau_1)}\mathbb{P}\left(S_{t_1}-S_s > \tau_1, S_{t_2}-S_s > \tau_2 \mid U_{S_s}=u\right)\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2}_{C}$$

egyenletet. Az integrálok kiszámolásával haladunk tovább. Vegyük észre, hogy az 1.3.5. Lemma, illetve az 1.3.6. Állításban foglalt Laplace-transzformált alapján az A és B értékek könnyen számolhatók, mivel

$$A = \mathbb{E}\left(e^{\lambda\left(S_{t_2}-S_s\right)} \mid U_{S_s}=u\right) - 1 = E_{\alpha,1}\left(\lambda\left(t_2-u\right)^\alpha\right) - 1 \qquad \text{és}$$
$$B = \mathbb{E}\left(e^{-\lambda\left(S_{t_1}-S_s\right)} \mid U_{S_s}=u\right) - 1 = E_{\alpha,1}\left(-\lambda\left(t_1-u\right)^\alpha\right) - 1.$$

A C számolását két esetben fogjuk vizsgálni az 1.3.7. Állítás szerint a τ_1 és τ_2 viszonya szerint.

$$C = \underbrace{-\int_0^\infty\int_0^{\tau_2} \lambda^2 e^{\lambda(\tau_2-\tau_1)}\mathbb{P}\left(S_{t_1}-S_s > \tau_1, S_{t_2}-S_s > \tau_2 \mid U_{S_s}=u\right)\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2}_{C_1} -$$

$$\underbrace{-\int_0^\infty\int_{\tau_2}^\infty \lambda^2 e^{\lambda(\tau_2-\tau_1)}\mathbb{P}\left(S_{t_1}-S_s > \tau_1, S_{t_2}-S_s > \tau_2 \mid U_{S_s}=u\right)\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2}_{C_2}.$$

Először a C_2-t határozzuk meg nagyban támaszkodva az 1.3.7. Állításra. Itt $\tau_1 > \tau_2$ és $t_1 \leq t_2$ miatt igaz lesz, hogy majdnem minden vizsgált $\{U_{S_s} \leq t_1\}$ halmazokon teljesül, hogy a túlélésfüggvény

$$\left\{S_{t_1}-S_s > \tau_1, S_{t_2}-S_s > \tau_2 \mid U_{S_s}=u\right\} = \left\{S_{t_1}-S_s > \tau_1 \mid U_{S_s}=u\right\},$$

ezáltal a Fubini-tétellel, valamint a korábbi képletekből kifolyólag

$$
\begin{aligned}
C_2 &= -\int_0^\infty \int_{\tau_2}^\infty \lambda^2 e^{\lambda(\tau_2-\tau_1)} \mathbb{P}\left(S_{t_1} - S_s > \tau_1 \mid U_{S_s} = u\right) \, \mathrm{d}\tau_1 \, \mathrm{d}\tau_2 = \\
&= -\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda\tau_1} \mathbb{P}\left(S_{t_1} - S_s > \tau_1 \mid U_{S_s} = u\right) \int_0^{\tau_1} \lambda e^{\lambda\tau_2} \, \mathrm{d}\tau_2 \, \mathrm{d}\tau_1 = \\
&= -\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda\tau_1} \mathbb{P}\left(S_{t_1} - S_s > \tau_1 \mid U_{S_s} = u\right) \left[e^{\lambda\tau_2}\right]_{\tau_2=0}^{\tau_1} \, \mathrm{d}\tau_1 = \\
&= -\lambda \int_0^\infty \mathbb{P}\left(S_{t_1} - S_s > \tau_1 \mid U_{S_s} = u\right) \, \mathrm{d}\tau_1 - \\
&\quad - \int_0^\infty -\lambda e^{-\lambda\tau_1} \mathbb{P}\left(S_{t_1} - S_s > \tau_1 \mid U_{S_s} = u\right) \, \mathrm{d}\tau_1 = \\
&= \lambda \mathbb{E}\left(S_{t_1} - S_s \mid U_{S_s} = u\right) - \left(\mathbb{E}\left(e^{-\lambda\left(S_{t_1} - S_s\right)} \mid U_{S_s} = u\right) - 1\right) = \\
&= -\lambda \frac{(t_1 - u)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - E_{\alpha,1}\left(-\lambda (t_1 - u)^\alpha\right) + 1.
\end{aligned}
$$

A C_1 esetén hosszasabb számolással járunk el. Először Az 1.3.7. Állításban foglalt együttes eloszlásfüggvényből $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2$-re az együttes túlélésfüggvényt meghatározva:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(S_{t_1} - S_s > \tau_1, S_{t_2} - S_s > \tau_2 \mid U_{S_s} = u\right) = \mathbb{P}\left(U_{\tau_1} < t_1 - u, U_{\tau_2} < t_2 - u\right) = \\
&\quad = \mathbb{P}\left(U_{\tau_1} < t_1 - u, U_{\tau_2} - U_{\tau_1} < t_2 - u - U_{\tau_1}\right) = \\
&\quad = \int_0^{t_1-u} \mathbb{P}\left(U_{\tau_2-\tau_1} < t_2 - u - x\right) \, \mathrm{d}F_{U_{\tau_1}}(x) = \\
&\quad = \int_0^{t_1-u} \mathbb{P}\left(S_{t_2-x} - S_s > \tau_2 - \tau_1 \mid U_{S_s} = u\right) \, \mathrm{d}F_{U_{\tau_1}}(x).
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

Itt az egyenlőségek U_{τ_1} és $U_{\tau_2} - U_{\tau_1}$ függetlensége valamint a stacionaritás alapján nyilvánvalóak. Az U_{τ_1} eloszlás abszolút folytonosságát kihasználva visszaírva, $w = \tau_2 - \tau_1$-et helyettesítve, majd az integrál-sorrendek felcserélésével:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= -\int_0^\infty \int_0^\infty \lambda^2 e^{\lambda w} \int_0^{t_1-u} f_{\tau_1}(x) \, \mathbb{P}\left(S_{t_2-x} - S_s > w \mid U_{S_s} = u\right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}w \, \mathrm{d}\tau_1 = \\
&= -\int_0^{t_1-u} \int_0^\infty \lambda^2 e^{\lambda w} \, \mathbb{P}\left(S_{t_2-x} - S_s > w \mid U_{S_s} = u\right) \int_0^\infty f_{\tau_1}(x) \, \mathrm{d}\tau_1 \, \mathrm{d}w \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Használva az (1.14) egyenletet $s = 1$-re, majd az $y = x\tau_1^{-1/\alpha}$ helyettesítést τ_1 integrációs változó szerint megjelenik U_1-nek $-\alpha$-adik momentuma, amire alkalmazhatjuk az 1.3.4. Állítást, vagyis

$$
\begin{aligned}
C_1 &= -\int_0^{t_1-u} \int_0^\infty \lambda^2 \alpha x^{\alpha-1} e^{\lambda w} \, \mathbb{P}\left(S_{t_2-x} - S_s > w \mid U_{S_s} = u\right) \int_0^\infty y^{-\alpha} f_1(y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}w \, \mathrm{d}x = \\
&= -\lambda\alpha \mathbb{E}\left(U_1^{-\alpha}\right) \int_0^{t_1-u} x^{\alpha-1} \int_0^\infty \lambda e^{\lambda w} \, \mathbb{P}\left(S_{t_2-x} - S_s > w \mid U_{S_s} = u\right) \, \mathrm{d}w \, \mathrm{d}x = \\
&= -\frac{\lambda\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{t_1-u} x^{\alpha-1} \left(\mathbb{E}\left(e^{\lambda\left(S_{t_2-x} - S_s\right)} \mid U_{S_s} = u\right) - 1\right) \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Legutoljára az 1.3.5. Lemma szerint jártunk el. A Laplace-transzformáltra vonatkozó összefüggést beírva

$$\begin{aligned}C_1 &= -\frac{\lambda\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{t_1-u} x^{\alpha-1}E_{\alpha,1}(\lambda\,(t_2-x-u)^\alpha)\,\mathrm{d}x + \frac{\lambda\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\frac{x^\alpha}{\alpha}\right]_{x=0}^{t_1-u} = \\ &= -\frac{\lambda\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{t_1-u} x^{\alpha-1}E_{\alpha,1}(\lambda\,(t_2-u-x)^\alpha)\,\mathrm{d}x + \frac{\lambda\,(t_1-u)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.\end{aligned}$$

Összegyűjtve az összes eddig számolt tagokat az $1+A+B+C_1+C_2$ összeg éppen a bizonyítandó formula jobb oldalát adja vissza. □

Megjegyezzük, hogy az előbbi állítás akkor is érvényben marad $\lambda\in\mathbb{R}$ helyett tetszőleges $\mathbf{M}\in\mathbb{R}^{n\times n}$-es mátrixszal és a mátrix Mittag–Leffler függvénnyel.

Utoljára pedig a második momentumot számoljuk.

1.3.10. Állítás. *Tetszőleges $0\le s\le t_1<t_2$ értékek mellett fennáll az alábbi egyenlőség,*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((S_{t_2}-S_{t_1})^2 \mid \mathcal{F}_{S_s}\right) &= \frac{2}{\Gamma(2\alpha+1)}\left(t_2-U_{S_s}\right)^{2\alpha}\ \mathbb{1}_{\{t_1<U_{S_s}\le t_2\}} + \\ &+ \frac{2\alpha}{\Gamma(\alpha+1)^2}\left(t_2-U_{S_s}\right)^{2\alpha}\int_0^{\frac{t_2-t_1}{t_2-U_{S_s}}}(1-x)^{\alpha-1}x^\alpha\,\mathrm{d}x\ \mathbb{1}_{\{U_{S_s}\le t_1\}}.\end{aligned}$$

Bizonyítás. Az előző bizonyításhoz hasonlóan a $\{t_2<U_{S_s}\}$ eseményeken triviális az állítás, $\{t_1<U_{S_s}\le t_2\}$-n pedig az 1.3.3. Állítást kapjuk vissza.

Az $\{U_{S_s}\le t_1\}$ halmazon az 1.3.8. Lemma feltételeinek eleget tesz az

$$(x-y)^2 = \int_0^x 2u\,\mathrm{d}u + \int_0^y 2v\,\mathrm{d}v - \int_0^x\int_0^y 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

integrálelőállítás, és így

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((S_{t_2}-S_{t_1})^2 \mid U_{S_s}=u\right) &= \int_0^\infty 2\tau_2\,\mathbb{P}\left(S_{t_2}-S_s>\tau_2 \mid U_{S_s}=u\right)\,\mathrm{d}\tau_2 + \\ &+ \int_0^\infty 2\tau_1\,\mathbb{P}\left(S_{t_1}-S_s>\tau_1 \mid U_{S_s}=u\right)\,\mathrm{d}\tau_1 - \\ &- \int_0^\infty\int_0^{\tau_2} 2\,\mathbb{P}\left(S_{t_1}-S_s>\tau_1, S_{t_2}-S_s>\tau_2 \mid U_{S_s}=u\right)\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2 - \\ &- \int_0^\infty\int_{\tau_2}^{\infty} 2\,\mathbb{P}\left(S_{t_1}-S_s>\tau_1, S_{t_2}-S_s>\tau_2 \mid U_{S_s}=u\right)\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2.\end{aligned}$$

Mivel az utolsó kettős integrál Fubini-tétellel

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_{\tau_2}^{\infty} 2\,\mathbb{P}\left(S_{t_1}-S_s>\tau_1, S_{t_2}-S_s>\tau_2 \mid U_{S_s}=u\right)\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2 = \\ &\quad= \int_0^\infty\int_0^{\tau_1} 2\,\mathbb{P}\left(S_{t_1}-S_s>\tau_1,\ \mid U_{S_s}=u\right)\,\mathrm{d}\tau_2\,\mathrm{d}\tau_1 = \\ &\quad= \int_0^\infty 2\tau_1\,\mathbb{P}\left(S_{t_1}-S_s>\tau_1,\ \mid U_{S_s}=u\right)\,\mathrm{d}\tau_1,\end{aligned}$$

ezért egyszerűsítések után azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\left((S_{t_2}-S_{t_1})^2 \mid U_{S_s}=u\right) = \mathbb{E}\left((S_{t_2}-S_s)^2 \mid U_{S_s}=u\right) -$$
$$- \underbrace{\int_0^\infty \int_0^{\tau_2} 2\,\mathbb{P}\left(S_{t_1}-S_s>\tau_1, S_{t_2}-S_s>\tau_2 \mid U_{S_s}=u\right)\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2}_{A}.$$

Az A értéke az (1.19) egyenlet alapján, a $w=\tau_2-\tau_1$ helyettesítéssel valamint az előző bizonyításban látottakat ide citálva végeredményben az alábbi formát ölti.

$$A = \int_0^\infty \int_0^\infty 2 \int_0^{t_1-u} f_{\tau_1}(x)\,\mathbb{P}\left(S_{t_2-x}-S_s>w \mid U_{S_s}=u\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}\tau_1 =$$
$$= \frac{2\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{t_1-u} x^{\alpha-1}\,\mathbb{E}\left(S_{t_2-x}-S_s \mid U_{S_s}=u\right)\,\mathrm{d}x.$$

A keresett második momentumhoz írjuk be az 1.3.3. Állítás képletét, majd az $y=\frac{t_2-u-x}{t_2-u}$ helyettesítéssel jelenítsük meg a teljes béta-függvényt. (A vizsgált halmazokon ekkor $y\in[0,1]$ teljesül.)

$$\mathbb{E}\left((S_{t_2}-S_{t_1})^2 \mid U_{S_s}=u\right) =$$
$$= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2\alpha+1)}(t_2-u)^{2\alpha} - \frac{2\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{t_1-u} x^{\alpha-1} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-x-u)^\alpha\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{2}{\Gamma(2\alpha+1)}(t_2-u)^{2\alpha} - \frac{2\alpha}{\Gamma^2(\alpha+1)}(t_2-u)^{2\alpha} \int_{\frac{t_2-t_1}{t_2-u}}^1 y^{\alpha-1}y^\alpha\,\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{2}{\Gamma(2\alpha+1)}(t_2-u)^{2\alpha} - \frac{2\alpha}{\Gamma^2(\alpha+1)}(t_2-u)^{2\alpha}\left(B(\alpha,\alpha+1) - \int_0^{\frac{t_2-t_1}{t_2-u}} (1-y)^{\alpha-1}y^\alpha\,\mathrm{d}y\right).$$

Utolsó lépésben kihasználva az ismert $B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ azonosságot éppen a bizonyítandó kifejezést kapjuk vissza a vizsgált tartományon. □

1.3.11. Következmény. *Az $s\le t$ nagyságrendek esetén*

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\,\mathbb{E}\left((S_{t+h}-S_t)^2 \mid \mathcal{F}_{S_s}\right) = 0.$$

Bizonyítás. Ismét elegendő csak az $\{U_{S_s}\le t\}$ eseményekre szorítkoznunk. Ekkor az 1.3.10. Állítás eredményével

$$\frac{1}{h}\,\mathbb{E}\left((S_{t+h}-S_t)^2 \mid U_{S_s}=u\right) = \frac{2\alpha}{h\Gamma^2(\alpha+1)}(t+h-u)^{2\alpha} \int_0^{\frac{h}{t+h-u}} (1-y)^{\alpha-1}y^\alpha\,\mathrm{d}y \le$$
$$\le \frac{2\alpha}{\Gamma^2(\alpha+1)}(t-u)^{\alpha-1}\frac{1}{h}(t+h-u)^{\alpha+1} \int_0^{\frac{h}{t+h-u}} y^\alpha\,\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{2(t-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+2)}h^\alpha,$$

ahol a $h\to 0+$ határátmenetben több is igaz, $\mathbb{E}\left((S_{t+h}-S_t)^2 \mid U_{S_s}=u\right) = O\left(h^{1+\alpha}\right)$. □

1.4. Frakcionális deriváltak

Mint a bevezetőben írtuk, a sztochasztikus folyamatok hátterében gyakorta az eloszlásokra vonatkozó, azok "fejlődését" leíró parciális differenciálegyenletek állnak. Ebben az aspektusban szemlélődve egyfajta általánosításra nyílik lehetőségünk, amennyiben értelmeznénk a deriváltakat nem csak egész rendekben is. A kiterjesztési lehetőséget már a XIX. században vizsgálták neves matematikusok (Laplace, Fourier, Riemann, Liouville, Heaviside). Ezen a vonalon jutunk el a frakcionális differenciálegyenletek elméletéhez, amiket részletekbe menően numerikus példákon keresztül mutat be [14].

A dolgozat ezen pontján megemlítünk egy másik lehetséges derivált-kiterjesztést, és rávilágítunk a már definiált Mittag–Leffler-függvény kapcsolatára a frakcionális differenciálegyenletekkel.

1.4.1. Definíció. *Legyen $0 \leq n-1 < \alpha \leq n$, ahol $n \in \mathbb{N}$. Ekkor definiáljuk a D_x^α Caputo-derivált operátort a következőképpen, tetszőleges f függvényre*

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-s)^{n-1-\alpha} \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}s^n}(s)\,\mathrm{d}s,$$

ahol létezik.

A definícióból látszik, hogy például a $\mathcal{C}^n([0,\infty))$ függvényekre létezik az α-rendű Caputo-derivált. Az operátor további tulajdonságait alább fejtjük ki, közvetlenül a definícióból levezethetnénk.

1.4.2. Állítás. *Legyen $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, valamint tegyük fel, hogy léteznek az alább szereplő Caputo-deriváltak. Ekkor*

(1) egész n-ekre a szokásos deriváltat adja vissza, vagyis $D_x^n f(x) = f^{(n)}(x)$;

(2) lineáris, vagyis minden $\lambda \in \mathbb{R}$-re, és f, g függvényekre

$$D_x^\alpha(\lambda f + g)(x) = \lambda D_x^\alpha f(x) + D_x^\alpha g(x);$$

(3) α szerint egész helyeken "szakad" a következő értelemben,

$$\lim_{\alpha \to n-} D_x^\alpha f(x) = D_x^n f(x), \quad \text{és} \quad \lim_{\alpha \to n-1+} D_x^\alpha f(x) = D_x^{n-1} f(x) - D_x^{n-1} f(0);$$

(4) általában nem kommutatív, vagyis ha $m \in \mathbb{N}$, akkor

$$D_x^\alpha D_x^m f(x) = D_x^{m+\alpha} f(x) \neq D_x^m D_x^\alpha f(x);$$

(5) létezik egyfajta sor szerinti előállítása a következők szerint,

$$D_x^\alpha f(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} x^{k-\alpha};$$

Tekintsük a következő speciális Cauchy-feladatot:

$$\left.\begin{aligned} D_x^\alpha f(x) - \lambda f(x) = 0 \\ f^{(k)}(0) = a_k \end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

ahol $x > 0$, $n - 1 < \alpha \leq n$ és $a_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Ennek explicit megoldását tudjuk felírni a Mittag–Leffler-függvény segítségével:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k E_{\alpha,k+1}\left(\lambda x^\alpha\right).$$

1.4.3. Következmény. *Amennyiben $\alpha \in (0, 1]$, úgy a Caputo-derivált operátor sajátfüggvénye a Mittag–Leffler-függvény ($\alpha = 1$ esetben speciálisan az exponenciális függvény).*

1.4.4. Megjegyzés. *A Caputo-derivált értelmezhető mátrix értékű függvények esetén is, mint elemenkénti Caputo-derivált. Ezáltal az 1.20. differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó megoldás akkor is érvényben marad, hogy ha λ helyett tetszőleges $\mathbf{M}$ mátrixot tekintünk. Speciálisan értjük ezalatt, hogy*

$$D_x^\alpha \boldsymbol{E}_{\alpha,1}\left(\mathbf{M}x^\alpha\right) = \mathbf{M}\boldsymbol{E}_{\alpha,1}\left(\mathbf{M}x^\alpha\right) = \boldsymbol{E}_{\alpha,1}\left(\mathbf{M}x^\alpha\right)\mathbf{M}.$$

1.4.5. Példa. *Ismert példa Einstein 1905-ös eredménye, vagy közvetlenül a Fokker–Planck-egyenletek alapján, hogy a $(B_t)_{t\geq 0}$ Brown-mozgás $p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$ sűrűségfüggvényei kielégítik a hővezetési egyenletet:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p(x,t) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} p(x,t), \qquad p(x,0) = \delta(x).$$

Amennyiben pedig tekintjük – a dolgozat bevezetőjében már említett – (1.15) *folyamattal át-időskálázott $(B_{S_t})_{t\geq 0}$ Brown-mozgást, úgy annak $p_\alpha(x,t)$ sűrűségfüggvényei kielégítik az alábbi frakcionális differenciálegyenletet, [13]:*

$$D_t^\alpha p_\alpha(x,t) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} p_\alpha(x,t), \qquad p_S^*(x,0) = \delta_0(x).$$

1.5. Duplán sztochasztikus rendszerek

A dolgozat ezen pontján az eddig részletesen vizsgált két sztochasztikus folyamatot illesztjük össze. Legyen $(S_t)_{t\geq 0}$ az $(U_t)_{t\geq 0}$ α-stabilis Lévy-szubordinátor inverzfolyamata, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ pedig továbbra is az utóbbi természetes filtrációja. A $(\theta_t)_{t\geq 0}$ olyan Markov-lánc, mely független az előző folyamatoktól, valamint teljesíti az (1.2) és (1.3) feltételezéseket. Állapotterét jelölje $I = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, természetes filtrációját $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$, illetve – maradva az 1.1. alfejezet jelöléseinél – átmenetvalószínűség-mátrixát $\boldsymbol{P}(t)$, intenzitásmátrixát pedig $\mathbf{Q}$.

Ekkor tekintsük a $(\theta_{S_t})_{t\geq 0}$ sztochasztikusan idő-átskálázott folyamatot. A továbbiakban e folyamat analitikai tulajdonságait vizsgáljuk.

Először is szeretnénk e mellett a szubordináció mellett "értelmesen" definiálni az átmenetvalószínűségeket. Ehhez segítségünkre válik a következő állítás.

1.5.1. Állítás. *Legyen $\mu \geq \nu \geq \tau$ három megállási idő az $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtrációban. Ekkor tetszőleges $j \in I$ állapotra*

$$\mathbb{P}\left(\theta_\mu = j \mid \mathcal{F}_\tau, \mathcal{G}_\nu\right) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{\{\theta_\nu = i\}}\, \mathbb{E}\left(p_{i,j}(\mu-\nu) \mid \mathcal{F}_\tau\right).$$

Bizonyítás. A bizonyítás egy részén felhasználjuk a következő lemmát.

1.5.2. Lemma. *Legyen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változók sorozata, melyekre teljesül az $X_n \xrightarrow{L_1} X$ konvergencia. Legyen továbbá $\mathcal{H}_n \supseteq \mathcal{H}_{n+1} \to \mathcal{H}$ σ-algebrák egy csökkenő sorozata. Ekkor*

$$\mathbb{E}\left(X_n \mid \mathcal{H}_n\right) \xrightarrow{L_1} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}).$$

A bizonyítás első részében nézzük azt az esetet, amikor a megállási idők diszkrét értékkészlettel rendelkeznek:

$$\mu \in \{0 = x_0 < x_1 < \ldots\}$$
$$\nu \in \{0 = y_0 < y_1 < \ldots\}$$
$$\tau \in \{0 = z_0 < z_1 < \ldots\}.$$

Ekkor a vizsgált feltételes várható értékre

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\theta_\mu = j \mid \mathcal{F}_\tau, \mathcal{G}_\nu\right) &= \sum_k \sum_{\ell:\, y_\ell \geq z_k} \mathbb{P}\left(\theta_\mu = j \mid \mathcal{F}_{z_k}, \mathcal{G}_{y_\ell}\right)\ \mathbb{1}_{\{\tau = z_k, \nu = y_\ell\}} = \\
&= \sum_k \sum_{\ell:\, y_\ell \geq z_k} \mathbb{E}\left(\sum_{m:\, x_m \geq y_\ell} \mathbb{1}_{\{\mu = x_m\}}\, \mathbb{1}_{\{\theta_{x_m} = j\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_{z_k}, \mathcal{G}_{y_\ell}\right) \mathbb{1}_{\{\tau = z_k, \nu = y_\ell\}} = \\
&= \sum_k \sum_{\ell:\, y_\ell \geq z_k} \mathbb{E}\left(\sum_{m:\, x_m \geq y_\ell} \mathbb{1}_{\{\mu = x_m\}}\, \mathbb{P}\left(\theta_{x_m} = j \mid \mathcal{G}_{y_\ell}\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_{z_k}, \mathcal{G}_{y_\ell}\right) \mathbb{1}_{\{\tau = z_k, \nu = y_\ell\}},
\end{aligned}$$

a teljes várható érték tétel miatt, és mert $\mathbb{1}_{\{\mu = x_m\}}$ és $\mathcal{F}_{z_k}$ függetlenek a $\mathbb{1}_{\{\theta_{x_m} = j\}}$ és $\mathcal{G}_{y_\ell}$ mennyiségektől. A Markov-tulajdonság alapján tovább számolhatunk

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\theta_\mu = j \mid \mathcal{F}_\tau, \mathcal{G}_\nu\right) = \\
&\quad = \sum_k \sum_{\ell:\, y_\ell \geq z_k} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\mu \geq y_\ell\}} \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{\{\theta_{y_\ell} = i\}}\, p_{i,j}\left(\mu - y_\ell\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_{z_k}, \mathcal{G}_{y_\ell}\right) \mathbb{1}_{\{\tau = z_k, \nu = y_\ell\}} = \\
&\quad = \sum_{i=0}^{n} \sum_k \sum_{\ell:\, y_\ell \geq z_k} \mathbb{1}_{\{\theta_{y_\ell} = i\}} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\mu \geq y_\ell\}}\, p_{i,j}\left(\mu - y_\ell\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_{z_k}, \mathcal{G}_{y_\ell}\right) \mathbb{1}_{\{\tau = z_k, \nu = y_\ell\}} = \\
&\quad = \sum_{i=0}^{n} \sum_k \sum_{\ell:\, y_\ell \geq z_k} \mathbb{1}_{\{\theta_{y_\ell} = i\}} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\mu \geq y_\ell\}}\, p_{i,j}\left(\mu - y_\ell\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_{z_k}\right) \mathbb{1}_{\{\tau = z_k, \nu = y_\ell\}},
\end{aligned}$$

rendre a $\mathcal{G}_{y_\ell}$-mérhetőség, és a tőle való függetlenség miatt. Végezetül pedig

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\theta_\mu = j \mid \mathcal{F}_\tau, \mathcal{G}_\nu\right) &= \sum_{i=0}^{n} \sum_k \mathbb{1}_{\{\theta_\nu = i\}} \mathbb{E}\left(p_{i,j}\left(\mu - \nu\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_{z_k}\right) \mathbb{1}_{\{\tau = z_k\}} = \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{\{\theta_\nu = i\}}\, \mathbb{E}\left(p_{i,j}(\mu - \nu) \mid \mathcal{F}_\tau\right).
\end{aligned}$$

Az általános esetben tekintsük a tetszőleges $\mu \geq \nu \geq \tau$ megállási idők mellé a $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diszkrét közelítő sorozatokat a következő módon:

$$\begin{aligned}
\left\{\mu_n = \tfrac{k}{2^n}\right\} &= \left\{\tfrac{k-1}{2^n} < \mu \leq \tfrac{k}{2^n}\right\} \\
\left\{\nu_n = \tfrac{l}{2^n}\right\} &= \left\{\tfrac{l-1}{2^n} < \nu \leq \tfrac{l}{2^n}\right\} \\
\left\{\tau_n = \tfrac{m}{2^n}\right\} &= \left\{\tfrac{m-1}{2^n} < \tau \leq \tfrac{m}{2^n}\right\}.
\end{aligned}$$

Ekkor nyilvánvalóan teljesül tetszőleges n mellett $\mu_n \geq \nu_n \geq \tau_n$, illetve az $n \to \infty$ limesszel az 1.5.2. Lemma értelmében

$$\mathbb{P}\left(\theta_{\mu_n} = j \mid \mathcal{F}_{\tau_n}, \mathcal{G}_{\nu_n}\right) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{\{\theta_{\nu_n}=i\}}\, \mathbb{E}\left(p_{i,j}(\mu_n - \nu_n) \mid \mathcal{F}_{\tau_n}\right) \to$$
$$\to \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{\{\theta_{\nu}=i\}}\, \mathbb{E}\left(p_{i,j}(\mu - \nu) \mid \mathcal{F}_{\tau}\right).$$

Itt kihasználtuk még az 1.1.4. Állítás (d) becslését, ezzel igazoltuk az állításunkat. □

A felírásban észrevehetjük, hogy az $\mathcal{F}$ filtrációra feltételesen és annak megállási idejéig nézve Markov-láncot kaptunk. Azonban az 1.3.9. Állítás miatt az előző felírás még tovább folytatható.

1.5.3. Következmény. *Az $s \leq t_1 \leq t_2$ időpontokban tetszőleges $j \in I$ állapotra*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\theta_{S_{t_2}} = j \mid \mathcal{F}_{S_s}, \mathcal{G}_{S_{t_1}}\right) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{\{\theta_{S_{t_1}}=i\}}\, \mathbb{E}\left(p_{i,j}(S_{t_2} - S_{t_1}) \mid \mathcal{F}_{S_s}\right) = \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{\{\theta_{S_{t_1}}=i\}}\, \mathbb{E}\left(\left[\boldsymbol{P}\left(S_{t_2} - S_{t_1}\right)\right]_{i,j} \;\middle|\; \mathcal{F}_{S_s}\right) = \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{\{\theta_{S_{t_1}}=i\}}\, \mathbb{E}\left(\left[e^{\mathbf{Q}\left(S_{t_2}-S_{t_1}\right)}\right]_{i,j} \;\middle|\; \mathcal{F}_{S_s}\right) = \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{\{\theta_{S_{t_1}}=i\}}\Bigg(\left[\frac{-\alpha\lambda}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{t_1-U_{S_s}} x^{\alpha-1}\boldsymbol{E}_{\alpha,1}\left(\mathbf{Q}(t_2 - U_{S_s} - x)^{\alpha}\right)\,\mathrm{d}x\right]_{i,j} \mathbb{1}_{\{U_{S_s}\leq t_1\}} + \\
&\quad + \left[\boldsymbol{E}_{\alpha,1}\left(\mathbf{Q}\left(t_2 - U_{S_s}\right)^{\alpha}\right)\right]_{i,j} \mathbb{1}_{\{U_{S_s}\leq t_2\}} + \left[\mathbf{I}_{n+1}\right]_{i,j}\, \mathbb{1}_{\{t_2<U_{S_s}\}}\Bigg).
\end{aligned}$$

A korábbiak tekintetében így tetszőleges $s \leq t_1 \leq t_2$ időpontokra vezessük be a – már értelmes – $\boldsymbol{P}_\alpha\left(t_1, t_2 \mid \mathcal{F}_{S_s}\right)$-sel jelölt frakcionális átmenetvalószínűség-mátrixot, mely eleget tesz az

$$\boldsymbol{P}_\alpha\left(t_1, t_2 \mid \mathcal{F}_{S_s}\right) := \left(\mathbb{P}\left(\theta_{S_{t_2}} = j \mid \theta_{S_{t_1}} = i, \mathcal{F}_{S_s}\right)\right) \tag{1.21}$$

definíciónak. Ezt az alakot látva felfedezhetjük az 1.1.1. Definícióban megalkotott átmenetvalószínűség-függvényekkel kapcsolatos analógiát, az ottani jelölés szerint csupán a $P\left(S_{t_1}, i; S_{t_2}, \{j\}\right) = p_{i,j}\left(S_{t_2} - S_{t_1}\right)$ függvények feltételes várható értékét nézzük. Szeretnénk jelezni továbbá, a $\boldsymbol{P}_\alpha$ függvény (t_1, t_2) kettős időargumentuma azt kívánja hangsúlyozni, hogy a szubordinált esetben a $\left(\theta_{S_t}\right)_{t\geq 0}$ Markov-lánc a t-időparaméter szerinti stacionaritását is elveszíti, úgynevezett inhomogén "rejtett" Markov-lánchoz jutunk.

1.5.4. Megjegyzés. *Az 1.4. alfejezetben érintett frakcionális differenciálegyenletek témaköre itt kerül szóba, ugyanis az idő-átskálázott Markov-láncoknál az* (1.5) *Kolmogorov-féle differenciálegyenlethez hasonló – immár frakcionális – differenciálegyenletet tudunk megjelölni, melynek alapjául* (1.21) *átmenetvalószínűség-mátrixösszefüggés szolgál. Legyen ugyanis tetszőleges $s, x \geq 0$ számok mellett $f(x) = \boldsymbol{P}_\alpha\left(s, U_{S_s} + x \mid \mathcal{F}_{S_s}\right)$, amire az 1.4.4. Megjegyzés szerint teljesül*

$$D_x^\alpha f(x) = \mathbf{Q} f(x).$$

Ezt a $D_x^\alpha f(x)$ kifejezést értelmezhetjük úgy, mint az intenzitásmátrix frakcionális analogonját.

Érdemes szót áldozni az adott állapotban töltött időkről. Jelölje $T_{\alpha;i}^s$ a feltételes $i \in I$ állapotban eltöltött idő eloszlását a szubordinált esetben[2], formalizálva

$$T_{\alpha;i}^s = \inf\left\{\tau \geq 0 \colon \theta_{S_{s+\tau}} \neq i, \theta_{S_s} = i\right\}.$$

Ezt az új valószínűségi változót az idő-átskálázás oldaláról is megfoghatjuk. Legyen T_i az $\mathcal{F}_{S_s}$-től és a $\mathcal{G}_{S_s}$-től is független q_i-paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor az 1.1.8. Állítás miatt

$$T_{\alpha;i}^s = \inf\{\tau \geq 0 \colon S_\tau - S_s > T_i\}.$$

1.5.5. Állítás. *A $T_{\alpha;i}^s$ változó $\mathcal{F}_{S_s}$-re vonatkozó feltételes eloszlása Mittag–Leffler.*

Bizonyítás. Ha $S_{T_{\alpha;i}^s} - S_s \leq T_i$ teljesül, akkor $S_{T_{\alpha;i}^s} \leq T_i + S_s$, s így $U_{T_i+S_s} \geq T_{\alpha;i}^s$.

Ha pedig tekintünk tetszőleges $y > T_{\alpha;i}^s$-t, arra $S_y - S_s > T_i$, és így $U_{T_i+S_s} < y$.

Összességében azt kaptuk, hogy $T_{\alpha;i}^s = U_{T_i+S_s}$, ezzel továbbmenve

$$\mathbb{P}\left(T_{\alpha;i}^s \leq t \mid \mathcal{F}_{S_s}\right) = \mathbb{P}\left(U_{T_i} \leq t - U_{S_s} \mid U_{S_s}\right) \mathbb{1}_{\{U_{S_s} \leq t\}}.$$

Az $\{U_{S_s} \leq t\}$ eseményhalmazokon ez U_{S_s} függvénye, mégpedig

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(T_{\alpha;i}^s \leq t \mid U_{S_s} = u\right) = 1 - \mathbb{P}\left(U_{T_i} > t - u \mid U_{S_s} = u\right) = \\
&= 1 - \int_0^\infty q_i e^{-q_i x}\, \mathbb{P}\left(U_x > t - u\right)\, \mathrm{d}x = 1 - \int_0^\infty q_i e^{-q_i x}\, \mathbb{P}\left(U_1 > (t-u)x^{-1/\alpha}\right)\, \mathrm{d}x = \\
&= 1 - \int_0^\infty q_i e^{-q_i (t-u)^\alpha y^{-\alpha}}\, \mathbb{P}\left(U_1 > y\right)(t-u)^\alpha \alpha y^{-\alpha-1}\, \mathrm{d}y = 1 - \mathbb{E}\left(e^{-q_i(t-u)^\alpha U_1^{-\alpha}}\right) = \\
&= 1 - E_{\alpha,1}\left(-q_i(t-u)^\alpha\right),
\end{aligned}$$

felhasználva az (1.18) összefüggést. □

Hasonlóan értelmezhetjük a frakcionális Markov-láncok $\left(N_{S_t}^X\right)_{t\geq 0}$ átmenet- és $\left(N_{S_t}^{i,j}\right)_{t\geq 0}$ i-j-számlálófolyamatát. Ezekhez kapcsolódóan belátunk egy – a későbbiekben hasznos – lemmát.

[2]Definiálhatnánk $T_{1,i}^s$-ként a nem szubordinált Markov-lánc i állapotban eltöltött idejét, de ezt már (1.8) alatt megtettük. Maradunk ebben az esetben továbbra is a T_i jelölésnél, ahol a stacionaritás miatt elhagyjuk az s időpontra vett feltételt.

1.5.6. Lemma. *Tetszőleges $s \geq 0$ és $h > 0$ számok esetén az $(s, s+h]$ intervallumon bekövetkező ugrásszámra $h \to 0+$ határátmenetben*

$$\mathbb{P}\left(N^X_{S_{s+h}} - N^X_{S_s} \geq 2 \mid \mathcal{F}_{S_s}, \mathcal{G}_{S_s}\right) = o(h).$$

Bizonyítás. Ismét elegendő azokat az eseményeket tekinteni, ahol $\{U_{S_s} \leq s+h\}$, ellenkező esetben az idő megállása miatt triviálisan teljesül az egyenlőség. Tegyük fel, hogy $\theta_{S_s} = i$ és az első ugrás $(s, s+h]$-n j-be történt. Ekkor az előző bizonyításban alkalmazott gondolatmenetet követve legyenek T_i és T_j rendre q_i és q_j paraméterű független exponenciális eloszlású változók, ekkor a

$$T^s_{\alpha;i,j} = \inf\{\tau \geq 0 \colon S_\tau - S_s > T_i + T_j\}$$

valószínűségi változót bevezetve

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(N^X_{S_{s+h}} - N^X_{S_s} \geq 2 \mid U_{S_s} = u, \theta_{S_s} = i\right) = \\
&\quad = \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \mathbb{P}\left(N^X_{S_{s+h}} - N^X_{S_s} \geq 2, \text{először } i \to j \text{ ugrás következett be} \mid U_{S_s} = u, \theta_{S_s} = i\right) = \\
&\quad = \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \mathbb{P}\left(T^s_{\alpha;i,j} \leq s+h \mid U_{S_s} = u, \theta_{S_s} = i\right).
\end{aligned}$$

És mivel itt $T^s_{\alpha;i,j} = U_{S_s+T_i+T_j}$, ezért

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(N^X_{S_{s+h}} - N^X_{S_s} \geq 2 \mid U_{S_s} = u, \theta_{S_s} = i\right) = \\
&\quad = \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \mathbb{P}\left(U_{S_s+T_i+T_j} \leq s+h \mid U_{S_s} = u, \theta_{S_s} = i\right) = \\
&\quad = \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \int_0^h e^{-q_i x} q_{i,j} \int_0^{h-x} q_j e^{-q_j y}\, \mathbb{P}\left(U_{S_{s+x+y}} \leq s+h \mid U_{S_s} = u\right) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \leq \\
&\quad \leq \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} q_{i,j} q_j \int_0^h (h-x) \,\mathrm{d}x = O(h^2)
\end{aligned}$$

a megfelelő határátmenetben. □

Végül pedig a tartózkodási idők nagyságrendjének segítségével az 1.1.11. Állítás tartalmának megfelelő azonosságot mutatunk meg, ami segítségünkre válik az i-j-számlálófolyamat Lebesgue–Stieltjes-féle integrál értelmezésénél.

1.5.7. Állítás. *Tetszőleges $i \neq j$ állapotokra az $\left(N^{i,j}_{S_t}\right)_{t\geq 0}$ számlálófolyamat növekményei $s \leq t$ helyen vett feltételes várható értékére a határértékek létezése esetén fennáll*

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\, \mathbb{E}\left(N^{i,j}_{S_{t+h}} - N^{i,j}_{S_t} \mid \mathcal{G}_{S_s}, \mathcal{F}_{S_s}\right) = \\
&\qquad \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\{\theta_{S_s}=k\}} \left(\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\, \mathbb{E}\left(\left[e^{\mathbf{Q}(S_t - S_s)}\right]_{k,i} \left[e^{\mathbf{Q}(S_{t+h} - S_t)}\right]_{i,j} \;\middle|\; \mathcal{F}_{S_s}\right)\right).
\end{aligned}$$

Bizonyítás. A növekmények határértékének vizsgálatakor az 1.5.6. Lemma értelmében kifejezetten elegendő azokat az eseményeket tekinteni, ahol $\theta_{S_t} = i$ esetén egyetlen $i \to j$ ugrás következik be a $(t, t+h]$ intervallumon, ezáltal határértékben

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\, \mathbb{E}\left(N^{i,j}_{S_{t+h}} - N^{i,j}_{S_t} \mid \mathcal{G}_{S_s}, \mathcal{F}_{S_s}\right) = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\, \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\theta_{S_t}=i\}}\, \mathbb{1}_{\{\theta_{S_{t+h}}=j\}} \,\middle|\, \mathcal{G}_{S_s}, \mathcal{F}_{S_s}\right) = \\
&= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\, \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\theta_{S_t}=i\}}\, \mathbb{1}_{\{\theta_{S_{t+h}}=j\}} \,\middle|\, \mathcal{G}_{S_t}, \mathcal{F}_{S_{t+h}}\right) \,\middle|\, \mathcal{G}_{S_s}, \mathcal{F}_{S_{t+h}}\right) \,\middle|\, \mathcal{G}_{S_s}, \mathcal{F}_{S_s}\right) = \\
&= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\, \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\theta_{S_t}=i\}}\, p_{i,j}\left(S_{t+h} - S_t\right) \,\middle|\, \mathcal{G}_{S_s}, \mathcal{F}_{S_{t+h}}\right) \,\middle|\, \mathcal{G}_{S_s}, \mathcal{F}_{S_s}\right) = \\
&= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\, \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\{\theta_{S_s}=k\}}\, p_{k,i}\left(S_t - S_s\right) p_{i,j}\left(S_{t+h} - S_t\right) \,\middle|\, \mathcal{G}_{S_s}, \mathcal{F}_{S_s}\right) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\{\theta_{S_s}=k\}} \left(\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\, \mathbb{E}\left(\left[e^{\mathbf{Q}(S_t - S_s)}\right]_{k,i} \left[e^{\mathbf{Q}(S_{t+h} - S_t)}\right]_{i,j} \,\middle|\, \mathcal{F}_{S_s}\right)\right),
\end{aligned}
$$

ami éppen az állításban szereplő kifejezés. □

1.6. Fázis típusú eloszlások

Utolsó alszakaszunkban egy – a Markov-láncokhoz szervesen kapcsolódó – eloszláscsaládot tekintünk át, a fázis típusú eloszlások családját, majd visszük át a szubordinált esetre. Ez utóbbi irodalma több-dimenziós általánosítással megtalálható [1] cikkben, ennek ellenére mi csak az egyváltozós esetre szorítkozunk.

E kis kitérőben azt fogjuk megmutatni, hogy a szubordinátorral sztochasztikusan időátskálázott folyamatban egy elnyelő állapot definiálása esetén az elnyelődésig eltelt idő felírható a Mittag–Leffler-függvénnyel.

Legyen tehát $(\theta_t)_{t\geq 0}$ Markov-lánc, mely kielégíti az (1.2) és (1.3) feltételeket. A folyamat állapottere továbbra is $I = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Feltesszük továbbá, hogy a 0-dik állapot elnyelő állapot, vagyis $p_{0,0}(t) = 1$, minden $t \geq 0$-ra, a többi n állapot pedig tranziens. Ekkor a folyamat intenzitásmátrixa a következő speciális formát ölti:

$$
\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{q} & \widetilde{\mathbf{Q}} \end{pmatrix}, \tag{1.22}
$$

ahol $\mathbf{0}$ az n-hosszú nullvektor, $\widetilde{\mathbf{Q}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ részmátrix, és $\mathbf{q} = -\widetilde{\mathbf{Q}}\mathbf{1}_n$ pedig szintén n hosszú vektor ($\mathbf{1}_n$ jelöli az n-elemű csupa 1 vektort).

Tetszőleges θ_0 kezdőállapot esetén jelölje ζ az elnyelődésig eltelt időt, vagyis

$$
\zeta = \inf\{\tau \geq 0 \colon \theta_\tau = 0\}.
$$

A θ_0 kezdőállapot diszkrét eloszlásának a $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazra koncentrált részét jelölje a $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^n$, ahol $\pi_k = \mathbb{P}(\theta_s = k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Ekkor feltesszük, hogy $\boldsymbol{\pi}^\top \mathbf{1}_n \leq 1$. Ezen jelölések mellett ζ eloszlását $(\boldsymbol{\pi}, \widetilde{\mathbf{Q}})$-paraméterű fázis-típusú eloszlásnak nevezzük, az eloszlást pedig $\mathrm{PH}(\boldsymbol{\pi}, \widetilde{\mathbf{Q}})$-ként jelöljük.

Az $F_{\mathrm{PH}(\boldsymbol{\pi},\widetilde{\mathbf{Q}})}$ fázis típusú eloszlás- és sűrűségfüggvénye ismert,

$$F_{\mathrm{PH}(\boldsymbol{\pi},\widetilde{\mathbf{Q}})}(t) = \mathbb{P}(\zeta \leq t) = 1 - \boldsymbol{\pi}^\top e^{\widetilde{\mathbf{Q}}t}\mathbf{1}_n,$$

és ez alapján nyilvánvalóan $f_{\mathrm{PH}(\boldsymbol{\pi},\widetilde{\mathbf{Q}})}(t) = \boldsymbol{\pi}^\top e^{\widetilde{\mathbf{Q}}t}\mathbf{q}$. Megjegyezzük, hogy a $\mathrm{PH}(\boldsymbol{\pi},\widetilde{\mathbf{Q}})$ eloszlásokat keverve, illetve összegezve ugyanilyen eloszlást kapunk.

Az 1.5 alfejezetben látott sztochasztikus órával időskálázott Markov-lánc esetében is hasonlóan definiálhatjuk a fázis típusú eloszlások frakcionális megfelelőjét.

Maradva a jelölésrendszernél legyen

$$\zeta_\alpha = \inf\left\{t \geq 0\colon \theta_{S_t} = 0\right\}.$$

Ha $\widetilde{\mathbf{Q}}$ a $\mathbf{Q}$ intenzitásmátrix (1.22) szerinti blokkmátrixa, akkor ζ_α eloszlását α-rendű, $(\boldsymbol{\pi},\widetilde{\mathbf{Q}})$-paraméterű frakcionális fázis típusú eloszlásnak nevezzük, és az eloszlást pedig $\mathrm{PH}_\alpha(\boldsymbol{\pi},\widetilde{\mathbf{Q}})$-vel jelöljük ($\boldsymbol{\pi}$ ugyanúgy θ_0 eloszlásának egy része).

Az (1.21) átmenetvalószínűség-mátrix segítségével könnyen beláthatjuk az alábbi állítást.

1.6.1. Állítás. *A ζ_α $\mathrm{PH}_\alpha(\boldsymbol{\pi},\widetilde{\mathbf{Q}})$-beli valószínűségi változó $\mathcal{F}_{S_s}$-re vonatkozó feltételes eloszlására fennáll*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\zeta_\alpha \leq t-s \mid \mathcal{F}_{S_s}, \mathbf{e}_{\theta_{S_s}} = \boldsymbol{\pi}\right) &= \mathbb{P}\left(\zeta_\alpha \leq t-s \mid U_{S_s}, \mathbf{e}_{\theta_{S_s}} = \boldsymbol{\pi}\right)\, \mathbb{1}_{\{U_{S_s}\leq t\}} = \\ &= \left(1 - \boldsymbol{\pi}^\top \boldsymbol{E}_{\alpha,1}\left(\widetilde{\mathbf{Q}}\,(t-U_{S_s})^\alpha\right)\mathbf{1}_n\right)\, \mathbb{1}_{\{U_{S_s}\leq t\}}.\end{aligned}$$

A fenti megfelelés egy speciális következménye, hogy

$$\mathbb{P}\left(\zeta_\alpha \leq t-s \mid \mathcal{G}_{S_s}, \mathcal{F}_{S_s}\right) = \left(1 - \mathbf{e}_{\theta_{S_s}}^\top \boldsymbol{E}_{\alpha,1}\left(\widetilde{\mathbf{Q}}\,(t-U_{S_s})^\alpha\right)\mathbf{1}_n\right)\, \mathbb{1}_{\{U_{S_s}\leq t\}}. \tag{1.23}$$

Érdekességképpen megemlítjük továbbá, hogy ha $(U_t)_{t\geq 0}$ α-stabilis Lévy-szubordinátor, mely független ζ-tól, akkor teljesül, hogy

$$\zeta_\alpha \stackrel{d}{=} \zeta^{1/\alpha}\, U_1.$$

2. fejezet

Frakcionális biztosítási modellek

Az idáig tárgyalt matematikai apparátus immár lehetővé teszi a bevezetőben említett lehetséges egészségbiztosítási modell felépítését. Ebben a fejezetben két modellt vizsgálunk: az első egyszerűbb sémán keresztül megalkotjuk azt a modellt, ahol a vizsgált duplán sztochasztikus rendszerek fontos szerephez jutnak.

2.1. Az alapmodell

Az egyszerűsített modellben a biztosítottak egészségügyi állapotát reprezentáljuk a $(\theta_t)_{t\geq 0}$ homogén Markov-lánccal, ahol az állapottér az $I = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ halmaz, valamint teljesülnek (1.2) és (1.3) kényelmi feltevéseink. Az átmenetvalószínűség-mátrix

$$\boldsymbol{P}(t) = [p_{i,j}(t)]_{i,j=0,0}^{n,n} = [\mathbb{P}(\theta_t = j \mid \theta_0 = i)]_{i,j=0,0}^{n,n}\,.$$

Legyenek az $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ vektorok az $\mathbb{R}^{n+1}$ tér azon bázisvektorai, ahol $\mathbf{e}_i$ i-edik komponense 1, a többi 0, $\mathbf{1}_n$ pedig továbbra is az n-elemű csupa 1 vektor.

Az alapmodellünkben háromféle pénzáramot fogunk megkülönböztetni úgy, hogy a Markov-lánc állapotai pontosan e három pénzcsoport mértékében fog különbözni egymástól. Fontos feltételünk továbbá, hogy kifizetések időben folytonosan teljesülnek. Tegyük fel, hogy a biztosító c_i díjat szed, és a_i járadékot fizet (például kórházi napi ellátásra) az $i \in I$ állapotú biztosítottaknak, továbbá az $i \to j$ $(i \neq j)$ állapotátmenet esetén $d_{i,j}$ mértékű egyszeri kifizetést nyújt (például egy műtét elvégzéséhez). Így persze $d_{i,i} = 0$ minden $i \in I$ esetén, amit a későbbi számolásainkban erősen ki fogunk használni. Vezessük be az alábbi mátrixokat:

$$\mathbf{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_n)^\top, \qquad \mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)^\top, \qquad \mathbf{D} = \left[d_{i,j}\right]_{i,j=0,0}^{n,n}.$$

Legyen most is $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ a Markov-lánc generálta filtráció. Tegyük fel, hogy a biztosítást a $t = 0$ időpontban kötjük, a tartama pedig legyen $T > 0$. A biztosító költségeitől tekintsünk el. Így amennyiben a folytonos időbeli hozam állandó $r > 0$, akkor a kezdeti

$t = 0$ időpillanatban az ekvivalencia elvvel kalkulált nettó díjra fennáll:

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{-rs}\mathbf{e}_{\theta_s}^\top \mathbf{c}\, \mathrm{d}s \;\middle|\; \mathcal{G}_0\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{-rs}\mathbf{e}_{\theta_s}^\top \mathbf{a}\, \mathrm{d}s \;\middle|\; \mathcal{G}_0\right) + \\ + \sum_{i=0}^{n}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{-rs} d_{i,j}\, \mathrm{d}N_s^{i,j} \;\middle|\; \mathcal{G}_0\right),$$

ahol $\int \mathrm{d}N_s^{i,j}$ az i-j-számlálófolyamat megváltozásából eredő Lebesgue–Stieltjes-integrál. Az egyenlet bal oldala a várható bevételt, jobb oldala pedig a várható kiadásokat jelenti.

Hasonlóan felírhatjuk tetszőleges $0 \le t < T$ időpontban a prospektív módon számolt V^T tartalékot, ami

$$V^T(t) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-r(s-t)} d_{i,j}\, \mathrm{d}N_s^{i,j} \;\middle|\; \mathcal{G}_t\right) + \\ + \mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-r(s-t)}\mathbf{e}_{\theta_s}^\top \mathbf{a}\, \mathrm{d}s \;\middle|\; \mathcal{G}_t\right) - \mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-r(s-t)}\mathbf{e}_{\theta_s}^\top \mathbf{c}\, \mathrm{d}s \;\middle|\; \mathcal{G}_t\right), \tag{2.1}$$

vagyis a t időpontban még várható szolgáltatások és bevételek jelenértékének különbségét. Az így definiált tartalékra numerikusan kezelhető explicit formula áll rendelkezésünkre, melyet a következő állításban fogalmazunk meg.

2.1.1. Állítás. *A definiált egészségbiztosítási modell* (2.1) *tartaléka a* $\mathbf{Q} - r\mathbf{I}_{n+1}$ *mátrix sajátértékei valós részének negativitása esetén a következő formában írható tetszőleges* $T < \infty$ *tartam és* $0 \le t < T$*-re*

$$V^T(t) = \mathbf{e}_{\theta_t}^\top (\mathbf{Q} - r\mathbf{I}_{n+1})^{-1}\left(e^{(\mathbf{Q}-r\mathbf{I}_{n+1})(T-t)} - \mathbf{I}_{n+1}\right)\left((\mathbf{a}-\mathbf{c}) + (\mathbf{Q}\odot\mathbf{D})\mathbf{1}_{n+1}\right),$$

ahol $\odot$ *jelöli két azonos méretű mátrix Hadamard-szorzatát. Ha pedig* $T = \infty$*, akkor*

$$V^\infty(t) = \mathbf{e}_{\theta_t}^\top (r\mathbf{I}_{n+1} - \mathbf{Q})^{-1}\left((\mathbf{a}-\mathbf{c}) + (\mathbf{Q}\odot\mathbf{D})\mathbf{1}_{n+1}\right).$$

Bizonyítás. A (2.1) tartalék tagjait külön-külön tudjuk számolni. A Fubini-tétellel,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-r(s-t)}\mathbf{e}_{\theta_s}^\top \mathrm{d}s \;\middle|\; \mathcal{G}_t\right) &= \int_t^T e^{-r(s-t)}\mathbb{E}\left(\mathbf{e}_{\theta_s}^\top \mid \mathcal{G}_t\right) \mathrm{d}s = \\ &= \int_t^T e^{-r(s-t)}\mathbf{e}_{\theta_t}^\top \boldsymbol{P}(s-t)\, \mathrm{d}s = \\ &= \int_t^T \mathbf{e}_{\theta_t}^\top e^{(\mathbf{Q}-r\mathbf{I}_{n+1})(s-t)}\, \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Itt kihasználtuk, hogy $0 \le t < s$-re a Markov-tulajdonságból kifolyólag a Markov-lánc feltételes várható értékére fennáll

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{e}_{\theta_s}^\top \mid \mathcal{G}_t\right) = \mathbb{E}\left(\mathbf{e}_{\theta_s}^\top \mid \theta_t\right) = \sum_{i=0}^{n}\mathbb{1}_{\{\theta_t=i\}}\sum_{j=0}^{n}\mathbf{e}_j^\top \mathbb{P}\left(\mathbf{e}_{\theta_s} = \mathbf{e}_j \mid \theta_t = i\right) = \sum_{i=0}^{n}\mathbb{1}_{\{\theta_t=i\}}\mathbf{e}_i^\top \boldsymbol{P}(s-t).$$

A feltételből $\mathbf{Q} - r\mathbf{I}_{n+1}$ mátrix invertálható, így az integrál tovább írható a primitív függvény segítségével:

$$\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-r(s-t)}\mathbf{e}_{\theta_s}^\top \,\mathrm{d}s \;\middle|\; \mathcal{G}_t\right) = \mathbf{e}_{\theta_t}^\top \left(\mathbf{Q} - r\mathbf{I}_{n+1}\right)^{-1} \left(e^{(\mathbf{Q}-r\mathbf{I}_{n+1})(T-t)} - \mathbf{I}_{n+1}\right).$$

Amennyiben a biztosító egy határozatlan tartamú szerződést ajánl az ügyfélnek, azt a $T \to \infty$ határátmenettel tudjuk értelmezni. Ebben az esetben

$$\mathbb{E}\left(\int_t^\infty e^{-r(s-t)}\mathbf{e}_{\theta_s}^\top \,\mathrm{d}s \;\middle|\; \mathcal{G}_t\right) = \mathbf{e}_{\theta_t}^\top \left(r\mathbf{I}_{n+1} - \mathbf{Q}\right)^{-1},$$

ugyancsak a $\mathbf{Q} - r\mathbf{I}_{n+1}$ sajátértéke valós részének negativitásából.

A tartalék másik tagjára alkalmazhatjuk az 1.1.12. Megjegyzésben foglaltakat, vagyis az integrálok megcserélését követően megjelenik a számlálófolyamat formális deriváltja:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-r(s-t)} d_{i,j}\,\mathrm{d}N_s^{i,j} \;\middle|\; \mathcal{G}_t\right) &= \int_t^T e^{-r(s-t)}\, d_{i,j}\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathbb{E}\left(N_x^{i,j} \mid \mathcal{G}_t\right)\Big|_{x=s} \,\mathrm{d}s = \\ &= \int_t^T e^{-r(s-t)}\, d_{i,j}\, p_{\theta_t,i}(s-t)\, q_{i,j}\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Összegezve ezt a tartalék formulája szerint minden lehetséges $i \neq j$ állapotokra, valamint kihasználva, hogy $d_{i,i} = 0$ megkapjuk

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-r(s-t)} d_{i,j}\,\mathrm{d}N_s^{i,j} \;\middle|\; \mathcal{G}_t\right) = \\ &= \mathbf{e}_{\theta_t}^\top \int_t^T e^{(\mathbf{Q}-r\mathbf{I}_{n+1})(s-t)} \left(\mathbf{Q} \odot \mathbf{D}\right) \mathbf{1}_{n+1} \,\mathrm{d}s = \\ &= \mathbf{e}_{\theta_t}^\top \left(\mathbf{Q} - r\mathbf{I}_{n+1}\right)^{-1} \left(e^{(\mathbf{Q}-r\mathbf{I}_{n+1})(T-t)} - \mathbf{I}_{n+1}\right) \left(\mathbf{Q} \odot \mathbf{D}\right) \mathbf{1}_{n+1}.\end{aligned}$$

És hasonlóan az előző taghoz, $T \to \infty$ esetén

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \mathbb{E}\left(\int_t^\infty e^{-r(s-t)} d_{i,j}\,\mathrm{d}N_s^{i,j} \;\middle|\; \mathcal{G}_t\right) = \mathbf{e}_{\theta_t}^\top \left(r\mathbf{I}_{n+1} - \mathbf{Q}\right)^{-1} \left(\mathbf{Q} \odot \mathbf{D}\right) \mathbf{1}_{n+1},$$

amivel állításunkat igazoltuk. □

2.1.2. Megjegyzés. *A Gersgorin-tétel ismeretében egy sztochasztikus mátrix spektrálsugara 1. Így speciálisan ha a* $\mathbf{Q}$ *intenzitásmátrix sajátértékei a* $\boldsymbol{P}(t)$ *sajátértékeinek (valós) logaritmusaként állnak elő, úgy* $\mathrm{Sp}(\mathbf{Q} - r\mathbf{I}_{n+1}) \subset \{z \in \mathbb{C}\colon\ \mathrm{Re}\, z < 0\}$ *teljesül.*

A 2.1.1. Állításból egyszerűen kiolvashatjuk, hogy a

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{Q} \odot \mathbf{D})\mathbf{1}_{n+1}$$

képlettel meghatározott díj megfelel a nettó várható érték elvvel kalkulált díjnak bármely tartam esetén ($V^T(0) = 0$, $V^\infty(0) = 0$), viszont a szerződés tetszőleges időpontjában 0 tartalékot ad. Ez Markov-lánc homogenitásából fakadóan nem meglepő eredmény.

Külön kiemeljük azt az esetet is, amikor maga a szerződés csak az n-edik állapotban köthető, és díj is csak ekkor folyik be (például csak egészséges ügyfeleket kívánunk biztosítani). A díj ezáltal $\mathbf{c} = c\ \mathbf{e}_n$ alakú valamely $c > 0$-val. Az ekvivalenciaegyenletek megoldása c-re véges illetve végtelen esetben

$$\begin{aligned} c^T &= \frac{\mathbf{e}_n^\top \left(\mathbf{Q} - r\mathbf{I}_{n+1}\right)^{-1} \left(e^{(\mathbf{Q}-r\mathbf{I}_{n+1})T} - \mathbf{I}_{n+1}\right) \left(\mathbf{a} + (\mathbf{Q} \odot \mathbf{D})\mathbf{1}_{n+1}\right)}{\mathbf{e}_n^\top \left(\mathbf{Q} - r\mathbf{I}_{n+1}\right)^{-1} \left(e^{(\mathbf{Q}-r\mathbf{I}_{n+1})T} - \mathbf{I}_{n+1}\right) \mathbf{e}_n}, \\ c^\infty &= \frac{\mathbf{e}_n^\top \left(r\mathbf{I}_{n+1} - \mathbf{Q}\right)^{-1} \left(\mathbf{a} + (\mathbf{Q} \odot \mathbf{D})\mathbf{1}_{n+1}\right)}{\mathbf{e}_n \left(r\mathbf{I}_{n+1} - \mathbf{Q}\right)^{-1} \mathbf{e}_n}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ezeket behelyettesítve a 2.1.1. Állítás egyenleteibe megkapjuk a tartalékra vonatkozó speciális formulát.

2.2. Frakcionális modell

A frakcionális megközelítésben az előző modellünket módosítjuk annyiban, hogy a determinisztikus időskálát az 1.5. alfejezet szerint az α-stabilis Lévy-szubordinátor inverzfolyamatára cseréljük. A jelölések megtartása mellett észrevehetjük, hogy a $t \geq 0$ időpontig rendelkezésünkre álló információ a Markov-láncból és a szubordinációból fakad, vagyis a feltételünk a $(\mathcal{G}_{S_t}, \mathcal{F}_{S_t})$ σ-algebra-rendszerekre vonatkozik. Ez alapján ebben az esetben az (2.1) tartalékképlet az alábbiak szerint módosul:

$$\begin{aligned} V_\alpha^T(t) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-r(s-t)} d_{i,j}\, \mathrm{d}N_{S_s}^{i,j} \,\middle|\, \mathcal{G}_{S_t}, \mathcal{F}_{S_t} \right) + \\ + \mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-r(s-t)} \mathbf{e}_{\theta_{S_s}}^\top \mathbf{a}\, \mathrm{d}s \,\middle|\, \mathcal{G}_{S_t}, \mathcal{F}_{S_t} \right) - \mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-r(s-t)} \mathbf{e}_{\theta_{S_s}}^\top \mathbf{c}\, \mathrm{d}s \,\middle|\, \mathcal{G}_{S_t}, \mathcal{F}_{S_t} \right), \end{aligned} \tag{2.3}$$

A tagokat a nem-frakcionális esethez hasonlóan egy állításba szedve számoljuk $T \leq \infty$ tartam esetén, majd kiterjesztjük azt határozatlan tartamra. Ehhez azonban szükségünk van az *alsó nem-teljes gamma-függvény*re definíció szinten, ami tetszőleges pozitív s, ω-ra

$$\gamma(s, \omega) = \int_0^\omega x^{s-1} e^{-x}\, \mathrm{d}x.$$

2.2.1. Állítás. *A 2.3 tartalék tagjaira teljesül egyrészt*

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-r(s-t)} \mathbf{e}_{\theta_{S_s}}^\top\, \mathrm{d}s \,\middle|\, \mathcal{G}_{S_t}, \mathcal{F}_{S_t} \right) = \\ &= \frac{\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^\top}{r} \left(1 - e^{-r\left(U_{S_t} \wedge T - t\right)}\right) + \left(e^{-r\left(U_{S_t} - t\right)} \mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^\top \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{Q}^k \gamma\left(k\alpha + 1, r\left(T - U_{S_t}\right)\right)}{r^{k\alpha+1}\Gamma(k\alpha + 1)} \right) \mathbb{1}_{\{U_{S_t} \leq T\}}, \end{aligned}$$

másrészt pedig

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-r(s-t)}d_{i,j}\,\mathrm{d}N_{S_s}^{i,j}\;\middle|\;\mathcal{G}_{S_t},\mathcal{F}_{S_t}\right)=$$

$$=e^{-r\left(U_{S_t}-t\right)}\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^{\top}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{Q}^k\gamma\left(k\alpha+\alpha,r\left(T-U_{S_t}\right)\right)}{r^{k\alpha+\alpha}\Gamma(k\alpha+\alpha)}\left(\mathbf{Q}\odot\mathbf{D}\right)\mathbf{1}_{n+1}\,\mathbb{1}_{\{U_{S_t}\leq T\}}.$$

Bizonyítás. Az első formulát a Fubini-tétellel, illetve az (1.21) átmenetvalószínűség-mátrixok ismeretében számolhatjuk:

$$\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-r(s-t)}\mathbf{e}_{\theta_{S_s}}^{\top}\,\mathrm{d}s\;\middle|\;\mathcal{G}_{S_t},\mathcal{F}_{S_t}\right)=$$

$$=\int_t^{U_{S_t}\wedge T}e^{-r(s-t)}\,\mathbb{E}\left(\mathbf{e}_{\theta_{S_s}}^{\top}\mid\mathcal{G}_{S_t},\mathcal{F}_{S_t}\right)\,\mathrm{d}s+\int_{U_{S_t}}^{T}e^{-r(s-t)}\,\mathbb{E}\left(\mathbf{e}_{\theta_{S_s}}^{\top}\mid\mathcal{G}_{S_t},\mathcal{F}_{S_t}\right)\,\mathrm{d}s\,\mathbb{1}_{\{U_{S_t}\leq T\}}=$$

$$=\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^{\top}\int_t^{U_{S_t}\wedge T}e^{-r(s-t)}\mathbf{I}_{n+1}\,\mathrm{d}s+$$

$$+\,e^{-r\left(U_{S_t}-t\right)}\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^{\top}\int_{U_{S_t}}^{T}e^{-r\left(s-U_{S_t}\right)}\boldsymbol{E}_{\alpha}\left(\mathbf{Q}\left(s-U_{S_t}\right)^{\alpha}\right)\,\mathrm{d}s\,\mathbb{1}_{\{U_{S_t}\leq T\}}.$$

A Mittag–Leffler-függvény definícióját, majd az $y=r\left(s-U_{S_t}\right)$ helyettesítést beírva

$$\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-r(s-t)}\mathbf{e}_{\theta_{S_s}}^{\top}\,\mathrm{d}s\;\middle|\;\mathcal{G}_{S_t},\mathcal{F}_{S_t}\right)=$$

$$=\frac{\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^{\top}}{r}\left(1-e^{-r\left(U_{S_t}\wedge T-t\right)}\right)+$$

$$+\,e^{-r\left(U_{S_t}-t\right)}\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^{\top}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{Q}^k}{\Gamma(k\alpha+1)}\int_{U_{S_t}}^{T}e^{-r\left(s-U_{S_t}\right)}\left(s-U_{S_t}\right)^{k\alpha}\,\mathrm{d}s\,\mathbb{1}_{\{U_{S_t}\leq T\}}=$$

$$=\frac{\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^{\top}}{r}\left(1-e^{-r\left(U_{S_t}\wedge T-t\right)}\right)+$$

$$+\,e^{-r\left(U_{S_t}-t\right)}\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^{\top}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{Q}^k}{\Gamma(k\alpha+1)}r^{-k\alpha-1}\int_0^{r\left(T-U_{S_t}\right)}e^{-y}y^{k\alpha}\,\mathrm{d}y\,\mathbb{1}_{\{U_{S_t}\leq T\}}=$$

$$=\frac{\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^{\top}}{r}\left(1-e^{-r\left(U_{S_t}\wedge T-t\right)}\right)+e^{-r\left(U_{S_t}-t\right)}\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^{\top}\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{Q}^k\frac{\gamma\left(k\alpha+1,r\left(T-U_{S_t}\right)\right)}{r^{k\alpha+1}\Gamma(k\alpha+1)}\,\mathbb{1}_{\{U_{S_t}\leq T\}},$$

ezzel megkaptuk az azonosság jobb oldalát.

A második formulát elegendő az $\{U_{S_t}\leq s\}$ halmazokon számolni, hiszen $\{s<U_{S_t}\}$-n a folyamat áll, nincs átlépés más állapotba, az integrandus így 0. Tetszőleges $i\neq j$ állapotokra a számlálófolyamat növekménye szerinti Lebesgue–Stieltjes-integrállal illetve az 1.5.7. Állításban foglaltakkal számolhatunk, miszerint

$$\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-r(s-t)}d_{i,j}\,\mathrm{d}N_{S_s}^{i,j}\;\middle|\;\mathcal{G}_{S_t},\mathcal{F}_{S_t}\right)=\int_t^T e^{-r(s-t)}d_{i,j}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathbb{E}\left(N_{S_x}^{i,j}\mid\mathcal{G}_{S_t},\mathcal{F}_{S_t}\right)\Big|_{x=s}\,\mathrm{d}s=$$

$$=\int_t^T e^{-r(s-t)}d_{i,j}\,\left(\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}\,\mathbb{E}\left(\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^{\top}e^{\mathbf{Q}(S_s-S_t)}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^{\top}e^{\mathbf{Q}(S_{s+h}-S_s)}\mathbf{e}_j\;\middle|\;\mathcal{F}_{S_t}\right)\right)\,\mathrm{d}s.$$

Az 1.5.7. Állítás alkalmazhatóságát onnan kapjuk, hogy bár az átmenet véletlen időpontja súlyozódik az exponenciális kifejezéssel, mégis annak hatása figyelmen kívül hagyható, mivel

$$\frac{1}{h}\int_0^h \sup_{0\le z\le h}\left(1-e^{-rz}\right)\,\mathrm{d}y = 1-e^{-rh}\to 0.$$

Tetszőleges $i,j\in I$ (nem feltétlenül különböző) állapotokra teljesül

$$\mathbb{E}\left(\frac{\left[e^{\mathbf{Q}(S_{s+h}-S_s)}-\mathbf{I}_{n+1}-\mathbf{Q}\left(S_{s+h}-S_s\right)\right]_{i,j}}{\left(S_{s+h}-S_s\right)^2}\cdot\frac{\left(S_{s+h}-S_s\right)^2}{h}\;\middle|\;\mathcal{F}_{S_t}\right)\to 0,$$

hiszen az (1.7) egyenlet miatt az első tört korlátos, és 1.3.11. Következmény szerint a második tört feltételes várható értéke $h\to 0+$ limeszt véve 0-hoz tart Ezáltal

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0+}\mathbb{E}\left(\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^{\top}e^{\mathbf{Q}(S_s-S_t)}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^{\top}\frac{e^{\mathbf{Q}(S_{s+h}-S_s)}-\mathbf{I}_{n+1}}{h}\mathbf{e}_j\;\middle|\;\mathcal{F}_{S_t}\right)=\\
&=\mathbb{E}\left(\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^{\top}e^{\mathbf{Q}(S_s-S_t)}\mathbf{e}_i\left(\lim_{h\to 0+}\mathbf{e}_i^{\top}\frac{e^{\mathbf{Q}(S_{s+h}-S_s)}-\mathbf{I}_{n+1}}{h}\mathbf{e}_j\right)\;\middle|\;\mathcal{F}_{S_t}\right)=\\
&=\mathbb{E}\left(\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^{\top}e^{\mathbf{Q}(S_s-S_t)}\mathbf{e}_i\left(\lim_{h\to 0+}\mathbf{e}_i^{\top}\frac{\mathbf{Q}\left(S_{s+h}-S_s\right)}{h}\mathbf{e}_j\right)\;\middle|\;\mathcal{F}_{S_t}\right).
\end{aligned}$$

Végezzük el az összegzést az $i\neq j$ indexek szerint egyaránt, majd használjuk ki, hogy $d_{i,i}=0$, amivel

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\left(\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\,\mathbb{E}\left(\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^{\top}e^{\mathbf{Q}(S_s-S_t)}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^{\top}\left(e^{\mathbf{Q}(S_{s+h}-S_s)}-\mathbf{I}_{n+1}\right)\mathbf{e}_j\;\middle|\;\mathcal{F}_{S_t}\right)\right)d_{i,j}=\\
&=\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^{\top}e^{\mathbf{Q}(S_s-S_t)}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^{\top}\left(\lim_{h\to 0+}\frac{\mathbf{Q}\left(S_{s+h}-S_s\right)}{h}\right)\mathbf{e}_j\,d_{i,j}\;\middle|\;\mathcal{F}_{S_t}\right)=\\
&=\mathbb{E}\left(\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^{\top}e^{\mathbf{Q}(S_s-S_t)}\left(\lim_{h\to 0+}\frac{S_{s+h}-S_s}{h}(\mathbf{Q}\odot\mathbf{D})\mathbf{1}_{n+1}\right)\;\middle|\;\mathcal{F}_{S_t}\right).
\end{aligned}$$

Először tekintsük azt az esetet, amikor létezik $\mathbf{Q}^{-1}$ inverz mátrix. Ekkor az előzőt folytatva

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^{\top}e^{\mathbf{Q}(S_s-S_t)}\left(\lim_{h\to 0+}\frac{S_{s+h}-S_s}{h}\left(\mathbf{Q}\odot\mathbf{D}\right)\mathbf{1}_{n+1}\right)\;\middle|\;\mathcal{F}_{S_t}\right)=\\
&=\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^{\top}\mathbb{E}\left(e^{\mathbf{Q}(S_s-S_t)}\mathbf{Q}^{-1}\left(\lim_{h\to 0+}\frac{\mathbf{Q}\left(S_{s+h}-S_s\right)}{h}\right)\;\middle|\;\mathcal{F}_{S_t}\right)(\mathbf{Q}\odot\mathbf{D})\mathbf{1}_{n+1}=\\
&=\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^{\top}\mathbb{E}\left(\mathbf{Q}^{-1}e^{\mathbf{Q}(S_s-S_t)}\left(\lim_{h\to 0+}\frac{e^{\mathbf{Q}(S_s-S_t)}-\mathbf{I}_{n+1}}{h}\right)\;\middle|\;\mathcal{F}_{S_t}\right)(\mathbf{Q}\odot\mathbf{D})\mathbf{1}_{n+1}=\\
&=\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^{\top}\mathbf{Q}^{-1}\mathbb{E}\left(\lim_{h\to 0+}\frac{e^{\mathbf{Q}(S_{s+h}-S_t)}-e^{\mathbf{Q}(S_s-S_t)}}{h}\;\middle|\;\mathcal{F}_{S_t}\right)(\mathbf{Q}\odot\mathbf{D})\mathbf{1}_{n+1}.
\end{aligned}$$

A bizonyítás ezen pontján térünk át az $\{U_{S_t}\le s\}$ tartományon való számolásra. Ismételten a Lebesgue-tétellel valamint az 1.3.6. Állítás segítségével megjelenik a Mittag–leffler-függvény deriváltja, ami

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^\top \mathbf{Q}^{-1}\left(\lim_{h\to 0+}\mathbb{E}\left(\frac{e^{\mathbf{Q}(S_{s+h}-S_t)}-e^{\mathbf{Q}(S_s-S_t)}}{h}\;\middle|\; U_{S_t}=u\right)\right)(\mathbf{Q}\odot\mathbf{D})\mathbf{1}_{n+1} = \\
&\quad = \mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^\top \mathbf{Q}^{-1}\lim_{h\to 0+}\frac{\mathbb{E}\left(e^{\mathbf{Q}(S_{s+h}-S_t)}\mid U_{S_t}=u\right)-\mathbb{E}\left(e^{\mathbf{Q}(S_s-S_t)}\mid U_{S_t}=u\right)}{h}(\mathbf{Q}\odot\mathbf{D})\mathbf{1}_{n+1} = \\
&\quad = \mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^\top \mathbf{Q}^{-1}\lim_{h\to 0+}\frac{\boldsymbol{E}_{\alpha,1}\left(\mathbf{Q}\,(s+h-u)^\alpha\right)-\boldsymbol{E}_{\alpha,1}\left(\mathbf{Q}\,(s-u)^\alpha\right)}{h}(\mathbf{Q}\odot\mathbf{D})\mathbf{1}_{n+1} = \\
&\quad = \mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^\top \mathbf{Q}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{E}_{\alpha,1}\left(\mathbf{Q}x^\alpha\right)\Big|_{x=s-u}(\mathbf{Q}\odot\mathbf{D})\mathbf{1}_{n+1} = \\
&\quad = \mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^\top \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbf{Q}^{k-1}\,(s-u)^{k\alpha-1}}{\Gamma(k\alpha)}(\mathbf{Q}\odot\mathbf{D})\mathbf{1}_{n+1}.
\end{aligned}
$$

Ezt pedig visszaírva az integrálba, majd ismét az $y = r\,(s-U_{S_t})$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-r(s-t)}d_{i,j}\,\mathrm{d}N_{S_s}^{i,j}\;\middle|\;\mathcal{G}_{S_t},\mathcal{F}_{S_t}\right) = \\
&\quad = \mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^\top \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbf{Q}^{k-1}}{\Gamma(k\alpha)}e^{-r\left(U_{S_t}-t\right)}\int_{U_{S_t}}^{T} e^{-r\left(s-U_{S_t}\right)}\left(s-U_{S_t}\right)^{k\alpha-1}\,\mathrm{d}s\,(\mathbf{Q}\odot\mathbf{D})\,\mathbf{1}_{n+1}\;\mathbb{1}_{\{U_{S_t}\le T\}} = \\
&\quad = e^{-r\left(U_{S_t}-t\right)}\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^\top \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbf{Q}^{k-1}}{r^{k\alpha}\Gamma(k\alpha)}\int_0^{r\left(T-U_{S_t}\right)} e^{-y}y^{k\alpha-1}\,\mathrm{d}s\,(\mathbf{Q}\odot\mathbf{D})\,\mathbf{1}_{n+1}\;\mathbb{1}_{\{U_{S_t}\le T\}} = \\
&\quad = e^{-r\left(U_{S_t}-t\right)}\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^\top \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbf{Q}^{k-1}\gamma\left(k\alpha, r\left(T-U_{S_t}\right)\right)}{r^{k\alpha}\Gamma(k\alpha)}(\mathbf{Q}\odot\mathbf{D})\,\mathbf{1}_{n+1}\;\mathbb{1}_{\{U_{S_t}\le T\}},
\end{aligned}
$$

ami éppen az igazolandó formula jobb oldala.

Ha pedig a $\mathbf{Q}$ mátrix szinguláris, a bizonyítást mátrixapproximációval tehetjük teljessé. A számolásban ugyanis áttérhetünk egy $\left(\mathbf{Q}^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ reguláris mátrixsorozatra, amire

$$
\left|\left|\mathbf{Q}-\mathbf{Q}^{(n)}\right|\right| \to 0, \qquad \text{ha } n\to\infty
$$

teljesül valamely $||\cdot||$ mátrixnormával. Ekkor mivel a bizonyítandó formula $\mathbf{Q}$-ban folytonos, azonnal következik az állítás. $\square$

Hasonlóan a nem-frakcionális modellhez, itt is meg tudjuk határozni a tartalékban előforduló tagok értékeit határozatlan tartamú szerződések esetén. A $T\to\infty$ határátmenetben $\mathbb{P}\left(U_{S_t}\le T\right)\to 1$, így az integrálok létezése mellett

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\int_t^\infty e^{-r(s-t)}\mathbf{e}_{\theta_{S_s}}^\top\,\mathrm{d}s\;\middle|\;\mathcal{G}_{S_t},\mathcal{F}_{S_t}\right) = \\
&\qquad\qquad = \mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^\top\frac{1-e^{-r\left(U_{S_t}-t\right)}}{r}+\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^\top\frac{e^{-r\left(U_{S_t}-t\right)}}{r}\left(\mathbf{I}_{n+1}-\mathbf{Q}r^{-\alpha}\right)^{-1},
\end{aligned}
$$

illetve ugyanekkor

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\mathbb{E}\left(\int_t^{\infty} e^{-r(s-t)}d_{i,j}\,\mathrm{d}N_{S_s}^{i,j}\,\middle|\,\mathcal{G}_{S_t},\mathcal{F}_{S_t}\right)=$$

$$=\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^{\top}\frac{e^{-r\left(U_{S_t}-t\right)}}{r^{\alpha}}\left(\mathbf{I}_{n+1}-\mathbf{Q}r^{-\alpha}\right)^{-1}(\mathbf{Q}\odot\mathbf{D})\,\mathbf{1}_{n+1}.$$

2.2.2. Megjegyzés. *Az integrálok létezésének feltétele, hogy* $\rho\left(\mathbf{Q}r^{-\alpha}\right)<1$ *teljesüljön, ahol* $\rho(\mathbf{M})$ *jelöli az* $\mathbf{M}$ *mátrix spektrálsugarát. Ekkor ugyanis*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathbf{Q}r^{-\alpha}\right)^{k}=\left(\mathbf{I}_{n+1}-\mathbf{Q}r^{-\alpha}\right)^{-1}$$

a Carl Neumann-tétel értelmében.

Ez valójában összhangban áll az $x\mapsto\boldsymbol{E}_{\alpha,1}\left(\mathbf{Q}x^{\alpha}\right)$ *mátrix értékű Mittag–Leffler-függvény Laplace-transzformálthatóságával, amiről tudjuk, hogy létezik azon* $\lambda\in\mathbb{C}$ *számokra, melyekre* $\mathrm{Re}(\lambda)\geq 0$ *és* $\rho\left(\mathbf{Q}\lambda^{-\alpha}\right)<1$.

2.2.3. Következmény. *A frakcionális modell esetén definiált* (2.3) *tartalék az alábbi alakba írható tetszőleges* $T<\infty$ *tartam és* $0\leq t<T$ *esetén*

$$\begin{aligned}V_{\alpha}^{T}(t)=&\frac{1-e^{-r\left(U_{S_t}\wedge T-t\right)}}{r}\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^{\top}(\mathbf{a}-\mathbf{c})+\\&+e^{-r\left(U_{S_t}-t\right)}\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^{\top}\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{Q}^{k}\frac{\gamma\left(k\alpha+1,r\left(T-U_{S_t}\right)\right)}{r^{k\alpha+1}\Gamma(k\alpha+1)}(\mathbf{a}-\mathbf{c})\,\mathbb{1}_{\{U_{S_t}\leq T\}}+\\&+e^{-r\left(U_{S_t}-t\right)}\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^{\top}\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{Q}^{k}\frac{\gamma\left(k\alpha+\alpha,r\left(T-U_{S_t}\right)\right)}{r^{k\alpha+\alpha}\Gamma(k\alpha+\alpha)}(\mathbf{Q}\odot\mathbf{D})\,\mathbf{1}_{n+1}\,\mathbb{1}_{\{U_{S_t}\leq T\}}.\end{aligned}$$

Ha pedig $\mathbf{Q}r^{-\alpha}$ *spektrálsugara 1-nél kisebb, úgy a* $T=\infty$ *szerződések tartaléka*

$$\begin{aligned}V_{\alpha}^{\infty}(t)=&\frac{1-e^{-r\left(U_{S_t}-t\right)}}{r}\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^{\top}(\mathbf{a}-\mathbf{c})+\\&+\frac{e^{-r\left(U_{S_t}-t\right)}}{r}\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^{\top}\left(\mathbf{I}_{n+1}-\mathbf{Q}r^{-\alpha}\right)^{-1}(\mathbf{a}-\mathbf{c})+\\&+\frac{\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^{\top}}{r^{\alpha}}\left(\mathbf{I}_{n+1}-\mathbf{Q}r^{-\alpha}\right)^{-1}(\mathbf{Q}\odot\mathbf{D})\,\mathbf{1}_{n+1}.\end{aligned}$$

Amennyiben a kezdeti díjat nettó várható érték elvvel számoljuk, $U_0=S_0=0$ és a 2.2.3. Állítás miatt teljesül véges $T<\infty$ időhorizonton, akkor

$$0=\mathbf{e}_{\theta_0}^{\top}\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{Q}^{k}\frac{\gamma\left(k\alpha+1,rT\right)}{r^{k\alpha+1}\Gamma(k\alpha+1)}(\mathbf{a}-\mathbf{c})+\mathbf{e}_{\theta_0}^{\top}\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{Q}^{k}\frac{\gamma\left(k\alpha+\alpha,rT\right)}{r^{k\alpha+\alpha}\Gamma(k\alpha+\alpha)}(\mathbf{Q}\odot\mathbf{D})\,\mathbf{1}_{n+1}.$$

Ennek az egyenletnek egy lehetséges megoldása a díjra

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}+\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma(k\alpha+1,rT)}{r^{k\alpha+1}\Gamma(k\alpha+1)}\right)^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{Q}^{k}\frac{\gamma(k\alpha+\alpha,rT)}{r^{k\alpha+\alpha}\Gamma(k\alpha+\alpha)}\right)(\mathbf{Q}\odot\mathbf{D})\,\mathbf{1}_{n+1}.$$

Tegyük fel most is, hogy a szerződésbefogadás és díjelőírás csak a biztosított egészséges n-edik állapotában történik ($\theta_0 = n$). Ezáltal az előző díj csak az n-edik komponensében nem 0 ($\mathbf{c} = c_\alpha\, \mathbf{e}_n$), pontosabban megegyezik

$$c_\alpha^T = \frac{\mathbf{e}_n^\top \left(\sum_{k=0}^\infty \mathbf{Q}^k \frac{\gamma(k\alpha+1,rT)}{r^{k\alpha+1}\Gamma(k\alpha+1)}\right)\mathbf{a} + \mathbf{e}_n^\top \left(\sum_{k=0}^\infty \mathbf{Q}^k \frac{\gamma(k\alpha+\alpha,rT)}{r^{k\alpha+\alpha}\Gamma(k\alpha+\alpha)}\right)(\mathbf{Q}\odot\mathbf{D})\,\mathbf{1}_{n+1}}{\mathbf{e}_n^\top \left(\sum_{k=0}^\infty \mathbf{Q}^k \frac{\gamma(k\alpha+1,rT)}{r^{k\alpha+1}\Gamma(k\alpha+1)}\right)\mathbf{e}_n}. \tag{2.4}$$

Egy $T = \infty$ szerződésre hasonlóan számolhatunk díjat, egyik kézenfekvő megoldásra

$$0 = \mathbf{e}_{\theta_0}^\top \left(r\mathbf{I}_{n+1} - \mathbf{Q}r^{1-\alpha}\right)^{-1}(\mathbf{a}-\mathbf{c}) + \mathbf{e}_{\theta_0}^\top \left(r^\alpha \mathbf{I}_{n+1} - \mathbf{Q}\right)^{-1}(\mathbf{Q}\odot\mathbf{D})\,\mathbf{1}_{n+1}$$

egyenletből adódik, hogy

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + r^{1-\alpha}(\mathbf{Q}\odot\mathbf{D})\,\mathbf{1}_{n+1}.$$

Így ha megint feltesszük, hogy szerződésbefogadás és díjbevétel az n-edik állapotban történik, akkor hasonló képletethez jutunk c_α-ra:

$$c_\alpha^\infty = \frac{\mathbf{e}_n^\top \left(r\mathbf{I} - \mathbf{Q}r^{1-\alpha}\right)^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{e}_n^\top \left(r^\alpha\mathbf{I} - \mathbf{Q}\right)^{-1}(\mathbf{Q}\odot\mathbf{D})\,\mathbf{1}_{n+1}}{\mathbf{e}_n^\top \left(r\mathbf{I} - \mathbf{Q}r^{1-\alpha}\right)^{-1}\mathbf{e}_n}. \tag{2.5}$$

Nyilván 2.2.3. Állítás megfelelő egyenletiben kezelve ezeket az értékeket felírtuk a kapcsolódó tartalékokat.

Ezen a ponton rávilágítunk arra a tényre, hogy az imént számolt (2.5) és (2.4) értékek $\alpha = 1$-re visszaadják a nem-frakcionális modellben hasonlóan megadott (2.2) díjat[1].

[1]Ennek ténye csupán a már közvetetten számolt

$$\left(\mathbf{Q} - r\mathbf{I}_{n+1}\right)^{-1}\left(e^{(\mathbf{Q}-r\mathbf{I}_{n+1})T} - \mathbf{I}_{n+1}\right) = \sum_{k=0}^\infty \frac{\mathbf{Q}^k\gamma(k+1,rT)}{r^{k+1}k!}$$

azonosságra támaszkodik. Azonban a $T \to \infty$ aszimptotika e két kifejezés között pontosan akkor nyújt egyezést, ha $\rho\left(\mathbf{Q}r^{-1}\right) < 1$ teljesül, a jobb szumma ugyanis csak ekkor létezik.

3. fejezet

Modellezés, eredmények

3.1. Paraméterbecslés

E dolgozat utolsó lapjain bemutatjuk a 2. fejezetbeli frakcionális modell numerikus eredményeit. Mindenekelőtt azonban röviden szót ejtünk a paraméterek természetéről, becslési eljárásukról, amit [6] is javasol.

A szerződésben rögzített pénzáramok és a piaci hozamon túlmenően a legnagyobb kihívást itt a kettős sztochasztikát meghajtó α (mint a rejtett sztochasztikus óra) illetve $\mathbf{Q}$ (mint az állapotok közötti átmenetvalószínűségek reprezentánsa) paraméterek kijelölése jelenti.

A biztosítónak azonban rendelkezésre állnak a biztosítottak időbeli kárigényei. Ezáltal elegendő csupán aktuáriusi módszerekkel megbecsülni a $\boldsymbol{P}_\alpha(0, s \mid \mathcal{F}_0)$ átmenetvalószínűségeket adott s időpontokban. Az eljárás alatt itt gondolunk olyan jogilag megengedett eszközökre, mint a kor, életmód, egészségi állapot szerinti differenciálásra. Persze, itt a kihívást a $\boldsymbol{P}_\alpha(0, s \mid \mathcal{F}_0)$ függvény megbecslése jelenti a duplán sztochasztikus rendszerben.

Amennyiben rendelkezésünkre állna $\boldsymbol{P}_\alpha(0, s \mid \mathcal{F}_0)$, úgy a (1.21) egyenletből kiindulva a keresett paraméterértékek már a legkisebb négyzetek módszerével becsülhetők a következők szerint. Ha

$$A(s \mid \alpha, \mathbf{Q}) = \boldsymbol{P}_\alpha(0, s \mid \mathcal{F}_0) - \boldsymbol{E}_{\alpha,1}\left(\mathbf{Q} s^\alpha\right),$$

akkor az $\hat{\alpha}, \hat{\mathbf{Q}}$ paramétereket az

$$\left(\hat{\alpha}, \hat{\mathbf{Q}}\right) = \arg\min_{\alpha, \mathbf{Q}} \ \mathrm{tr}\left(A(s \mid \alpha, \mathbf{Q})^\top A(s \mid \alpha, \mathbf{Q})\right)$$

minimum adja meg.

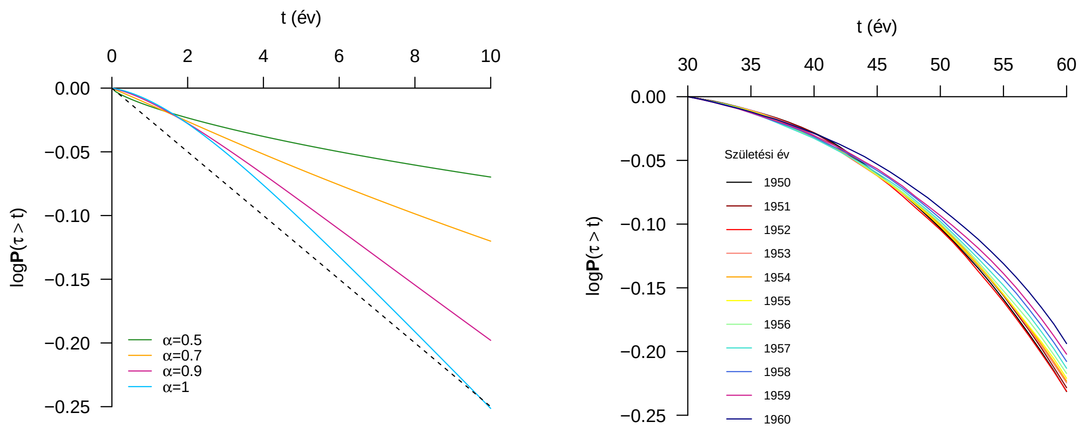
3.2. Szimulációk

Más megközelítésben szeretnénk illusztrálni a módszert a díjmeghatározásra és a tartalék szimulálására egy olyan biztosítási szerződés esetén, mely feltételei között pénzügyileg 4 állapotot különböztet meg egymástól. Mindeközben érzékenységvizsgálatot is végzünk az idő-átskálázást biztosító α paraméter szerint.

Tehát tegyük fel, hogy a szerződés kétféle betegségre nyújt fedezetet (1. és 2. állapot), valamint halál esetén (0. állapot) egyszeri kifizetést nyújt. A megkötés pillanatában a biztosított "egészségesnek" (3. állapot) minősül, díjat csak ebben az állapotban fizet. A Markov-lánc átmenetvalószínűség- illetve intenzitásmátrixa alakuljon az alábbiak szerint:

$$\boldsymbol{P}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.5 & 0.05 & 0.35 \\ 0.05 & 0.1 & 0.7 & 0.15 \\ 0.01 & 0.04 & 0.1 & 0.85 \end{pmatrix}, \text{ így } \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.1362 & -0.7160 & 0.0460 & 0.5338 \\ 0.0495 & 0.1653 & -0.3728 & 0.1580 \\ 0.0047 & 0.0505 & 0.1298 & -0.1850 \end{pmatrix}.$$

Ezekből kiindulva a túlélési valószínűség (1.23) formulából adódik (a kezdeti állapot a 3. állapot), ennek logaritmusát pedig különböző α paraméterszintek mellett a 3.a) ábrán rajzoljuk ki. Ahogy a képen is látszik, nagyobb α érték mellett a túlélés esélye csökken. Azt is megfigyelhetjük, hogy az ilyen átmenetvalószínűségekre a nem átskálázott eset ($\alpha = 1$) fázis típusú eloszlása exponenciálisnál gyorsabban lecsengő farokeloszlással bír, ami a tényleges halálozási adatokon[1] megfigyelhető (a 3.b) ábra).



3. ábra. a) A négyállapotú frakcionális egészségbiztosítási modell logaritmikus túlélésfüggvénye, valamint b) az 1950-1960 között született 30 éves korukat megélő magyar lakosság túlélésfüggvénye a T tartam függvényében különböző α szintek mellett.

α	$\rho\left(\mathbf{Q}r^{-\alpha}\right)$
0.5	4.196
0.7	8.461
0.9	17.060
1	24.226

2. táblázat. A spektrálsugarak értéke különböző α szintek mellett a vizsgált példában.

A következőkben tekintsük a kockázatmentes piaci hozamgörbét $r = 3\%$-on vízszintesnek. Ez alapján kiszámoljuk a konkrét példában $\mathbf{Q}r^{-\alpha}$ spektrálsugarát különböző α

[1] https://www.mortality.org/

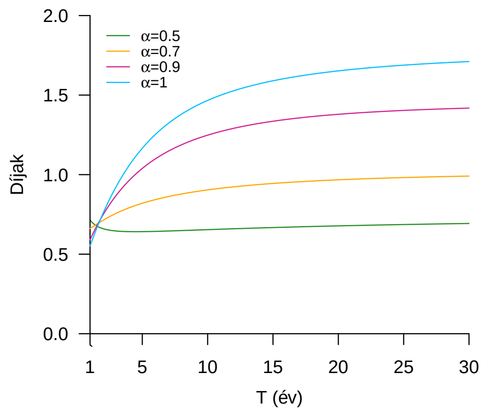
értékek mellett (2. táblázat). Mivel ezek rendre 1 fölött alakulnak, előfordulhat, hogy a határozatlan tartamra adott 2.2.3. Következménybeli egyenlőség nem teljesül (nem létezik az integrál), így nem alkalmazhatjuk következetesen a tartalékra és így a díjakra vonatkozó aszimptotikus szimulációkat végtelen időhorizonton a frakcionális modellek esetén.

Tegyük fel, hogy a biztosítási szerződésben foglalt pénzáramok a következők:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{és} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Itt a számok valamely monetáris egységeknek feleltethetők meg.

A feltételünk miatt a díj $\mathbf{c}^\top = (0, 0, 0, c)$ alakú, ahol c pontos értékét (2.4) képlet szerint számolhatjuk. Az eredményeket a 4. ábrán jelenítjük meg különböző α szintek és $T \in [1, 20]$ tartamok mellett.

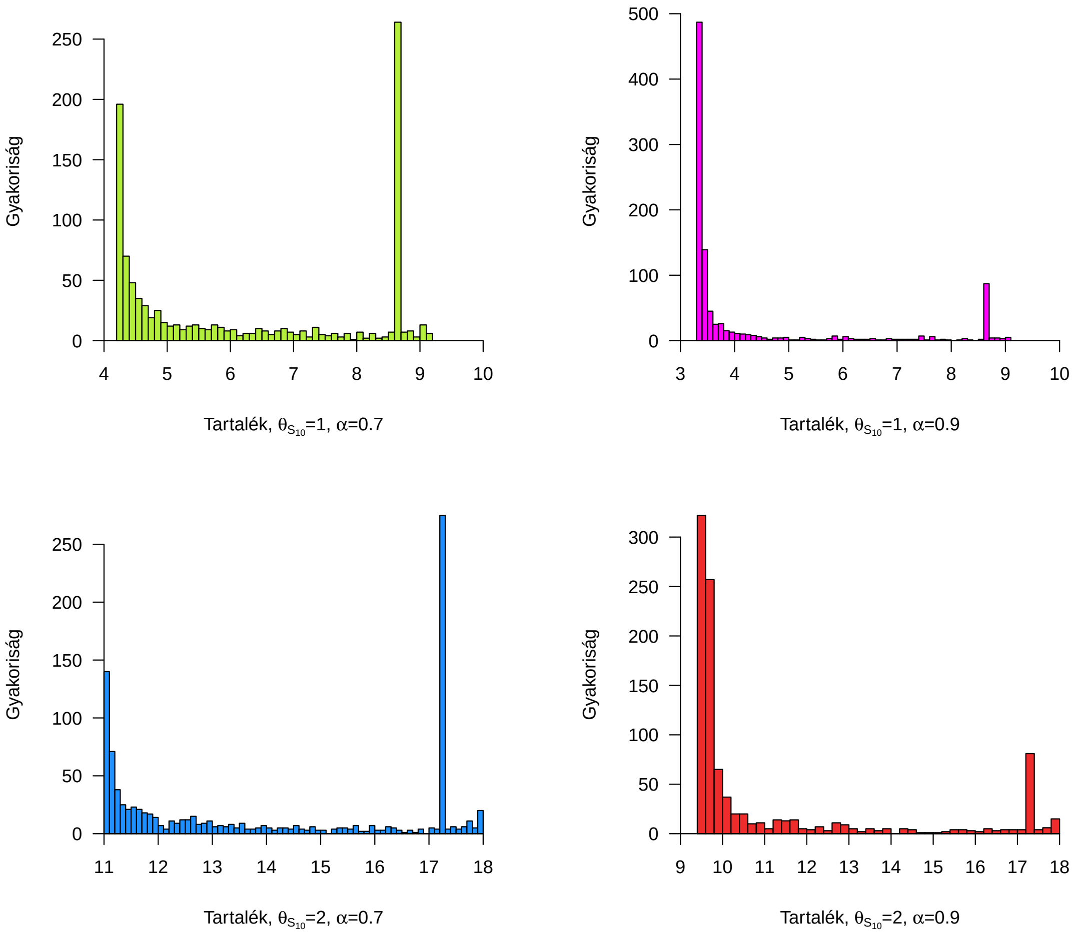


4. ábra. a) A négyállapotú frakcionális egészségbiztosítási modell díja a T tartam függvényében különböző α szintek mellett.

α	$T = 1$	$T = 5$	$T = 10$	$T = 20$	$T = 30$	$T = \infty$
0.5	0.715	0.642	0.654	0.678	0.693	-
0.7	0.662	0.820	0.904	0.967	0.991	-
0.9	0.591	1.039	1.248	1.379	1.418	-
1	0.551	1.166	1.467	1.652	1.711	1.761

3. táblázat. A nettó díjak számszerű adatai a vizsgált példában.

A korábbi aszimptotikára tett megjegyzésünk ezen ábra esetén éppen azt jelenti, hogy a díjszintek $T \to \infty$ esetén $\alpha < 1$ értékekre nem feltétlenül konvergálnak. Azonban tetszőleges véges T érték mellett a díjszintek meghatározhatók. A kalkulált díjak számszaki értékeit a 3. táblázatban mutatjuk ki. Megfigyelhetjük, hogy magasabb α szint mellett magasabb díjat kér a biztosító. Ez a lecsökkent túlélési valószínűséggel magyarázható, valamint az elhalálozással járó magas kifizetésekkel.



5. ábra. Egy $T = 20$ tartamú szerződés szimulált tartalékai $t = 10$-ben különböző α szinteken és állapotokban.

Végül szemléltetjük egy $T = 20$ évre szóló biztosítási szerződés $t = 10$ évre vonatkozó tartalékát a 2.2.3. Következmény vonatkozó formulája szerint. Ehhez az `R` program `stabledist` programcsomagjának segítségével 1 000 α-stabilis Lévy-szubordinátor inverz-folyamatot szimuláltunk különböző α értékek mellett, valamint megnéztük a különbséget azok között az esetek között, amikor a biztosított $t = 10$ időpontban az 1. illetve 2. "beteg" állapotokban van.

A 4. ábra négy szimuláció hisztogramját mutatja $\alpha = 0.7$ és 0.9 értékek mellett akkor, amikor $\theta_{S_{10}} = 1$, illetve $\theta_{S_{10}} = 2$.

Mint láthatjuk mind a négy esetben, az eloszlás bimodális. Amikor $\theta_{S_{10}} = 1$, akkor az egyik csúcs 8.64 értéknél alakul, ami azon szimulációk során jön létre, amikor $U_{S_{10}} \geq 20$, vagyis amikor a $t \in [10, 20)$ intervallumon megáll az idő, a pénzáram így csak **a** megfelelő komponense járadék formában. A másik eloszláscsúcs magából az U_{S_t} folyamat véletlen trajektóriájából fakad akkor, amikor $U_{S_{10}} < 20$.

$\theta_{S_{10}} = 2$ feltétel esetén hasonló megállapítást tehetünk, az egyik csúcs a 17.28 érték, míg a másik hasonlóan a tiszta véletlen folyamat származéka.

$\theta_{S_{10}}$	α	Átlag/ Érték	Szórás	Kvantilis 5%	95%
1	0.5	7.582	1.438	4.998	8.639
	0.7	6.190	1.888	4.232	8.639
	0.9	4.205	1.645	3.343	8.639
	1	2.804	-	-	-
2	0.5	15.817	1.984	12.284	17.279
	0.7	14.061	2.674	11.040	17.280
	0.9	10.932	2.536	9.550	17.279
	1	8.624	-	-	-

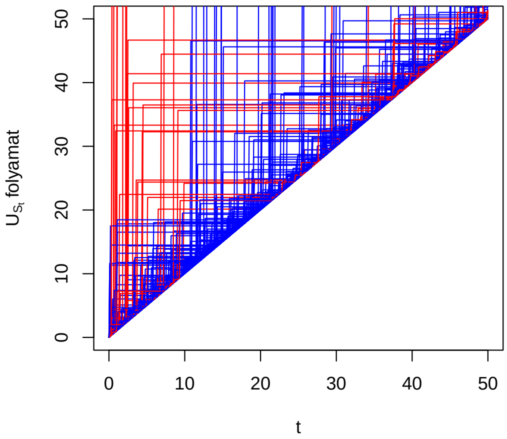
4. táblázat. A tartalékszimulációk eredmény-elemzése különböző α szintek és $\theta_{S_{10}}$ kezdőállapotok mellett.

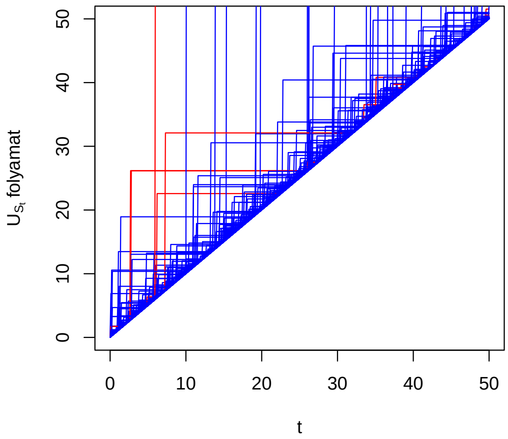
A 4. táblázatban számszerűen foglaljuk össze még több α érték mellett a szimulációk eredményeit (átlag, szórás, 5%-os és 95%-os kvantilisek). Kiolvashatjuk, hogy a 95%-os kvantilisek is többnyire a $U_{S_{10}} \geq 20$ szimulációs esetekben kapott speciális tartalékértékek körül alakulnak. Jelezzük továbbá azt is, hogy $\alpha = 1$ esetben a tartalék értékét 2.1.1. Állítás megfelelő formulája szolgáltatja, amit konkrét érték lévén nem szimulálunk, így a szórást és kvantiliseket ott nem értelmezzük.

α	$U_{S_{10}} \geq 20$ gyakorisága
0.5	49.7%
0.7	26.2%
0.9	6.3%

5. táblázat. A $[10, 20]$ intervallumon való "időmegállásnak" relatív gyakorisága 10 000 trajektória-szimulációból különböző α szintek mellett.

Érdemes arra is kitérnünk az 5. ábra kapcsán, hogy különböző α értékek mellett a szimulációk mekkora részében fordult az elő, hogy a trajektóriák esetén $U_{S_{10}} \geq 20$ egyenlőtlenséget tapasztaltuk. E vizsgálat eredményeit táblázatban foglaljuk össze, ahol láthatjuk 10 000 folyamat-szimulációból, hogy az α érték növekedtével csökken a várható előfordulása az folyamat órájának tartós megállásának. A 6. ábrán pedig két α érték mellett rajzoltunk ki 100 trajektóriát, ezek közül pirossal emeltük ki azokat, ahol a vizsgált $U_{S_{10}} \geq 20$ esemény áll fenn. Itt azt is láthatjuk, hogy $\alpha \to 1-$ tartással a folyamat jobban közelíti a 45°-os egyenest, ami persze korábbi megállapításunkkal áll összhangban, miszerint a determinisztikus idő szerinti folyamatot közelítjük.





6. ábra. Az $(U_{S_t})_{t\geq 0}$ folyamat trajektória-szimulációi a) $\alpha = 0.7$ és b) $\alpha = 0.9$ értékekre.

Végül megemlítjük, hogy a modell felépítéséből fakadóan alkalmas a klasszikus egészségbiztosítási termékek árazására. Ebben az esetben a díjkalkuláció "jósága" csupán a halandósági valószínűség közelítésével ekvivalens. Más aspektusban arra vagyunk kíváncsiak, hogy a frakcionális fázis típusú eloszlások (és így Mittag–Leffler-függvény) hogyan közelítik a tapasztalati túlélési valószínűséget.

Reflektálva a 3.b) ábrára a hatás ellentétes, a frakcionális modell a tiszta halálozást nem tudja leírni, így ebben az esetben további javítások szükségesek a modellt illetően.

Összefoglalás

Összegzés

Visszautalva e szakdolgozat bevezetőjében foglaltakra, célunk egy olyan egészségbiztosítási modell felépítése volt, mely szerkezetéből fakadóan képes a valóságban tapasztalt tényeket visszaadni. Itt jelöltük meg elvárásként elsősorban a túlélésfüggvény szubexponenciális jellegét, a múlttól való részbeni függést és a kellő rugalmasságot egy biztosítási szerződésben foglalt modellparaméterekre vonatkozóan (gondolva itt az egészségi állapotokra, és a biztosító vállalt kötelezettségeire egyaránt).

Mindezen várakozásainkat sikerült kielégítenünk egy α-stabilis Lévy-folyamat inverzfolyamatával át-időparaméterezett Markov-lánccal. Az új sztochasztikus óra ismert tulajdonságaira támaszkodva láttuk, hogy elnyelő állapottal rendelkező rendszer esetén a frakcionális fázis típusú eloszlás Mittag–Leffler-eloszlás, az új rendszer pedig kielégíti a frakcionális Kolmogorov-féle differenciálegyenletet. Hasonló megfontolással jutottunk arra, hogy a díj meghatározásában lényeges szerepet tölt be a biztosított egészségügyi állapotának legpontosabb meghatározása már a szerződéskötés pillanatában (ezzel összefüggésben a megfelelő paraméterek megállapítása). Mégis feltételesen vizsgálódva az idő- és állapotváltozásra, valamint az α-stabilis folyamatokra a biztosítási szempontból leglényegesebb információk adaptálhatók maradtak a későbbi időkre.

Ez tette lehetővé számunkra, hogy az árazáson túl tetszőleges időpontban értékelni tudjuk az adott szerződést. A nem megfigyelhető sztochasztikus órával kapcsolatos ismeretek hiányában akár Monte-Carlo-szimulációval helyettesítve megkaphatjuk az adott időpontbeli tartalék várható eloszlását.

Kritikák, lehetséges általánosítások

Bár a felépített modellt vizsgáltuk olyan szempontokból, mint paraméterérzékenység, tartalékszimuláció, mégis a gyakorlati alkalmazhatóság területén gátakba ütközünk.

Egyik korlátját jelenti ugyanis a duplán sztochasztikus rendszer átmenetvalószínűségeinek megbecslése egy adott szerződő esetén, ahogy ezt a 3.1. alfejezetben írtuk. Ennek megbecsülése valós adatsorokon sarkalatos pont, a modell szempontjából fontos paraméterek becsléséhez elengedhetetlen. E kihívás feloldására egyelőre nem ismerünk általános módszert.

Mint azt a 3. fejezet végén láttuk, a modell az életbiztosítást jelentő speciális esetét nem tudja megfelelően kezelni. Ennek a problémának javítására [3] cikk vállalkozik azt a gondolatmenetet követve, hogy a sztochasztikusan át-időskálázott folyamatot extrán át-időskálázzuk egy determinisztikus függvénnyel. Ennek köszönhetően nyerünk még egy szabadsági fokot rugalmasság terén, így a túlélésfüggvény farokeloszlása kezelhetővé válik.

Ez a gondolatmenet az általános több-állapotú frakcionális modell esetén is kézenfekvő lenne, bár a képletek számolhatósága ekkor nagyban bonyolódik. Ezen elképzelés vizsgálatára az egészségügyi adatok bizalmas jellegéből fakadóan sajnos nem tudunk valós támasztékokat nyújtani, ezzel az egészségügyi kockázatok szubexponenciális ideológiája is megalapozatlan marad.

Más jellegű kitekintést nyújt magában a Lévy-folyamatban rejlő matematikai tulajdonsághalmaz. A felépített modellben speciálisan Lévy-szubordinátorokat tekintettünk, vagyis amikor $\alpha < 1$. Felmerül a kérdés, mi történne akkor, ha a folyamat stabilitási indexe 1 fölötti lenne, esetleg tetszőleges Lévy-folyamat szintelérési idejét tekintenénk a Markov-lánc sztochasztikus órájának?

Ezekben az esetekben már nem tudnánk a dolgozatban oly sűrűn kihasznált gondolatmenetet követni, nem teljesülne többek között a (1.16) halmazegyenlet, nem is beszélve arról, hogy az új Laplace-exponens is némi kényelmetlenséget hordozhat magában.

Irodalomjegyzék

[1] ALBRECHER, H., BLADT, M., AND BLADT, M. Multivariate fractional phase-type distributions. *Fractional Calculus and Applied Analysis 23* (2020), 1431–1451.

[2] APPLEBAUM, D. *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, 2 ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2009.

[3] BLADT, M. Fractional inhomogeneous multi-state models in life insurance. *Scandinavian Actuarial Journal* (2021), 1–22.

[4] CHUNG, K. L. *Markov Chains.* Springer, Berlin, Heidelberg, 1960.

[5] CULVER, W. J. On the existence and uniqueness of the real logarithm of a matrix. *Proceedings of the American Mathematical Society 17*, 5 (1966), 1146–1151.

[6] HAINAUT, D. A fractional multi-states model for insurance. *Insurance: Mathematics and Economics 98* (2021), 120–132.

[7] HASSAN ZADEH, A., JONES, B., AND STANFORD, D. The use of phase-type models for disability insurance calculations. *Scandinavian Actuarial Journal* (2014).

[8] JANCZURA, J., AND AGNIESZKA, W. Subdynamics of financial data from fractional fokker–planck equation. *Acta Physica Polonica B 40* (2009), 1341–1351.

[9] KARLIN, S., AND TAYLOR, H. M. *A First Course in Stochastic Processes*, 2 ed. Academic Press, New York, 1975.

[10] KARLIN, S., AND TAYLOR, H. M. *A Second Course in Stochastic Processes*, 1 ed. Academic Press, New York, 1981.

[11] KUMAR, A., LEONENKO, N., AND PICHLER, A. Fractional risk process in insurance. *Mathematics and Financial Economics 14* (2020), 43–65.

[12] MAGDZIARZ, M. Black-scholes formula in subdiffusive regime. *Journal of Statistical Physics 136* (2009), 553–564.

[13] MEERSCHAERT, M., AND STRAKA, P. Inverse stable subordinators. *Mathematical modelling of natural phenomena 8* (2013), 1–16.

[14] PODLUBNÝ, I. *Fractional Differential Equations.* Academic Press, 1999.

[15] Samoradnitsky, G., and Taqqu, M. S. *Stable Non-Gaussian Random Processes.* Chapman and Hall/CRC, New York, 1994.

[16] Sato, K.-I. *Lévy Processes and Stochastic Calculus.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1999.