Eötvös Loránd University

Matematika Intézet

Analízis Tanszék

Geometriai kvantálás

Témavezető:
Dr. Szőke Róbert
docens

Szerző:
Forman Balázs Attila
Matematikus MSc

Budapest, 2022

NYILATKOZAT

Név: Forman Balázs Attila

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematikus MSc

NEPTUN azonosító: A9A9GV

Diplomamunka címe:
Geometriai kvantálás

A **diplomamunka** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022.05.

Forman Balázs Attila

a hallgató aláírása

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani mindenek előtt a témevezetőmnek, Dr. Szőke Róbertnek, amiért olyan lelkiismeretesen és annyit segített nekem, hogy ez a szakdolgozat elkészülhessen. Nagyon hálás vagyok neki a heti rendszerességű konzultációkért, a rengeteg tartalmi és formai megjegyzéséért, és hogy ennyire a szívén viselte a munkámat.

Szeretném továbbá megköszönni a családomnak, a barátaimnak és a barátnőmnek azt a rengeteg támogatást, amit a mesterszak alatt kaptam tőlük.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

> I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics.
>
> *Richard P. Feynman*

A szakdolgozat a szimplektikus geometria egyik ágával hivatott foglalkozni, melyet geometriai kvantálásnak hívnak. A geometriai kvantálás lényege, hogy adott egy szimplektikus sokaság, és szeretnénk ehhez kanonikusan hozzárendelni egy szép vektorteret operátorokkal, és minden egyéb belső struktúrával. Maga a feladat elsőre elég légbőlkapottnak tűnhet, de a modern fizika eszköztárából motiválódva, remélem hogy sikerül megindokolnom, hogy ez miért is hasznos, és miért is pont úgy kell csinálni, ahogy az itt be lesz mutatva.

A mechanika a fizika egyik legklasszikusabb ága, középiskolában is mindenki tanulta Newton törvényeit, és kellett, hogy használja, az ő megközelítésének legalapvetőbb képletét:

$$F = ma$$

Amire középiskolában nem volt idő, és lehetőség a megfelelői matematikai apparátus hiányában, az a mechanika két másik klasszikus megközelítése, a lagrange-i és a hamiltoni. Ezekkel a szakdolgozat elején szeretnék röviden foglalkozni, utóbbinak ugyanis direkt általánosítása a szimplektikus geometria.

Hogy miért nem csak szimplektikus geometria akkor a szakdolgozat címe? Ezt a 20. század egyik legjelentősebb fizikai elmélete, a kvantummechanika indokolja, hisz a geometriai kvantálás lényegében klasszikus mechanikai rendszerekhez akar kvantumrendszereket rendelni. Hogy teszi ezt? A dolgozatból remélhetőleg sikerül megismerni a fő módszereket, a felmerülő problémákat, és hogy milyen fizikától független matematikai kérdések vetődnek fel a témában.

2. fejezet

Klasszikus mechanika

2.1. Az inga

[1]

Valószínűleg az egyik legklasszikusabb mechanikai rendszer az úgynevezett fizikai inga. Miből áll ez? Rögzítsünk valahova egy tömeg nélküli végtelenül merev rudat (ennek hosszát az egyszerűség kedvéért vegyük 1-nek) az egyik végénél úgy, hogy súrlódás nélkül el tudjon forogni egy vízszintes tengely körül. Ennek a végén legyen az m tömegű testünk, aminek a mozgását le akarjuk írni

2.1.1. Newton

Ezzel valószínűleg mindenki találkozott fizikaórán, és a newtoni mozgásegyenletet sem nehéz felírni. Konstans gravitációs mezőben azt tapasztaljuk, hogy két erő hat a testre: a Föld húzza lefelé, a rúd pedig a rögzítési pont felé, pontosan úgy, hogy az eredő erő merőleges legyen rúdra.

Jelöljük az inga függőlegesen lefelé mutató irányától való elfordulás szögét α-val! Ekkor tehát Newton egyenletei alapján:

$$m\ddot{\alpha} = g \sin \alpha$$

2.1.2. Lagrange

Mit mond nekünk Lagrange?

Az inga "lusta" azt az utat akarja megtenni, ahol a legkevesebbet kell dolgoznia, ahol a legkisebb hatás éri, tehát definiálnunk kell rá egy hatás függvényt, és azt minimalizálni.

Klasszikus esetben egy rendszer *Lagrange*-függvénye a mozgási (kinetikus) és a helyzeti (potenciális) energiájának a különbsége. Jelöljük q-val a testünk helyzetét, és $\dot{q}$-val a sebességét, ekkor a Lagrange függvény:

$$L(q, \dot{q}, t) = m\dot{q}^2/2 - U(q)$$

És ahhoz, hogy ennek az integrálja egy pálya mentén minimális legyen, teljesítenie kell az adott görbén az $Euler - Lagrange$ egyenletet:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

Az Euler-Lagrange egyenletet később általánosan is bizonyítom, most csak fogadjuk el, és vegyük észre hogy ekvivalens Newton mozgásegyenletével! A baloldal ugyanis csak L első tagjától függ, és azt vehetjük észre, hogy

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial m\dot{q}^2}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt}m\dot{q} = m\ddot{q}$$

Mit mond ez az ingára? A test kinetikus energiája $m\dot{\alpha}^2$, tehát az egyenlőség baloldala most is $m\ddot{\alpha}$.

Mi a helyzet a helyzeti energiával? Középiskolából tudjuk, hogy konstans erőtérben ez csak attól függ (az erő nagyságán és a test tömegén kívül), hogy mennyit megyünk az erő irányába, avagy hogy az inga milyen magasan van. α függvényében ez most az alsó ponttól mérten

$$U(\alpha) = (1 - \cos(\alpha))gm$$

Mivel ennek az α szerinti deriváltja éppen $g\sin(\alpha)$, tehát visszakaptuk a Newton esetet.

2.1.3. Hamilton

Mit mond nekünk Hamilton?

Az energia megmarad. Ebből következik tehát, hogy a test csak olyan pályán mozoghat, aminek mentén az energiája nem változik!

Hamilton trükkje azonban az, hogy az energiát nem a helyzet és a sebesség, hanem a helyzet és a lendület függvényeként írja fel. Ez kulcsfontosságú lesz a későbbiek szempontjából, hiszen ahogy látni fogjuk, míg a sebesség egy vektor, a lendület egy *kovektor*! Mi legyen ennek az általános definíciója úgy, hogy az egyszerű esetekben visszaadja, hogy $p = mv$? Mondjuk azt, hogy

$$p := \frac{\partial}{\partial \dot{q}}$$

Ebből rögtön következik, hogy egy ideális pályán, tehát ahol kielégül az Euler-Lagrange-egyenlet:

$$\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

Mi lesz tehát a Hamilton-függvény most?

$$H(\alpha, p) = \frac{p^2}{2m} + mg(1 - cos(\alpha))$$

Lagrange esetben most jött a kalapból nyuszi: az Euler-Lagrange azonosság. Ezzel analóg módon most is jön két egyenlet, amik később kerülnek megmagyarázásra, ezek az úgy nevezett Hamilton-egyenletek:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{és} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

Mit kapunk tehát?

$$\dot{\alpha} = p/m \quad \text{és} \quad \dot{p} = mg \sin \alpha$$

És most az elsőt lederiválva, majd a másodikba behelyettesítve ugyanazt az egyenletet kapjuk vissza, amit már Newton is tudott. Mit nyertünk ezekkel mégis? Ezek remekül általánosítható modellek, és sokkal kevésbé függenek a koordinátázástól, mint Newton egyenletei.

2.2. Legendre-transzformáció

[2]

Jelen pillanatban a Hamilton és a Lagrange függvény kapcsolata nem egészen világos. Miért kéne ugyanazt az egyenletet adniuk? Hogy kapjuk az egyikből a másikat általában, ha nem tudjuk ilyen egyszerűen felírni a mozgási és a helyzeti energiát?

Ahhoz, hogy ezt megértsük, meg kell először ismerkednünk a függvénytranszformációval:

1. Definíció. Legyen f egy korlátos, zárt intervallumon értelmezett, kétszer folytonosan differenciálható, szigorúan konvex függvény! Legyen $p \in R(f')$! Mivel f' monoton, ezért $\exists! x_p \in D(f)$, hogy $f'(x_p) = p$. Ekkor $g(p) = px_p - f(x_p)$-t hívjuk f Legendre-transzformátjának.

Mit akarunk ezzel mondani? Mit csinál ez a transzformáció? Egy olyan függvényt szeretnénk gyártani f-hez, aminek a deriváltja éppen f deriváltjának az inverze.

Vegyük például az $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$-t, ahol $\alpha > 0$. Ekkor $f' = x^{\alpha-1}$, ami p-t éppen az

$$x_p = p^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

pontban veszi fel. Ha β-t úgy választjuk, hogy

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

azt kapjuk, hogy

$$g(p) = p^\beta - p^\beta/\alpha = p^\beta/\beta$$

Ez a példa abban az értelemben elég természetes, hogy ezek talán a legegyszerűbb konvex függvények, és ezekre azt láttuk, hogy itt α és β szimmetrikus viszonya miatt a Legendre-transzformáció involutív! Ami ezt a megfigyelést általánosítja az a következő tétel:

1. Tétel. *A Legendre-transzformáció involúció az I zárt, korlátos invervallumon értelmezett, kétszer folytonosan differenciálható konvex függvények terén.*

Bizonyítás. Vegyünk egy konvex, kétszer folytonosan differenciálható f függvényt, és legyen

$$h(p) := (f'(p))^{-1}$$

$p \in R(f')$-ra. És

$$g(p) = ph(p) - f(h(p)),$$

ahol g az f függvény Legendre-transzformáltja. Most nézzük meg, hogy ez konvex és kétszer differenciálható-e!

$$\frac{dg(p)}{dp} = h(p) + (p - f'(h(p)))\frac{dh(p)}{dp} = h(p)$$

Ekkor

$$\frac{dh(p)}{dp} = \frac{1}{f''(h(p))} > 0$$

Legyen most $p(x)$ az a p, ahol $\frac{dg(p)}{dp} = x$

$$\begin{aligned}
&xp(x) - g(p(x)) \\
&= h(p(x))p(x) - g(p(x)) \\
&= h(p(x))p(x) - (p(x)h(p(x)) - f(h(p(x))) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Hiszen $h(p)$ és $p(x)$ egymás inverzei.

□

A Legendre-transzformáció változóiként használt x és p nem véletlen, hiszen pont erre az eszközre van szükségünk, hogy általánosan definiálni tudjuk a lendületet. Először is nézzük meg a többdimenziós Legendre-transzformációt!

2. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható konvex függvény! Ekkor egy $p \in R(df)$-ra $g : \mathbb{R}^{n*} \to \mathbb{R}$ értéke legyen

$$g(p) := p(x_p) - f(x_p)$$

, ahol x_p az az egyértelmű elem df értelmezési tartományából, ahol $df(x_p) = p$.

Ezzel felszerelkezve már tudjuk klasszikus esetekben definiálni a *Hamilton*-függvényt!

3. Definíció. Legyen $L(q, \dot{q}, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható, $\dot{q}$-ban konvex Lagrange-függvény! Ekkor L $\dot{q}$ Legendre-transzformációját nevezzük a rendszer Hamilton függvényének.

2. Tétel. *Legyen $L(q, \dot{q}, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható, $\dot{q}$-ban konvex Lagrange-függvény, és H a hozzá tartozó Hamilton függvény! Ekkor az Euler-Lagrange egyenletek ekvivalensek a Hamilton egyenletekkel:*

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \textit{és} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

Bizonyítás. A Legendre-transzformáció definíciója alapján $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, ugyanakkor az Euler-Lagrange egyenletek mellett:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt}p$$

Most nézzük meg H külső deriváltját! Ez definíció szerint:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p}dp + \frac{\partial H}{\partial q}dq + \frac{\partial H}{\partial t}dt$$

Ugyanakkor tudjuk, hogy $H(p, q, t) = p(\dot{q}) - L(q, \dot{q}, t)$, tehát:

$$dH = qdp - \frac{\partial L}{\partial q}dq - \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

Így tehát valóban a tételben szereplő egyenletekhez jutunk, és plusz azt is megtudtuk, hogy $-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$ □

Most, hogy tudjuk, mi az a Hamilton-függvény, és, hogy egy mozgó tömegpontnak $\mathbb{R}^n$-ben, miért kell kielégítenie a Hamilton-egyenleteket, rátérhetünk az általánosabb esetre: Mi van, ha a tömegpont nem az euklideszi térben mozog, hanem egy differenciálható sokaságon? Az inga esetében is valójában az inga egy körön mozgott, nem volt szükség a bent foglaló vektortérre, hogyan lehet csak a sokaság belső geometriájával leírni a test mozgását? Erről fog szólni a következő fejezet.

3. fejezet

A mechanika és a szimplektikus geometria

[2]

3.1. Lagrange-féle mechanika sokaságokon

4. Definíció. Legyen M egy Riemann-sokaság, és $L : TM \to \mathbb{R}$ egy C^∞ típusú függvény, és $\gamma : [a,b] \to M$ sima görbe. Ekkor

$$\Phi(\gamma) := \int_a^b L(\gamma, \dot{\gamma})dt$$

az L-hez tartozó hatásfunkcionál γ-n.

3. Tétel. *Legyen $p, q \in M$, és $\gamma : [a,b] \to M$ sima görbe, és legyen $\Gamma : (-\epsilon, \epsilon) \times [a,b] \to M$ ennek egy végpontokban fix sima variációja. Ekkor*

$$\partial_s \Phi(\gamma)|_{s=0} = 0$$

minden Γ-ra pontosan akkor, ha $L(\gamma)$ kielégíti az Euler-Lagrange differenciálegyenletet.

Bizonyítás. Vegyünk egy tetszőleges ilyen Γ variációt! Mivel a $L(\gamma)$ kompakt tartójú és sima, ezért az integrálás és a deriválás felcserélhető, így tehát:

$$\partial_s \Phi(\gamma)|_{s=0} = \int_a^b \partial_s L(\gamma, \dot{\gamma})dt|_{s=0} = \int_a^b g(\nabla L(\gamma, \dot{\gamma}), \partial\Gamma(s,t))dt|_{s=0}$$

Ami pedig nem más, mint

$$\int_a^b g\Big(\frac{\partial L(\gamma,\dot\gamma)}{\partial X}, \frac{d}{dt}\partial\Gamma(s,t)\Big) + g\Big(\frac{\partial L(\gamma,\dot\gamma)}{\partial x}, \partial\Gamma(s,t)\Big)dt|_{s=0}$$

Itt az integrandus első tagja pedig nem más mint

$$\frac{d}{dt}g\Big(\partial_s\Gamma(s,t), \frac{\partial L}{\partial X}\Big) - g\Big(\partial_s\Gamma(s,t), \frac{d}{dt}\frac{\partial L(\gamma,\dot\gamma)}{\partial X}\Big)$$

Azt látjuk, tehát, hogy éppen az Euler-Lagrange egyenlet van skalárisan szorozva a γ menti variációs vektormezővel és az van integrálva. Ez pontosan akkor lesz nulla minden variációra, ha maga az Euler-Lagrange egyenlet teljesül. □

Most, hogy kezd körvonalazódni az, hogy miért érdekes nekünk egy Hamilton-függvény, ideje megismerkedni a dolgozat alapfogalmával, a szimplektikus sokasággal,

3.2. Szimplektikus geometria

5. Definíció. Egy (M,ω) párt szimplektikus sokaságnak nevezünk, ha M sima sokaság, ω pedig egy zárt, nem elfajuló 2-forma M-en.

A legegyszerűbb példa szimplektikus sokaságokra $\mathbb{R}^{2n}$ a kanonikus $(q^1,\dots,q^n,p_1,\dots,p_n)$ bázissal, és a kanonikus

$$\omega = \sum dp_i \wedge dq^i$$

2-formával.

Ez a példa abban az értelemben alapvető, hogy lokálisan minden szimplektikus sokaság így néz ki, avagy precízen:

4. Tétel. *(Darboux) Legyen M egy $2n$ dimenziós szimplektikus sokaság, ennek p egy tetszőleges pontja! Ekkor p-nek létezik olyan U koordinátakörnyezete, és abban olyan $(q^1,\dots,q^n,p_1,\dots,p_n)$ koordináták, hogy*

$$\omega = \sum dp_i \wedge dq^i$$

.

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. [3] □

Egy második nagyon gyakori példa a koérintőnyalábóké. Legyen ugyanis $M = T^*X$, ahol X egy sima n-dimenziós sokaság, $q \in X$ és $p \in T_q^*X$. Ekkor

$$\alpha_q(.) := q(T_q\pi(.)),$$

ahol π a $T^*X \to X$ vetítés, egy kanonikus 1-forma lesz M-en. Sőt! Azt is tudjuk, hogy $d\alpha \neq 0$, hiszen ki tudjuk fejezni lokális koordinátákban, mint

$$\alpha = \sum p_i dq_i,$$

aminek a külső deriváltja tehát kanonikus, és lokális koordinátákban

$$\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$$

.

Legyen tehát X egy dinamikai rendszer konfigurációs tere. Ekkor a sebesség fázistere X érintőnyalábja, TX, a rendszer dinamikáját pedig az $L : TX \to \mathbb{R}$ sima függvény határozza meg, a korábban megismert módon.

A kanonikus lendületeket úgy kapjuk meg a Lagrange-függvényből, hogy alkalmazzuk a Legendre-transzformációt. Hogy néz az most ki?

6. Definíció. Legyen X sima sokaság, $L : TX \to \mathbb{R}$ sima. Jelöljük TX $v \in T_xX$-vel! Tegyük fel, hogy az

$$FL(v) = d(L|_{T_xX})_v$$

invertálható! (Ezt a feltételt eddig L megfelelő konvexitása biztosította.) És legyen

$$p = d(L|_{T_xX})_v$$

az v-nek megfelelő kanonikus lendület. Ekkor

$$H := p(FL^{-1}(x,p)) - L(FL^{-1}(x,p)) : T^*X \to \mathbb{R}$$

a rendszer $Hamilton$-függvénye.

A Lagrange-mechanika klasszikusan a speciális és az általános relativitáselméletben szereplő rendszerek dinamikáját írja le, mint hogy ott is a testek követik a legkisebb hatás elvét. Ezzel analóg módon a kvantummechanika a hamiltoni mechanika "általánosítása", ahogy azt majd látni fogjuk. A kettő között a kapcsolatot definíció szerint a a *Legendre*-transzformáció teremti meg, de aminek a definíciójában benne van az az erős feltétel, hogy az FL invertálható legyen! Klasszikus esetben ez csak azon múlik, hogy a rendszer kinetikus energiája konvex módon függ a sebességtől:

$$\sum \frac{1}{2} m_1 |v_i|^2$$

de ezt általánosan nem tehetjük fel.

Nézzük meg, mit is csinál ez a transzformáció lokális koordinátákban! Legyen most $q \in X$, U ennek egy koordinátakörnyezete, és a TX lokális koordinátafüggvényei $(q_1, \ldots, q_n, v_1, \ldots, v_n)$, T^*X-éi pedig $(q_1, \ldots, q_n, p^1, \ldots, p^n)$!

Ekkor

$$d(L|_{T_xX}) = \sum \frac{\partial L}{\partial v_i} dv_i$$

és $p^i = \frac{\partial L}{\partial v_i} dv_i$

A szimplektikus geometria itt jut először igazán szóhoz, az ω 2-forma ugyanis nem csak hogy izomorfizmust teremt TM és T^*M között (hiszen nemelfajuló), hanem ad nekünk egy $C^\infty(M) \to \mathfrak{X}(M)$ lineáris leképezést is. Hiszen dH-hoz létezik pontosan egy olyan $X_H \in \mathfrak{X}(TM)$, amelyre

$$dH = \omega(., X_H)$$

ω nemelfajulása miatt. Hogyan fogalmazhatjuk meg a *Hamilton*-féle mozgásegyenleteket ennek az eszköznek a segítségével?

5. Tétel. *Legyen X sima sokaság, $L : TX \to \mathbb{R}$ olyan, hogy értelmes legyen a Legendre-transzformáltja. Legyen $\gamma : [a, b] \to TX$ sima görbe. Ekkor a következő két állítás ekvivalens:*

- *$L(\gamma(t))$ kielégíti az Euler-Lagrange egyenleteket.*
- *$H(FL(\gamma(t)))$ integrálgörbéje X_H-nak.*

Bizonyítás. (Vázlat) Bizonyítsuk be a másodikból az elsőt! Nézzük meg X_H-t lokális koordinátákban!

$$X_H = \sum \frac{\partial H}{\partial q^i} \partial_{p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \partial_{q^i}$$

Hiszen $\omega(., X_H) = \sum \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i = dH$. Legyen $\sigma(t) := FL(\gamma(t)) = (q_1(t), \ldots, q_n(t), p_1(t), \ldots, p_n(t))$. Tudjuk, hogy

$$\sum \dot{q}_i(t)\partial_{q_i} + \dot{p}_i(t)\partial_{p_i} = \frac{d}{dt}\sigma = X_H(\sigma(t)) = \Big(\sum \frac{\partial H}{\partial q^i}\partial_{p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\partial_{q^i}\Big)(\sigma(t)$$

Tehát

$$\dot{q}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial p_i}(\sigma(t))$$

valamint

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i}(\gamma(t)) = \dot{p}_i(t) = \frac{\partial H}{\partial q_i}(\sigma(t)) = \frac{\partial L}{\partial q_i}(\gamma(t))$$

A másik irány bizonyítását pedig a fenti gondolatmenet megfordításával kapjuk.

□

Ezzel tehát megvan a program, szimplektikus sokaságokon értelmezett függvényekből csinálunk vektormezőket, és azoknak az integrálgörbéi fogják meghatározni a dinamikát! Igen ám, de szeretnénk megérteni ezeknek a függvényeknek a belső rendszerét, illetve, hogy a vektormezők hogyan is hatnak a sokaságon.

4. fejezet

A folytonos függvények Poisson-algebrája

[4]

4.1. A Poisson-zárójel

Jelölje $A(M)$ a globálisan Hamilton-féle vektormezők terét (tehát azokét, amik előállnak egy függvény ferde gradienseként). És jelölje $A_0(M)$ azon vektormezők terét, amik az ω által indukált izomorfizmusnál zárt 1-formáknak felelnek meg, nevezzük ezeket lokális Hamilton-féle vektormezőknek.

Már korábban is volt szó róla, hogy egy szimplektikus sokaság érintő és koérintőnyalábja izomorf, hiszen ω nemelfajuló. Ez az izomorfizmus a külső deriválttal a következő kommutatív diagramot adja:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & Im(d) \arrow[r, hook] \arrow[d, leftrightarrow] & Ker(d) \arrow[r, hook] \arrow[d, leftrightarrow] & \Omega^1(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, leftrightarrow] & \Omega^2(M) \\
0 \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r, hook] & C^\infty(M) \arrow[r] \arrow[ur, "d"] & A(M) \arrow[r, hook] & A_0(M) \arrow[r, hook] & \mathfrak{X}(M) &
\end{tikzcd}
$$

Ahol az f függvényhez azt az X_f vektormezőt rendeljük, melyre:

$$\omega(X_f, .) + df = 0$$

Tudjuk azonban, hogy a vektormezőknek van egy belső struktúrájuk: egy Lie-algebrát alkotnak. Vajon a függvényekre is átvihető ez? Lie-algebra homomorfizmussá tehető a

$$H \to X_H$$

lineáris leképezés?

Szerencsére a válasz ezekre mind igen, és nem is olyan nehéz megalkotni két függvény Lie-zárójelét:

7. Definíció. Legyen (M, ω) szimplektikus sokaság és $f, g \in C^\infty(M)$. Ekkor f és g *Poisson*-zárójelének nevezzük a

$$\{f, g\} := X_f(g)$$

függvényt.

Be akarjuk látni, hogy ez egy Lie-algebra homomorfizmus, de ezt sok kis lemma segítségével fogjuk megtenni, elsőre ugyanis az sem látszik, hogy egyáltalán ferdén szimmetrikus lenne (az $\mathbb{R}$-linearitás világos).

De ez is egyszerűen kijön, ha észrevesszük, hogy:

$$\{f, g\} = X_f(g) = dg(X_f) = \omega(X_f, X_g)$$

A kanonikus lokális koordinátákban a korábban ismert formulát használva:

$$\{f, g\} = \sum \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}$$

Ahhoz, hogy a Poisson-zárójel Lie-algebra struktúráját belássuk, először elevenítsük fel a Cartan formulákat! Legyen tehát $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, ekkor:

$$\mathcal{L}_X = \iota_X \circ d + d \circ \iota_X$$
$$\iota_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \circ \iota_Y - \iota_Y \circ \mathcal{L}_X$$

6. Tétel. *Legyen $X \in \mathfrak{X}(M)$, $X \in A_0(M)$, akkor és csak akkor, ha $\mathcal{L}_X\omega = 0$.*

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} X \in A_0(M) &\Leftrightarrow d \circ \iota_X\omega = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathcal{L}_X\omega - \iota_X \circ d\omega = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathcal{L}_X\omega = 0 \end{aligned}$$

□

Vegyük észre, hogy most használtuk először, hogy ω zárt! És értelmezzük mit jelent ez az állítás: a lokálisan Hamilton-féle vektormezők megtartják a szimplektikus formát. Ez azt jelenti, hogy speciálisan a globálisan Hamiltoniak is, avagy amik egy Hamilton függvény által vannak indukálva. Ez azt jelenti, hogy egy ilyen modellben egy test csak úgy tud mozogni, hogy a pályája mentén az ω "ne változzon"!

A függvényalgebra fontos tulajdonsága, hogy a Poisson-zárójel zárt, a következő tétel ennél is többet bizonyít nekünk:

7. Tétel. *Legyen $X, Y \in A_0(M)$, ekkor $[X, Y] = X_{\omega(X,Y)} \in A(M)$.*

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
\iota_{[X,Y]}\omega &= \mathcal{L}_X \circ \iota_Y\omega - \iota_Y \circ \mathcal{L}_X\omega \\
&= \iota_X \circ d(\iota_Y\omega) + d \circ \iota_X(\iota_Y\omega) \\
&= d(\omega(X, Y)) \\
&= \iota_{X_{\omega(X,Y)}}\omega
\end{aligned}$$

□

Ez egyrészt azt mondja nekünk, hogy még lokálisan Hamilton vektormezők Lie-zárójele is globálisan hamiltoni, másrészt pedig következik belőle, hogy:

$$[X_f, X_g] = X_{\omega(X_f,X_g)} = X_{\{f,g\}}$$

Ahol az első szögletes zárójel vektormezők Lie-zárójele, a második pedig függvények Poisson zárójele.

8. Tétel. *Legyen (M, ω) egy szimplektikus sokaság, ekkor $C^\infty(M)$ a Poisson-zárójellel ellátva egy Lie-algebrát alkot, és a fent definiált homomorfizmus $\mathfrak{X}(M)$-be Lie-algebra homomorfizmus.*

Bizonyítás. Az egyetlen, amit még bizonyítani kell, az a *Jacobi*-azonosság. Legyen tehát $f, g, h \in C^\infty(M)$! ω zártsága miatt tudjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
0 &= d\omega(X_f, X_g, X_h) \\
&= \circlearrowleft_{f,g,h} (X_f(\omega(X_g, X, h)) - \omega([X_g, X_h], X_f)) \\
&= \circlearrowleft_{f,g,h} \{f, \{g, h\}\} - \{\{g, h\}, f\}) \\
&= \circlearrowleft_{f,g,h} 2\{f, \{g, h\}\}
\end{aligned}$$

□

4.2. Megmaradó mennyiségek

Azt látjuk tehát, hogy ha a rendszerünkben van egy megmaradó mennyiség (mint az energia, a lendület, vagy a perdület), akkor ezekhez tartozik egy-egy vektormező, és ezáltal egy lokális szimplektomorfizmus (speciálisan egy differomorfizmus) a lendület fázisterén. Ahhoz, hogy ezt a témát jobban megérthessük, ismerkedjünk meg először is egy fogalommal:

8. Definíció. Legyen (M, ω) egy szimplektikus sokaság, és rajta $h \in C^\infty(M)$ a Hamilton függvény. Ekkor azon $f \in C^\infty(M)$ függvényeket nevezzük első integráloknak, melyekre $X_h(f) = 0$, vagy ezzel ekvivalensen, melyekre $\{f, h\} = 0$.

9. Tétel. *Az első integrálok egy rész-Lie-algebrát alkotnak.*

Bizonyítás. Vegyünk két első integrált! Azt kell belátnunk, hogy a Poisson-zárójelük is első integrál. $\{\{f, g\}, h\} = \{\{f, h\}, g\} + \{f, \{g, h\}\} = 0$ □

Továbbá fontos megemlíteni *Noether* tételét, ami szemléletváltással bírt a maga idején a fizikában, és pongyolán fogalmazva azt mondja, hogy egy dinamikai rendszer minden szimmetriájához tartozik egy megmaradó mennyiség. Ez azt jelenti tulajdonképpen, hogy elég a rendszer önhasonlóságait megismerni, és abból tudunk következtetni a viselkedésére, és fordítva. Kicsit precízebben ez így hangzik:

10. Tétel. *(Noether) Egy (M, ω, h) rendszert helybenhagyó lokális szimplektomorfizmusok lokális első integrálokat adnak és fordítva.*

Bizonyítás. Láttuk azt, hogy minden $f \in C^\infty(M)$ ferde gradiensének folyama megőrzi ω-t. Azok pedig amik h-t is megőrzik definíció szerint az első integrálok, hiszen

$$X_f(h) = -X_h(f) = 0.$$

□

A szimmetriák és a megmaradó mennyiségek kapcsolatát tárgyalva felmerül, hogy egy adott szimmetriacsoporthoz milyen függvényeket rendeljünk, mikor egyértelmű egyáltalán a választásunk. Eleve csak globális Hamilton-mezőkhöz tudunk függvényeket rendelni. Nem kisebb ez, mint a lokális Hamilton mezők tere? Szerencsére ezeknek az "arányát" meg tudjuk mérni egyszerűen:

$$A_0(M)/A(M) \simeq H^1_{dR}(M),$$

mert $A_0(M)$ lineárisan izomorf a zárt 1-formák terével, $A(M)$ pedig az egzaktakával, az ω-val megadott izomorfizmusnál. Tudjuk azonban azt is, hogy, mint Lie-algebrák:

$$[A_0(M), A_0(M)] \subset A(M)$$

Tehát ha van egy G Lie-csoport általi hatásunk a dinamikai rendszerünkön, ez indukál egy:

$$\begin{tikzcd}
& C^\infty(M) \arrow[d] \\
\mathfrak{g} \arrow[ur, dotted] \arrow[r, dashed] \arrow[dr] & A(M) \arrow[d, hook] \\
& A_0(M)
\end{tikzcd}$$

Diagramot, a kérdés csak az, hogy mikor lehet az alsó leképezést felemelni. Elégséges feltétel az $A(M)$-be történő felemelésre, ha $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ (speciálisan tehát, ha $\mathfrak{g}$ féligegyszerű) az előző megfigyelés alapján.

A féligegysszerű Lie-algebráknak van még egy hasznos tulajdonsága:

$$H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = 0,$$

ami nekünk biztosítja a leképezés Lie-algebra homomorfizmusként való felemelhetőségét. [5] (Lineáris felemelést mindig tudunk gyártani, majd annak segítségével egy $[f] \in H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ kohomológiaosztályt, aminek az eltűnése elég nekünk.)

5. fejezet

Čech-kohomológia

[4]

A szakdolgozat megkövetel már pusztán a műfaja okán is, bizonyos előismereteket az olvasótól a differenciálgeometria, a topológia, és általánosan a matematika terén. Ami azonban nekem is újdonság volt a témában való elmélyedés során, arra igyekszem kitérni, hiszen ez is része mindannak a tudásnak, amit az írás során elsajátítottam.

A szakdolgozat egyik fő célja, hogy bemutassa, hogyan lehet klasszikus mechanikai rendszerekhez kvantummechanikai rendszereket rendelni. Ennek a mikéntje (aminek a motivációjára a következő fejezetben igyekszem rávilágítani) az, hogy a lendület fázisteréhez rendelünk egy komplex vonalnyalábot, és erről követelünk meg bizonyos (remélhetőleg az olvasó számára is természetesnek ható) tulajdonságokat.

Ahhoz, hogy ezeket a vonalnyalábokat le tudjuk gyártani és ezeket a tulajdonságokat kényelmesen tudjuk kezelni, bevezetjük a következő kohomológia elméletet.

Legyen M egy sima sokaság, és $\mathbb{U} := \{U_i | i \in \mathfrak{I}\}$ az M-en egy nyílt, pontrahúzható fedése, azaz minden $\cap_{i\in J\subset I} U_i$ vagy üres, vagy simán pontrahúzható.

9. Definíció. $k - szimplex$nek hívunk egy $J \subset I$, k+1 elemű részhalmazt, ahol $\cap_{i\in J} U_i \neq \emptyset$.

A továbbiakban G jelöljön egy kommutatív Lie-csoportot. (Gyakorlatilag mindig $\mathbb{Z}$-t, $\mathbb{R}$-t, $\mathbb{C}$-t, vagy $\mathbb{C}^*$-t.)

10. Definíció. Egy k-koláncon egy

$$g : \cap_{i\in I} U_i \to G$$

sima leképezést értünk, amire teljesül, hogy $\sigma \in S_{k+1}$-re $g \circ \sigma = sgn(\sigma)g$. Ezek halmazát jelöljük $C^k(\mathbb{U}, G)$-vel.

Egyből világos, hogy ez egy lánckomplexust definiál, hiszen a pontonkénti összeadással ezek a koláncok triviálisan *Abel*-csoportot alkotnak.

A második, amire szükségünk van egy kohomológia elmélet definiálásához, az egy kohatárleképezés, amit természetes módon definiálunk:

11. Definíció. Legyen $\delta_k : C^k(\mathbb{U}, G) \to C^{k+1}(\mathbb{U}, G)$ egy g elemen:

$$\delta g(i_0, \dots, i_n) = \sum (-1)^j g(i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_k)$$

Ekkor δ-t kohatár leképezésnek nevezzük. Azokat a $g \in C^k(\mathbb{U}, G)$-ket, melyekre $\delta g = 0$ kociklusoknak nevezzük, azokat a $h \in C^{k+1}(\mathbb{U}, G)$-kat, melyek alkalmas g-kre előállnak $h = \delta g$ alakban kohatároknak nevezzük. Előbbiek halmazát $Z^k(\mathbb{U}, G)$-vel jelöljük.

Elemi számolás mutatja, hogy $\delta \circ \delta = 0$, tehát értelmes a következő definíció.

12. Definíció.

$$H^k(\mathbb{U}, G) := \frac{Z^k(\mathbb{U}, G)}{\delta\big(C^k(\mathbb{U}, G)\big)}$$

csoportot az M sokaság $\mathbb{U}$ fedéshez tartozó G együtthetós k. Čech-kohomológiacsoportjának hívjuk.

Igaz állítás, de itt nem fogom taglalni, hogy ez a kohomológia miért független valójában $\mathbb{U}$ választásától.

Szintén nem fogjuk belátni, hogy a g-k választhatók valójában sima G-értékű függvényeknek is a metszeteken, nem csak konstans függvényeknek.

Amit fel fogunk használni ezzel az elmélettel kapcsolatban, hogy egyrészt izomorf az azonos együtthatós szinguláris kohomológiával, másrészt $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$-együttható esetén a megfelelő de Rham-kohomológiával is. (Itt fontos megjegyezni, hogy ez csak azért áll fenn, mert itt most csak sima sokaságokra definiáltuk ezt a kohomológiát, bár a konstrukcióban nem használtuk ki a simaságot.)

6. fejezet

Komplex vonalnyalábok

A kvantummechanika egyik alapgondolata, hogy a részecskék kettős természetűek: egyrészt tudnak tömegpontokként viselkedni (eddig ezt tárgyaltuk), másrészt tudnak hullámként (ez jön most). A hullámviselkedést egy úgynevezett hullámfüggvénnyel írjuk le. Mit tud ez? Egyrészt valószínűségi mérték az abszolútérték négyzetének integrálja. Ez azt a tulajdonságot hivatott modellezni, hogy egy részecskének nincs biztos helye, csak valószínűségeket tudunk róla. Másrészt komplex értékű, és a klasszikus megfigyelhető mennyiségek lineáris (és önadjungált) operátorokként hatnak rajtuk.

Ha a klasszikus mechanikai rendszer lendületének fázistere egy szimplektikus sokaság, akkor nem elég csupán az ezen értelmezett komplex függvényeket venni. Egy jól ismert és elég bevett topológiai konstrukciót hívunk segítségül: A komplex vonalnyalábokat. Egy komplex vonalnyaláb lokálisan izomorf a triviális nyalábbal, egy szelése pedig egy függvénnyel adható meg lokálisan.

A négyzetes integrálhatóság elég természetesen definiálható, hiszen minden szimplektikus sokaságon van egy kanonikus térfogati forma: $\omega^n/n!$. Már csak a "függvények" értékeinek a hosszát kéne megállapítani. Az operátorokat szintén elég természetesen, a ferde gradiensek mentén történő kovariáns deriválásokkal tudjuk definiálni. Aki tanult esetleg Riemann-geometriát, az tudja, hogy minden konnexióhoz tartozik egy kanonikus (2:1)-tenzor: a görbület.

A fő kérdés, hogy ezeket mennyire tudjuk bizonyos kompatibilitási feltételek mellett kanonikusan megválasztani, erről fog szólni ez a fejezet.

6.1. Kompatibilitási feltételek

[4]

Mi is tehát egy komplex vonalnyaláb?

13. Definíció. Legyen L és M sima sokaságok, és köztük $\pi : L \to M$ egy sima leképezés, melyre $\pi^{-1}(m)$ egy 1 dimenziós komplex vektortér minden $m \in M$-re. Teljesüljön továbbá, hogy M-nek van olyan nyílt $\{U_i\}$ fedése, létezik

$$\phi_i : U_i \times \mathbb{C} \to \pi^{-1}(U_i),$$

ami a második változójára megszorítva lineáris izomorfizmus, és

$$(\pi \circ \phi_i)(x, v) = x$$

minden $x \in U_i$-re. Egy ilyen hármast egy M feletti komplex vonalnyalábnak nevezünk, ahol M a bázis, L a totális tér, $\mathbb{C}$ pedig a fibrum.

14. Definíció. Legyen (L, M, π) egy komplex vonalnyaláb, és $s : M \to L$ egy sima leképezés, melyre $\pi \circ s = id_M$. Ekkor s-et L egy szelésének nevezzük. Az összes szelés terét $\Gamma(L)$-el jelöljük.

A szelések terén van egy természetes $C^\infty(M)$-modulus struktúra a pontonként szorzással és összeadással.

A szelésekről azonban most két plusz struktúrát is felteszünk:

15. Definíció. Legyen $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(L) \to \Gamma(L)$ leképezés melyre:

1. $\nabla_{X+Y} s = \nabla_X s + \nabla_Y s$,
2. $\nabla_{fX} s = f \nabla_x s$,
3. $\nabla_X f s = X(f)s + f \nabla_X s$,

minden $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$-re, $f \in C^\infty(M)$-re és $s \in \Gamma(L)$-re. Ekkor ∇-t konnexiónak nevezzük.

Megköveteljük továbbá, hogy "ha már $\Gamma(L)$ vektortér" legyen rajta egy a konnexióval kompatibilis Hermitikus skaláris szorzás, melyre $(s, t) \in C^\infty(M)$, ahol $s, t \in \Gamma(L)$. A szorzat deriválási szabályának megfelelően tehát követeljük meg, hogy:

$$X(s,t) = (\nabla_X s, t) + (s, \nabla_X t)$$

Nézzük meg, mit jelent mindez a lehető legegyszerűbb esetben!

6.2. A triviális nyaláb

[4]

Ha adott egy ∇ konnexió a triviális nyalábon, akkor egy s_0 sehol sem 0 szeléssel kapunk belőle egy α 1-formát, amire:

$$\nabla_X s_0 = 2\pi i \alpha(X) s_0$$

Ekkor minden szelés megkapható $s = f s_0$ alakban, ahol f függvény, akkor

$$\nabla_X s = (X(f) + 2\pi i \alpha(X) f) s_0$$

-nak tudunk definiálni, ami könnyen láthatóan konnexió.

Fordítva, ha van egy sehol sem nulla s_0 szelésünk, és egy α 1-formánk, akkor ez a képlet definiál nekünk egy konnexiót.

Miért olyan természetes ez a konstrukció? Így az s_0-hoz tartozik egy 1-forma:

$$\alpha : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$

Azt kaptuk tehát, hogy s_0-t rögzítve minden konnexió leírható pontosan egy komplex 1-formával!

Mennyire függ ez a szeléstől? Vegyünk két nemnulla szelést! Ezek szükségszerűen függvényszeresei egymásnak, tehát

$$s_1 = f s_0,$$

ahol f sehol el nem tűnő függvény, és

$$\begin{aligned}
2\pi i \alpha_1(X) f s_0 &= 2\pi i \alpha_1(X) s_1 \\
&= \nabla_X s_1 \\
&= \nabla_X f s_0 \\
&= (X(f) + 2\pi i \alpha_0(X) f) s_0 \\
&= (df(X) + 2\pi i \alpha_0(X) f) s_0.
\end{aligned}$$

Avagy:

$$\alpha_1 - \alpha_0 = \frac{1}{2\pi i}\frac{df}{f}$$

Mit kell ennek tudnia, hogy kompatibilis legyen a kanonikus Hermitikus struktúrával?

$$\begin{aligned} 0 = X(s_0, s_0) &= (\nabla_X s_0, s_0) + (s_0, \nabla_X s_0) \\ &= 2\pi i\alpha(X) - 2\pi i\overline{\alpha(X)} \end{aligned}$$

Tehát azt kapjuk, hogy egy konnexió pontosan akkor kompatibilis a kanonikus Hermitikus struktúrával, ha α valós forma!

Mi van, ha nem olyan s széléshez választjuk az 1-formánkat, amire $H(s) := (s, s)$ nem konstans?

$$\begin{aligned} (dH(s))(X) = X(H(s)) = X(s, s) &= (\nabla_X s, s) + (s, \nabla_X s) \\ &= (2\pi i\alpha(X)s, s) + (s, 2\pi i\alpha(X)s) \\ &= 2\pi i(\alpha(X) - \overline{\alpha(X)})(s, s) \\ &= 2\pi i(\alpha(X) - \overline{\alpha(X)})H(s) \end{aligned}$$

Tehát:

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{dH}{H} = \alpha - \overline{\alpha}$$

Összefoglalva tehát, a konnexióhoz tartozó 1-forma csak lokálisan létezik, és függ a sehol sem nulla szelés megválasztásától.

Mit tudunk a konnexió görbületéről? Most hogy tudjuk, hogy a konnexiók a komplex 1-formáknak felelnek meg, megkérdezhetjük hogyan lehet a görbületet kiszámolni.

11. Tétel. *Legyen L komplex vonalnyaláb M felett! Legyen ∇ ezen egy konnexió, s_0 egy sehol el nem tűnő szelés és α az ehhez tartozó 1-forma! Ekkor ∇ görbülete éppen $2\pi i d\alpha$.*

Bizonyítás. ∇ görbülete $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$-en definíció szerint

$$\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

Értékeljük ki az első tagot s_0-n!

$$\begin{aligned}\nabla_X \nabla_Y s &= \nabla_X (2\pi i \alpha(Y) s_0)\\ &= \big(X(2\pi i \alpha(Y)) - 4\pi^2 \alpha(X)\alpha(Y)\big) s_0\end{aligned}$$

A második tag szimmetrikus X-ben és Y-ban, tehát ki fog esni, így

$$\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]} = X(2\pi i \alpha(Y)) - Y(2\pi i \alpha(X)) - 2\pi i \alpha([X,Y])$$

□

Mit mondhatunk egy konnexióval, és vele kompatibilis Hermitikus struktúrával ellátott komplex vonalnyalábról?

Ahhoz, hogy jobban megértsük ezt az esetet, meg kell ismernünk egy Riemann-geometriából már jól ismert fogalom analogonját:

16. Definíció. Egy $\gamma : [a,b] \to L$ görbét horizontálisnak hívunk, ha létezik hozzá egy s lokális szelés és egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ úgy, hogy:

- $X|_{\pi(\gamma)} = \pi^*(\gamma'(t))$
- $\gamma(t) \subset s(M)$
- $\nabla_X s|_{\pi(\gamma(t))} = 0$

[6]

Itt a konnexió görbe mentén értelmezett szelések görbe menti deriváltjaként van használva, mi viszont csak globális szelésekre és vektormezőkre definiáltuk eddig. Arról, hogy ezt lehet hogy értelmezni a forrásban található bővebb információ.

Ez a fogalom a már jól ismert geodetikus görbék általánosítása, amit annak megfelelően egy egyismeretlenes differenciálegyenlet megoldásaként kapunk meg. Ennek ismeretében nem meglepő a következő állítás:

12. Tétel. *Legyen $\gamma : [a,b] \to M$ egy sima görbe és $l_0 \in L_{\gamma(a)}$. Ekkor létezik egy egyértelmű horizontális $\tilde{\gamma} : [a,b] \to L$ úgy, hogy $\tilde{\gamma}(a) = l_0$ és $\pi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$.*

Bizonyítás. Vegyünk egy trivializáló környezetet és rajta egy sehol sem 0 s lokális szelést! Ekkor $l_0 = z_0 s(a)$

Ekkor minden nyalábba menő görbe felírható

$$\tilde{\gamma}(t) = z(t)s(\gamma(t))$$

alakban, ahol $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ és $\tilde{\gamma}(t) \to M$.

Egy ilyen $\tilde{\gamma}$-ra $X|_{\pi(\tilde{\gamma})} =' \gamma(t)$, az utolsó feltétel kielégüléséhez tehát az kell, hogy:

$$\Big(z'(t) + 2\pi i\alpha\big(\gamma'(t)\big)z(t)\Big)s(\tilde{\gamma}) = 0$$

tehát

$$\frac{z'(t)}{z(t)} = 2\pi i\alpha\big(\gamma'(t)\big)$$

aminek van egyértelmű megoldása a $z(0) = z_0$ mellett. □

17. Definíció. Legyen $\gamma : [a, b] \to L$ egy párhuzamos görbe, ekkor azt mondjuk, hogy $\gamma(b)$ a $\gamma(a)$ párhuzamos eltoltja a γ mentén.

Legyen most $\gamma : [a, b] \to M$ egy nullhomotóp zárt, sima görbe, $\tilde{\gamma}(t)$ pedig a párhuzamos felemeltje valamilyen olyan $\tilde{\gamma}(a)$-val, ami nem eleme a nullszelésnek! Ekkor $\tilde{\gamma}(a))$ és $\tilde{\gamma}(b)$ ugyanabban a fibrumban van, tehát csak egy konstansban térnek el, ez pedig nem más, mint:

$$n_\gamma = \frac{z(b)}{z(a)} = e^{log(z(b)) - log(z(a))} = e^{\int \frac{z'(t)}{z(t)}dt} = e^{2\pi i \int \alpha(\gamma'(t))dt}$$

Vegyünk most két $\mathbb{D}^2$-el diffeomorf felületet S_1 és S_2, amiknek a határa éppen ez a γ ellentétes irányításokkal, és nevezzük el az uniójukat S-nek! Ekkor Stokes tételét felhasználva:

$$n_\gamma = e^{2\pi i \int \alpha(\gamma'(t))dt} = e^{2\pi i \int_{S_1} d\alpha}$$
$$n_\gamma = e^{2\pi i \int_{S_2} d\alpha}$$

tehát

$$\int_S d\alpha \in \mathbb{Z}$$

minden gömbre! Ez $d\alpha$ csak akkor lehet ω, ha az egész! Tehát legfeljebb akkor van esélyünk konnexióval ellátott komplex vonalnyalábot találni, aminek görbülete $2\pi i\omega$, ha ω egész!

6.3. Általános eset

[4]

13. Tétel. *Legyen L egy (M, ω) szimplektikus sokaság feletti komplex vonalnyaláb konnexióval és kompatibilis Hermitikus metrikával ellátva olyan, hogy a görbülete éppen M szimplektikus formája. Ekkor ez éppen a nyaláb Chern-osztályának egy reprezezentánsa.*

Bizonyítás. Ennek a speciális esetét már láttuk a triviális esetben, hiszen ott minden görbületi 2-forma egzakt volt.

Vegyük M egy triangulációját, és legyenek a trianguláció csúcsai x_i, ezek nyílt pontrahúzható környezetei pedig U_i úgy, hogy bármely $[x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}]$ szimplexre

$$[x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}] \subset U_{i_j}$$

minden j-re.

Mivel az U_i-k pontrahúzhatóak, ezért felettük a nyaláb triviális, tehát használhatunk minden eddig megismeretet. Tudjuk például, hogy triviális nyalábon feltehető, hogy az Hermitikus forma a kanonikus, és így a ragasztófüggvények 1 abszolút értékűek.

Legyen a U_i-n a konnexió 1-formája α_i (a görbület definíciója miatt). Ezekre

$$d\alpha_i = \omega|_{U_i}$$

tehát $U_i \cap U_j$-n

$$d(\alpha_i - \alpha_j) = 0$$

Használva a Poincaré-lemmát:

$$\alpha_i - \alpha_j = f_{ij}$$

valamilyen $f_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}$-re. És tudjuk, hogy az

$$a(i, j, k) = f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} : U_i \cap U_j \cap U_k \to \mathbb{C}$$

konstans, hiszen $da = 0$. Ez azt jelenti, hogy ez az $a \in H^2(M, \mathbb{C})$ De tudunk ennél többet is!

Ahhoz, hogy az α_i-k a metszeteken ugyanazt a konnexiót definiálják az kell, hogy

$$s_i = c_{ij} s_j$$

(ahol a c_{ij}-k a nyaláb ragasztófüggvényei):

$$2\pi i \alpha_i(X) s_i = X(c_{ij}) + 2\pi i \alpha_j(X) s_j$$

amiből tehát:

$$\alpha_i - \alpha_j = \frac{1}{2\pi i} \frac{dc_{ij}}{c_{ij}} = \frac{1}{2\pi i} d\big(log(c_{ij})\big) = df_{ij}$$

Mivel $\prod c_{ij} = 1$, ezért azt kapjuk, hogy $a(i,j,k) \in \mathbb{Z}$!

Vegyük most észre, hogy:

$$\begin{aligned}
\omega(i,j,k) + \frac{1}{2}\int_{x_j x_k} \alpha_j + \frac{1}{2}\int_{x_i x_j} \alpha_j &= \int_{\partial\Delta} \alpha_i + \frac{1}{2}\int_{x_j x_k} \alpha_j + \frac{1}{2}\int_{x_i x_j} \alpha_j \\
&= \frac{3}{2}\int_{\partial\Delta} (\alpha_j + \alpha_i) + \int_{x_k x_i} (\alpha_j - \alpha_i) \\
&= 3\omega(i,j,k) + f_{ij}(x_i) - f_{ij}(x_k)
\end{aligned}$$

Ezt átrendezve kapjuk, hogy:

$$2\omega(i,j,k) = \frac{1}{2}\int_{x_j x_k} \alpha_j + \frac{1}{2}\int_{x_i x_j} \alpha_j - f_{ij}(x_i) + f_{ij}(x_k)$$

Ezt összeadva i, j és k ciklikus permutálásával, majd az egészet elosztva 6-al kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
\omega(i,j,k) = &\frac{1}{3}\big((f_{ij} + f_{jk} + f_{ki})(x_i) + (f_{ij} + f_{jk} + f_{ki})(x_j) + (f_{ij} + f_{jk} + f_{ki})(x_k)\big) \\
&- \frac{1}{2}\big((f_{ij}(x_i) + f_{ij}(x_j)) + (f_{jk}(x_j) + f_{jk}(x_k)) + (f_{ki}(x_k) + f_{ki}(x_i))\big) \\
&- \frac{1}{2}\big(\int_{x_i x_j} (\alpha_i + \alpha_j) + \int_{x_j x_k} (\alpha_j + \alpha_k) + \int_{x_k x_i} (\alpha_k + \alpha_i)\big)
\end{aligned}$$

Ez definíció szerint ω-nak $H^2(M,\mathbb{Z})$ kohomológiaosztálya. Itt azonban az első sor épp a nyaláb Chern-osztálya ($a(i,j,k)$), a második két sor pedig egy-egy kohatár.

□

14. Tétel. *(Weil) Legyen (M,ω) olyan, hogy $[\omega] \in H^2(M,\mathbb{Z})$. Ekkor létezik olyan L komplex vonalnyaláb rajta kompatibilis Hermitikus struktútával és konnexióval úgy,* *hogy a görbülete ω legyen.*

Bizonyítás. Az előző bizonyításon visszafelé haladva, azt a (topológiai értelemben egyértelmű) vonalnyalábot kell választanunk, aminek a Chern osztálya egybeesik ω ekvivalenciaosztályával $H^2(M, \mathbb{Z})$-ben.

Ugyanúgy triangulálva M-et, mint előbb, U_i-n:

$$\omega = d\alpha_i$$

valamilyen α_i 1-formára (a Poincaré-lemma miatt), és a nem üres $U_i \cap U_j$ metszeteken:

$$\alpha_i - \alpha_j = df_{ij}$$

Ezért ismét $da(i,j,k) = d(fij + fjk + f_{ki}) = 0$ valamilyen $f_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{R}$ függvényekre. Most azonban nem tudjuk, hogy ez egész kohomológiaosztályt definiál-e, csak hogy $H^2(M, \mathbb{R})$-ben egybeesik ω-val. Mivel azonban $\omega \in H^2(M, \mathbb{Z})$ ezért ebben a valós kohomológiaosztályban van egy olyan kociklus b, mely egész értékű minden 2-szimplexen. Tehát:

$$b = a + \delta g$$

Valamilyen $g \in H^1(M, \mathbb{R})$-re. Ekkor $i < j$-ra:

$$c_{ij} := e^{2\pi i f_{ij} + g(i,j)} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^*$$

egy kociklus lesz $H^2(M, \mathbb{C}^*)$-ban, hiszen

$$\begin{aligned} c_{ij}c_{jk}c_{ki} &= e^{2\pi i \left(a(i,j,k) + g(i,j) + g(j,k) - g(k,i) \right)} \\ &= e^{2\pi i b(i,j,k)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

c_{ij}-t választva a nyaláb ragasztófüggvényeinek és az α_i-ket a nyaláb konnexióját definiáló 1-formáknak világos, hogy

$$\alpha_i - \alpha_j = d(f_{ij}) = d(f_{ij} + g(i,j)) = \frac{1}{2\pi i} \frac{dc_{ij}}{c_{ij}}$$

Hiszen $g(i,j)$ konstans. Ekkor mivel $c_{ij} \in S^1$, ezért a nyalábnak lesz egy természetes Hermitikus struktúrája. A görbületi tenzor nyilvánvalóan ω lesz, és mivel az α_i-k valósak, ezért a kompatibilitással sincs probléma. $\square$

Mivel a $Weil$-tétel csak egzisztenciát lát be, ezért érdemes megvizsgálni, hogy a konstrukció különböző pontjain mennyi szabadságunk van.

6.3.1. Konnexiók osztályozása

[7]

Vegyünk tehát egy M szimplektikus sokaságot, és rajta egy olyan L vonalnyalábot, melynek Chern-osztályát reprezentálja M szimplektikus formája. Vegyünk ezen egy triangulációt, ezzel egy nyílt fedést a fenti módon, és az ehhez tartozó Hermitikus struktúrát. Adottak tehát a a konstrukcióból $a(i,j,k)$ és a c_{ij}-k. Hányfélék lehetnek az α_i-k?

Mivel a külső deriváltjuk ω kell, hogy legyen, ezért lokálisan legfeljebb $Z^1(U_i,\mathbb{R})$-nyi választásunk van, ha azt akarjuk, hogy a metrikával kompatibilis legyen. Mivel azonban ezek csak a pontrahúzható U_i-ken vannak értelmezve, ezért ezek mind egzaktak.

Legyen tehát két potenciális lokális 1-formánk α_i, és $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i + \beta_i$, ahol $d\beta_i = 0$. Ekkor $\beta_i = dh_i$, valamilyen sima $h_i : U_i \to \mathbb{R}$-re és:

$$\alpha_i - \alpha_j = \frac{1}{2\pi i}\frac{dc_{ij}}{c_{ij}} = \tilde{\alpha}_i - \tilde{\alpha}_j = \alpha_i + \beta_i - \alpha_j + \beta_j = \alpha_i - \alpha_j + dh_i - dh_j$$

Tehát:

$$d(h_i - h_j) = d\delta h(i,j) = 0$$

A konnexiók tere tehát úgy paraméterezhető, hogy:

$$\frac{\{h \in C^0(\mathbb{U},\mathbb{R}) | d\delta h = 0\}}{\{h \in C^0(\mathbb{U},\mathbb{R}) | dh = 0\}}$$

Mikor ekvivalens két konnexióval és vele kompatibilis Hermitikus struktúrával ellátott komplex vonalnyaláb L_1 és L_2? Ha létezik olyan $\tau : L_1 \to L_2$, hogy a

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & L_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív. Továbbá $\tau_m : (L_1)_m \to (L_2)_m$ lineáris izomorfizmus, és $\tau^*(\alpha_2) = \alpha_1$ valamint $H_2 \circ \tau = H_1$.

15. Tétel. *Az M sokaság felett az Hermitikus vonalnyalábok ekvivalenciaosztályainak csoportja izomorf $H^2(M, \mathbb{Z})$-vel. Brylinski p68 2.1.8.)*

16. Tétel. *Az ω görbületű M feletti vektornyalábok tere egy principális homogén tér, egy $H^1(M, \mathbb{C}^*)$ csoporthatással. Brylinski p78 2.2.15.b)*

7. fejezet

Kvantálás

[4]

A kvantummechanika eszköztára alapvetően nem szelésekre van kitalálva, ott az az elképzelés, hogy a hullámfüggvények egy Hilbert-teret alkotnak. Ezen kéne hatni önadjungált operátorokként a különböző megmaradó mennyiségekkel. Hogyan gyártsuk ezt le?

A M szimplektikus sokaság feletti L komplex vonalnyaláb sima szelései természetes módon komplex vektorteret alkotnak. Hogy lesz ezeknek normája? Ha L Hermitikus, akkor tudunk egy pontonkénti skalárszorzatot definiálni. Hogy lesz ebből globálisan egy? Integráljuk!

Mivel ω a feltevésünk szerint nem elfajuló, ezért $\omega^n/n!$ egy térfogati forma, e szerint tudunk integrálni függvényeket (mint például egy sima $s \in \Gamma(L)$-re (s, s)-t.) Mik lesznek az integrálható szelések? Mennyire függ ez a vektortér az Hermitikus struktúra megválasztásától? Ezekre fogjuk keresni a válaszokat ebben a fejezetben.

7.1. Előkvantálás

18. Definíció. Legyen (M, ω) egy szimplektikus sokaság, melynek szimplektikus formája egész. Ekkor (M, ω)-t kvantálhatónak hívjuk.

Legyen (M, ω) kvantálható, és felette L egy $2\pi i\omega$ görbületű konnexióval ellátott vonalnyaláb. Szeretnénk kicserélni a könnyebb számolhatóság érdekében a konnexiót egy L-en értelmezett 1-formára. Jelölje L^+ azt a halmazt, amit L-ből a nullszelés elhagyásával kapunk. Vegyük ezen a ∇ konnexiót, és egy U_j nyílt fedőelemen hozzá tartozó α_j-t. Ekkor definiálhatjuk a

$$\beta_j = pr^*(\alpha_j) + \frac{1}{2\pi i}\frac{dz}{z} \in \Omega^1(U_j \times \mathbb{C}^*)$$

1-formát. A $\psi_j : U_j \times \mathbb{C} \to \pi^{-1}(U_j)$ differomorfizmusnál $(\psi_j^{-1})^*(\beta_j) \in \Omega^1(\pi^{-1}(U_j) \cap L^+)$. Ekkor teljesül, hogy:

$$(\psi_j^{-1})^*(\beta_j)|_{\pi^{-1}(U_i \cap U_i) \cap L^+} = (\psi_j^{-1})^*(\beta_i)|_{\pi^{-1}(U_i \cap U_i) \cap L^+}$$

Hogy miért? Tudjuk, hogy

$$\alpha_i - \alpha_j = \frac{1}{2\pi i}\frac{dc_{ij}}{c_{ij}}$$

és $z_i = c_{ij} z_j$ tehát a metszeten:

$$\beta_i = pr^*(\alpha_i) + \frac{1}{2\pi i}\frac{dz_i}{z_i} = pr^*(\alpha_j) - \frac{1}{2\pi i}\frac{dc_{ij}}{c_{ij}} + \frac{1}{2\pi i}\frac{d(c_{ij}z_j)}{c_{ij}z_j} = pr^*(\alpha_j) + \frac{1}{2\pi i}\frac{dz_j}{z_j} = \beta_j$$

Ez azt jelenti tehát, hogy minden konnexióhoz tartozik egy kanonikus $\alpha \in \Omega^1(L^*)$! Ennek a megalkotásával egy lépéssel közelebb kerültünk a kvantumoperátorok megértéséhez. Vegyük tehát a $C^\infty(M)$ Lie-algebráját a megfigyelhető mennyiségeknek, és cseréljük ki $\mathfrak{X}(L, \nabla)$-ra, ami azokból a valós L^+ feletti χ vektormezőkből áll, melyekre:

1. χ $\mathbb{C}^*$-invariáns
2. $\mathcal{L}_\chi \alpha = 0$
3. $\chi(H) = 0$

Azt már láttuk, hogy kell függvényekből a ferde gradiens módszer segítségével vektormezőket csinálni M felett. Hogy csináljunk belőlük vektormezőket L^+ felett?

A konstrukció azon az észrevételen alapszik, hogy minden $X_f \in A(M)$-re létezik egy $\chi_f \in \mathfrak{X}(L, \nabla)$, melyre

1. $\pi^*(\chi_f) = X_f$
2. $\alpha(\chi_f) = f \circ \pi$

Hogy ez a konstrukció miért értelmes? Lokálisan TL^+ egy direkt szorzat, ami áll M érintővektoraiból és a fibruméiből. Azt, hogy TM "irányában" mi lesz χ_f, azt meghatározza ez első feltétel. A másik irányt pedig meghatározza a második feltétel egyértelműen. Ellenőrizzük, hogy egy ilyen vektormező tényleg megfelel $\chi_f \in \mathfrak{X}(L, \nabla)$ feltételeinek.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\chi_f}\alpha &= d(\alpha(\chi_f)) + \iota_{\chi_f} d\alpha \\
&= d(f \circ \pi) + \iota_{\chi_f} \pi^* \omega \\
&= \pi^*(df + \iota_{X_f}\omega) = 0
\end{aligned}$$

És most felhasználhatjuk, hogy a metrikusság feltétele az volt, hogy $\frac{dH}{H} = 2\pi i(\alpha - \overline{\alpha})$

$$\chi_f(H) = 2\pi i H\big((\alpha - \overline{\alpha})(\chi_f)\big) = 2\pi i H\big(f \circ \pi - \overline{f \circ \pi}\big) = 0,$$

mert f valós. Mire jó mindez? A ferde gradienssel ellentétben ez a leképezés injektív! Tehát minden megmaradó mennyiséghez különböző vektormezőket, és ezáltal operátorokat tudunk rendelni!

Könnyű számolás mutatja, hogy az így definiált $f \to \chi_f$ leképezés Lie-algebra homomorfizmus. Azt kell csak megnéznünk, hogy vajon mindent megkapunk-e $\chi \in \mathfrak{X}(L, \nabla)$-ból. Ehhez vegyünk egy tetszőleges elemet! Mivel ez $\mathbb{C}^*$-invariáns, ezért

$$\alpha(\chi) = f_\chi \circ \pi$$

valamilyen $f_\chi \in C^\infty(M)$-re. Mivel $\chi(H) = 0$, ezért $\alpha(\chi) = \overline{\alpha(\chi)}$, tehát f valós. Most kihasználva, hogy $\mathcal{L}_\chi \alpha = 0$:

$$d\alpha(\chi) + \iota_\chi d\alpha = 0$$

Amit M-re levetítve kapjuk, hogy:

$$df_\chi + \iota_{\pi^*(\chi)}\omega = 0$$

Tehát $\pi^*(\chi) = X_{f_\chi}$ és $\chi = \chi_{f_\chi}$. Összefoglalva:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathfrak{X}(L, \nabla) \arrow[dd, leftrightarrow] \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[ur] \arrow[dr] & & A(M) \arrow[r] & 0 \\
 & & C^\infty(M) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Mit ad nekünk a felső sorozat? Mi $\mathbb{R}$ képe? Mivel ezek a konstans függvényekhez tartoznak, ezért a hozzájuk tartozó érintő vektormező 0, tehát csak fibrumonként fognak hatni! Azt a differenciálegyenletet kell tehát megoldanunk fibrumonként χ_r-re, hogy

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{dz}{z} = r,$$

ahol $r \in \mathbb{R}$, ami azt jelenti, hogy ez épp egy állandó sebességű forgatást fog generálni a fibrumokon:

$$\begin{aligned} L^+ \times \mathbb{R} &\to L^+ \\ (l,t) &\to e^{2\pi irt} l \end{aligned}$$

Ahhoz, hogy megértsük, hogyan hatnak ezek a vektormezők operátorokként a szelések Hilbert-terén, vegyük észre, hogy minden s szelés definiál egy $f_s : L^+ \to \mathbb{C}^*$ függvényt úgy, hogy:

$$f_s(l)l = s(m)$$

Ahol $m \in M$ és $l \in L^+$. És hasonlóan, minden L^+-on ható kontravariáns függvény (amelyre $f(zl) = z^{-1}l$ minden $z \in \mathbb{C}^*$-ra) létezik egy egyértelmű s_f ami az adott f-el és tetszőleges nem nulla l-el kielégíti a fenti egyenletet. Vegyük észre, hogy $f_s(s) = 1$.

Így tehát megfeleltettük a szeléseket L^+ feletti komplex függvényeknek, és az M feletti valós sima függvényekből csináltunk L feletti vektormezőket! Már csak azt kell ellenőriznünk, hogy egy ilyen vektormező irányában vett deriválás valóban egy szelésből egy másik szelést csinál.

19. Definíció. Legyen tehát $f \in C^\infty(M)$. Ekkor χ_f $\mathbb{C}^*$-invariáns, tehát egy tetszőleges $s \in \Gamma(L)$-re $\chi_f f_s$ is kontravariáns. Ezért ez definiál egy $s_{\chi_f f_s} = -2\pi i \delta_f s$ szelést. Ekkor δ_f lineáris és Hermitikus. Ezt hívjuk az f-hez tartozó kvantumoperátornak.

Mivel az $f \to \chi_f$ leképezés Lie-algebra homomorfizmus, ezért:

1. $\delta_{zf} = z\delta_f$

2. $\delta_{f+g} = \delta_f + \delta_g$

3. $-2\pi i \delta_{\{f,g\}} = [\delta_f, \delta_g]$

Minden $f, g \in C^\infty(M)$-re és $z \in \mathbb{C}$-re. Hogyan néz ki ez az operátor?

17. Tétel. *Legyen* (M, ω) *egy kvantálható szimplektikus sokaság, felette pedig* (L, ∇, H) *egy konnexióval és kompatibilis Hermitikus metrikával komplex vonalnyaláb. Ekkor tetszőleges* $f \in C^\infty(M)$ *és* $s \in \Gamma(L)$*-re*

$$\delta_f s = \frac{-1}{2\pi i}\nabla_{X_f} s + fs.$$

Bizonyítás. Mielőtt nagyon belemélyednénk a bizonyításba, törlesztem egy adósságomat és egy jelölésbeli ambivalenciát tisztázok: legyen $\alpha \in \Omega^1(M)$ és $\tilde{\alpha} \in \Omega^1(L^+)$ a korábban tisztázott felemeltje. Mielőtt megismerkednénk δ_f-el, vessünk egy pillantást χ_f-re! Vegyünk egy olyan lokális koordinátakörnyezetet, ahol

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \frac{1}{2\pi i}\frac{dz}{z}.$$

Ekkor:

$$\chi_f = X_f + 2\pi i\big(f - \alpha(X_f)\big) \circ \pi\Big(z\partial_z - \overline{z}\partial_{\overline{z}}\Big).$$

Ez a látszat ellenére egy valós vektormező, hiszen $\big(z\partial_z - \overline{z}\partial_{\overline{z}}\big)$ tisztán képzetes, így az i-szerese valós. Két feltételt kell ellenőriznünk:

$$\begin{aligned}\pi^*(\chi_f) &= X_f\\ \tilde{\alpha}(\chi_f) &= \alpha(X_f) + \frac{2\pi i}{2\pi i}\big(f - \alpha(X_f)\big) \circ \pi\Big(\frac{z}{z}dz(\partial_z)\Big) = f \circ \pi\end{aligned}$$

Vegyünk egy tetszőleges, lokálisan sehol sem eltűnő $s \in \Gamma(L^+)$-t. Ekkor definiálhatjuk a

$$\zeta_f^s = \chi_f - s^*\pi^*\chi_f$$

"függőleges" vektormezőt. Fontos megjegyezni, hogy ez csak $s(M)$-en van definiálva! Mivel f_s konstans s-en, ezért

$$\zeta_f^s f_s = \chi_f f_s$$

Az f "inverzeként" definiálhatunk egy

$$\lambda_s : \mathbb{C}^* \to L^*$$
$$z \to z.s$$

lineáris leképezést. Ekkor

$$\zeta_f^s = \lambda_s^*(y(m)\partial_z + \overline{y(m)}\partial_{\overline{z}}),$$

ahol $y : M \to \mathbb{C}$. Tudjuk azt is, hogy

$$\frac{1}{f_s(\lambda_s(z))} = z$$

Ebből pedig következik, hogy

$$\begin{aligned} y(m) &= \zeta_f^s\Big(\frac{1}{f_s(s(m))}\Big) \\ &= -\zeta_f^s\Big(f_s\big(s(m)\big)\Big) \\ &= -\chi_f\Big(f_s\big(s(m)\big)\Big) \end{aligned}$$

Azt is tudjuk ugyanakkor, hogy

$$y(m) = 2\pi i\tilde{\alpha}(\zeta_f^s)(s(m)).$$

Így tehát

$$\begin{aligned} \chi_f(f_s)(s(m)) &= -2\pi i\tilde{\alpha}(\zeta_f^s)(s(m)) \\ &= -2\pi i\tilde{\alpha}(\chi_f - s^*\pi^*\chi_f)(s(m)) \\ &= 2\pi i(s^*\alpha(X_f) - f) \circ \pi(s(m)). \end{aligned}$$

És hogy csinálunk kontravariáns függvényből szelést? Kiértékeljük a függvényt egy tetszőleges szelésen és megszorozzuk fele a szelést! Így tehát világos, hogy

$$-2\pi i\delta_f s = s_{\chi_f f_s} = \big(2\pi i(s^*\alpha(X_f) - f) \circ \pi(s)\big)s.$$

Amiből tehát valóban:

$$\delta_f = \frac{-1}{2\pi i}\nabla_{X_f} + f$$

□

7.2. Polarizáció

Akkor ezzel készen vagyunk? Vannak hullámfüggvényeink, vannak operátoraink, mi kell még?

Ahhoz, hogy a polarizációt megérthessük, nézzünk meg egy általános példát arra, hogy az eddigi konstrukciónkban mi romolhat el. Legyen ugyanis N egy differenciálható sokaság és $M = T^*N$. Ekkor tudjuk, hogy ω nem csak zárt, hanem egzakt is, ezért a kohomológiaosztálya eltűnik, vagyis felette az L mindig triviális nyaláb lesz, ezért fogom a széléseit a továbbiakban függvényeknek hívni. $\Gamma(L) \simeq C^\infty_{\mathbb{C}}(M)$. Legyen most

$$\mathbb{L}(M) := \{f \in C^\infty(M) | f(m) = p(X) + f_0(\pi(m)), \text{ ahol } X \in \mathfrak{X}(N), \text{ és } f_0 \in C^\infty(N)\}$$

Dirac-probléma: találjunk $C^\infty(M)$-nek egy olyan Hilbert-tér reprezentációját, amin $\mathbb{L}(M)$ irreducibilisen hat.

Az ideológia a dolog mögött az az általános érvelés, hogy $\mathbb{L}(M)$ elemei olyan transzformációkat generálnak, aminél bármelyik állapot (M-beli pont) elvihető bármelyik hozzá kellően közel lévőbe. Azt vehetjük azonban észre, hogy az eddigi konstrukciónk nem egy irreducibilis reprezentációt ad, hiszen a fibrumokon konstans *komplex* függvények tere fixen marad $\mathbb{L}(M)$ hatásánál. Emiatt tehát vehetnénk az összes hullámfüggvény helyett csak ezeket, hogy $\mathbb{L}(M)$-et irreducibilisen tudjuk reprezentálni (még ha a megfigyelhető mennyiségek számát ezzel csökkentjük is.

Mi történik akkor, ha a szimplektikus sokaságunk nem egy koérintőnyaláb? Hogy lehet más terekre átvinni azt, amit itt a fibrumokon konstans függvényekkel eljátszottunk?

20. Definíció. Legyen (M, ω) egy szimplektikus sokaság. Ezen $P : M \to (TM)^{\mathbb{C}}$ egy polarizáció, ha

1. $P_m \subset (T_mM)^{\mathbb{C}}$ egy involutív lineáris altér, tehát a szelései a Lie-zárójelre zártak.

2. P_m simán függ m-től.

3. P maximálisan izotróp, azaz $\omega(P_m, P_m) = 0$ és semelyik P_m-et tartalmazó lineáris altér nem rendelkezik hasonló tulajdonsággal.

4. Minden m-re $D_m^{\mathbb{C}} := P_m \cap \overline{P}_m$ állandó dimenziójú.

Nézzünk erre egy fizikai példát!

21. Definíció. Legyen N sima sokaság és $M = T^*N$. Nézzük azon $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőket, melyekre

$$X(f \circ pr) = 0$$

minden $f \in C^\infty(N)$-re. Ekkor az ezek által kifeszített lineáris altér komplexifikáltját nevezzük vertikális polarizációnak. Jelöljük $\mathfrak{V}(M)$-el.

Az elnevezés viszonylag magától értetődő. Ha a fibrumokon konstans függvényeket nem változtatja meg egy ilyen vektormező, akkor csak a fibrumok "irányába" mutathat. Érdemes észrevenni azt is, hogy a kanonikus α 1-formára (tudjuk, hogy a koérintőnyaláboknak olyan is van):

$$\alpha(X) = 0$$

A polarizációhoz szükséges 2. és 4. feltétel triviálisan teljesül, Az 1. tulajdonságot a definícióban szereplő tulajdonság alapján könnyen láthatjuk. Ugyanis, ha $X, Y \in \mathfrak{V}(M)$, akkor

$$[X, Y](f \circ pr) = X(Y(f \circ pr)) - Y(X(f \circ pr)) = 0$$

minden $f \in C^\infty(N)$-re. A harmadik tulajdonságot $\omega = d\alpha$ felhasználásával úgy tudjuk ellenőrizni, hogy

$$\omega(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]) = 0$$

8. fejezet

Komplex és Kähler-sokaságok

8.1. Kähler-polarizáció

[3]

22. Definíció. Legyen M sima sokaság, és rajta $J_p : T_pM \to T_pM$ lineáris leképezés olyan, hogy $J^2 = -Id$. Ekkor J-t majdnem komplex struktúrának hívjuk.

A "majdnem" komplex struktúra elnevezést az indokolja, hogy az i-vel való szorzást imitálja J az érintőtéren. Fontos észrevenni, hogy majdnem komplex struktúra csak páros dimenziós sokaságon lehet, hiszen pontonként ha választunk egy bázist, akkor a determinánsának a négyzete $(-1)^n$, ugyanakkor maga a determináns valós. Milyen viszonyban tud ez lenni az ω-val? Ha már tudunk "i-vel szorozni" és van egy antiszimmetrikus bilineáris függvényünk, nem tudunk egy szimmetrikus bilineárist csinálni?

23. Definíció. Legyen (M, ω) egy szimplektikus sokaság, és J ezen egy majdnem komplex struktúra. Ekkor J-t kompatibilisnek nevezzük ω-val, ha

$$g(u, v) := \omega(u, Jv)$$

egy Riemann-metrika M-en.

24. Definíció. Legyen (M, J) egy majdnem komplex sokaság. Ekkor J integrálható, ha egy komplex struktúrából jön. (Lásd később.)

Most, hogy tudjuk mit jelent majdnem komplex sokaságnak lenni, és mit jelent a majdnem komplex struktúra integrálhatósága, be tudjuk vezetni a következő fogalmat:

25. Definíció. Legyen (M, ω, J) egy szimplektikus sokaság egy integrálható és kompatibilis majdnem komplex struktúrával. Ekkor M-et Kähler-sokaságnak nevezzük.

Miért érdekes nekünk ez? Mi köze van ennek az eddigiekhez? Az, hogy ezen van egy természetes polarizáció!

26. Definíció. Legyen (M, ω, J) egy Kähler-sokaság, és

$$P_m := \{v_m \in (T_m M)^{\mathbb{C}} | J v_m = i v_m\}$$

Ekkor ez egy polarizáció, és ezt Kähler-polarizációnak hívjuk.

A 2. és a 4. feltétel most is triviálisan teljesül (bár most $dim(P_m \cap \overline{P_m}) = 0$).

8.2. Komplex sokaságok

[3]

Sima sokaságoknál azt követeljük meg a topologikus sokaságokhoz képest, hogy legyen olyan atlasza, hogy az átmenő leképezések, a "ragasztások" simák (valós értelemben differenciálhatóak legyenek). Ez motiválja a következő definíciót:

27. Definíció. Egy n dimenziós komplex sokaság egy M topologikus sokaság, egy

$$\mathbb{A} = \{(U_\alpha, V_\alpha, \phi_\alpha) | \alpha \in J\}$$

atlasszal, ahol $M = \cup U_\alpha$, $V_\alpha \in \mathbb{C}^n$ tartományok minden $\alpha \in J$-re, $\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ pedig olyan, hogy $\psi_{\alpha\beta} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ biholomorfizmus $U_{alpha} \cap U_\beta$-n.

18. Tétel. *Minden komplex sokaság rendelkezik majdnem komplex struktúrával.*

Bizonyítás. Vegyünk egy komplex sokaságot a fenti jelölésekkel! Legyen (U, V, ϕ) egy térkép, $\phi = (z_1, \dots, z_n)$ és $z_j = x_j + i y_j$. Ekkor $p \in U$-ra:

$$T_p M = span_{\mathbb{R}}\{\partial_{x_j}|_p, \partial_{y_j}|_p : j = 1, \dots, n\}$$

Ekkor lokálisan értelmes az i-vel való szorzás, és ennek hatása az érintőtéren éppen

$$J_p(\partial_{x_j}) = \partial_{y_j}$$
$$J_p(\partial_{y_j}) = -\partial_{x_j}$$

Azt kell csak ellenőriznünk, hogy ez a természetes definíciója lokálisan J-nek valóban jóldefiniált az egész sokaságon, és nem függ a fedőelemtől. Legyen tehát U és U' két különböző térkép, $\phi' = (w_1, \ldots, w_n)$, $w_j = u_j + iv_j$ és $\psi(z_1, \ldots, z_n) = (w_1, \ldots, w_n)$. Ekkor tehát:

$$\partial_{x_k} = \sum_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \partial_{u_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \partial_{v_j} \right)$$
$$\partial_{y_k} = \sum_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial y_k} \partial_{u_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_k} \partial_{v_j} \right)$$

Felhasználva, hogy minden koordinátafüggvény holomorf, és ezért teljesítik a Cauchy-Riemann-egyenleteket:

$$\partial_{x_k} = \sum_j \left(\frac{\partial v_j}{\partial y_k} \partial_{u_j} - \frac{\partial u_j}{\partial y_k} \partial_{v_j} \right)$$
$$\partial_{y_k} = \sum_j \left(- \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \partial_{u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \partial_{v_j} \right)$$

Most tehát

$$J' \sum_j \left(\frac{\partial v_j}{\partial y_k} \partial_{u_j} - \frac{\partial u_j}{\partial y_k} \partial_{v_j} \right) = \sum_j \left(\frac{\partial v_j}{\partial y_k} \partial_{v_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_k} \partial_{u_j} \right)$$
$$J' \sum_j \left(- \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \partial_{u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \partial_{v_j} \right) = \sum_j \left(- \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \partial_{v_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \partial_{u_j} \right)$$

Ezzel az állítást beláttuk.

□

Legyen most ismét U egy térkép a fenti módon, és $p \in U$. Ekkor

$$\begin{aligned}
T_pM &= span_{\mathbb{R}}\{\partial_{x_j}|_p, \partial_{y_j}|_p : j = 1, \ldots, n\} \\
T_pM \otimes \mathbb{C} &= span_{\mathbb{C}}\{\partial_{x_j}|_p, \partial_{y_j}|_p\} = \\
&= span_{\mathbb{C}}\left\{\frac{1}{2}(\partial_{x_j}|_p - i\partial_{y_j}|_p)\right\} \oplus span_{\mathbb{C}}\left\{\frac{1}{2}(\partial_{x_j}|_p + i\partial_{y_j}|_p)\right\} = \\
&= T^{1,0} \oplus T^{0,1}
\end{aligned}$$

Legyen tehát $\partial_{z_j} := \frac{1}{2}(\partial_{x_j} - i\partial_{y_j})$ és $\partial_{\bar{z}_j} := \frac{1}{2}(\partial_{x_j} + i\partial_{y_j})$. Ezt a jelölést ismét a Cauchy-Riemann-egyenletek indokolják, hiszen akkor mondjuk, hogy egy $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény komplex differenciálható, ha valós értelemben az és kielégíti a Cauchy-Riemann egyenleteket, ami azt jelenti, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dz}$$

A holomorfitást tehát a most bevezetett jelöléssel úgy is le lehet írni, hogy f pontosan akkor holomorf, ha valós deriválható és $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$!

Azt is akarjuk ugyanakkor, hogy komplex érintővektorokhoz tartozzanak komplex differenciálformák is, és hogy $dz_j(\partial_{z_j}) = 1$ legyen. Ehhez a legtermészetesebb választás, ha $dz_j := dx_j + idy_j$, és analóg módon $d\bar{z}_j = dx_j - idy_j$.

Legyen tehát

$$\begin{aligned}
(T^{1,0})|_p &:= span_{\mathbb{C}}\{dz_j|_p : j = 1, \ldots, n\} \\
(T^{0,1})|_p &:= span_{\mathbb{C}}\{d\bar{z}_j|_p : j = 1, \ldots, n\}
\end{aligned}$$

Ezzel definiálhatunk komplex differenciálformákat a következő módon:

28. Definíció. Legyen M egy komplex sokaság, J pedig a kanonikus majdnem komplex-struktúrája. Ekkor J kiterjed komplex lineáris módon $TM \otimes \mathbb{C}$-re, és az i-hez tartozó altere $T_{1,0}$, a $-i$-hez tartozó $T_{0,1}$, ezek duálisa pedig rendre $T^{1,0}$ és $T^{0,1}$. Ekkor ezek sima szeléseinek tere $\Omega^{1,0}$ és $\Omega^{0,1}$. Legyen tehát

$$\Omega^{p,q} = \{\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_q | \alpha_j \in \Omega^{1,0}, \beta_k \in \Omega^{0,1}\},$$

ahol az első féle tényezőből p darab, a másodikból q darab szerepel.

Vegyük észre, hogy a klasszikus differenciálformák nyelvén:

$$\Omega^r(M)^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=r} \Omega^{p,q}(M)$$

Értelmes tehát az alábbi definíció:

29. Definíció. Dolbeault-operátornak hívjuk a

$$\partial_{p,q} = \pi_{p+1,q} \circ d$$
$$\overline{\partial}_{p,q} = \pi_{p,q+1} \circ d$$

leképezéseket.

Itt fontos kiemelni, hogy ez a két operátor valójában majdnem komplex sokaságokon is értelmezve van, nem kell, hogy az adott sokaságon ténylegesen legyen egy komplex struktúra.

Komplex sokaságon könnyen látható azonban, hogy mindenféle szép tulajdonsággal bírnak ezek, amiket esetleg egy kohomológia kohatárleképezéseitől is megkövetelhetnénk:

$$\partial^2 = \partial \circ \overline{\partial} + \overline{\partial} \circ \partial = \overline{\partial}^2 = 0$$

Mindez a konstrukció csak arra volt nekünk jó, hogy eljuthassunk a következő tételig, ami összefoglalja, hogy mikor lesz egy majdnem komplex sokaság ténylegesen komplex.

19. Tétel. *(Newlander-Nirenberg) Legyen (M, J) egy majdnem komplex sokaság, ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

1. *J egy komplex sokaság majdnem komplex struktúrája.*
2. $[T^{1,0}, T^{1,0}] \subset T^{1,0}$
3. $N_J = 0$
4. $d = \partial + \overline{\partial}$
5. $\pi^{2,0} d|_{\Omega^{0,1}} = 0$

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. □

Térjünk vissza a Kähler-polarizáció polarizáció létének bizonyításához!

Az Kähler-polarizáció involutivitáshoz a zártságot kell csak felhasználnunk, ugyanis, ha $X, Y \in \Gamma(P_m)$

$$[X, Y] - [JX, JY] + J[JX, Y] + J[X, JY] = 0$$

amiből a második tag éppen ugyanaz, mint az első, az utolsó kettőből pedig ki lehet emelni i-t. Ha tehát ezeket kivonjuk mindkét oldalból, és ezen hatunk J-vel:

$$2J[X, Y] = 2i[X, Y]$$

Az utolsó feltétel teljesítéséhez meg kell ismerkednünk egy kicsit jobban a komplex sokaságok elméletével, az fog ugyanis kiderülni, hogy a fenti P_m egy már jól ismert fogalommal (a komplex differenciálhatósággal) áll közvetlen kapcsolatban. Amennyiben megértjük, hogy a szimplektikus forma hogyan fogalmazható meg a komplex differenciálok nyelvén, az is egyértelműen ki fog derülni, hogy ez tényleg egy polarizáció, valamint értelmet nyer a "holomorf szelés" kifejezés is.

A komplex sokaságok elmélete nagyon szorosan kapcsolódika de Rham-kohomológiához is, hiszen láttuk, hogy itt is vannak kanonikus kohatárleképezések, amikkel lehet kohomológiaelméletet csinálni.

30. Definíció.

$$H^{l,m}_{Dolbeault} := \frac{ker\overline{\partial} : \Omega^{l,m} \to \Omega^{l,m+1}}{im\overline{\partial} : \Omega^{l,m-1} \to \Omega^{l,m}}$$

8.2.1. Szimplektikus geometria komplex nyelven

[3]

Hogy illeszthető ez be a mi elméletünkbe? Egy komplex sokaság szimplektikus 2-formája hogyan írható le a most bevezetett eszközökkel?

Mit kell tudnia a mi (M, ω, J) Kähler-sokaságunk szimplektikus (Kähler) formájának? Tudjuk, hogy minden Kähler-sokaság komplex, hiszen definíció szerint J integrálható, így használhatjuk az előző tételt!

Mivel azonban M komplex, a (komplex) differenciál 2-formáinak tere felbomlik:

$$\Omega^2(M, \mathbb{C}) = \Omega^{2,0} \oplus \Omega^{1,1} \oplus \Omega^{0,2}$$

Tudjuk, hogy ω:

1. 2-forma

2. kompatibilis J-vel
3. zárt
4. valós
5. nemelfajuló

1. Az első feltételből adódóan egy lokális koordinátarendszerben:

$$\omega = \sum a_{jk} dz_j \wedge dz_k + \sum b_{jk} dz_j \wedge d\overline{z}_k + \sum c_{jk} d\overline{z}_j \wedge d\overline{z}_k$$

2. A másodikból, mivel $J^*\omega = \omega$, és

$$\begin{aligned} J^* dz_j &= dz_j \circ J = i dz_j \\ J^* d\overline{z}_j &= d\overline{z}_j \circ J = -i d\overline{z}_j, \end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned} J^*\omega &= \sum i^2 a_{jk} dz_j \wedge dz_k + \sum i(-i) b_{jk} dz_j \wedge d\overline{z}_k + \sum (-i)^2 c_{jk} d\overline{z}_j \wedge d\overline{z}_k = \\ &= \sum a_{jk} dz_j \wedge dz_k + \sum b_{jk} dz_j \wedge d\overline{z}_k + \sum c_{jk} d\overline{z}_j \wedge d\overline{z}_k \end{aligned}$$

tehát $a_{jk} = 0 = c_{jk}$ minden j-re és k-ra, azaz $\omega \in \Omega^{1,1}$. Vegyük észre, hogy mivel a Kähler-polarizálás kapcsán kezdtük el tárgyalni a komplex sokaságokat, ezen a ponton már akár be is fejezhetnénk a téma taglalását, hiszen ha $\omega(T^{1,0}, T^{1,0}) = 0$ ezen a ponton triviálisan teljesül, hogy a Kähler-polarizáció valóban polarizáció.

3. A harmadik feltételből adódóan:

$$0 = d\omega = (\partial + \overline{\partial})\omega,$$

Azaz ω definiál egy (esetleg triviális) *Dolbeault*-kohomológiaosztályt:

$$[\omega] \in H^{1,1}_{Dolbeault}(M)$$

4. A negyedik feltételből adódik, hogy $\omega = \overline{\omega}$, lokális koordinátarendszerben:

$$\begin{aligned}\sum b_{jk}dz_j \wedge d\overline{z}_k &= \omega \\ &= \overline{\omega} \\ &= \sum \overline{b_{jk}} d\overline{z}_j \wedge dz_k \\ &= \sum -\overline{b_{jk}} dz_k \wedge d\overline{z}_j \\ &= \sum b_{kj} dz_k \wedge d\overline{z}_j\end{aligned}$$

Azt kapjuk, tehát, hogy $B = -\overline{B^T}$, ahol a B i-edik sorának j-edik eleme b_{ij}. Ha viszont bevezetjük a $H = -2iB$ mátrixot, akkor azt kapjuk, hogy ω valós értékűsége ekvivalens H Hermitikusságával.

5. Ha ω nemelfajuló, az azt jelenti, hogy ω^n egy térfogati forma. De mi is ω^n a H függvényében?

$$\omega = \frac{i}{2} \sum h_{jk} dz_j \wedge d\overline{z}_k$$

ω^n-ben csak olyan tagok szerepelnek, amik $\left(\frac{i}{2}\right)^n dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \dots dz_n \wedge d\overline{z}_n$ alakúak (megfelelő számú átrendezés után).

$$\begin{aligned}\omega^n &= \left(\frac{i}{2}\right)^n \sum_{\sigma\in S_n} \sum_{\phi\in S_n} \prod_{l=1}^n h_{\sigma(l)\phi(l)} dz_{\sigma(1)} \wedge d\overline{z}_{\phi(1)} \wedge \dots \wedge dz_{\sigma(n)} \wedge d\overline{z}_{\phi(n)} \\ &= \left(\frac{i}{2}\right)^n \sum_{\sigma\in S_n} \sum_{\phi\in S_n} \prod_{l=1}^n h_{\sigma(l)\phi(l)} sgn(\sigma\phi) dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_n \\ &= \left(\frac{i}{2}\right)^n \sum_{\sigma\in S_n} \sum_{\psi\in S_n} \prod_{l=1}^n h_{l\psi(l)} sgn(\psi) dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_n \\ &= \left(\frac{i}{2}\right)^n n!\det(h_{jk}) dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_n,\end{aligned}$$

ahol $\psi = \sigma^{-1}\phi$. Azt is tudjuk még, hogy $\omega(v, Jv) > 0$.

A 2. feltétel következménye az is, hogy $\omega(v, Jv) > 0$ minden $v \neq 0$-ra. Legyen

$$
\begin{aligned}
v &= \sum_j v_j \partial_{x_j} + u_j \partial_{y_j} \\
&= \sum_j v_j(\partial_{z_j} + \partial_{\bar{z}_j}) + i u_j(\partial_{z_j} - \partial_{\bar{z}_j}) \\
&= \sum_j (v_j + i u_j)\partial_{z_j} + (v_j - i u_j)\partial_{\bar{z}_j} \\
Jv &= \sum_j -u_j \partial_{x_j} + v_j \partial_{y_j} \\
&= \sum_j -u_j(\partial_{z_j} + \partial_{\bar{z}_j}) + i v_j(\partial_{z_j} - \partial_{\bar{z}_j}) \\
&= \sum_j (i v_j - u_j)\partial_{z_j} + (-i v_j - u_j)\partial_{\bar{z}_j}
\end{aligned}
$$

Tehát

$$
\begin{aligned}
0 < \omega(v, Jv) &= \frac{i}{2}\sum_{j,k} h_{jk}(v_j + i u_j)(-i v_k - u_k) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j,k} i h_{jk}(v_j + i u_j)(-i)(v_k + i u_k) \\
&= \frac{1}{2} v^T H v
\end{aligned}
$$

Azt látjuk tehát, hogy ω pontosan akkor lesz Kähler-forma, ha H pozitív definit. Ehhez kapcsolódóan érdemes bevezetni a Kähler-sokaságok elméletében nagy jelentőséggel bíró fogalmat:

31. Definíció. Legyen M komplex sokaság, és $\rho \in C^\infty_{\mathbb{R}}(M)$ olyan, hogy minden $(U, z_1, \ldots, z_n)$ holomorf térképen $\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z_k \partial \bar{z}_j}(p)\right)$ pozitív definit minden $p \in U$-ra. Ekkor ρ-t szigorúan pluriszubharmonikusnak hívjuk.

Ha egy sokaságon van ilyen függvény, akkor az automatikusan Kähler, $\omega = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\rho$-val. Erre fogunk látni példát a következő fejezetben.

8.2.2. Holomorf szelések

Most, hogy már megismerkedtünk egy kicsit a komplex sokaságok nyelvezetével, feltehetjük a kérdést: Mikor lesz egy komplex sokaság feletti komplex vonalnyaláb egy szelése holomorf? Mik azok az (esetleg komplex) Hamilton-függvények, amik ezt a holomorfitást respektálják?

Mivel L-en van komplex struktúra ezért holomorfnak definiálhatunk egy szelést, ha mint $s_0 : M \to L$ komplex sokaságok közötti leképezés holomorf. Mikor kompatibilis ezzel a konnexió?

A triviális nyaláb szelései függvények, ezek akkor holomorfak, ha a $\overline{\partial}$-uk 0. A konnexió ezzel akkor kompatibilis, ha az 1-formájának a $(0,1)$ komponense pont a $\overline{\partial}$, azaz ilyen irányban deriválva egy függvényt pontosan akkor kapunk 0-t, ha a függvény holomorf. Ezt könnyen általánosíthatjuk úgy, hogy azt mondjuk, hogy legyen egy konnexió kompatibilis a komplex struktúrával, ha $(0,1)$ irányba deriválva egy holomorf szelést 0-t kapunk.

Legyen s_0 és X mint előbb, és g holomorf függvény! Ekkor

$$\nabla_X g s_0 = X(g) s_0 + g \nabla_X s_0 = 0 + 0 = 0$$

Ez azt jelenti tehát, hogy holomorf szelés holomorf függvényszerese is holomorf, épp ahogy várnánk. Ahhoz, hogy megnézzük mikor lesz holomorf szelés képe holomorf egy δ_f-nél, emlékezzünk mit csinál egy f Hamilton-függvény kvantumoperátora egy szeléssel:

$$\begin{aligned}
\delta_f g s_0 &= -\frac{1}{2\pi i} \nabla_{X_f} g s_0 + f g s_0 \\
&= \Big(-\frac{X_f(g)}{2\pi i} - \alpha(X_f) g + f g \Big) s_0 \\
&= \Big(f g - \frac{dg(X_f)}{2\pi i} - \alpha(X_f) g \Big) s_0 \\
&= \Big(f g - \frac{(\partial g + \overline{\partial} g)(X_f)}{2\pi i} - \alpha(X_f) g \Big) s_0 \\
&= \Big(f g - \frac{(\partial g)(X_f)}{2\pi i} - \alpha(X_f) g \Big) s_0
\end{aligned}$$

Eddig a konnexiónkról megköveteltük, hogy metrikus legyen abban az értelemben, hogy az Hermitikus struktúra skaláris szorzatába "be lehet deriválni". Most azonban, hogy van komplex struktúránk, meg tudjuk követelni azt is, hogy azzal is kompatibilis legyen a következő módon.

Vessünk egy pillantást ismét a metrikusság feltételére! Mi történik, ha egy konnexió mindkét struktúrával kompatibilis? Legyen most ismét $H = (s_0, s_0)$, ahol α az s_0 holomorf sehol el nem tűnő szeléshez tartozó 1-forma, és X egy $(1,0)$-típusú vektormező!

$$\begin{aligned}(dH)(X) = X(H) &= (\nabla_X s_0, s_0) + (s_0, \nabla_{\overline{X}} s_0)\\ &= (2\pi i\alpha(X)s_0, s_0)\\ &= 2\pi i\alpha(X)H\end{aligned}$$

Amiből következik, hogy:

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial H}{H}$$

Tudjuk, hogy minden $Y \in \mathfrak{X}(M) \otimes \mathbb{C}$-ra

$$\begin{aligned}-Y(f) = -df(Y) &= d\alpha(X_f, Y)\\ &= X_f(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X_f)) - \alpha([X_f, Y])\end{aligned}$$

Tehát minden Y $(0,1)$-típusú vektormezőre:

$$\alpha([X_f, Y])g = Y\Big(fg - \alpha(X_f)g - \frac{X_f(g)}{2\pi i}\Big) + Y\Big(\frac{X_f(g)}{2\pi i}\Big)$$

Miért adtunk hozzá 0-t? Mert így a jobboldalon az első tag (a feltételezésünk szerint) épp egy holomorf függvény $(0,1)$-típusú vektormező szerinti deriváltja. Ezt az egyenletet úgy is átírhatjuk, hogy

$$\alpha([X_f, Y])g = \frac{1}{2\pi i}[Y, X_f](g)$$

Ami pedig ekvivalens azzal, hogy minden holomorf koordinátakörnyezetben minden k-ra:

$$\alpha\Big(\sum_j \frac{\partial X^j}{\partial \overline{z_k}}\partial_{z_j}\Big)g = \frac{1}{2\pi i}\sum_j \frac{\partial X^j}{\partial \overline{z_k}}\frac{\partial g}{\partial z_j},$$

ahol

$$X = \sum_j X^j\partial_{z_j} + \overline{X}^j\partial_{\overline{z}_j}.$$

Nézzük hát meg, hogy néz ki ez lokális koordinátakörnyezetben!

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i}\partial log(H(s)) = \frac{1}{2\pi i}\sum_j \frac{\partial log(H(s))}{\partial z_j} dz_j$$

Ugyanakkor

$$-\sum_j f'_{z_j} dz_j - \sum_j f'_{\overline{z}_j} d\overline{z}_j = -df = \overline{\partial}\alpha(X_f, .) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\Big(\sum_{j,k} \frac{\partial^2 log(H(s))}{\partial z_j \partial_{\overline{z}_k}} \overline{X^k} dz_j - \frac{\partial^2 log(H(s))}{\partial z_j \partial_{\overline{z}_k}} X^k d\overline{z}_j\Big)$$

Legyen $\tilde{H}$ az az $n \times n$-es mátrix, amelyre:

$$(\tilde{H})_{ij} = \frac{\partial^2 log(H(s))}{\partial z_j \partial_{\overline{z}_k}}$$

Ekkor tehát az az f-re vonatkozó differenciálegyenletrendszer, amit ki kell elégítenie ahhoz, hogy a holomorfitást megtartó kvantumoperátort indukáljon:

$$\sum_j \left(\frac{\partial log(H(s))}{\partial z_j} \partial_{\overline{z}_k}\Big(\sum_l \tilde{H}^{jl} f'_{\overline{z}_l}\Big)\right) g = \sum_j \left(\frac{\partial g}{\partial z_j} \partial_{\overline{z}_k}\Big(\sum_l \tilde{H}^{jl} f'_{\overline{z}_l}\Big)\right)$$

minden k-ra, és minden olyan holomorf g-re, amire gs_0 holomorfan terjed ki M-re.

9. fejezet

CP^1

Bizonyítás nélkül használjuk azt az állítást, hogy a normált Fubini-Study-forma Chern-osztálya 1, tehát a hozzá tartozó komplex vonalnyaláb a tautologikus duálisa. [8]

$H(s)$-nek választhatjuk a

$$H(s) = \frac{1}{1 + z\overline{z}}$$

Kähler-potenciált, hiszen ezen a koordinátakörnyezeten csak a konstans függvényeknek megfelelő szelések lesznek sehol sem nullák, választhatjuk tehát a konstans 1-et, és a forrásban taglalva van, hogy

$$(s, s) := \frac{s(z)\overline{s}(z)}{1 + z\overline{z}}$$

valóban megad egy Hermitikus struktúrát a nyalábon, ahol $s(z)$ az s szelés az adott koordinátakörnyezeten, mint z függvénye. Ekkor

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i}\partial log(H(s)) = \frac{1}{2\pi i}\frac{-\overline{z}}{1 + z\overline{z}}dz$$

és

$$\overline{\partial}\alpha = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(1 + z\overline{z})^2}dz \wedge d\overline{z}$$

tehát

$$X_f = -2\pi i(1 + z\overline{z})^2 f'_{\overline{z}}\partial_z + 2\pi i(1 + z\overline{z})^2 f'_z\partial_{\overline{z}}$$

és így

$$\alpha([X_f,\partial_{\overline{z}}])=\frac{\overline{z}}{1+z\overline{z}}\big(2z(1+z\overline{z})f'_{\overline{z}}+(1+z\overline{z})^2f''_{\overline{z}\overline{z}}\big).$$

A sehol sem nulla holomorf szelések tehát egy koordinátakörnyezeten éppen a konstansok, az őket holomorf szelésekbe vivő (lokálisan) holomorf függvények pedig éppen a $g(z)=g_1z+g_0$ alakúak. Az kell nekünk tehát, hogy az összes ilyen függvényre:

$$\alpha([X_f,\partial_{\overline{z}}])g=\frac{1}{2\pi i}\partial_{\overline{z}}(X_f(g))$$

$$\big(2z\overline{z}f'_{\overline{z}}+\overline{z}(1+z\overline{z})f''_{\overline{z}\overline{z}}\big)g=-\big(2z(1+z\overline{z})f'_{\overline{z}}+(1+z\overline{z})^2f''_{\overline{z}\overline{z}}\big)g'_z$$

Vizsgáljuk meg egy kicsit ezt a differenciálegyenletet és vezessük be a

$$\varphi(z)=f'_{\overline{z}}$$

függvényt! Ekkor az egyenletet átrendezve ott, ahol $\varphi\neq 0$:

$$\big(log(\varphi)\big)'_{\overline{z}}=\frac{\varphi'_{\overline{z}}}{\varphi}=-\frac{2z\overline{z}g+2z(1+z\overline{z})g'_z}{\overline{z}(1+z\overline{z})g+(1+z\overline{z})^2g'_z}.$$

Nézzük meg azt a speciális esetet, ha g konstans! Mivel ez egy kevésbé szigorú feltétel f-re nézve, így a megoldásoknak csak egy bővebb halmazát kaphatjuk, ha viszont ezek mind kielégítik az eredeti egyenletet, akkor ez az összes. Ebben a speciális esetben tehát az előző egyenlet arra egyszerűsödik, hogy:

$$\big(log(\varphi)\big)'_{\overline{z}}=\frac{\varphi'_{\overline{z}}}{\varphi}=\frac{-2z}{1+z\overline{z}}=-2\big(log(1+z\overline{z})\big)'_{\overline{z}.}$$

Amiből tehát

$$\varphi(1+z\overline{z})^2=e^h$$

valamilyen holomorf h-re. Definiáljuk a $G(z)$-t úgy, hogy ott, ahol $\varphi\neq 0$, ott $G=e^h$, ahol pedig $\varphi=0$, ott G is. Ezzel a holomorf G-vel:

$$\varphi=\frac{G}{(1+z\overline{z})^2}.$$

Mit mond el mindez f-ről? Vegyük észre, hogy

$$\left(zf\right)'_{\overline{z}} = zf'_{\overline{z}} = -\frac{zG}{(1+z\overline{z})^2} = \left(\frac{zG}{1+z\overline{z}}\right)'_{\overline{z}}.$$

Ami tehát azt jelenti, hogy

$$zf = \frac{G}{1+z\overline{z}} + F$$

valamilyen F holomorf függvényre. De azt is tudjuk, hogy f valós értékű! Közös nevezőre hozva tehát azt látjuk, hogy

$$\frac{G(z)}{z} + \left(\frac{1}{z} + \overline{z}\right)F(z)$$

is az! Ez csak akkor fordulhat elő, ha az $\frac{1}{z}$-s tagok kiesnek, és a z is legfeljebb első hatványon szerepel (ahogy $\overline{z}$), tehát

$$f = \frac{a + bz + \overline{b}\overline{z} + cz\overline{z}}{1+z\overline{z}},$$

ahol $a, c \in \mathbb{R}$. Idézzük fel a sztereografikus vetítés koordinátafüggvényeit!

$$f_1(z) = \frac{z+\overline{z}}{1+z\overline{z}}$$
$$f_2(z) = \frac{1}{i}\frac{z-\overline{z}}{1+z\overline{z}}$$
$$f_3(z) = \frac{z\overline{z}-1}{1+z\overline{z}}$$

Azt látjuk tehát, hogy

$$f(z) = Re(b)f_1(z) - Im(b)f_2(z) + \frac{c-a}{2}f_3(z) + \frac{a+c}{2}$$

A holomorfitást megtartó Hamilton-függvények Poisson algebrája tehát 4 dimenziós, és minden eleme előáll $< v, . > +\tilde{c}$ alakban, ahol $v \in \mathbb{R}^3$ és $\tilde{c} \in \mathbb{R}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy a konstans függvények a Lie-algebra centrumában vannak, a vektor rész pedig a vektoriális szorzatoknak megfelelően szorzódik. [9] Egy ilyen f-re

$$\begin{aligned}
f'_{\overline{z}} &= \frac{-bz^2+(c-a)z+\overline{b}}{(1+z\overline{z})^2}\\
X_f &= 2\pi i\Big(\big(bz^2+(a-c)z-\overline{b}\big)\partial_z+\big(\overline{b}\overline{z}^2+(a-c)\overline{z}-b\big)\partial_{\overline{z}}\Big)\\
\alpha(X_f) &= -bz+\frac{(c-a)z\overline{z}+\overline{b}\overline{z}+bz}{1+z\overline{z}}\\
f-\alpha(X_f) &= bz+a\\
fg-\alpha(X_f)g-\frac{X_f(g)}{2\pi i} &= (bz+a)(g_1z+g_0)-(bz^2+(a-c)z-\overline{b})g_1
\end{aligned}$$

Ez valóban holomorf, tehát ezek a függvények megoldások, és mivel legalább annyian vannak, mint az összes megoldás, ezért a teljes Poisson-algebrát megkaptuk. Mivel ez az α csak sehol sem nulla holomorf széléshez tartozhat (ami tehát ezen a térképen konstans függvényként jelenik meg) ezért egy tetszőleges

$$s=(s_1z+s_0)\tilde{s},$$

-re, ahol $\tilde{s}$ a $z_1\neq 0$ koordinátakörnyezeten sehol sem eltűnő szelés.(itt ugye csak ezek vannak holomorf szelésként):

$$\begin{aligned}
\delta_f s &= (f-\alpha(X_f))s-\frac{1}{2\pi i}X_f(s_1z+s_0)\tilde{s}\\
&= ((bz+a)(s_1z+s_0)-(bz^2+(a-c)z-\overline{b})s_1)\tilde{s}\\
&= ((cs_1+bs_0)z+\overline{b}s_1+as_0)\tilde{s}
\end{aligned}$$

Tehát az f-hez tartozó kvantumoperátor mátrixa:

$$\begin{pmatrix} c & b\\ \overline{b} & a\end{pmatrix}$$

Mikor lesznek a sajátértékei valósak? Ha a diszkrimináns nemnegatív, tehát

$$0\leq (a+c)^2-4(ac-|b|^2)=4\Big(\frac{(a-c)^2}{2}+|b|^2\Big),$$

ami mindig teljesül!

És mi változik meg, ha megszorozzuk egy n egész számmal a szimplektikus formát? Ekkor az egészsége nem változik, de a kohomológiaosztálya igen, és így a szelések terének dimenziója is $n+1$, ezen a koordinátakörnyezeten éppen a legfeljebb n-edfokú komplex polinomok. A szimplektikus formával azonban megváltozik az α is n-szeresére, ugyanakkor

$$X_f^n = X_f/n$$

az X_f^n az új ferde gradiens. Legyen tehát egy szelés ezen a koordinátakörnyezeten:

$$s = \sum_{k=0}^{n} s_k z^k \tilde{s},$$

ahol $\tilde{s}$ a $z_1 \neq 0$ koordinátakörnyezeten sehol sem eltűnő szelés.[8] Ekkor az előző f-ekre (a differenciálegyenlet nem változik, tehát most is ugyanazok lesznek a holomorfitást megtartó Hamilton-függvények):

$$\begin{aligned}\delta_f s &= (bz+a)s - \frac{bz^2 + (a-c)z - \overline{b}}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) s_k z^k \tilde{s} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\overline{b}\frac{k+1}{n} s_{k+1} + \frac{(n-k)a + kc}{n} s_k + \frac{n-k+1}{n} b s_{k-1} \right) z^k \tilde{s},\end{aligned}$$

ahol $s_{n+1} = s_{-1} = 0$. A kvantumoperátor mátrixa ekkor tehát:

$$\begin{pmatrix} c & b/n & 0 & \cdots & & & 0 \\ \overline{b} & \frac{(n-1)c+a}{n} & 2b/n & 0 & \cdots & & \\ 0 & \frac{(n-1)\overline{b}}{n} & \ddots & \ddots & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ & & 0 & \ddots & \ddots & (n-1)b/n & 0 \\ & & & 0 & 2\overline{b}/n & \frac{(n-1)a+c}{n} & b \\ 0 & & \cdots & & 0 & \overline{b}/n & a \end{pmatrix}$$

.

10. fejezet

Összegzés

A szakdolgozat második fejezetében egy viszonylag egyszerű és nagyon klasszikus példán (az ingán) keresztül megismerkedhettünk a mechanika 3 elemi megközelítésével, a Newton-félével, a Lagrange-félével, és a Hamilton-félével. Az első a testre ható erők eredőjével írta le a test mozgását ($F = ma$), míg a második a legkisebb hatás elve alapján (Euler-Lagrange-egyenlet), a harmadik pedig az energiamegmaradás szerint Hamilton-egyenletrendszer.

Az utóbbi két megközelítés között teremti meg a kapcsolatot a Legendre-transzformáció, aminek a leírására szintén a második fejezetben kerül sor.

A harmadik fejezetben leírtam, hogyan lehet az euklideszi térben megsimert egyenleteket differenciálható sokaságokra átültetni (Lagrange-esetben az érintőnyalábokra, Hamilton-esetben pedig a koérintőnyalábokra. Ezek után került bevezetésre a szimplektikus sokaság fogalma, ami általánosítja a koérintőnyalábokat és lehetőséget teremt mechanikai rendszerek általánosabb leírására.

A negyedik fejezetben összefoglalom a megmaradó mennyiségekről a legfontosabb információkat, bevezetésre kerülnek olyan fogalmak, mint a $Poisson$-zárójel, és több érdekes, és a későbbiekben hasznos Lie-algebra homomorfizmussal is megismerkedünk.

Az ötödik fejezet egy technikai segédeszközt mutat be, a Čech-kohomológiát, amelynek segítségével bizonyítani tudunk később több olyan tételt, amelynek az elmélet szempontjából nagy jelentősége van, és ami sok topológiai információt könnyen számolhatóvá tesz.

A hatodik fejezetben elérkezünk a szakdolgozat lényegi részéhez, amikor klasszikus mechanikai rendszerekhez kvantummechanikai rendszereket rendelünk komplex vonalnyalábokkal. A fő ötlet az, hogy a komplex értékű hullámfüggvények helyett komplex vonalnyalábok szeléseit vegyük, a lehető legkanonikusabban, és e lehető legtöbb struktúrával ellátva. Szeretnénk ugyanis ezeket deriválni (ezért kell a konnexió) és szeretnénk ezeket pontonként skalárisan szorozni (ezért kell az Hermitikus metrika), hogy aztán esetleg tudjuk őket integrálni, aminek a részletezésére ebben a dolgozatban nem kerül sor.

A hetedik fejezetben bizonyításra kerül az elmélet talán legfontosabb tétele, hogy minden olyan szimplektikus sokaság, aminek a szimplektikus formája egész kohomológiaosztályt reprezentál kvantálható, avagy létezik hozzá olyan konnexióval és Hermitikus struktúrával ellátott komplex vonalnyaláb, aminek a görbülete ugyanezt a kohomológiaosztályt reprezentálja. Ezek után szó esik a polarizációról röviden, amit részletesebben csak komplex (Kähler) esetben taglalok.

A nyolcadik fejezetben kerül részletezésre a Kähler-polarizáció, majd megismerkedünk a komplex sokaságok elméletének szükséges alapjaival, hogy aztán tudjuk értelmezni a holomorf szelés fogalmát, és be tudjuk vezetni a Hamilton-függvényhez rendelt kvantumoperátort. A fejezet végéhez kapcsolódóan tette fel a témavezetőm azt a kérdést, hogy mikor tartja meg a holomorfitást egy ilyen kvantumoperátor, aminek a feltételét önállóan dolgoztam ki.

A szakdolgozat legvégén kvantálom a projektív egyenest, először a Fubini-Study-formával, majd annak az egész számszorosaival, több érdekes eredményt is kihozva.

Irodalomjegyzék

[1] Elliott Schneider. *Lagrangian and Hamiltonian Mechanics in Under 20 Minutes: Physics Mini Lesson.* URL: `https://www.physicswithelliot.com/lagrangian-hamiltonian-mini-notes`.

[2] Alain J. Brizard. *Introduction to Lagrangian and Hamiltonian mechanics*. 2004.

[3] Ana Cannas da Silva. *Lectures on Symplectic Geometry.* 2nd. Springer-Verlag Berlin, 2008. ISBN: 978-3-540-42195-5.

[4] D.J. Simms és N.M.J. Woodhouse. *Lectures on geometric quantization.* Lecture notes in physics. Springer-Verlag Berlin, 1949. ISBN: 0-540-07860-6.

[5] Balázs Csikós. *Lie-csoportok és Lie-algebrák.* URL: `http://web.cs.elte.hu/geometry/csikos/dif/lie0.pdf`.

[6] Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry, volume two.* Publish or perish Inc., 1999. ISBN: 0-914098-71-3.

[7] J.-L. Brylinski. *Loop spaces, characteristic classes, and geometric quantization.* Birkhäuser Boston, 1951. ISBN: 0-8176-3644-7.

[8] Daniel Huybrechts. *Complex Geometry An Introduction.* Springer-Verlag Berlin, 2005. ISBN: 3-540-21290-6.

[9] Wikipedia. “Stereographic Projection”. (). URL: `https://en.wikipedia.org/wiki/Stereographic_projection`.