NYILATKOZAT

Név: Dorogi Imre László

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika Bsc

NEPTUN azonosító: A7ZJPA

Szakdolgozat címe:
A térfogat és a felszín
kiszámítási módszerei

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2023.06.07.

Dorogi IL

a hallgató aláírása

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Dorogi Imre László

A térfogat és a felszín kiszámítási módszerei

Szakdolgozat
Matematika BSc

Témavezető:
Dr. Csikós Balázs

Budapest, 2023

Tartalomjegyzék

1. Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Csikós Balázsnak, hogy elvállalta ezt az általam kitalált témát és, hogy a konzultációk során rengeteget segített a megírásában, emellett sok új dolgot tanulhattam tőle. Továbbá szeretném megköszönni a családomnak és a barátaimnak, hogy a tanulmányaim során végig mellettem álltak és támogattak.

2. Bevezetés

Amikor először tanultam kerület-, terület-, illetve felszín- és térfogatszámítást, azóta érdekel, hogy magasabb dimenziókban létezik-e hasonló. A hétköznapi életben csak a 3 dimenziót érzékeljük (esetleg 4-et, ha az időt is annak tekintjük), viszont a matematikában lényegében bárhány dimenzió definiálható és az alapvető geometriai fogalmak (pont, egyenes, sík, távolság, gömb, stb.) átvihetőek. Emellett a matematikában sok helyen (pl. operációkutatás, valószínűségszámítás) előjön az n-dimenziós geometria.
Egy n-dimenziós geometriai alakzat térfogatának és feszínének kiszámítása elvben „csak” egy integrál, de a gyakorlatban sokszor nem ilyen egyszerű (még 3-dimenzióban sem). Ehhez sokszor geometriai- vagy analitikus ötletekre van szükség. A dolgozatom célja betekintést nyújtani a magasabb dimenziókba, mélyebben megismerni az n-dimenziós alakzatokat és zárt formulákat adni azok felszínére és térfogatára. A dolgozatomban először definiálom precízen a térfogatot és a felszínt és megadom az általános integrált, amivel ki lehet számolni. Ezután definiálok pár egyszerűbb alakzatot n-dimenzióban (pl. gömb, poliéder, henger, kúp) és kiszámolom ezek térfogatát és felszínét, majd vizsgálok pár bonyolultabb felszín- és térfogatformulát (pl. Crofton-típusú formulák, Cauchy-formula konvex alakzatok felszínére). Végezetül megnézek pár példát, amikben szükség van a fentiekre. A dolgozatomban alakzat alatt végig $\mathbb{R}^n$-beli, összefüggő, kompakt halmazt fogok érteni.

3. Mértékelméleti összefoglaló

Ebben a fejezetben felhasználom [1] és [2] jegyzetek anyagát. Mindenek előtt definiálni kell, hogy mit értünk térfogat és felszín alatt, mert ezeknek még 3 dimenzióban is többféle definíciója létezik. A térfogatra a naív definíció a következő: Tetszőleges $\mathbb{R}^n$-beli kompakt poliéder felbontható szimplexek uniójára, úgy, hogy azok belsejei diszjunktak. Az $\mathbb{R}^n$-beli szimplexek térfogatát ki tudjuk számítani (képlet, bizonyítással később), ezek térfogatának az összege a poliéder térfogata. Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz. Vegyük a H-ba beleírható kompakt poliéderek térfogatának szuprémumát és a köré írható kompakt poliéderek térfogatának az infimumát. Ha ez a két érték azonos, akkor ezt nevezzük H Jordan-mértékének, H-t pedig Jordan-mérhetőnek hívjuk, ami 2 és 3 dimenzióban megfelel a területnek és a térfogatnak. Arkhimédész ezzel a módszerrel közelítette a π értékét és a Riemann-integrálás is ezen az elven működik.

Ennek a definíciónak viszont az a hátránya, hogy sok esetben a szuprémum és az infimum nem egyezik meg. Pl. vegyük az $S = [0,1] \times [0,1] \cap \mathbb{Q}^2$ halmazt (az egységnégyzet, de annak csak a racionális koordinátájú pontjai). Ha ennek akarjuk $\mathbb{R}^2$-ben kiszámolni a Jordan-mértékét, akkor arra jutunk, hogy a köré írható sokszögek területének infimuma 1, mert az egységnégyzet a legkisebb köré írható sokszög, de a beleírható sokszögek területének szuprémuma 0, mivel bármilyen, nem elfajuló sokszöget veszünk az egységnégyzeten belül, annak biztosan lesz olyan pontja, aminek nem racionális mindkét koordinátája, mert az irracionális számok halmaza sűrű $\mathbb{R}$-ben, így nem lesz részhalmaza S-nek. Lényegében csak ponttá fajuló „sokszögek” írhatóak bele, amiknek a területe 0. Szebb tulajdonságai miatt előnyösebb a Lebesgue-mértéket használni a térfogat és a felszín definiálására. Ennek az az oka, hogy a Lebesgue-mérték sokkal általánosabb, sokkal több halmaz Lebesgue-mérhető, emellett a Jordan-mérhető halmazok Lebesgue-mérhetőek is és a Jordan-mérhető halmazok két mértéke azonos.

3.1. Mértéktér

3.1. Definíció (σ-algebra)**.** Legyen adott egy Ω alaphalmaz és egy $\mathcal{A} \subseteq P(\Omega)$ halmazrendszer. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ egy σ-algebra, ha a következők teljesülnek:

- $\Omega \in \mathcal{A}$.
- Ha $A, B \in \mathcal{A}$, akkor $A \setminus B \in \mathcal{A}$.
- Ha $A_1, A_2, \ldots$ mindegyike $\mathcal{A}$ beli, akkor $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Megjegyzés: a sík egyelemű részhalmazai Jordan-mérhetőek, de a fenti $S = [0,1] \times [0,1] \cap \mathbb{Q}^2$ megszámlálható halmaz nem az, így a Jordan-mérhető halmazok nem alkotnak σ-algebrát.

3.2. Definíció (Borel-féle σ-algebra)**.** Ha Ω egy topologikus tér, akkor a legszűkebb σ-algebrát, mely tartalmazza az Ω összes nyílt részhalmazát, Ω Borel-féle σ-algebrájának nevezzük, az elemeit pedig Ω Borel-féle részhalmazainak, vagy röviden Borel-halmazoknak hívjuk.

3.3. Definíció (Mérték)**.** Adott $\mathcal{A}$ σ-algebra Ω alaphalmaz felett, és $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ függvény. Azt mondjuk, hogy μ mérték, ha az alábbiak teljesülnek:

- $\nu(\emptyset) = 0$.
- Ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ páronként diszjunkt $\mathcal{A}$-beli halmazok, akkor

$$\nu\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) \qquad (\sigma\text{-additivitás}).$$

3.4. Definíció (Mértéktér)**.** Adott Ω alaphalmaz, $\mathcal{A}$ ennek egy σ-algebrája és ν egy $\mathcal{A}$ feletti mérték. Ekkor a $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ hármast mértéktérnek nevezzük. Pár alapfogalom:

- $\mathcal{A}$ elemei a mérhető halmazok.
- Azt mondjuk, hogy egy mértéktér teljes, ha minden nullmértékű halmazának a részhalmazai is mérhetőek és szintén nullmértékűek.

- Azt mondjuk, hogy ν σ-véges, ha Ω előállítható megszámlálható sok véges mértékű halmaz uniójaként.

3.5. Tétel (Teljességi tétel)**.** *Minden* $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ *mértéktérhez létezik egyértelműen egy* $(\Omega, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\nu})$ *teljes mértéktér, amire* $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ *akkor és csak akkor, ha léteznek* A,N ν*-mérhető halmazok, úgy, hogy* $A \in \mathcal{A}$ *és* $\nu(N) = 0$ *és* $A\Delta\tilde{A} \subseteq N$ *(*Δ *a szimmetrikus differencia). Ekkor* $\tilde{\nu}(\tilde{A}) = \nu(A)$*.* $(\Omega, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\nu})$ *mértékteret* $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ *teljessé tételének nevezzük.*

3.6. Tétel (Ekvivalens definíció a nullmértékre)**.** *Adott* $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ *mértéktér.*
Egy $N \in \mathcal{A}$*-ra* $\nu(N) = 0 \iff \forall\varepsilon > 0\, \exists U_1, U_2, \dots \in \mathcal{A}$ *halmazok sorozata, hogy* $N \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ *és* $\sum_{i=1}^{\infty} \nu(U_i) < \varepsilon$*. Magyarul tetszőlegesen kicsi összmértékű halmazokkal lefedhető.*

3.2. Lebesgue-mérték és Lebesgue-integrál

3.2.1. Lebesgue-mérték

3.7. Definíció (Borel-mérték)**.** Egy Ω topologikus téren megadott ν mérték Borel-mérték Ω-n, ha értelmezve van Ω Borel-féle részhalmazain. Egy Borel-mérték kívülről reguláris, ha minden B Borel-halmazra

$$\nu(B) = \inf\{\nu(U) \mid B \subset U,\, U \text{ nyílt}\}.$$

Egy Borel-mérték belülről reguláris, ha minden Borel-halmazra

$$\nu(B) = \sup\{\nu(K) \mid B \supset K,\, K \text{ kompakt}\}.$$

Egy Borel-mérték reguláris, ha kívülről és belülről is reguláris.

3.8. Definíció (Lebesgue-mérték)**.** Legyen λ_1 az egyértelmű kiterjesztése annak az $\mathbb{R}$-en vett ν, reguláris Borel-mértéknek, amire $\nu(]a, b[) = b - a$ teljesül. Ez egyértelmű, mert minden $\mathbb{R}$-beli nyílt halmaz előáll nyílt intervallumok uniójaként. A többi Borel-halmaz mértéke a regularitásból következik. A Teljességi tétel miatt ez kiterjed a nullmértékű halmazok részhalmazaira is.

Nyilvánvaló, hogy egy szakasz λ_1 Lebesgue-mértéke egyenlő az euklideszi hosszával (lesz olyan eset, amikor ezt fogom kihasználni).

3.9. Tétel (Szorzatmérték)**.** *Adott $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \nu_1)$ és $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \nu_2)$ két mértéktér, ahol ν_1 és ν_2 σ-végesek. Legyen $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \subseteq P(\Omega_1 \times \Omega_2)$ a legszűkebb σ-algebra ami tartalmazza a $\{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$ halmazt. Ekkor létezik egyértelműen $\nu_1 \times \nu_2$ mérték $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ felett, amire $\nu_1 \times \nu_2(A_1 \times A_2) = \nu_1(A_1) \cdot \nu_2(A_2)$. Ezt a mértéket hívjuk ν_1 és ν_2 szorzatmértékének.*

3.10. Definíció (Térfogat)**.** Legyen λ_1 az 1-dimenziós Lebesgue-mérték és $\Omega = \mathbb{R}^n$. Ekkor tekintsük az $\lambda_n = \underbrace{\lambda_1 \times \lambda_1 \times \cdots \times \lambda_1}_{n\text{-}szer}$ szorzatmértéket. Ezt nevezzük egy $\mathbb{R}^n$-beli halmaz térfogatának ($n > 3$ esetén szokás hipertérfogatnak is hívni).
Jelölés: Tetszőleges $H \subseteq \mathbb{R}^n$-re $V(H) = \lambda_n(\mathrm{H})$, (esetleg $V_n(H)$, ha a dimenziót is ki akarom emelni).

Továbbiakban a dolgozatomban térfogat alatt mindig a λ_n n-dimenziós Lebesgue-mértéket fogom érteni.

3.2.2. Lebesgue-integrál

A Lebesgue-integrál bevezetésével a célunk az, hogy kiterjesszük a Riemann-integrált és módot adjunk a Lebesgue-mérhető halmazok térfogatának kiszámítására.

3.11. Definíció (Mérhető függvény)**.** Adott $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ mértéktér és $f \colon \Omega \to [0, \infty]$ függvény. Azt mondjuk, hogy f mérhető, ha $\forall t \in \mathbb{R}$-re $\{x | f(x) > t\} \in \mathcal{A}$, azaz az f szinthalmazai $\mathcal{A}$-beliek. Legyen ekkor $\tilde{F}(t) = \nu\{x | f(x) > t\}$.

3.12. Definíció (ν-mérték szerinti integrál)**.** Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ mértéktér és $f \colon \Omega \to [0, \infty]$ egy mérhető függvény. Ekkor f ν mérték szerinti integrálját a következő módon definiáljuk:

$$\int_\Omega f \ = \int_\Omega f \, d\nu = \int_0^\infty \tilde{F}(t) \, dt$$

A jobboldali integrál egy improprius Riemann-integrál. Mivel a monoton függvények Riemann-integrálhatóak és $\tilde{F}(t)$ monoton csökken, ezért a jobboldali integrál mindig létezik (de lehet végtelen).

3.13. Definíció (Indikátor függvény)**.** Adott $H \subseteq \Omega$. Legyen H karakterisztikus függvénye, más néven indikátor függvénye a $\chi_H \colon \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\chi_H(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in H \\ 0 & \text{ha } x \notin H \end{cases}$$

képlettel definiált függvény. Ekkor a H halmazon vett Lebesgue-integrált a következőképpen értelmezzük:

$$\int_H f\,d\nu = \int_\Omega \chi_H f\,d\nu.$$

3.14. Definíció. Adott $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ függvény. Ekkor legyen $f_+ = \max\{f, 0\}$ és $f_- = \max\{-f, 0\}$ (f pozitív-, illetve negatív része). Ekkor látható, hogy $f = f_+ - f_-$. Ekkor legyen

$$\int_\Omega f\,d\nu := \int_\Omega f_+\,d\nu - \int_\Omega f_-\,d\nu,$$

amennyiben legalább az egyik integrál véges.

Megjegyzés: ha $\nu = \lambda$ akkor használhatjuk a Riemann-integrálnál megszokott jelöléseket:

$$\int_\Omega f\,d\lambda \; = \int_\Omega f(x)\,dx.$$

3.15. Tétel (Fubini-tétel)**.** *Adott $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \nu_1)$ és $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \nu_2)$ két mértéktér és*
$f\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ mérhető függvény. Ekkor, ha $\int_{\Omega_1\times\Omega_2} |f| < \infty$, akkor

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f\,d\nu_1 \times \nu_2 = \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f\,d\nu_2\right)d\nu_1 = \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f\,d\nu_1\right)d\nu_2,$$

tehát ilyenkor tetszőleges sorrendben ki lehet számolni az integrálokat.

3.16. Tétel (Helyettesítéses integrálás)**.** *Adott $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ és $h\colon U \to V$ diffeomorfizmus, azaz bijekció, amire h és h^{-1} is $\mathcal{C}^1$-beli. Ekkor minden $f\colon V \to \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető függvényre az alábbi két integrál egyenlő (ha az egyik létezik, akkor a másik is):*

$$\int_V f(v)\,dv = \int_U f(h(u)) \cdot |\det(h'(u))|\,du$$

A fenti tételt ki szeretnénk terjeszteni nem bijektív függvényekre. Ehhez lesz szükség a következő lemmára.

3.17. Tétel (Sard-lemma)**.** *Adott $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és $h\colon U \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$-beli függvény. Legyen $\Sigma_h = \{p \in U : \det(h'(p)) = 0\}$ a h szinguláris pontjainak halmaza. Ekkor $\lambda(h(\Sigma_h)) = 0$. Azaz a szinguláris értékek halmaza nullmértékű.*

Bizonyítás. [3] Minden $\mathbb{R}^n$-beli nyílt halmaz felbontható majdnem diszjunkt, zárt kockák megszámlálható uniójára [4] (azaz olyan kockákra, amiknek a belsejeik diszjunktak). Tehát elég egy zárt kockára belátni, hogy a benne levő szinguláris pontok képe nullmértékű. Legyen K egy zárt kocka és vegyük h-nak a K-ra vett megszorítását. Legyen $h = (h_1; h_2; ...; h_n)$ és $x = (x_1; x_2; ...; x_n), y = (y_1; y_2; ...; y_n) \in K$ két pont. A Lagrange-féle középérték tételből következik, hogy $\forall i \exists \xi_i$ az x_i és y_i közti szakaszon, amire

$$h_i(y) - h_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\xi_i)(y_j - x_j)$$

Legyen T^x h-nak az x-beli lineáris közelítése $h(y) \approx T^x(y) = h(x) + h'(x)(y - x)$ Ennek a koordinátafüggvényei a következők:

$$T_i^x(y) = h_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x)(y_i - x_i).$$

A kettőt kivonva egymásból:

$$h_i(y) - T_i^x(y) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\xi_i) - \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x) \right)(y_i - x_i).$$

Mivel $h \in \mathcal{C}^1(K)$, ezért a parciális deriváltjai folytonosak, és mivel K kompakt ezért egyenletesen folytonosak is. Tehát létezik egy b(ε) függvény, amire $\lim_{\varepsilon \to 0} b(\varepsilon) = 0$ és $\|h_i(y) - T_i^x(y)\| \le b(\|x - y\|)\|x - y\|$. Ha x kritikus pont, akkor T^x determinánsa 0, tehát T^x, $\mathbb{R}^n$-t egy kisebb dimenziós S_x hipersíkba képzi. Ha $\|y - x\| < \varepsilon$ akkor fenti egyenlőtlenség miatt $h(y)$ és S_x távolsága legfeljebb $b(\varepsilon)\varepsilon$. Emellett $\|h(y) - h(x)\| < L\varepsilon$, mert h $\mathcal{C}^1$-beli, ebből következik, hogy Lipschitz-folytonos is. Tehát $h(y)$ benne van egy x középpontú, $L\varepsilon$ sugarú gömbben, ez köré írható egy $2L\varepsilon$ élhosszúságú, S_x-szel párhuzamos oldalú kocka, illetve benne van S_x-től $b(\varepsilon)\varepsilon$ távolságra levő, vele két párhuzamos sík által határolt tartományban is. Vesszük ennek a kettőnek a metszetét, az egy téglatest lesz, aminek a térfogata $2^n L^{n-1} \varepsilon^n b(\varepsilon)$. Most bontsuk fel K-t p^n darab, $\frac{1}{p}$ élhosszúságú kockára. Ha egy kockában van egy x kritikus pont, akkor vegyük az x körüli $\frac{\sqrt{n}}{p}$ sugarú gömböt, ez tartalmazni fogja a kockát is, amiben x van. Ezen gömb képének a térfogata legfeljebb $2^n L^{n-1} \left(\frac{\sqrt{n}}{p}\right)^n b\left(\frac{\sqrt{n}}{p}\right)$. Ha az összes kritikus pontot tartalmazó kockát vesszük, az legfeljebb p^n lehet, tehát az össztérfogat legfeljebb $p^n 2^n L^{n-1}\left(\frac{\sqrt{n}}{p}\right)^n b\left(\frac{\sqrt{n}}{p}\right) = 2^n L^{n-1} n^{\frac{n}{2}} b\left(\frac{\sqrt{n}}{p}\right)$. Ha p-vel tartunk a végtelenbe, akkor ez tart a nullába (n és L fix), tehát a kép térfogata nulla. □

3.18. Tétel. *Helyettesítés nem bijektív függvénnyel: Adott $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazok és $h\colon U \to V$ $\mathcal{C}^1$-beli függvény. Legyen $m(v)\colon V \to \mathbb{N} \cup \{\infty\} = |h^{-1}(v)|$ azaz v h-őrsképeinek száma. Ekkor minden $f\colon V \to \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető függvényre az alábbi két integrál egyenlő:*

$$\int_V f(v)m(v)\,dv = \int_U f(h(u)) \cdot |\det(h'(u))|\,du.$$

Bizonyítás. Inverz függvény tétele: adott $h\colon U \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$-beli függvény és $\det(h'(p)) \neq 0$ egy $p \in U$ pontra, akkor létezik p-nek egy V és $h(p)$-nek egy W nyílt környezete, hogy $h|_V\colon V \to$W egy diffeomorfizmus. Tudjuk, hogy Σ_h zárt U-ban, mert egy egyenlet definiálja ($\det(h') = 0$), tehát $U \backslash \Sigma_h$ nyílt. Ekkor $U \backslash \Sigma_h$ minden pontjára alkalmazható az inverz függvény tétele, mely szerint minden $p \in U \backslash \Sigma_h$-re van olyan K_p racionális csúcsú, tengelypárhuzamos, nyílt kocka, melyre $h|_{K_p}\colon K_p \to h(K_p)$ diffeomorfizmus. (Az inverz függvény tétele által biztosított környezetbe írható ilyen kocka). Ilyen kockákból megszámlálható sok van. Legyen ezek egy felsorolása $K_1, K_2, \ldots$. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i = \bigcup\limits_{p \in U \backslash \Sigma_h} K_p = U \setminus \Sigma_h$. Legyen $\tilde{K}_1 = K_1$ és $\tilde{K}_i = K_i \setminus (\overline{K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_i})$. $\tilde{K}_i$-k már diszjunk halmazok. Legyen $K = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \tilde{K}_i$. Ekkor (U$\backslash\Sigma_h)\backslash K$ nullmértékű, mert megszámlálható sok hipersík (amik a kockák határait tartalmazzák) uniója lefedi. Mivel Σ_h-n az integrandus 0, ezért

$$\begin{aligned}\int_U f(h(u)) \cdot |\det(h'(u))|\,du &= \int_{U \backslash \Sigma_h} f(h(u)) \cdot |\det(h'(u))|\,du \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\tilde{K}_i} f(h(u)) \cdot |\det(h'(u))|\,du.\end{aligned}$$

Mivel a $\tilde{K}_i$-ken f diffeomorfizmus, így ott használható a „bijektíves" helyettesítéses formula, így a jobboldali integrál tovább egyenlő

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{h(\tilde{K}_i)} f(v)\,dv = \int_{h(K)} \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\chi_{h(\tilde{K}_i)}(v) \Big) f(v)\,dv.$$

Már csak az hiányzik, hogy a jobboldali integrálban $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\big(\chi_{h(\tilde{K}_i)}(v)\big) \overset{m.m.}{=} m(v)$, és ez a függvény 0 a $h(K)$ halmaz komplementerén. Nyilván $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\big(\chi_{h(\tilde{K}_i)}(v)\big) \leq m(v)$, mert a szumma azt számolja meg, hogy $\tilde{K}_i$-ben hány őse van v-nek. Egyenlőség akkor van, ha v-nek nincs őse $\Sigma_h \cup \mathcal{S}$-ben, ahol $\mathcal{S}$ azon hipersíkok uniója, amik lefedték a kockák határait a $\tilde{K}_i$-k előállításakor. Másik észrevétel, hogy $V \backslash h(K) \subseteq h(\Sigma_h \cup \mathcal{S})$, mert a jobboldal az azon v-k halmaza, akiknek van őse Σ_h-ból, vagy valamelyik hipersíkból, a baloldal meg olyan v-k, amiknek csak onnét van ősük. Tehát már csak be kell látni, hogy $h(\Sigma_h \cup \mathcal{S})$ nullmértékű. A Sard-Lemmából tudjuk, hogy $h(\Sigma_h)$ nullmértékű, azt, hogy $h(\mathcal{S})$ nullmértékű, ahhoz elég, hogy egy hipersík h-képe nullmértékű (akkor azok megszámlálható uniójának a képe is az lesz). Legyen S egy hipersík. Ekkor létezik egy P merőleges projekció, amire $P(\mathbb{R}^n) = S$. Ekkor $h(S) = h(P(\mathbb{R}^n))$. Viszont $h \circ P$ minden értéke szinguláris (mivel P egy nulldeterminánsú, lineáris leképezés), így $\mathrm{im}(h \circ P)$ a Sard-lemma miatt nullmértékű. Szóval $h(S)$ nullmértékű, ebből következően $h(\mathcal{S})$ is. Tehát:

$$\int_{h(K)} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\chi_{h(\tilde{K}_i)}(v)\right) f(v)\, dv = \int_V m(v) f(v)\, dv. \qquad \square$$

3.3. A felszín definíciója és kiszámítása

Miután a térfogatot definiáltuk és megadtunk pár alapvető térfogatszámítási módszert, a felszínnel is hasonlóan kell eljárni. Intuitíve felszín alatt legtöbbször egy alakzat határának az $(n-1)$-dimenziós mértékét értjük.

3.19. Definíció (Felület)**.** Adott $F \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ összefüggő, zárt halmaz és $\Phi\colon F \to \mathbb{R}^n$ folytonos, $\mathrm{int}(F)$-en injektív függvény. Ekkor Φ értékkészletét felületnek hívjuk. Amennyiben az is igaz, hogy létezik $F_1, F_2, \ldots$, hogy ezek majdnem diszjunkt uniója F és minden $\mathrm{int}(F_i)$-n Φ folytonosan deriválható és derivált mátrixának rangja $(n-1)$ akkor darabonként sima felületről beszélünk. A Φ leképezés a felületnek egy paraméterezése.

3.20. Definíció (Felszíni integrál)**.** Adott F$\subseteq$ $\mathbb{R}^{n-1}$ összefüggő, zárt halmaz és $\Phi\colon F \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$-beli, F belsején injektív függvény. Ekkor legyen $\mathcal{F} = \Phi(F)$ sima felület és $f\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, melyre $f \circ \Phi$ Riemann-integrálható. Ekkor f-nek az $\mathcal{F}$-en vett integrálját a következőképpen definiáljuk:

$$\int_{\mathcal{F}} f(v)\,dv = \int_F f(\Phi(u)) \cdot \sqrt{\det\left(G\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}; \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}; ...; \frac{\partial \Phi}{\partial u_{n-1}}\right)\right)}(u)\,du$$

Ahol $G(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}; \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}; ...; \frac{\partial \Phi}{\partial u_{n-1}})$ a Φ parciális deriváltjaiból képzett Gram-mátrix, azaz $(\Phi')^T\Phi'$. G determinánsának a gyöke az a parciális deriváltak által kifeszített parallelepipedon térfogata (bizonyítás később). Amennyiben, Φ nem folytonosan deriválható az egész halmazon, akkor az F-et felbontjuk a darabonként sima felület definíciójában szereplő F_i-kre, és mindre külön számoljuk ki a fenti integrált, majd ezeket összeadjuk.

A definíció szemléletes motivációja a következő. Az F halmazt egyenletesen felosztjuk kis Δ oldalhosszú kockákra. Egy ilyen kocka Φ képe a felület egy darabja. A felosztás rácspontjainak Φ képeiből kapott felületi pontokat tekintjük, ezek lesznek a „rácspontok a felületen". Az $[u_1, u_1 + \Delta] \times \cdots \times [u_{n-1}, u_{n-1} + \Delta]$ kocka képének térfogatát a

$$\Phi(u_1; \ldots; u_i + \Delta; \ldots; u_{n-1}) - \Phi(u_1; \ldots; u_{n-1}), \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

vektorok által kifeszített parallelepipedon térfogatával közelítjük. Viszont az elsőrendű Taylor-formulából következik, hogy

$$\Phi(u_1;\ldots;u_i+\Delta;\ldots;u_{n-1})-\Phi(u_1;\ldots;u_{n-1})\approx\Delta\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}(u_1;\ldots;u_{n-1}),$$

tehát a parallelepipedon térfogata közelítőleg

$$(\Delta)^{n-1}\sqrt{\det\left(G(\frac{\partial\Phi}{\partial u_1};\frac{\partial\Phi}{\partial u_2};\ldots;\frac{\partial\Phi}{\partial u_{n-1}})\right)}(u).$$

Ezek összege, szorozva f értékével az adott felületi pontokban egy Riemann-közelítő összeg:

$$\sum_{u \text{ rácspont}} f(\Phi(u))\cdot\Delta^{n-1}\sqrt{\det\left(G\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u_1};\frac{\partial\Phi}{\partial u_2};\ldots;\frac{\partial\Phi}{\partial u_{n-1}}\right)\right)}(u).$$

Ha $\Delta\to 0$, akkor ez az összeg tart a fenti integrálhoz.
Megjegyzés: Itt azért „elégszem meg" a Riemann-integrálos definícióval és nem Lebesgue-integrálként definiálom, mert a felszín kiszámításához elég lesz az azonosan 1 függvényt integrálni, ami nyilván Riemann-integrálható.

3.21. Tétel. *A felszíni integrál nem függ $\mathcal{F}$ paraméterezésétől, azaz tetszőleges $F\subseteq\mathbb{R}^{n-1}$ zárt, összefüggő halmazra és $\Phi\colon F\to\mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$-beli, F belsején injektív $\Phi(F)=\mathcal{F}$ függvényre, az $\mathcal{F}$-en vett integrál egyenlő.*

Bizonyítás. Adott F és $\tilde F\subseteq\mathbb{R}^{n-1}$ zárt, összefüggő halmazok és Φ és $\tilde\Phi$ olyanok, hogy $\Phi(F)=\tilde\Phi(\tilde F)$ ugyanaz az $\mathcal{F}$ sima felület. Azt is feltehetjük, hogy ezek injektívek az értelmezési tartományaik belsejében. Ekkor létezik $h\colon\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}^{n-1}$, amire $h(\tilde F)=F$. Pl $h=\Phi^{-1}\circ\tilde\Phi$. Ebből következik, hogy $\tilde\Phi=\Phi\ \circ h$. Azt kell belátnunk, hogy

$$\int_F f\circ\Phi(u)\sqrt{\det\left(G\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u_1};\frac{\partial\Phi}{\partial u_2};...;\frac{\partial\Phi}{\partial u_{n-1}}\right)\right)}(u)\,du$$

$$=\int_{\tilde F} f\circ\Phi\circ h(u)\sqrt{\det\left(\tilde G\left(\frac{\partial\tilde\Phi}{\partial u_1};\frac{\partial\tilde\Phi}{\partial u_2};...;\frac{\partial\tilde\Phi}{\partial u_{n-1}}\right)\right)}(u)\,du.$$

Legyenek h koordinátafüggvényei

$$h(u)=(h_1(u);h_2(u);...;h_{n-1}(u)).$$

A láncszabály alkalmazásával

$$\partial_i\tilde{\Phi}(u) = \sum_{J=1}^{n-1} \partial_j\Phi(h(u)) \cdot \partial_i h_j(u),$$

amiből

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{i,j} &= \langle \partial_i\tilde{\Phi}(u); \partial_j\tilde{\Phi}(u)\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1} \langle \partial_k\Phi(h(u)); \partial_l\Phi(h(u))\rangle \cdot \partial_i h_k(u) \cdot \partial_j h_l(u) = \\ &= \sum_{k,l}^{n-1} G_{k,l}(h(u)) \cdot \partial_j h_k(u) \cdot \partial_j h_l(u).\end{aligned}$$

Ebből viszont kijön, hogy $\tilde{G}(u) = G(h(u))h'(u)(h'(u))^T$,
tehát

$$\det\Big(\tilde{G}(u)\Big) = \det(G(h(u))) \cdot (\det(h'(u))^2.$$

Gyököt vonva az egyenletből

$$\sqrt{\det\Big(\tilde{G}(u)\Big))} = \sqrt{\det(G(h(u)))} \cdot |(\det(h'(u))|$$

adódik. Ezt beírva az integrálba, pont egy h-val helyettesítést kapunk:

$$\int_F f \circ \Phi(u)\sqrt{\det(G)}(u)\,du = \int_{\tilde{F}} f \circ \Phi(h(u))\,\underbrace{\sqrt{\det(G)}(h(u)) \cdot |h'(u)|}_{\sqrt{\det\left(\tilde{G}\right)(u)}}\,du$$

□

3.22. Definíció (Felszín)**.** Adott $H \subset \mathbb{R}^n$ alakzat (összefüggő, kompakt halmaz). Amennyiben ∂H sima felület, akkor a következő integrált nevezzük H felszínének:

$$A(H) = \int_{\partial H} 1\,dv$$

Mivel a felszíni integrál invariáns az átparaméterezésre, ez jól definiált. Emellett 2- illetve 3 dimenzióban megfelel a kerületnek és a „szokásos" felszínnek.

Megjegyzés: 2 dimenzióban is lehet olyan alakzatot konstruálni, aminek a felülete semelyik pontban sem sima, de ebben a dolgozatban olyanokkal foglalkozok, amiknek a felszíne kellően sima.

4. Egyszerű alakzatok térfogata és felszíne

Most, hogy definiáltuk a térfogatot és a felszínt is tetszőleges dimenzióban és meg is adtuk azok általános kiszámítását, rátérhetünk pár konkrét alakzat felszínére és térfogatára.

4.1. Gömbök térfogata és felszíne

4.1. Definíció (Gömb)**.** Adott $P_0 \in \mathbb{R}^n$ pont és $R > 0$. Ekkor a

$$\{P \in \mathbb{R}^n : \|P - P_0\| = R\}$$

halmazt P_0 középpontú, R sugarú gömbfelületnek, ha az $=$ jel helyett $\leq$ szerepel, akkor gömbtestnek hívjuk. A továbbiakban „gömb" alatt a gömbtestet fogom érteni.
Jelölések: $B_n(P_0; R)$ az n-dimenziós, P_0 középpontú, R-sugarú, zárt gömbtest.
$S_{n-1}(P_0; R)$ az n-dimenziós, P_0 középpontú, R-sugarú gömbfelület. (Ha $B_n(R)$-t vagy $S_{n-1}(R)$-t írok, az alatt az n-dimenziós, R-sugarú gömbtestet és felszínt értem, úgy, hogy a középpontot nem specifikálom). Ha B_n-t vagy S_{n-1}-et írok, akkor az alatt az n-dimenziós egységgömböt-illetve egységgömbfelületet értem.

4.2. Tétel (Rekurzív képlet a gömbök térfogatára)**.** *[5] Adott egy R sugarú, n-dimenziós gömb, jelöljük ennek az n-dimenziós térfogatát R függvényében $V_n(R)$-rel. Ekkor a következő rekurzió teljesül:*

$$V_n(R) = \begin{cases} 2R & \text{ha } n = 1, \\ R^2\pi & \text{ha } n = 2 \\ \frac{2\pi}{n} R^n \cdot V_{n-2}(R) & \text{ha } n > 2 \end{cases}$$

Bizonyítás. $n = 1$-re és 2-re triviális. Figyeljük meg, hogy egy n-dimenziós gömb, R-sugarú gömb térfogata egyenlő az n-dimenziós egységgömb térfogatának az R^n-szeresével. Azért mert az a hasonlósági transzformáció, ami az egységgömb sugarát R-szeresére nagyítja, az egy $n \times n$-es, R-ekből álló, diagonális mátrix és ennek a determinánsa (amennyivel növeli/csökkenti a térfogatot) R^n. Tehát elég az egységgömbre belátni a képletet, majd beszorozni R^n-nel.
Cél, hogy visszavezessük $V_n(1)$-et $V_{n-2}(1)$-re. Ezt úgy tehetjük meg, hogy a gömb középponját az origóba helyezzük és elmetsszük az első

két koordinátatengely által kifeszített síkkal. Ezen a síkon csinálunk egy polárkoordinátás helyettesítést (az összes többi koordinátát helybenhagyjuk): legyen r a távolság a középponttól és θ a szög. Ekkor ha fixálunk egy $(r;\theta)$ pontot a síkon, az egy, erre a síkra merőleges, $n-2$-dimenziós hipersíkot fog meghatározni (pl. 3 dimenzióban egy függőleges egyenest). Ezen hipersík metszete a gömbbel egy $n-2$-dimenziós gömb, aminek a sugara $\sqrt{1-r^2}$, tehát a térfogata $V_{n-2}(\sqrt{1-r^2})$. Ezt végigintegrálva az összes lehetséges r és θ szerint megkapjuk $V_n(1)$-et. Nem szabad elfelejteni, hogy mivel az első két koordinátában polár-helyettesítést csináltunk, míg a többit helyben hagytuk, így a Jacobi-determinánsból kijön egy r (a Jacobi-mátrix bal felső, 2×2-es része egy 2 dimenziós polár-helyettesítés Jacobi-mátrixa, azonkívül a főátló csupa 1, minden más 0). Tehát az integrál így néz ki:

$$V_n(1) = \int_{B_n(\mathbf{0},1)} 1\, d\lambda_n = \int_0^{2\pi}\int_0^1 V_{n-2}(\sqrt{1-r^2})r\ drd\theta.$$

Itt a θ-t azonnal ki tudjuk integrálni, mert az integrandus nem függ tőle, illetve $V_{n-2}(\sqrt{1-r^2}) = V_{n-2}(1)\cdot(1-r^2)^{\frac{n-2}{2}}$ (kihasználva a $\sqrt{1-r^2}$ sugarú és az egységgömb térfogata közti összefüggést). Az integrál a következővé egyszerűsödik:

$$2\pi\cdot V_{n-2}(1)\int_0^1 (1-r^2)^{\frac{n-2}{2}} r\ dr.$$

Ebbe $u = 1-r^2$-et helyettesítve a következőt kapjuk ($dr = \frac{du}{-2r}$):

$$\begin{aligned} 2\pi\cdot V_{n-2}(1)\int_1^0 u^{\frac{n-2}{2}} r\frac{du}{-2r} &= \pi\cdot V_{n-2}(1)\int_0^1 u^{\frac{n-2}{2}}\, du \\ &= \pi\cdot V_{n-2}(1)\left[\frac{u^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}}\right]_0^1 = \pi\cdot V_{n-2}(1)\frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Tehát $V_n(1) = \frac{2\pi}{n}\cdot V_{n-2}(1)$ Alkalmazva egy R-szeres nagyítást, kijön, hogy

$$V_n(R) = \frac{2\pi R^2}{n}\cdot V_{n-2}(R)$$

(a jobboldalt R^2 „kintmarad", mert $V_{n-2}(R) = R^{n-2}V_{n-2}(1)$).

□

Ezzel kaptunk egy rekurziót az n-dimenziós gömbök térfogatára. Most a cél, hogy zárt formulát kapjunk.

4.3. Tétel (zárt formula a gömbök térfogatára)**.** *$V_n(R) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \cdot R^n$, ahol $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt$, a gamma függvény.*

Bizonyítás. A Gamma-függvényről tudjuk, hogy $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ $\forall x > 0$, illetve ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $\Gamma(n) = (n-1)!$ Vegyük külön ha n páros és ha páratlan.
Ha n páros, akkor legyen $n = 2k$ ekkor $\Gamma(\frac{n}{2}+1) = \Gamma(k+1) = k!$. A korábbi rekurziós formulából tudjuk, hogy $V_{2k}(R) = \frac{\pi R^2}{k} \cdot V_{2(k-1)}(R)$ Ezt a formulát $V_{2(k-1)}(R)$-re is felírhatjuk és így tovább. A végén az alábbit kapjuk: $V_{2k}(R) = \frac{\pi R^2}{k} \cdot \frac{\pi R^2}{k-1} \cdot \ldots \cdot \pi R^2$. Ezt összevonva kijön, hogy $V_{2k}(R) = \frac{\pi^k}{k!} \cdot R^{2k}$. Ebbe visszaírva n-et és a Gamma-függvényt, kijön a fenti képlet.
Ha n páratlan, legyen $n = 2k+1$, ekkor a Gammából nem lesz faktoriális, viszont a rekurzív tulajdonsága akkor is megvan. Ebből az következik, hogy $\Gamma(k+\frac{1}{2}) = (k-\frac{1}{2}) \cdot (k-\frac{3}{2}) \cdot \ldots \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma(\frac{1}{2})$.
$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}\,dt$. Ezen végzünk egy $t = x^2$ helyettesítést ($dt = 2xdx$). Ekkor az integrál a következő lesz:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\frac{1}{\sqrt{x^2}}2x\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

Ez egy páros függvény, tehát tovább egyenlő $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$. Tehát $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Ekkor írjuk fel itt is a térfogat rekurzív formuláját: $V_{2k+1} = \frac{\pi R^2}{k+\frac{1}{2}} \cdot V_{2k-1}(R) = \frac{\pi R^2}{k+\frac{1}{2}} \cdot \frac{\pi R^2}{k-\frac{1}{2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\pi R^2}{\frac{3}{2}} \cdot 2R$. Itt $2R = \frac{R}{\frac{1}{2}}$, illetve az egészet beszorzom $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}$-vel, akkor a szorzat a következővé egyszerűsödik: $\frac{\pi^{k+\frac{1}{2}}}{\Gamma(k+\frac{3}{2})} \cdot R^{2k+1}$. Ebbe visszaírva n-et, kijön a fenti képlet. Tehát az állítást minden n-re beláttuk. □

4.4. Tétel (Gömbök felszíne)**.** *Adott egy R sugarú, n-dimenziós gömb. Jelöljük ennek az n-dimenziós felszínét $A_n(R)$-rel. Ekkor a következő teljesül: $A_n(R) = \frac{d}{dR}V_n(R)$ (tehát a térfogatot, a sugár szerint deriválva megkapjuk a felszínt).*

Bizonyítás. Egy R sugarú gömb r sugarú paralleltartománya egy $R+r$ sugarú gömb. Később bizonyítani fogjuk Steiner formuláját, mely szerint az r sugarú paralleltartomány térfogata r-nek egy n-edfokú polinomja, melyben az r együtthatója a test felszíne. Jelen esetben

$$V_n(R+r) = V_n(1)(R+r)^n = V_n(1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}R^{n-k}r^k,$$

amiből

$$A_n(R) = nV_n(1)R^{n-1} = \frac{d}{dR}V_n(R),$$

ahogy bizonyítani akartuk.

Az állítás egyenértékű azzal, hogy az R sugarú gömb térfogatát felírhatjuk a nála kisebb gömbök felszíneinek integráljaként:

$$V_n(R) = \int_0^R \int_{S_{n-1}(\mathbf{0};r)} 1\, dv dr = \int_0^R A_n(r)dr. \qquad \square$$

4.2. Poliéderek térfogata és felszíne

4.5. Definíció (Szimplex)**.** Adott $n+1$ általános helyzetű pont $\mathbb{R}^n$-ben. Ezek konvex burkát szimplexnek nevezzük.

4.6. Definíció (Poliéder)**.** Egy $P \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazt poliédernek nevezünk, ha előáll véges sok szimplex uniójaként.

4.2.1. Téglák térfogata és felszíne

4.7. Definíció (Tégla)**.** Adott $I_1, I_2, ..., I_n \subset \mathbb{R}$ korlátos, zárt intervallumok. Ekkor $T = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$-et téglának hívjuk (speciálisan, ha $\lambda(I_1) = \lambda(I_2) = ... = \lambda(I_n)$, akkor T-t (hiper)kockának is hívjuk).

A szorzatmérték definíciójából következik, hogy $V(T) = \prod\limits_{i=1}^{n} \lambda(I_i)$.

T felszíne meg a következő: $A(T) = 2\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\lambda(I_i)\right)$. Mert T minden oldalát úgy kapjuk meg, ha az i. intervallumot elhagyjuk és egy $n-1$ dimenziós téglát kapunk és minden ilyen tégla kétszer jelenik meg T határán.

4.2.2. Parallelepipedonok térfogata és felszíne

4.8. Definíció (Parallelepipedon)**.** Adott $v_1, v_2, ..., v_k$ k darab lineárisan független vektor $\mathbb{R}^n$-ben (k≤n). Vegyük az összes olyan pontot, amit úgy kaphatunk, hogy valahányat (esetleg nullát) összeadunk ezekből a vektorokból. Ezen pontok konvex burkát nevezzük parallelepipedonnak.

4.9. Tétel (Parallelepipedon térfogata)**.** *Adott P parallelepipedon és annak a $v_1, v_2, ..., v_k$ generáló vektorai.*
Ekkor $V(P) = \sqrt{\det(G(v_1; v_2; ...; v_k))}$, ahol V a k-dimenziós térfogat és G a vektorokból képzett Gram-mátrix. Ha $k = n$, akkor a térfogat megegyezik a vektorok koordinátáiból képzett mátrix determinánsának abszolút értékével.

Bizonyítás. [6] Legyen S a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ által generált, k-dimenziós altér. Ez egy origón átmenő hipersík. Feltehetjük, hogy $\mathbb{R}^n$ szokásos, ortonormált bázisának első k eleme ebbe esik, a többi meg merőleges rá (úgy vesszük fel a koordináta rendszert, ez a térfogaton nem változtat). Ekkor v_i-k csak az első k koordinátájukban nem nullák és az általuk kifeszített P parallelepipedon is része S-nek. Ekkor legyen v'_i v_i első k koordinátájára megszorítva (az utána levő nullákat elhagyjuk) és legyen A az ezekből képzett mátrix. Ekkor $V_k(P) = |\det(A)|$. Tehát $(V_k(P))^2 = (\det(A))^2 = \det\bigl(A^T A\bigr)$, ami egyenlő $\det(G(v'_1; v'_2; \ldots; v'_k))$-vel. Már csak az kell, hogy $\det(G(v'_1; v'_2; \ldots; v'_k)) = \det(G(v_1; v_2; \ldots; v_k))$. Ez azért igaz, mert ha a v'_i-khöz visszaírjuk a nullákat, a páronkénti skalárszorzataikba csak nullás tagok kerülnek ($\langle v_i; v_j\rangle = \langle v'_i; v'_j\rangle + (n-k)\cdot 0$). Ezt kellett belátni. □

4.10. Tétel (parallelepipedon felszíne)**.** *Adott $P \subset \mathbb{R}^n$ k db, lineárisan független vektor által kifeszített parallelepipedon ekkor $A(P) = 2\sum_{i=1}^{k} \sqrt{\det(G(v_1; \ldots; v_{i-1}; v_{i+1}; \ldots; v_k))}$ (azaz az i. vektort kihagyjuk a Gram-mátrixból).*

Bizonyítás. P felületét $2k$ db $k-1$ dimenziós parallelepipedon teszi ki, amik páronként egybevágóak (mert a „kihagyott” vektor mentén egymásba tolhatóak), így P felszíne az ezek $(k-1)$-dimenziós térfogatának összege. □

4.2.3. Szimplexek térfogata és felszíne

A szimplexek térfogata azért különösen fontos, mert tetszőleges konvex poliéder felbontható majdnem diszjunk szimplexek véges uniójára. Így azok térfogata is kiszámolható a szimplexek segítségével.

4.11. Tétel (szimplex térfogata)**.** *Adott $n+1$ általános helyzetű pont $\mathbb{R}^n$-ben, úgy, hogy az egyik az origó (mivel a Lebesgue mérték eltolás invariáns, ezért feltehetjük, hogy az egyik csúcs az origó). Legyen $v_1, v_2, ..., v_n$ a másik n pont helyvektora, illetve legyen S a pontok által meghatározott szimplex.*
Ekkor $V(S) = \frac{1}{n!} \cdot \det(v_1; v_2; ...; v_n)$.

Bizonyítás. Először lássuk be az egységvektorok és az origó által meghatározott S_n szimplexre. Erre a Fubini-tétel miatt, ha az n. egységvektor mentén integrálunk, teljesül az alábbi (S_n-t „függőlegesen” $n-1$ dimenziós szimplexekre bontjuk és a hasonlóság aránya az $n-1$. hatványon van):

$$V(S_n) = \int_0^1 (1-x)^{n-1} V(S_{n-1})\, dx$$

Ezt egy $u = 1-x$ helyettesítéssel kiszámolva pont $\frac{1}{n}V(S_{n-1})$-et kapunk. Ebből rekurzíve kijön, hogy $V(S_n) = \frac{1}{n!}$. Tetszőleges, origó csúcsú S szimplexet úgy kaphatunk meg, hogy vesszük azt a lineáris leképezést, ami az egységvektorokat a szimplexet generáló vektorokba viszi, ez pont a generáló vektorokból képzett mátrix. Emiatt, meg amiatt, hogy a determináns azt fejezi ki, hogy a lineáris leképezés mennyivel növeli/csökkenti a térfogatot, a keresett térfogat a következö:
Ekkor $V(S) = V(S_n) \det(v_1; v_2; ...; v_n) = \frac{1}{n!} \cdot \det(v_1; v_2; ...; v_n)$. □

Ebből viszont az is látszik, hogy a szimplex térfogata $\frac{1}{n!}$ szorosa az őt generáló vektorok által kifeszített parallelepipedonénak. Ebből és a parallelepipedonok térfogatképletéből az is kijön, hogy $\mathbb{R}^n$-beli, $k < n$ darab vektor által kifeszített szimplex k dimenziós térfogata a következő: $V(S_k) = \frac{1}{k!}\sqrt{\det(G(\text{„generáló vektorok”}))}$.

4.12. Tétel (Szimplexek felszíne)**.** *Adott $S \subseteq \mathbb{R}^n$ k db vektor által kifeszített szimplex.*
Ekkor

$$A(S) = \frac{1}{(k-1)!}\Bigg(\sum_{i=1}^{k} \sqrt{\det(G(v_1; \ldots; v_{i-1}; v_{i+1}; \ldots; v_k))} + \sqrt{\det(G(v_2 - v_1; v_3 - v_1; \ldots; v_k - v_1))}\Bigg).$$

Bizonyítás. S felületét $k+1$ db $k-1$ dimenziós szimplex teszi ki (egy pontot elhagyva egy $k-1$ dimenziós szimplexet kapunk és egy pontot

$k+1$ féleképpen hagyhatunk el). Ezek $k-1$ dimenziós térfogatát összeadva S felszínét kapjuk. A képletben az első k-tag az a generáló vektorok végpontjai, az utolsó meg az origóval szemközti lap. □

4.3. Kúpok térfogata

4.13. Definíció (Kúp)**.** Adott $H \subset \mathbb{R}^{n-1}$ alakzat és egy $P \notin H$ pont. Ekkor P és H együttes konvex búrkát (H alapú, P csúcsú) kúpnak nevezzük. Ha H egy poliéder, akkor ezt az alakzatot gúlának is nevezzük (ami maga is egy poliéder)

4.14. Tétel (Kúpok térfogata)**.** *Adott $K \subset \mathbb{R}^n$ H alapú, P csúcsú kúp ekkor $V(K) = \frac{1}{n} m V_{n-1}(H)$, ahol m az a P euklideszi távolsága a H affin burkától (K-t tartalmazó legszűkebb affin altér).*

Megjegyzés: Az m magasság nyilván egyenlő a P-t a H affin burkával összekötő merőleges szakasz Lebesgue-mértékével, illetve azért nem csak a H-tól való távolságot veszem, mert ha P-t levetítjük H affin burkára, akkor lehet, hogy a képe kívül esik H-n. A fenti képlet az ilyen „ferde" kúpokra is igaz.

Bizonyítás. A bizonyítás hasonló ahhoz, amit a szimplexekre adtunk (mert a szimplex is egy kúp). Ha K-t egy H-ra merőleges hipersíkkal elmetsszük, akkor H-nak egy, P-középpontú hasonlósági transzformációval vett kicsinyítettjét kapjuk. A Fubini-tétel segítségével az integrál felbontható úgy, hogy a P-t a K affin burkával összekötő szakaszon integráljuk a merőleges síkmetszeteket

$$\int_K 1\, d\lambda_n = \int_0^m \left(\frac{x}{m}\right)^{n-1} \cdot V_{n-1}(K)\, dx.$$

Mert a hasonlóság aránya az $n-1$-edik hatványon van:

$$\left[\frac{1}{n} \cdot \frac{x^n}{m^{n-1}} V_{n-1}(K)\right]_0^m = \frac{m V_{n-1}(K)}{n}.$$ □

4.4. Görbék körüli csövek térfogata és felszíne

4.15. Definíció (Henger)**.** Adott egy $B_{n-1}(R) \subset \mathbb{R}^n$ gömb és $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ intervallum. Ekkor a $C = B_{n-1}(R) \times I$ halmazt hengernek nevezzük.

Megjegyzés: Általánosabban lehet tetszőleges k-dimenziós gömb és $n-k$-dimenziós tégla Descartes-szorzatát hengernek nevezni (mondjuk úgy, hogy $k \geq 2$, csakhogy egy tégla ne legyen henger). Az ilyenek előjöhetnek n-dimenziós, hengerkoordinátás helyettesítésnél.

4.16. Tétel (Hengerek térfogata)**.** *Adott $C = B_{n-1}(R) \times I$ henger, ekkor $V(C) = \lambda(I) \cdot V_{n-1}(B_{n-1}(R)) = \lambda(I) \cdot \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} R^{n-1}$.*

Bizonyítás. A Fubini-tételből közvetlenül kijön, mert a hengert az inervallum mentén, merőleges síkokkal metszve mindig $B_{n-1}(R)$ egy eltoltját kapjuk. □

4.17. Tétel (Hengerek felszíne)**.** *Adott $C = B_{n-1}(R) \times I$ henger, ekkor $A(C) = 2V_{n-1}(B_{n-1}(R)) + A(B_{n-1}(R)) \cdot \lambda(I)$*

Bizonyítás. A „szokásos" 3 dimenziós hengerhez hasonlóan lehet eljárni. A „palást" $n-1$-dimenziős térfogatát úgy kapjuk meg, hogy a gömb felszinét végigintegráljuk az intervallumon. A henger két végének felszíne meg pont a gömb $n-1$-dimenziós térfogata. □

Megyjegyzés: 3 dimenzióban azt az alakzatot, amit úgy kapunk, hogy egy henger két végét „lefedjük" egy-egy félgömbel, angolul szokták capsule-nek nevezni (nyilván mert úgy néz ki, mint egy kapszula). Ez az alakzat is általánosítható bárhány dimenzióra, illetve a térfogata és a felszíne is könnyen megkapható a gömb- és a henger képletéből.

4.18. Definíció (Cső)**.** Adott $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ injektív, $\mathcal{C}^1$-beli görbe. Vegyük ennek az R-sugarú környezetét úgy, hogy a görbe két végpontjánál levő félgömböt elhagyjuk. Az így kapott alakzatot (γ körüli, R-sugarú) csőnek hívjuk.

4.19. Tétel (Hotelling tétele)**.** *[7] Adott T, γ körüli, R-sugarú cső. Ha T nem metsz önmagába (azaz nincs olyan pontja, ami γ több pontjától is R távolságra van) akkor $V(T) = V(B_{n-1}(R) \times [0, \ell(\gamma)])$, ahol $\ell(\gamma)$ a görbe hosszát jelenti. Magyarul a cső térfogata egyenlő az R-sugarú, $\ell(\gamma)$ magasságú hengerével. Ha a térfogat helyett a felszínt vesszük, arra is teljesül a fenti egyenlőség.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $a = 0$ és azt is, hogy $\|\gamma'(t)\| = 1$ minden t-re, mert a görbe grafikonja invariáns az átparaméterezésre. Vegyük a görbe minden pontjában $\gamma'(t)$-t és egészítsük ki egy ortonormált bázissá. Ezen ortonormált bázis többi eleme legyen $E_1(t), E_2(t), \ldots, E_{n-1}(t)$.

Mivel $\gamma'(t)$ folytonosan differenciálható, ezért E_i-k is választhatóak úgy, hogy folytonosan differenciálható módon függjenek t-től. Rögzítsünk egy $C = B_{n-1}(R) \times [0, \ell(\gamma)]$ hengert. Vegyük az alábbi $\mathcal{C}^1$-beli $h\colon C \to T$ leképezést: $h(x_1; x_2; \ldots; x_{n-1}; t) = \gamma(t) + x_1 E_1(t) + x_2 E_2(t) + \cdots + x_{n-1} E_{n-1}(t)$. Ez a leképezés a hengert a csőbe viszi. Ekkor alkalmazzuk erre a helyettesítéses integrálás formulát:

$$\int_T 1\, d\mathbf{u} = \int_C |\det h'(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x}.$$

Tehát ezt a determinánst kell kiszámolni:

$$\det \left(\begin{array}{c} E_1(t) \\ E_2(t) \\ \vdots \\ E_{n-1} \\ \hline \gamma'(t) + x_1 E_1'(t) + \cdots + x_{n-1} E_{n-1}'(t) \end{array} \right).$$

Ezt a legegyszerűbb geometriai úton megközelíteni. A determináns egyenlő a sorok, mint vektorok által kifeszített parallelepipedon térfogatával. Ebből az első $n-1$ vektor az egységkockát feszíti ki, csak a legalsó sor nem feltétlen alkot ortonormált rendszert a többivel. Ebből viszont $\gamma'(t)$ ortonormált a többire nézve. A kérdés a vektorok által feszített parallelepipedon $\gamma'(t)$ irányú magassága (mert a térfogat ez, szorozva az alap térfogatával, ami 1, mert az alap az egységkocka). Ezt a magasságot úgy kapjuk, hogy kiszámoljuk a vektor minden tagjának a $\gamma'(t)$-re eső vetületét és ezeket összeadjuk. $x_i E_i'(t)$ vetülete $x_i \langle \gamma'(t); E_i'(t) \rangle$. Tehát a keresett determináns

$$\left| 1 + x_1 \langle \gamma'(t); E_1'(t) \rangle + x_2 \langle \gamma'(t); E_2'(t) \rangle + \cdots + x_{n-1} \langle \gamma'(t); E_{n-1}'(t) \rangle \right|.$$

Vegyük észre, hogy ha $\|\mathbf{x}\| = 0$, akkor a determináns 1. Ebből az is következik, hogy ha R (a cső sugara, $\|\mathbf{x}\|$ maximuma) elég kicsi, akkor a folytonosság miatt a $\det(h') > 0$, emiatt az abszolút érték elhagyható. Tehát az integrál, amit ki kell számolni, a következő:

$$\int_C 1 + x_1 \langle \gamma'(t); E_1'(t) \rangle + \cdots + x_{n-1} \langle \gamma'(t); E_{n-1}'(t) \rangle \, d\mathbf{x}dt =$$
$$\int_0^{\ell(\gamma)} \int_{B_{n-1}(R)} 1 + x_1 \langle \gamma'(t); E_1'(t) \rangle + \cdots + x_{n-1} \langle \gamma'(t); E_{n-1}'(t) \rangle \, d\mathbf{x}dt$$

Ilyenkor, rögzített t-nél a skalárszorzatok konstansok, illetve az integrál linearitása miatt egyesével ki lehet őket integrálni a gömbön. Ekkor $\int_{B_{n-1}(R)} x_i \langle \gamma'(t); E'_{n-1}(t) \rangle \, d\mathbf{x} = 0$, minden i-re, mert, Mert a gömb szimmetrikus, az $x_i = 0$ síkra, az x_i függvény meg antiszimmetrikus. Így végül az integrandusban az azonosan 1 lesz. Ezt akartuk belátni. Még a közepénél feltettük, hogy az R kicsi, azt most meg lehet növelni, annyira, hogy a cső ne legyen önátmetsző.
A felszín meg kijön abból, ami a gömböknél volt, hogy a sugár szerint deriválva a térfogatot, a felszínt kapjuk. Ez a hengerekre is igaz (pontosabban a palást felszínét kapjuk meg ezzel). Ezt a deriválást beírva a fenti bizonyításba, a csövek felszínére is kijön az állítás. $\square$

5. Bonyolultabb térfogat- és felszín formulák

5.1. Crofton-típusú formulák

[2] A Crofton-típusú formulák a görbék hosszára adnak egy képletet. Egy $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ legalább szakaszonként sima görbére van az alábbi, analízisből ismert képletünk:

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$$

A Crofton-formulák egy ettől merőben eltérő képletet adnak a görbe hosszára. Ehhez először viszont meg kell vizsgálni az egyenesek, illetve hipersíkok terét és adni kell egy mértéket rajtuk.

5.1.1. Mérték az egyenesek terén $\mathbb{R}^2$-ben és a síkbeli Crofton-formula

Legyen $\mathcal{E} \subset P(\mathbb{R}^2)$ a síkbeli egyenesek tere. $\mathcal{E}$ egy eleme megadható két paraméterrel. Legyen például $e(\theta; c)$ az $x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = c$ egyenletű egyenes. Ekkor legyen $\varphi\colon [0,\pi[\times \mathbb{R} \to \mathcal{E}$ a $(\theta; c) \mapsto e(\theta; c)$ leképezés. Ez egy bijektív leképezés. A síkbeli λ_2 Lebesgue-mérték φ segítségével definiál egy ν mértéket $\mathcal{E}$-n. Egy $A \subseteq \mathcal{E}$ ν-mérhető pontosan akkor, ha $\varphi^{-1}(A)$ Lebesgue-mérhető. Ekkor legyen $\nu(A) = \lambda_2(\varphi^{-1}(A))$.

5.1. Tétel. *A fent definiált ν invariáns a sík izometriáira. Azaz ha $A \subseteq \mathcal{E}$ ν-mérhető és $\Phi \in Iso(\mathbb{R}^2)$ akkor $\Phi(A)$ is ν-mérhető lesz és $\nu(\Phi(A)) = \nu(A)$.*

Bizonyítás. $Iso(\mathbb{R}^2)$-et generálják a következő transzformációk: az R_α, α szögű, origó körüli forgatások, a T_a, x-tengellyel párhuzamos, $(0; a)$-val való eltolások és az M, x-tengelyre való türközés. Tehát elég ezekre belátni.
Az világos, hogy $R_\alpha(e(\theta; c)) = e(\theta + \alpha; c)$ azaz az egyenes elforgatottja. Ekkor $\nu(R_\alpha(A)) = \lambda(\varphi^{-1}(R_\alpha(A))$ ez egyenlő A ősképének $(\alpha; 0)$-val való eltoltjával, amire a Lebesgue-mérték invariáns, tehát a forgatásra beláttuk.
Az eltolásnál egy egyenes képe a következő: $T_a(e(\theta; c)) = e(\theta; c + a\cos(\theta))$. Ez az ősképeknél a következő transzformációnak felel meg: $(\theta; c) \mapsto (\theta; c + a\cos(\theta))$ ennek a Jacobi-determinánsa 1, tehát ez is invariáns a Lebesgue-mértékre.
A tükrözés az ősképeken a $(\theta; c) \mapsto (-\theta; c)$ transzformációnak felel meg. Ez is egy tükrözés, tehát ez is megtartja a Lebesgue-mértéket. Ezt kellett belátni. $\square$

Minderre azért volt szükség, hogy tudjunk integrált definiálni az egyenesek terén, mert a Crofton-formulák arra épülnek.

5.2. Tétel (Síkbeli Crofton-formula)**.** *Adott $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ görbe. Legyen $m\colon \mathcal{E} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ függvény, amire $m(e) = |\{t \in [a, b] \mid \gamma(t) \in e\}|$. Magyarul $m(e)$ egyenlő az e és γ metszéspontjainak számával, multiplicitással számolva. Ekkor*

$$\ell(\gamma) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{E}} m \, d\nu.$$

Bizonyítás. Legyen $h \in \mathcal{C}^1$ $h\colon [0, \pi] \times [a, b] \to [0, \pi] \times \mathbb{R}$ leképezés, amire $h(\theta; t) = (\theta; x(t)\cos(\theta) + y(t)\sin(\theta))$, ahol $x(t), y(t)$ $\gamma(t)$ koordinátafüggvényei. Ekkor vegyük észre, hogy egy $(\theta; c)$ pont ősképeinek száma megegyezik $e(\theta; c)$ és γ metszéspontjainak számával (multiplicitással), mert $e(\theta; c)$ egyneletébe x és y helyére $x(t)$-t és $y(t)$-t írva a metszéspontok pont a $(\theta; t)$ ősképek lesznek. Emellett a transzformáció Jacobi-determinánsa a következő:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -x(t)\sin(\theta) + y(t)\cos(\theta) & x'(t)\cos(\theta) + y'(t)\sin(\theta) \end{vmatrix}$$

Ez egyenlő $x'(t)\cos(\theta) + y'(t)\sin(\theta)$. Ekkor alkalmazva a fenti integrálra a nem bijektív helyettesítéses formulát, a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{E}} m\,d\nu &= \int_{[0;\pi]\times\mathbb{R}} m(e(\theta;c))\,d\theta dc\\ &= \int_a^b\int_0^\pi |x'(t)\cos(\theta)+y'(t)\sin(\theta)|\,d\theta dt.\end{aligned}$$

Itt $x'(t)\cos(\theta)+y'(t)\sin(\theta) = \langle\gamma'(t);(\cos(\theta);\sin(\theta))\rangle$. Ebben $\gamma'(t)$ átírható polár alakba: $\gamma'(t) = \|\gamma'(t)\|(\cos(\phi);\sin(\phi))$. Ekkor, mivel $\|\gamma'(t)\|$ nem függ θ-tól és a skaláris szorzás lineáris, illetve a $\cos(\theta)\cos(\phi)+\sin(\theta)\sin(\phi) = \cos(\theta-\phi)$ addíciós képletet használva a jobboldali integrál a következő módon írható át:

$$\int_a^b\int_0^\pi |x'(t)\cos(\theta)+y'(t)\sin(\theta)|\,d\theta dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\int_0^\pi |\cos(\theta-\phi)|\,d\theta dt.$$

Mivel az $|\cos(x)|$ függvény π szerint periodikus, ezért a belső integrál nem függ ϕ-től (eltolva ϕ-vel, nem változik az integrál értéke). Így a fenti integrál tovább egyenlő a következővel:

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\|\int_0^\pi |\cos(\theta)|\,d\theta dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\cdot 2\,dt = 2\ell(\gamma).$$

Tehát kijött, amit be akartunk látni:

$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{E}} m\,d\nu = \ell(\gamma).$$

□

5.1.2. Mérték a hipersíkok terén és az $\mathbb{R}^n$-beli Crofton-formula

[2] Célunk általánosítani a fenti Crofton-formulát $\mathbb{R}^n$-beli görbékre. Ehhez először a hipersíkok terét kell megvizsgálni és definiálni rajta egy mértéket. Legyen $\mathcal{H}\subset P(\mathbb{R}^n)$ az összes hipersík halmaza. Legyen $S_{n-1} = \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$ az n-dimenziós egységgömb felülete. Vegyük azt a $\Phi\colon S_{n-1}\times\mathbb{R}\to\mathcal{H}$ leképezést, ami egy $(\mathbf{u};c)$ párhoz a $H(\mathbf{u};p) = \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid \langle\mathbf{u};\mathbf{x}\rangle = c\}$ hipersíkot. Ez a leképezés szűrjektív, mivel minden hipersík megadható a fenti, normálvektoros egyenlettével. Viszont ez egy kétrétű fedés, mivel $(\mathbf{u};c)$ és $(-\mathbf{u};-c)$ ugyanazt a hipersíkot definiálja. Ez a leképezés megad egy mértéket $\mathcal{H}$-n a következőképpen: egy $A\subseteq\mathcal{H}$ ν-mérhető pontosan akkor, ha $\Phi^{-1}(A)$ $(\sigma\times\lambda_1)$-mérhető, ahol σ az S_{n-1}-en levő felszíni mérték. Ekkor $\nu(\Phi^{-1}(A)) = \frac{1}{2}(\sigma\times\lambda_1)(\Phi^{-1}(A))$.

5.3. Tétel ($\mathbb{R}^n$-beli Crofton-formula)**.** *Adott $\gamma\colon [a;b] \to \mathbb{R}^n, \mathcal{C}^1$-beli görbe. Legyen $m\colon \mathcal{H} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ függvény, ami egy $H \in \mathcal{H}$ hipersíkra, annak γ-val való metszéspontjainak számát adja meg (multiplicitással). Ekkor a görbe hossza az alábbi módon megkapható:*

$$\ell(\gamma) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n-1}{2}}} \int_{\mathcal{H}} m\, d\nu.$$

A konstans az az $n-1$-dimenziós egységgömb térfogatának a reciproka.

Bizonyítás. A bizonyítás hasonló a síkbeli esethez. Legyeb B_n az n-dimenziós, nyílt egységgömb. Vegyük az alábbi $h \in \mathcal{C}^1$, $h\colon B_n \times [a,b] \to B_n \times \mathbb{R}, h(\mathbf{x}; c) = (\mathbf{x}; \langle \mathbf{x}; \gamma(t)\rangle)$ leképezést. $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$-re egy $(\mathbf{x}; p)$ pont ősképeinek száma egyenlő a $\gamma(t)$ görbe $H\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}; \frac{p}{\|\mathbf{x}\|}\right)$ hipersíkkal való metszéspontjainak számával. A $(\mathbf{0}; 0)$-nak végtelen, a $p \neq 0$-ra $(\mathbf{0}; p)$-nek 0 ősképe van, de ez egy nullmértékű halmaz, tehát elhanyagolható. Ennek a Jacobi-determinánsa a következő

$$\det \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \hline & & \gamma(t) & & \langle \mathbf{x}; \gamma'(t)\rangle \end{array}\right) = \langle \mathbf{x}; \gamma'(t)\rangle$$

Alkalmazva a nem bijektíves helyettesítéses integrálformulát, a következőt kapjuk:

$$\int_{B_n \times [a,b]} \langle \mathbf{x}; \gamma'(t)\rangle \, d\mathbf{x}dt = \int_{B_n \times \mathbb{R}} m(H\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}; \frac{p}{\|\mathbf{x}\|}\right))\, d\mathbf{x}dp.$$

Ezt az $p = \|\mathbf{x}\|\tilde{p}$ helyettesítéssel tovább alakíthatjuk ($\mathbf{u}$ egységvektor):

$$\int_{B_n \times \mathbb{R}} \|\mathbf{x}\| m(H\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}; \tilde{p}\right))\, d\mathbf{x}d\tilde{p} = \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \int_{S_{n-1}} \|r\| m(H(\mathbf{u}; \tilde{p})) r^{n-1}\, d\mathbf{u}drdt.$$

Mivel $m(H(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}; \tilde{p}))$ nem függ az a gömb sugarától, a dr-es tag kiintegrálható, így a következőre módosul az egész:

$$\begin{aligned} \int_{B_n \times \mathbb{R}} \|\mathbf{x}\| m(H\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}; \tilde{p}\right))\, d\mathbf{x}d\tilde{p} =& \frac{1}{n+1} \int_{\mathbb{R}} \int_{S_{n-1}} m(H(\mathbf{u}; \tilde{p}))\, d\mathbf{u}dt \\ =& \frac{2}{n+1} \int_{\mathcal{H}} m\, d\nu. \end{aligned}$$

Tehát már csak ki kell számolni a legfenti integrált. Ehhez először $\gamma'(t)$-t átírjuk polár alakba, $\|\gamma'(t)\|\mathbf{e}$ alakba, ahol az $\mathbf{e}$ egységvektor. Rögzített t esetén $\mathbf{e}$ is fix, így a B_n-et felszeletelhetjük $\mathbf{e}$-re merőleges, $H(\mathbf{e};\tau)$ hipersíkokkal és azok mentén ki tudjuk számolni az integrált (Fubini-tétel).

$$\int_{B_n\times[a,b]} \langle \mathbf{x};\gamma'(t)\rangle \, d\mathbf{x}dt = \int_a^b \int_{-1}^1 \int_{B_n\cap H(\mathbf{e};\tau)} \|\gamma'(t)\|\langle \mathbf{x};\mathbf{e}\rangle \, d\mathbf{x}d\tau dt$$

Itt, mivel a t-től csak a $\|\gamma'(t)\|$ függ, így azt ki lehet integrálni (és $\ell(\gamma)$) lesz, emellett $\langle \mathbf{x};\mathbf{e}\rangle = \tau$ egy egy hipersíkon. Még az kell, hogy $B_n \cap H(\mathbf{e};\tau)$ egy $n-1$-dimenziós gömb, $\sqrt{1-\tau^2}$ sugárral, így ennek a térfogata $V(B_n)\cdot(1-\tau^2)^{\frac{n-1}{2}}$. Tehát az egész a következővé egyszerűsödik:

$$\ell(\gamma)\int_{-1}^1 |\tau| V(B_{n-1})\cdot(1-\tau^2)^{\frac{n-1}{2}} \, d\tau = 2\ell(\gamma)\int_0^1 \tau V(B_{n-1})\cdot(1-\tau^2)^{\frac{n-1}{2}} \, d\tau$$

Itt csinálunk egy $y = 1-\tau^2$ helyettesítést ($dy = \frac{-1}{2\tau}d\tau$, de a mínusz jel eltűnik, mert a helyettesítés a határokat is megcseréli), így a következőt kapjuk:

$$2\ell(\gamma)V(B_{n-1})\int_0^1 \frac{1}{2}y^{\frac{n-1}{2}} \, dy = \left[\frac{1}{2}\frac{y^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{2}{n+1}\ell(\gamma)V(B_{n-1}).$$

Tehát végezetül kijött, hogy

$$\frac{2}{n+1}\int_{\mathcal{H}} m \, d\nu = \frac{2}{n+1}\ell(\gamma)V(B_{n-1}).$$

Ezt akartuk belátni. □

5.2. Cauchy-formula Tetszőleges konvex halmaz felszínére

5.4. Tétel (Cauchy-formula konvex alakzatok felszínére)**.** *Adott $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex alakzat. Legyen $\pi_{\mathbf{u}}$ az $\mathbf{u}$ normálvektorú hipersíkra való merőleges vetítés. Ekkor a K felszínére a következő teljesül:*

$$\int_{S_{n-1}} \pi_{\mathbf{u}}(P) \, d\mathbf{u} = V(B_{n-1})\cdot A(K),$$

tehát a felszín kifejezhető az „árnyékok” térfogatának integráljával.

Bizonyítás. Először is elég csak konvex poliéderekre (politópokra) belátni, mert tetszőleges konvex alakzat felszíne közelíthető köré-, és beleírt politópokéval. Legyen P egy politóp. Rögzítsünk le egy $\mathbf{u}$ egységvektort, és vetítsük le P-t az általa definiált hipersíkra (a hipersík helyzete lényegtelen, csak az kell, hogy $\mathbf{u}$-ra merőleges legyen): Legyenek $F_1, F_2, \ldots, F_m$ a P $(n-1)$-dimenziós lapjai. Kérdés, hogy mennyi a vetület $n-1$-dimenziós térfogata. Egy lapra a vetítés egy affin transzformációnak felel meg („egy irányban összébb nyomja, a többiben helyben hagyja"), aminek a mátrixa (megfelelő bázisban) egy egységmátrix, csak a legalsó egyese helyén egy λ van. Ez a λ egyenlő a $H_{\mathbf{u}}$ és a lap síkja által bezárt szög koszinuszával. Ez abból jön ki, ha minden laphoz vesszük annak egy $\mathbf{n}_i$ egységhosszú normálvektorát, akkor a két sík szöge egyenlő $\mathbf{u}$ és $\mathbf{n}_i$ szögével és $\langle \mathbf{u}; \mathbf{n}_i \rangle$ pont egy-egy vektor vetületének a hossza. Tehát $V_{n-1}(\pi_{\mathbf{u}}(F_i)) = |\langle \mathbf{u}; \mathbf{n}_i \rangle| V_{n-1}(L_i)$.

$$\sum_{i=1}^{m} V_{n-1}(\pi_{\mathbf{u}}(F_i)) = \sum_{i=1}^{m} |\langle \mathbf{u}; \mathbf{n}_i \rangle| V_{n-1}(L_i).$$

A konvexitás miatt a vetítés egyenesei majdnem minden esetben 2 lapját metszik a poliédernek (kivéve, ha egy csúcson, élen, k-dimenziós lapon megy át. Akkor lehet, hogy több lapot metsz, de ezek képe egy nullmértékű halmaz a vetületen). Ebből következik, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} V_{n-1}(\pi_{\mathbf{u}}(F_i)) = 2V_{n-1}(\pi_{\mathbf{u}}(P))$$

Ezt összeadjuk minden $\mathbf{u}$-ra, azaz végigintegráljuk az egységgömbfelületen:

$$2 \int_{S_{n-1}} V_{n-1}(\pi_{\mathbf{u}}(P))\, d\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{m} V_{n-1}(L_i) \int_{S_{n-1}} |\langle \mathbf{u}; \mathbf{n}_i \rangle|\, d\mathbf{u}$$

Itt $\int_{S_{n-1}} |\langle \mathbf{u}; \mathbf{n}_i \rangle|\, d\mathbf{u}$ értéke nem függ $\mathbf{n}_i$-től (ha Fubini-tétellel, $\mathbf{n}_i$-re merőleges hipersíkokkal szeleteljük fel a gömböt, ezeken az integrál ugyanaz lesz $\mathbf{n}_i$-től függetlenül). Emellett a lapok térfogatának összege meg nyilván a felszín. Tehát

$$\int_{S_{n-1}} V_{n-1}(\pi_{\mathbf{u}}(P))\, d\mathbf{u} = \frac{c_n}{2} \cdot A(P)$$

Tehát kijött, hogy az árnyékok integrálja a felszín egy (dimenziótól függő) konstansszorosa. Már csak maga a konstans a kérdés. Ezt megkaphatjuk úgy, hogy beírunk egy olyan alakzatot, amire mindkettőt könnyű kiszámolni. Helyettesítsük be az egységgömböt. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\int_{S_{n-1}} \pi_{\mathbf{u}}(B_n)\, d\mathbf{u} = \frac{c_n}{2} A(B_n)$$

B_n vetülete bármely irányból nézve is B_{n-1}, így ezt a konstanst kell integrálni S_{n-1}-en. A másik oldalt meg $A(B_n) = nV(B_n)$, mert a felszín a térfogat, sugár szerinti deriváltja. Így a következőt kapjuk:

$$V(B_{n-1})nV(B_n) = \frac{c_n}{2} nV(B_n).$$

Ezt egyszerűsítve kijön, hogy a $\frac{c_n}{2} = V(B_{n-1})$. Ezt akartuk belátni. □

5.3. Pólya-formula kockák hipersík-metszeteire

5.5. Tétel (Pólya-formula [8]). *Adott $[-1,1]^n$, az origó középpontú, 2 élhosszúságú hiperkocka és $H(\mathbf{n})$ az $\mathbf{n} \in S_{n-1}$ normálvektorú, origón átmenő hipersík. Legyen $S(\mathbf{n})$ a kocka metszete a hipersíkkal (ez nyilván az $\mathbf{n}$-től függ). Ekkor*

$$V_{n-1}(S(\mathbf{n})) = \frac{2^{n-1}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \operatorname{sinc}(v_i) t\, dt,$$

ahol

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{ha } x \neq 0, \\ 1 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Megjegyzés: A fenti integrál egy improprius, Riemann-integrál, mert a sinc függvény nem Lebesgue-integrálható.

Bizonyítás. Legyen $S(\mathbf{n}; r)$ a kocka és az $\mathbf{n} = (v_1, \ldots, v_n)$ normálvektorú, az origótól r távolságra levő hipersík metszete, azaz $\{\mathbf{p} \in [-1,1]^n | \langle \mathbf{p}; \mathbf{n} \rangle = r\}$. Ennek a térfogatát akarjuk meghatározni valószínűségszámításos módszerrel. Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ független, egyenletes eloszlások a $[-1,1]$ intervallumon. Ekkor $X = (X_1; \ldots; X_n)$ vektorváltozó egyenletes eloszlású a kockán. Ekkor

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} v_i X_i - r\right| \leq \varepsilon\right) = \frac{1}{2^n} V_n(\{\mathbf{p} \in [-1,1]^n\colon\ |\langle \mathbf{p}; \mathbf{n} \rangle - r| \leq \varepsilon\})$$
$$\approx 2\varepsilon V_{n-1}(S(\mathbf{n}; r)).$$

Azaz annak a valószínűségét nézzük, hogy a változó a $|\langle \mathbf{p}; \mathbf{n} \rangle - r| \leq \varepsilon$ sávba esik. Ekkor, ha $\varepsilon \to 0$, akkor $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i X_i$ sűrűségfüggvényét kapjuk meg az r helyen. A jobboldalt meg a síkmetszet $n-1$-dimenziós térfogata jelenik meg. Tehát

$$f_{\sum\limits_{i=1}^{n} v_i X_i}(r) = \frac{1}{2^n} V_{n-1}(S(\mathbf{n}; r)).$$

Azt tudjuk, hogy $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i X_i$ karakterisztikus függvénye a következő:

$$\varphi_{\sum\limits_{i=1}^{n} v_i X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{sinc}(v_i t).$$

Ebből, az inverziós formulával vissza lehet fejteni a sűrűségfüggvényt:

$$\begin{aligned}
f_{\sum\limits_{i=1}^{n} v_i X_i}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itr} \varphi_{\sum\limits_{i=1}^{n} v_i X_i}(t)\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\sum\limits_{i=1}^{n} v_i X_i}(t)(\cos(rt) - i \sin(rt))\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{sinc}(v_i t) \cos(rt)\, dt.
\end{aligned}$$

Mivel a szinuszos tag egy páratlan függvény. Ebbe $r = 0$-t helyettesítve és átszorozva 2^n-nel kijön, hogy

$$V_{n-1}(S(\mathbf{n}; 0)) = \frac{2^{n-1}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{sinc}(v_i t)\, dt.$$

Ezt akartuk belátni. $\square$

5.4. Steiner tétele konvex halmazok paralleltartományára

5.6. Tétel (Steiner tétele)**.** *Adott $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex alakzat. Legyen $K_r = \{p \in \mathbb{R}^n |\, d(p;K) \leq r\}$ K r sugarú paralleltartománya. Ekkor $V_n(K_r)$ az r-nek egy n-edfokú polinomja, ahol az együtthatók K-tól függő konstansok, azaz*

$$V_n(K_r) = \sum_{i=0}^{n} c_i r^i$$

Ahol $c_n = V(B_n), c_1 = A(K), c_0 = V_n(K)$ (a többi együthatóra is van hasonló képlet, de azok kiszámolása hosszadalmas lenne).

Bizonyítás. A Cauchy formulához hasonlóan elegendő konvex poliéderekre belátni, mert tetszőleges konvex alakzat térfogata közelíthető ezekével. Adott K konvex poliéder. Ekkor K partícionálható a lapjainak relatív belsejeivel, azaz $K = \bigsqcup_{F \subseteq K} \text{relint}(F)$, ahol F lapja K-nak (itt lapnak számítanak a csúcsok, az élek a k-dimenziós lapok és az egész poliéder is). Ennek segítségével $\mathbb{R}^n$ is partícionálható úgy, hogy tetszőleges $p \in \mathbb{R}^n$-re legyen $\pi(p)$ a p, K-hoz legközelebbi pontja (nyilván, ha $p \in K$ akkor $\pi(p) = p$). Mivel K- konvex és zárt, ezért ez a pont egyértelműen létezik. Ekkor legyen $N_F = \{p \in \mathbb{R}^n |\, \pi(p) \in \text{relint}(F)\}$ tehát azon pontok, amikhez F relatív belsejében van a K-hoz legközelebbi pont. Tehát $\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{F \subseteq K} N_F$. Ezek segítségével K_r is partícionálható hasonló módon: $K_r = \bigsqcup_{F \subseteq K} (K_r \cap N_F)$. A térfogat szigma-additivitása miatt $V(K_r) = \sum_{F \subseteq K} V(K_r \cap N_F)$. Tehát ki kell számolnunk egy-egy ilyen metszet térfogatát. Legyen F egy k-dimenziós lapja K-nak, vegyünk ehhez egy támaszhipersíkot (olyan hipersíkot, mely F-ben metszi K-t) legyen ennek a K-tól kifelé mutató normálvaktora $\mathbf{n}$ ez nyilván ortogonális F-re. Legyen C_F az F összes lehetséges támaszhipersíkjainak a K-tól kifelé mutató normálvektorai által generált kúp, (azaz ezen vektorok nemnegatív kombinációiként előálló vektorok halmaza). Ekkor $N_F = \{\mathbf{b} + \mathbf{v} |\, \mathbf{b} \in \text{relint}(F) \wedge \mathbf{v} \in C_F\}$. Ha F k-dimenziós lap, akkor $N_f \cap K_r = \text{relint}F \times (C_F \cap B_{n-k}(r)$ (tehát lényegében vesszük a C_F kúpot, elmetsszük az r sugarú gömbbel, akkor megkapjuk a csúcsától legfeljebb r távolsárga levő pontokat, ezt Descartes-szorozva relint$F$-fel, tehát minden pontjába odaállítva a kúp csúcsát, pont $N_F \cap K_r$-et kapjuk). Ebből, a Fubini-tételből, és a gömb térfogatának arányából következik, hogy $V_n(N_F \cap K_r = V_k(F) \cdot r^{n-k} V_{n-k}(C_F \cap B_{n-k})$ Ekkor az egész paralleltartomány térfogata a következő:

$$\begin{aligned} V_n(K_r) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{F \subseteq K \\ \dim(F)=k}} r^{n-k} V_k(F) \cdot V_{n-k}(C_F \cap B_{n-k}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} r^{n-k} \sum_{\substack{F \subseteq K \\ \dim(F)=k}} V_k(F) \cdot V_{n-k}(C_F \cap B_{n-k}). \end{aligned}$$

Lényegében ezt kellett belátnunk, mert fent r-nek egy n-edfokú polinomja szerepel, aminek az együtthatói (a belső szumma, fix k-ra) csak a K-tól függenek. Ezek közül a főegyütthatót, a konstans tagot és az elsőfókú tagot könnyű kiszámolni.

A konstans tag elég egyszerű, csak $r = 0$-át helyettesítve a képletbe (ekkor nyilván $K_r = K$) a polinomból csak a konstans tag marad, tehát $V_n(K) = c_0$.

Az elsőfokú tagnál $k = n - 1$-re kell megnézni a képletet. A belső szummában $V_{n-1}(F) \cdot V_1(C_F \cap B_1)$ jelenik meg. Itt a C_F egy félegyenes (mert az $n - 1$-dimenziós lapra csak egy kifelé mutató normálvektor van) B_1 meg egy 2 hosszú szakasz, aminek a közepéből „indul" a C_F félegyenes. Tehát a metszet térfogata (hossza) 1. Emiatt a belső szumma

$$\sum_{\substack{F \subseteq K \\ \dim(F)=n-1}} V_{n-1}(F) \cdot 1$$

lesz, ez meg pont a K felszíne.
A főegyütthatónál meg venni kell egy $p \in K$ pontot. Legyen

$$D = \operatorname{diam}(K) = \max\{\|q_1 - q_2\| \mid q_1, q_2 \in K\}$$

a K átmérője. (A kompaktság és a norma függvény folytonossága miatt felvétetik ez a maximum). Ekkor minden r-re és p-re teljesül, hogy $B_n(p; r) \subseteq K_r \subseteq B_n(p; r + D)$. Emiatt a térfogatokra a következő teljesül: $V(B_n)r^n \leq V(K_r) \leq V(B_n)(r + D)^n$, r^n-nel végigosztva, a következőt kapjuk: $V(B_n) \leq \frac{V(K_r)}{r^n} \leq V(B_n)(1+\frac{D}{r})^n$. Ekkor ha $r \to \infty$, akkor a baloldal tart $V(B_n)$-hez és a jobboldal is, így e rendőr-elv miatt a középső, $\frac{V(K_r)}{r^n}$ is oda tart. Emellett $\lim_{r\to\infty} \frac{V(K_r)}{r^n} = c_n$, mert a térfogatot leíró polinomot osztva r^n-nel, a főegyüttható konstans lesz, a többi tag meg nullához tart. Ezekből következik, hogy $c_n = V(B_n)$. $\square$

6. Konkrét feladatok, ahol térfogatot és felszínt kell számolni

Az egyik leggyakoribb kérdés, amit kapok, hogy mi értelme van annak, hogy tudunk térfogatot- és felszínt számolni n-dimenzióban. Mind az elméleti- mind az alkalmazott matematikában előjönnek sok helyen az ilyen jellegű számítások. Egyik példa az operációkutatás, ahol a feltételek egy sok dimenziós poliédert alkotnak (ott a poliéder alatt félterek metszetét értik, ami némileg eltér az itt tárgyalt poliéder fogalomtól), bár itt a felszín és a térfogat ritkán jön elő. A valószínűségszámításban viszont gyakran előfordul, hogy az eseménytér egy n-dimenziós alakzat és a kedvező események meg ennek a részhalmazai. Ilyenkor a valószínűség kiszámítható a térfogat segítségével (annyi változtatással, hogy a Lebesgue-mértéket le kell normálni az eseménytér térfogatával, hogy valószínűségi mérték legyen). Olyan is lehet, hogy egy alakzat felszíne az eseménytér. Ebben a fejezetben pár ilyen példát fogok mutatni, ahol egy nehéznek tűnő valószínűségszámítási feladatot jelentősen le lehet egyszerűsíteni, azzal, hogy a felszín- és térfogatszámításra vezetjük vissza.

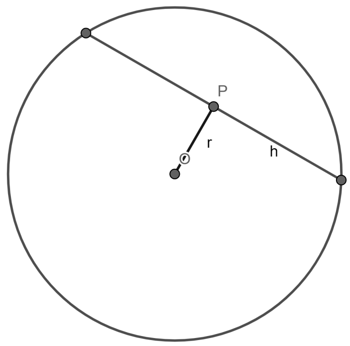
1. példa Egymásután n-szer generálunk egy véletlen számot (egyenletes eloszlással) a [-1,1] intervallumon. mennyi a valószínűsége, hogy mindegyik pozitív?
Matematikailag megfogalmazva, van n db, független egyenletes eloszlásunk a $[-1,1]$-en és annak kéne a valószínűsége, hogy mindegyik a [-1,0]-ba esik. Ezt meg lehet közelíteni úgy, hogy az eseménytér az az n-dimenziós, 2 élhosszúságú, origó középű kocka, ebből a kedvező esetek meg az egységkocka és az a kérdés, hogy az előbbiből véletlenszerűen egy pontot választva mekkora az esélye, hogy az egységkockába esik. Ez a két kocka térfogatának hányadosa (a normáló tényező mindkettőben megjelenik, így egyszerűsíteni lehet vele): $\frac{V_n([-1,0]^n)}{V_n([-1,1]^n)} = \frac{1}{2^n}$.
Ezt a feladatot nyilván lehet módosítgatni, pl. hogy minden számot más intervallumból generálunk, ekkor kocka helyett téglatest térfogatot kell számolni. Olyan eset is lehet, amikor nem függetlenek és az egyeménytér másmilyen alakzat lesz.

2. példa Válasszunk véletlenszerűen, egyenletes eloszlással egy pontot az n-dimenziós egységkockából. Mekkora eséllyel esik a pont a kockába írható gömbbe?
Az egységkockába írható gömb sugara $\frac{1}{2}$. Ebből kijön, hogy a keresett valószínűség az alábbi gömbtérfogat (mert az egységkockáé nyilván 1): $\frac{(\pi)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)2^n}$. Érdekesség, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{(\pi)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)2^n} = 0$. Ez onnét látható, hogy a számláló egy exponenciális kifejezés, a nevező meg részben egy faktoriális függvény, amiről tudjuk, hogy „gyorsabban nő" mint az exponenciális.

3. példa Adott $B(R)$ egy R-sugarú gömb és $\varepsilon \in]0,1[$. $B(R)$-ből kivonjuk, a vele koncentrikus, $B((1-\varepsilon)R)$, $(1-\varepsilon)R$-sugarú gömböt. Az szeretnénk megnézni, hogy az így keletkező „gömbréteg" térfogata, hogy aránylik a $B(R)$-éhez. $V(B(R) \setminus B((1-\varepsilon)R)) = c_n(R^n - (1-\varepsilon)^n R^n$, ahol c_n a gömbtérfogat képletben szereplő konstans. Így ennek az aránya a $B(R)$-hez $\frac{R^n-(1-\varepsilon)^n R^n}{R^n}$. Ezt egyszerűsítve $1-(1-\varepsilon)^n$-t kapunk. Ebben az az érdekes, hogy ha ε fix, akkor $\lim_{n\to\infty} 1-(1-\varepsilon)^n = 1$ (mert $\varepsilon \in]0,1[$). Ami szemléletesen azt jelenti, hogy a homogén sűrűségű gömb esetén a dimenziót növelve a „tömeg" egyre jobban a gömb felületére koncentrálódik, mert bármilyen kicsi ε-t veszünk, a gömbréteg térfogata tartani fog a teljes gömb térfogatához. Másik eset, ha ε-t $\frac{1}{n}$-nek választjuk, akkor $\lim_{n\to\infty} 1-(1-\frac{1}{n})^n = 1-\frac{1}{e}$-t kapunk, tehát, ha ε nem fix, hanem a dimenzió reciproka, akkor az arány n-től független konstans lesz.

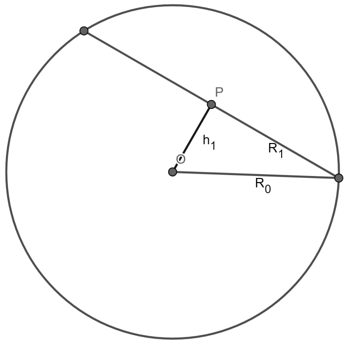
6.1. A „zsugorodó dartstábla" feladat

[9] Végezetül egy nekem nagyon tetsző példát szeretnék mutatni, ami elsőre igen nehéznek hangzik, de vissza lehet vezetni a gömbök térfogatára. A lényeg, hogy van egy darts táblánk és a következő szabály szerint dobálunk. A találat helyét jelölje P, ezt összekötjük a tábla középpontjával, majd erre a szakaszra állítunk egy merőlegest, P-ben. Ez a merőleges meghatároz egy húrt a körben. Az ábrán látható módon:



Aztán vesszük ezt a h hosszú húrt és összezsugorítjuk a táblát akkorára, hogy az átmérője h legyen. A cél az, hogy minél többször találjuk el a táblát, úgy, hogy az minden dobás után, a dobás helyétől függően összébb megy. Az is látszik, hogy egy dobás minél távolabb van a középponttól, annál jobban megy össze a tábla a következő dobás előtt. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy egy, a kezdeti tábla köré írható négyzet minden pontját ugyanakkora eséllyel találjuk el (tehát viszonlag ügyetlenül dobunk). Az a kérdés, hogy így várhatóan hányszor találjuk el az egyre zsugorodó táblát. Ez a matematika nyelvén úgy néz ki, hogy feltehetjük, hogy a dartstábla kezdetben az egységkör és adott $(X;Y)$ egyenletes eloszlás a $[-1,1]^2$ négyzeten. Tegyük fel, hogy egy pontot kapunk csak azért, mert játszunk, ezen felül minden találat egy pontot ér (így egyszerűbben fog kijönni a formula). Tehát legyen S a szerzett pontok eloszlása. Az $E(S)$ várható értéket akarjuk kiszámolni.

Először is mennyi az esélye, hogy az első nyíl betalál? Azaz $P(S > 1) =?$, mert ugye egy pontról indulunk. Ez nyilván az egységkör területe, osztva a négyzet területével, azaz $P(S > 1) = \frac{\pi}{4}$. $P(S > 2)$ már nehezebb, mert ugye függ az első találat helyétől. Legyen $R_0 = 1$ és R_k a k-adik dobás utáni új sugár, illetve h_k a k-adik dobás távolsága az origótól és $(X_k; Y_k)$ a k-adik dobás koordinátái. Ekkor $h_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}$ a Pitagorasz-tétel miatt. R_1 meg megint csak a Pitagorasz-tétel miatt $\sqrt{R_0^2 - h_1^2}$ lesz, mert ugye az új sugarat úgy kapjuk, hogy merőlegest állítunk a dobás helyére, így az ábrán látható derékszögű háromszöget kapjuk:



Tehát $R_1 = \sqrt{1-(X_1^2+Y_1^2)}$. Mivel h_1 kisebb kell, hogy legyen R_0-nál (különben megállunk), ezért nem jönnek be komplex számok, meg hasonlók. Ahhoz, hogy a második dobás is betaláljon, az kell, hogy $h_2 < R_1$ teljesüljön, amit, mivel ezek pozitív számok, négyzetre lehet emelni: $h_2^2 < R_1^2$ ez tovább írható $X_2^2+Y_2^2 < 1-(X_1^2+Y_1^2)$ ezt átrendezve $X_1^2+Y_1^2+X_2^2+Y_2^2 < 1$-et kapunk. Tehát pontosan akkor lesz legalább 2 találatunk, ha a fenti 4 koordináta a 4-dimenziós egységgömbbe esik (úgy, hogy ezek együttes eloszlása az egyenletes $[-1,1]^4$-en) Ezt tetszőleges k-ra meg lehet ismételni: ahhoz hogy a k-adik dobás is betaláljon, az kell, hogy $h_k^2 < R_{k-1}^2$ teljesüljön. Mivel $R_{k-1}^2 = R_{k-2}^2 - h_{k-1}^2$ ez átírható a következőre: $X_k^2 + Y_k < R_{k-2}^2 - (X_{k-1}^2 + Y_{k-1}^2)$ ezt tovább bontva és átrendezve kijön, hogy $X_1^2+Y_1^2+X_2^2+Y_2^2+\cdots+X_k^2+Y_k^2 < 1$, ami pont a $2k$-dimenziós egységgömb egyenlete. Tehát $P(S>k) = \frac{V(B_{2k})}{4^k}$. Nyilván $P(S=k) = P(S>k-1) - P(S>k)$.

$$\begin{aligned} E(S) &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(S=n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n(P(S>n-1) - P(S>n)). \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy ez majdnem egy teleszkopikus összeg, mert kibontva a következőt kapjuk: $P(S>0) - P(S>1) + 2P(S>1) - 2P(S>2) + 3P(S>2) - 3P(S>3) + \ldots$, azaz minden tag eggyel kevesebbszer szerepel negatív előjellel, mint pozitívval. Tehát a következőt kapjuk:

$$E(S) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S>n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{4^n n!} = e^{\frac{\pi}{4}} \approx 2,19.$$

Ezt a feladatot nyilván lehet módosítani, például hogy az egységkörön veszünk egyenletes eloszlást (azaz feltesszük, hogy a játékos az eredeti táblát biztosan eltalálja), vagy vmi olyan eloszlást veszünk, ami az origóhoz közel koncentrálódik, pl. egy 2-dimenziós, normális eloszlást (tehát a játékos a közepére céloz és nagyobb eséllyel megy oda, mint kijjebb), de ezekkel most nem foglalkozunk.

7. Végszó

Ezzel a dolgozattal betekintést nyerhettünk a magasabb dimenziókba, egy nehezen elképzelhető és felfogható világba. Megnéztük, hogy néznek ki ott a gömbök, kockák, hengerek, stb. Láthattuk, hogy sokszor mennyire nem egyszerű egy alakzat térfogatát vagy felszínét kiszámolni. Meg kellett érteni a magasabb dimenziós geometriát és analízist, hogy ezeket meg tudjuk oldani. Nyilván csak töredékét láttuk ennek a világnak és arra, hogy az egészet bejárjuk egy élet sem elegendő, nem, hogy egy szakdolgozat, viszont hasznos tudást szereztünk ezen látogatás során. Végén visszatérve a megszokott világba, fel is használtuk a megszerzett tudást.

Hivatkozások

[1] F. Izsák, *Előadások a többváltozós analízisből és mértékelmélet.* 2022.
https://izsakf.web.elte.hu/mertekelm/mert_elm_EA_gyak_22_maj.pdf.

[2] B. Csikós, *Differential Geometry.* Typotex, 2014.
http://etananyag.ttk.elte.hu/request.php?88.

[3] S. Sternberg, *Lectures on Differential Geometry*, pp. 45–49. American Mathematical Society, 1961.

[4] C. Blatter, „Answer to a question on *Open sets in* $\mathbb{R}^n$ *written as union of partially open cubes*," 2014.
https://math.stackexchange.com/questions/640491/every-open-subset-o-of-bbb-rd-d-geq-1-can-be-written-as-a-countable-unio.

[5] Wikipedia, „Volume of an n-ball."
https://en.wikipedia.org/wiki/Volume_of_an_n-ball.

[6] C. Blatter, „Gram determinant equals volume," 2014.
https://math.stackexchange.com/questions/633868/gram-determinant-equals-volume.

[7] H. Hotelling, „Tubes and Spheres in n-Spaces, and a Class of Statistical Problems," *Amer. J. Math.*, vol. 61, no. 2, pp. 440–460, 1939.

[8] G. Pólya, „Berechnung eines bestimmten integrals," *Math. Ann*, vol. 74, no. 2, p. 204–212, 1913.

[9] G. Egan, „Darts in higher dimensions (with 3blue1brown)."
https://www.youtube.com/watch?v=6$_y U9eJ0NxA$.