

NYILATKOZAT

Név: Rózsay Domonkos

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: D0B3FN

Szakedolgozat címe:
Perkoláció

A **szakedolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2023.06.07.

Rózsay Domonkos

a hallgató aláírása

Perkoláció

Szerző:

Rózsay Domonkos

Matematika BSc.

Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Dr. Prokaj Vilmos

ELTE Valószínűségelméleti és Statisztika tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem,

Természettudományi Kar

Budapest

2022.06.06

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Prokaj Vilmosnak, a lehetőséget, hogy nála írhattam szakdolgozatomat, hogy segített és időt szakított rám a félév során.

Ezenkívül szeretném megköszönni családomnak és barátaimnak, akik tanulmányaim során velem voltak és támogattak.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	3
1. Alapvető fogalmak	5
1.1. Definíciók	5
1.2. Harris egyenlőtlenség	6
2. Élperkoláció \mathbb{Z}^2-ben, Harris-Kesten tétel	10
2.1. Russo–Seymour–Welsh módszer	10
2.2. Harris tétel	18
2.3. Éles átmenet a kritikus pont körül	20
2.4. Kesten tétele	24
3. Algoritmikus észrevételek	26
A. Függelék	36

Bevezetés

A perkolációelmélet kiemelkedő eszközként jelent meg a komplex hálózatok és fázisátmenetek tanulmányozásában különböző területeken. Itt átfogó bevezetést nyújtunk a perkolációelméletbe, alkalmazásaiba és a szakdolgozat céljaiba.

A perkolációelmélet, mint a kapcsolódások tanulmányozására szolgáló matematikai modell, alkalmazásokat talált a fizikában, matematikában, számítástechnikában és egyéb területeken is. A modell eredete visszavezethető [3]Simon R. Broadbent és John M. Hammersley 1957-ben végzett úttörő munkájához, ahol akkori alkalmazása az anyagok porozitásának és áteresztőképességének vizsgálata volt. Ez a munka alapozta meg a későbbi kutatásokat a területen.

A perkolációelmélet hasznosnak bizonyult számos jelenség megértésében. Az informatikában például a perkolációelmélet használják hálózatok tervezésére és optimalizálására. Az epidemiológiában a fertőző betegségek terjedésének modellezésére alkalmazzák, hogy megértsék azok terjedési mechanizmusait és hatékonyságát. Az ökológiában a perkolációelmélet segítségével vizsgálhatjuk a fajok terjedését és elterjedését és az infrastruktúra hálózatok elemzésében segítséget nyújthat a közlekedési hálózatok vagy az energiaellátó rendszerek hatékonyságának és stabilitásának vizsgálatában. Ezen alkalmazások is mutathatják a perkolációelmélet sokoldalúságát és gyakorlati jelentőségét különböző szakterületeken.

A perkolációelmélet fejlődése számos kiemelkedő kutatót vonzott, említésre méltó személyek közé tartozik John W. Essam, akinek a 70-es években végzett munkája jelentős mértékben hozzájárult a perkolációs átmenetek megértéséhez. [1]Aizenman és Barsky 1987-ben

megjelent hatásos munkája további ismereteket nyújtott a perkolációs rendszerek kritikus jelenségeiről.

Az 1990-es évektől kezdve és azután olyan kutatók, mint Olle Häggström és Geoffrey Grimmett jelentős hozzájárulásokat tettek a perkolációelmélethez. Munkájuk elmélyítette a kritikus pontbeli viselkedés, a skálázási elmélet és a perkolációs modellek tulajdonságainak megértését.

A perkolációelmélet továbbra is fejlődik, a legújabb hozzájárulások pedig elismerést váltottak ki. A 2000-es évektől kezdve Hugo Duminil-Copin munkája jelentős áttöréseket hozott a perkolációelméletben, különösen a többdimenziós rendszerekben. Az eredményei a Fields-éremmel koronázták meg 2022-ben.

Ezen szakdolgozat fő célja az (bond) élperkoláció tanulmányozása a \mathbb{Z}^2 négyzetrácsban, abban úgynevezett kritikus valószínűségének vizsgálata a Seymour-Welsh módszert és a Harris-Kesten tételeket felhasználva. A [2] „Perkoláció” című könyvet, melyet Béla Bollobás és Oliver Riordan írt, fő referenciaforrásként követve átfogó megértést szeretnénk nyújtani az élperkolációról és annak alapvető tulajdonságairól.

1. fejezet

Alapvető fogalmak

Ebben a fejezetben a perkolációelméletet alapfogalmait véletlen gráfokon, azon belül is a \mathbb{Z}^2 rácson fogjuk elemezni.

1.1. Definíciók

Egy G gráfot annak csúcsaival V és éleivel E adunk meg $G = (V, E)$. Az elkövetkezendőkben ez a négyzetrács lesz, melyben $V = \mathbb{Z}^2$ a sík egész pontjai és élei pedig az azon összekötő szakaszok, melyekre $\forall u, v \in \mathbb{Z}^2 : |u - v| = 1$.

Ha a véletlen gráfot csúcsok kiválasztásával kaptuk meg, akkor csúcsperkolációról, ha az élek kiválasztásával, akkor élperkolációról beszélünk. A kiválasztott csúcsokat vagy éleket nyitottnak nevezzük, a nem kiválasztottakat pedig zártaknak.

Az élperkolációban a gráf egy nyitott részgráfján a nyitott éleket és általuk lefoglalt csúcsokat értjük. Csúcsperkoláció esetén hasonlóan definiálhatjuk. Nevezzük ezen nyílt részgráf összefüggő komponenseit klasztereknek.

Egy adott G alapgráf esetén ha az éleket ugyanazon p valószínűséggel választjuk ki egymástól függetlenül, akkor azt Bernoulli perkolációnak hívjuk. Ez egy valószínűségi mértéket generál a G részgráfjain. Élperkoláció esetén ezt az angol terminológiához hasonlóan $\mathbb{P}_{G,p}^b$ -vel,

csúcsperkoláció esetén pedig $\mathbb{P}_{G,p}^s$ -vel jelölöm. Ezen jelölésekben a site és bond percolation van elrejtve. Ha $\mathbb{P}_{G,p}^b$ -ben G vagy b és s nincs megjelölve, akkor azt az elkövetkezőkben \mathbb{Z}^2 -ben élperkolációnak $\mathbb{P}_p := \mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2,p}^b$ kell érteni.

Egy nyitott úton egy utat értünk a gráf nyitott részgráfjában, x és y csúcsok esetén az $\{x \rightarrow y\}$ vagy $x \rightarrow y$ esemény alatt azt értjük, hogy van nyitott út x -ből y -ba. Ekkor a $\mathbb{P}(x \rightarrow y)$ ennek a valószínűsége a megfelelő valószínűségi mértékkel. Azt az eseményt, hogy az x csúcsból indul egy végtelen hosszú út, $\{x \rightarrow \infty\}$ vagy $\{x \rightarrow\}$ módon jelöljük.

Legyen C_x az x -ből nyílt éleken elérhető csúcsok halmaza, azaz $C_x = \{y \in \mathbb{Z}^2 : x \rightarrow y\}$. Mivel lokálisan véges gráfokkal foglalkozunk, ezért C_x csak akkor lehet végtelen, ha $\{x \rightarrow \infty\}$ fennáll.

Felmerülhet a kérdés, hogy vajon az origó, vagy akár egy tetszőleges pont része egy végtelen nagy komponensnek. Ezt az eseményt fogjuk perkolációnak hívni, vagy azt mondjuk, hogy a rendszer ekkor perkolál.

Legyen $\theta_x(p)$ annak a valószínűsége, hogy C_x végtelen nagy, tehát $\theta_x(p) = \mathbb{P}(x \rightarrow \infty) = \mathbb{P}_p^b(|C_x| = \infty)$. Ha két csúcs, x és y egymástól d távolságra van akkor értelemszerűen $\theta_x(p) \geq p^d \theta_y(p)$, ezért minden csúcsra vagy $\theta_x(p) = 0$ vagy $\theta_x(p) > 0$. Ezenkívül legyen $\theta(p) = \theta_0(p)$

Értelemszerűen, ha $p = 1$ vagy $p = 0$ akkor $\theta(p)$ triviálisan 0 vagy 1. Ezekből látható, hogy $\theta_x(p)$ a p -ben nőző függvény, tehát létezik egy (Hammersley tiszteletére) $0 < p_H < 1$ -val jelölt kritikus valószínűség: ha $p_H < p$ akkor $\theta_x(p) > 0$, ha $p_H > p$ akkor $\theta_x(p) = 0$.

Kolmogorov 0 – 1 törvényéből látható, hogy annak a valószínűsége, hogy a gráfban van végtelen út nem függ bármely véges részhalmazától így ha $p < p_H$, akkor $\theta(p) = 0$ és ha $p_H < p$, akkor ez a valószínűség $\theta(p) = 1$.

1.2. Harris egyenlőtlenség

Visszatérve a mérték definíciójára, pontosítsuk azt egy kicsit. Egy G gráfban, melynek élhalmaza E , egy élkonfiguráció az $\omega : E \rightarrow \{0, 1\}$, $e \mapsto \omega_e$ függvény. Legyen $\Omega = \{0, 1\}^E$

az élkonfigurációk halmaza, ekkor egy e él nyitott ω konfigurációban pontosan akkor, ha $\omega_e = 1$.

Ekkor cilindrikus halmaznak nevezzük azon eseményeket, melyek csak véges sok éltől függenek. $\tilde{C}(F, \sigma) = \{\omega \in \Omega : \omega_f = \sigma_f \ \forall f \in F\}$, ahol F véges részhalmaza E -nek és $\sigma \in \{0, 1\}^F$. Ekkor legyen $\mathbf{p} = (p_e)_{e \in E}$, $0 \leq p_e \leq 1$ minden e élre. Az (Ω, \mathbb{P}, C) egy valószínűségi mértéktér, ahol $\Omega = \{0, 1\}^E$, C a cilindrikus halmazok által generált σ -algebra és $\mathbb{P}_{G,p}^b$ pedig a megfelelő mérték (Ω, Σ) -n melyet $\mathbb{P}_{G,p}^b(C(F, \sigma)) = \prod_{\substack{f \in F \\ \sigma_f=1}} p_f \prod_{\substack{f \in F \\ \sigma_f=0}} (1 - p_f)$ által kaphatunk meg. Csúcsperkoláció esetén hasonlóan definiálhatjuk. Érdeemes megjegyezni, hogy ekkor azon események is mérhetőek, amelyek nem függenek bármely véges sok éltől.

A ω konfiguráció kisebb vagy egyenlő, mint ω' , azaz $\omega \leq \omega'$, ha $\omega_e \leq \omega'_e$ minden $e \in E$ esetén. Az $f : \omega = \{0, 1\}^E \rightarrow R$ függvény növekvő, ha $f(\omega) \leq f(\omega')$ minden $\omega \leq \omega'$ esetén. Az A esemény a szorzat σ -algebrán (monoton) növekvő, ha $\mathbb{1}_A$ nem csökkenő és csökkenő esemény, ha \bar{A} növekvő.

Most tegyük fel, hogy van egy G gráfunk. Vegyük minden e élre az X_e véletlen, a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változót. Ekkor G_p^b pont az a részgráfja G -nek, mely azokat az éleket tartalmazza, melyre $X_e \leq p$. Ekkor ha $p_1 < p_2$, akkor $G_{p_1}^b$ részgráfja $G_{p_2}^b$ -nek, tehát tetszőleges A eseményre $\mathbb{P}_{G,p}$ is növekvő.

Mint később láthatjuk, gyakran az események valószínűségének becsléséhez vagy kiszámításához szükséges bizonyos „keresztezések” valószínűségének kiszámítása. Sajnos amikor két esemény nem független, ritkán lehetséges ezt pontosan megadni. Szerencsénkre a következő lemma segít a nekünk szükséges esetek nagy részében megbecsülni ezt az értéket.

1.2.1. Lemma (Harris-lemma). *Legyen A és B két növekvő vagy két csökkenő esemény. Ekkor*

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Az alábbiánál egy szintel általánosabban azt fogjuk belátni, hogy ha f és g két monoton növe

függvény, akkor

$$\mathbb{E}(fg) \geq \mathbb{E}(f)\mathbb{E}(g)$$

Ezt az egyenlőtlenséget Harris- vagy FKG egyenlőtlenségnek szokták hívni Fortuin, Kasteleyn, Ginibre után, akik általánosabb környezetben láttak be hasonló egyenlőtlenséget.

Bizonyítás. Vezessük be az alábbi jelöléseket: Legyen x_i egy él konfigurációja és $\mathbb{P}(x_i = 1) = p_i$ továbbá $\mathbb{P}(x_i = 0) = 1 - p_i$. Ezenkívül legyen $A = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ és $A_i = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, i\}$, ha $i = 0, 1$. Ez szemléletesen azt jelöli, hogy az a eseményben az élek milyen konfigurációban vannak, ráadásul az A_i események csak az első $n - 1$ éltől függenek. Látható, hogy ha A növekvő, akkor $A_0 \subset A_1$ és ha csökkenő, akkor $A_1 \subset A_0$. Természetesen igaz

$$\mathbb{P}(A) = p_n \mathbb{P}(A_1) + (1 - p_n) \mathbb{P}(A_0)$$

Teljes indukcióval bizonyítunk az élek számán. $n = 1$ esetén az állítás igaz. Most tegyük fel, hogy $n \geq 2$ és $n - 1$ -re az állítás teljesül. Legyen ekkor A és B mindketten növekvő vagy csökkenő események. Mivel ekkor $\mathbb{P}(A)$ és $\mathbb{P}(B)$ is azok, ezért

$$(\mathbb{P}(A_0) - \mathbb{P}(A_1))(\mathbb{P}(B_0) - \mathbb{P}(B_1)) \geq 0$$

teljesül. Végül lezárva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= p_n \mathbb{P}(A_1 \cap B_1) + (1 - p_n) \mathbb{P}(A_0 \cap B_0) \\ &\geq p_n \mathbb{P}(A_0) \mathbb{P}(B_1) + (1 - p_n) \mathbb{P}(A_0) \mathbb{P}(B_0) \\ &\geq \left((1 - p_n) \mathbb{P}(A_0) + p_n \mathbb{P}(A_1) \right) \left((1 - p_n) \mathbb{P}(B_0) + p_n \mathbb{P}(B_1) \right) \\ &= \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) \end{aligned}$$

Fontos megjegyezni, hogy $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$ és emiatt megkaphatjuk a második állításunkat is.

$$\mathbb{E}_p(fg) \geq \mathbb{E}_p(f)\mathbb{E}_p(g)$$

Láthatjuk, hogy tudunk olyan C -t választani, ha mindkét oldalon $f + C \geq 0$ -t veszünk, akkor mindkét oldal ugyanannyival változik, ezért feltételezhetjük, hogy $f \geq 0$. Hasonlóan eljárva $g \geq 0$ -t is feltehető. Legyen $f = \sum_{i=1}^k c_i f_i$ és $g = \sum_{j=1}^l d_j g_j$, ahol f_i és g_j növekvő események karakterisztikus függvényei és c_i, d_j pozitív konstansok. Ekkor

$$\mathbb{E}(fg) = \sum_{i,j} c_i d_j \mathbb{E}(f_i g_j) \geq \sum_{i,j} c_i d_j \mathbb{E}(f_i) \mathbb{E}(g_j) = \mathbb{E}(f) \mathbb{E}(g)$$

melyben az egyenlőtlenséget az előbb láttuk be. □

2. fejezet

Élperkoláció \mathbb{Z}^2 -ben, Harris-Kesten tétel

Ebben a fejezetben azt fogjuk bemutatni, hogy a \mathbb{Z}^2 négyzetrácsban az élperkolációnak a kritikus valószínűsége pontosan $p = 1/2$. Ezen állításhoz belátjuk először, hogy ha $p = 1/2$, akkor $\theta(p) = 0$. Utána azt bizonyítjuk, hogy $p > 1/2$ esetén majdnem biztosan létezik végtelen nagy klaszter, tehát $\theta(p) > 0$. Ebből a kettőből pedig már kijön, hogy a keresett kritikus valószínűség $p = 1/2$.

Ezen fejezetben a [2] könyvet aktívan felhasználtam és a képeket, illusztrációként onnan illesztettem be.

2.1. Russo–Seymour–Welsh módszer

Ezzel a módszerrel, mint később láthatjuk, egy alsó becslést tudunk adni bizonyos „keresztezésekre”, De lássuk is a medvét.

Definiáljuk a \mathbb{Z}^2 rács duálisát: Legyen \mathbb{Z}^2 (gráf) rács duálisa a \mathbb{Z}^{2*} rács, melynek csúcsai a $V = \{(a + 1/2, b + 1/2) \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ és élei legyenek az eredeti élek 90° fokos elforgatottjai, tehát az élei közt legyen e^* ha e éle volt \mathbb{Z}^2 -nek. Ekkor szemléletesen az új csúcsok az eredeti

\mathbb{Z}^2 csúcsai által körülfogott oldalak középpontjai és az eredeti e és e^* élek keresztezik egymást. Itt csak a rácstről volt szó, de a duálisában általában a megfelelő konfigurációt is beleértjük, ekkor $\tilde{\omega}_{e^*} := 1 - \omega_e$, ami jelképesen azt jelenti, hogy ha az eredeti konfigurációban az e él nyílt volt, akkor a duális konfigurációban e^* él zárt.

Definiáljuk a téglalapokat: Egy R téglalap \mathbb{Z}^2 -ben azon $[a, b] \times [c, d]$ csúcsok által indukált részgráf, ahol $a \leq b$ és $c \leq d$.

Ekkor az $R = [a, b] \times [c, d]$ téglalap vertikális duálisának az

$$R^v = [a - 1/2, b + 1/2] \times [c + 1/2, d - 1/2],$$

a horizontális duális

$$R^h = [a + 1/2, b - 1/2] \times [c - 1/2, d + 1/2]$$

Látható, hogy $(R^v)^h = (R^h)^v = R$.

Definiáljuk vertikális/horizontális keresztezést (angol crossing): Adott ω élkonfiguráció és $R = [a, b] \times [c, d]$ téglalap mellett legyen $H(R)$ az az esemény, hogy létezik $P \subset R$ nyílt élekből álló út, mely a téglalap jobb oldalát öszeköti a bal oldalával. Hasonlóan definiáljuk a $V(R)$ eseményt, ha van függőleges nyílt út, ami R tetejét köti össze az aljával. Amikor szimulációkban próbáljuk meghatározni, hogy egy rendszer éppen perkolál-e, többek között ezzel a módszerrel vizsgáljuk azt.

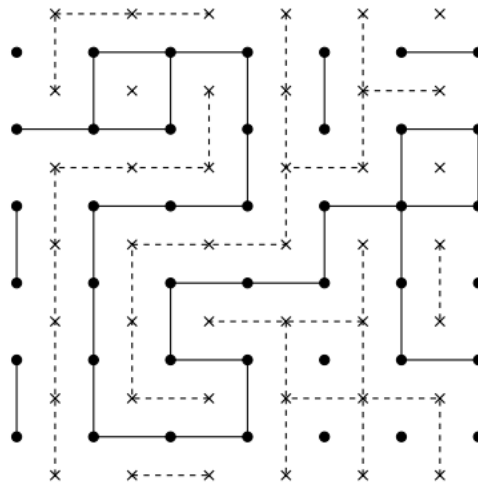
2.1.1. Lemma. *Legyen R egy téglalap \mathbb{Z}^2 -ben vagy annak duálisában. Bármilyen állapotban is legyenek az élek R -ben, pontosan az egyik esemény teljesül: $H(R)$ vagy $V(R^h)$.*

Bizonyítás. Vizsgáljuk a síknak nyolcszögekkel és négyzetekkel vett részleges fedését. Vegyünk egy fekete nyolcszöget az R téglalap minden csúcsára és egy fehéret a R^h téglalap csúcsaira. Az R és R^h élei négyzetekkel vannak reprezentálva, azonos négyzet jelöli az e élet és a duálisát, e^* -t. Ha az e él nyílt, akkor az e^* zárt, és fekete a négyzet. Értelemszerűen ha az e él zárt, és az e^* nyitott, akkor fehér a négyzet.

Az első esetben a fekete négyzet „összeköti” a két fekete nyolcszöget, a csúcsokat, amelyeket e kötne össze, a második esetben a fehér négyzet két fehér nyolcszöget köt össze, amelyek a duális rács csúcsai között vannak.

Az R függőleges oldalaihoz tartozó négyzetek feketék, hogy össze tudják kötni az R oldalait. Itt a kötések állapota nem releváns az $H(R)$ esemény szempontjából. Hasonlóan, a R^h vízszintes oldalaihoz tartozó (duális) kötések fehérek.

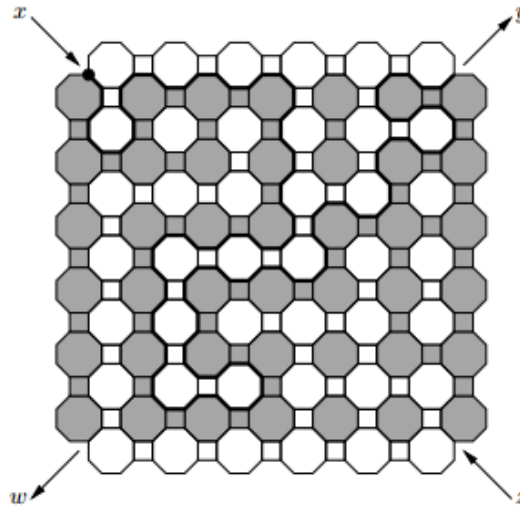
Vegyük észre, hogy az $H(R)$ igaz pontosan akkor, ha van fekete útvonal négyzetekkel és nyolcszögekkel az ábra bal oldalától a jobb oldaláig, továbbá $V(R^h)$ igaz pontosan akkor, ha van fehér útvonal négyzetekkel és nyolcszögekkel az ábrán fentről lefelé. Ezenkívül vegyük



észre azt is, hogy az $H(R)$ és a $V(R^h)$ események nem teljesülhetnek egyszerre, különben a fekete és a fehér útvonalak kereszteznék egymást valahol.

Legyen I az a gráf, amelyet azon nyolcszögek és négyzetek élei alkotnak, amelyek elválasztanak egy fekete régiót egy fehértől.

Az I gráf minden csúcsának pontosan két szomszédja van, kivéve a sarkokat, az x, y, z és w csúcsokat, amelyeknek csak egy szomszédjuk van. Ezért I azon komponense, mely x -et tartalmazza egy W út, melynek végpontja egy másik 1 fokú csúcs. A W úton haladva mindig fekete régió lesz a jobb oldalon és fehér a bal oldalon, ezért az út nem érhet véget z -ben, tehát csak y -ban vagy w -ben érhet véget.



2.1. ábra. A felső ábra az R téglalap (telített) nyitott éleit és R^h duálisát (szaggatott) mutatja. Az alsó ábrán R minden csúcsa fekete nyolcszöggént van ábrázolva, és R^h csúcsai fehér nyolcszöggént. A köztük lévő négyzetek az R -beli e és R^h -beli e^* élek, a négyzet fekete, ha e nyílt és fehér, ha az e^* él nyílt. Ezenkívül fekete/fehér négyzetek vannak a szélek mentén, hogy összekapcsolhassák a téglalap oldalait.

Ha W az 2.1-es ábrához hasonlóan az y csúcsban ér véget, akkor a W jobb oldalán lévő fekete négyzetek és nyolcszögek egy nyílt horizontális átkelést adnak R -ben. Azaz ezek az négyzetek és nyolcszögek R egy összefüggő S részgráfját alkotnak, amely összeköti R bal és jobb oldalát, minden éle nyílt kivéve R oldalaiban a függőleges éleket.

Legyen P az S egy minimális összefüggő részgráfja, amely R bal és jobb oldalát köti össze. Mivel P egy út, és nem használ függőleges éleket R oldalain, így P nyílt horizontális átkelés R -en, és így $H(R)$ igaz.

Hasonlóan, ha W a w csúcsban ér véget, akkor a W bal oldalán lévő fehér négyzetek és nyolcszögek nyitott vertikális átkelést adnak R^h -ban. Tehát $H(R)$ és $V(R^h)$ közül pontosan az egyik teljesül. \square

(A lemma a következő állításokhoz kellett, amelyekből már majdnem látható is Harris-tétele.)

2.1.2. Következmény. ,

(i) Ha R és R' $k \times (l - 1)$ illetve $(k - 1) \times l$ méretű téglalapok \mathbb{Z}^2 -ben, akkor

$$\mathbb{P}_p(H(R)) + \mathbb{P}_{1-p}(V(R')) = 1$$

(ii) Ha R egy $(n + 1) \times n$ méretű téglalap, akkor

$$\mathbb{P}_{1/2}(H(R)) = 1/2$$

(iii) Ha S egy $n \times n$ méretű négyzet, akkor

$$\mathbb{P}_{1/2}(V(S)) = \mathbb{P}_{1/2}(H(S)) \geq 1/2$$

Bizonyítás. Az (i) részhez emlékezzünk vissza, hogy \mathbb{Z}^2 minden kötése nyitott egymástól függetlenül p valószínűséggel és az e duálisa (e^*) akkor nyitott, ha e nem az. Az előző 2.1.1 lemma miatt minden ω konfiguráció szerint pontosan $H(R)$ vagy $V(R^h)$ teljesül, ezért $\mathbb{P}_p(H(R)) + \mathbb{P}_p(V(R^h)) = 1$. De R^h egy $(k - 1) \times l$ téglalap \mathbb{Z}^2 -ben, ahol az élek egymástól függetlenül vannak nyitva $1-p$ valószínűséggel, tehát $\mathbb{P}_p(V(R^h)) = \mathbb{P}_{1-p}(V(R'))$. Az (ii) és (iii) részek közvetlenül következnek az (i)-ből. \square

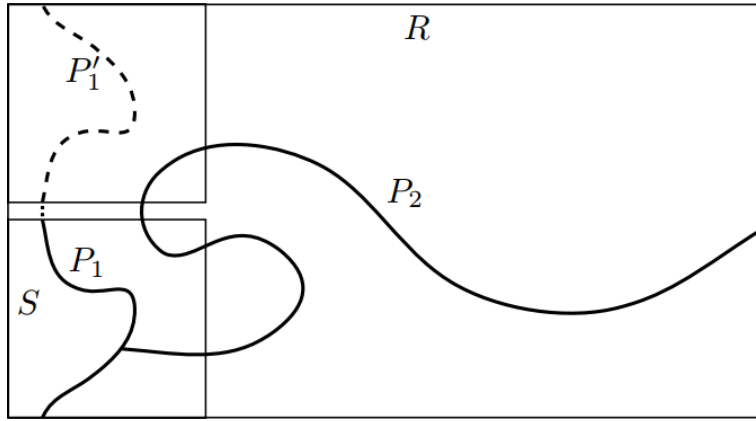
2.1.3. Lemma. Legyen $R = [m] \times [2n]$, $m \geq n$, egy $m \times 2n$ méretű téglalap. Legyen $X(R)$ az az esemény, hogy vannak nyitott P_1 és P_2 utak, úgy, hogy P_1 áthalad az $n \times n$ méretű $S = [n] \times [n]$ négyzeten felülről lefelé, és P_2 R -en belül van és összeköt egy P_1 -en lévő csúcsot egy R jobboldalán lévő csúccsal. Ekkor $\mathbb{P}_p(X(R)) \geq \mathbb{P}_p(H(R))\mathbb{P}_p(V(S))/2$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $V(S)$ igaz, tehát van egy P_0 nyitott élekből álló út, amely átkel S -en fentről lefelé. Figyeljük meg, hogy bármely ilyen P_0 két részre választja S -et. Legyen $LV(S)$ a legbaloldalibb nyitott vertikális átkelés. Ekkor minden $LV(S)$ -re az $\{LV(S) = P_1\}$ esemény nem függ S jobb oldalán lévő élek állapotától. Ekkor bármely lehetséges $LV(S)$ átkelésre igaz, hogy

$$\mathbb{P}_p(X(R) \mid LV(S) = P_1) \geq \mathbb{P}_p(H(R))/2$$

Ennek belátásához legyen P az a (nem feltétlenül nyitott) út, amelyet P_1 és annak az R vízszintes szimmetriatengelyére vett P'_1 tükrözöttje alkot egy további éllel, amely egyesíti P_1 -et és P'_1 -t; lásd a 2.2 ábrát. Ez az út fentről lefelé keresztezi az $[n] \times [2n]$ téglalapot.

Ekkor ezektől függetlenül létezik $\mathbb{P}_p(H(R))$ valószínűséggel egy P_3 nyílt út, amely átmegy R -en balról jobbra - ez az út metszeni fogja P -t. Ekkor a szimmetria miatt annak a valószínűsége, hogy egy ilyen út először P_1 -ben metszi P -t, legalább $\mathbb{P}_p(H(R))/2$. Ebből következik,



2.2. ábra. Az R téglalap és benne S négyzet. Ha léteznek P_1 és P_2 utak, akkor az $X(R)$ esemény is bekövetkezik

hogy ha $Y(P_1)$ az az esemény, hogy létezik egy nyitott P_2 út R -ben, amely összeköti P_1 valamelyik csúcsát R jobb oldalával legalább $\mathbb{P}_p(H(R))/2$ valószínűséggel következik be. De $Y(P_1)$ csak a jobb oldali kötések állapotától függ és az összes ilyen él S -ben P_1 jobb oldalán van. Mivel ezeknek az éleknek az állapota független az $\{LV(S) = P_1\}$ eseménytől, ezért teljesül

$$\mathbb{P}_p(Y(P_1) \mid LV(S) = P_1) = \mathbb{P}_p(Y(P_1)) \geq \mathbb{P}_p(H(R))/2.$$

Ha $Y(P_1)$ fennáll és $LV(S) = P_1$, akkor $X(R)$ is fennáll. Így

$$\mathbb{P}_p(X(R) \mid LV(S) = P_1) \geq \mathbb{P}_p(H(R))/2.$$

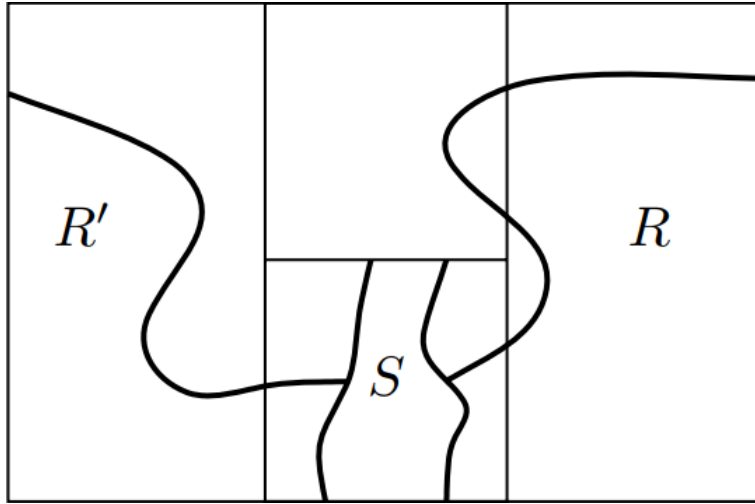
Mivel a $V(S)$ esemény a $LV(S) = P_1$ alakú események diszjunkt úniója, ezért

$$\mathbb{P}_p(X(R) \mid V(S)) \geq \mathbb{P}_p(H(R))/2$$

teljesül és a lemma állítása ebből már következik. \square

Ezzel a lemmával alulról tudjuk becsülni egy téglalapnak a keresztezési valószínűségét. Legyen $h_p(m, n) = \mathbb{P}_p(H(R))$, ahol R egy $m \times n$ téglalap \mathbb{Z}^2 -ben és legyen $h(m, n) = \mathbb{P}_{1/2}(H(R))$

2.1.4. Következmény. Minden $n \geq 1$ esetén $h(3n, 2n) \geq 2^{-7}$



2.3. ábra. A két $2n \times 2n$ -es négyzetek R és R' , a metszetükben pedig az $n \times n$ -es négyzet S .

Bizonyítás. Tekintsünk két $2n \times 2n$ -es téglalapokat (négyzeteket) R -t és R' -t, amelyeket az 2.3 ábrán látható módon rendeztünk el, valamint az ezen téglalapok metszetében elhelyezkedő $n \times n$ -es S négyzetet. Legyen $X'(R')$ az $X(R)$ -hez hasonlóan definiált, de vízszintesen tükrözött esemény. Alkalmazzuk a 2.1.3 lemmát a négyzeti R téglalpra,

$$\mathbb{P}_p(X'(R')) = \mathbb{P}_p(X(R)) \geq \mathbb{P}_p(H(R))\mathbb{P}_p(V(S))/2.$$

Az $X(R)$, $X'(R')$ és $H(S)$ események növekvőek, ezért pozitívan korreláltak Harris lemma

szerint. Ha mindhárom esemény fennáll, akkor $H(R \cup R')$ is fennáll. Így

$$\begin{aligned} h(3n, 2n) &= \mathbb{P}_{1/2}(H(R \cup R')) \\ &\geq \mathbb{P}_{1/2}(X'(R'))\mathbb{P}_{1/2}(X(R))\mathbb{P}_{1/2}(H(S)) \\ &\geq \mathbb{P}_{1/2}(H(R))^2\mathbb{P}_{1/2}(V(S))^2\mathbb{P}_{1/2}(H(S))/4. \end{aligned}$$

A 2.1.2 következmény miatt mindegyiknek legalább $1/2$ a valószínűsége, tehát:

$$h(3n, 2n) \geq 2^{-7}$$

□

Megjegyzés. A fentebbi gondolatmenet más téglalapokra is átvihető. Vegyük például $m_1 \times 2n$ -es R téglalap és egy $m_2 \times 2n$ -es R' téglalapokat, melyek egy $2n \times 2n$ -es négyzetben metszik egymást. Ekkor

$$h(m_1 + m_2 - 2n, 2n) \geq \frac{1}{2}h(m_1, 2n)h(m_2, 2n), \quad \text{minden } m_1, m_2 \geq 2n\text{-re.}$$

A fentit átírhatjuk

$$h(m + n, 2n) \geq \frac{1}{2}h(m, 2n)h(3n, 2n) \geq 2^{-8}h(m, 2n),$$

alakra, amiből $h(kn, 2n) \geq 2^{17-8k}$ következik minden $k \geq 3$ és $n \geq 1$ -re. Mivel $h(m, 2n+1) \geq h(m, 2n)$, ezért ebből következik, hogy vannak $h_k > 0$ konstansok, melyekre $h(kn, n) \geq h_k$ minden $k \geq 2$, $n \geq 1$ -re. Hasonlóan, egy $m_1 \times 2n$ -es R téglalap és egy $m_2 \times 2n$ -es R' téglalap esetén,

$$h(m_1 + m_2 - n, 2n) \geq h(m_1, 2n)h(m_2, 2n)/2^5$$

ha $m_1, m_2 \geq 2n$. Innen

$$h(5n, 2n) \geq h(3n, 2n)2/25 \geq 2^{-19},$$

illetve

$$h(6n, 2n) \geq h(5n, 2n)h(2n, 2n)/25 \geq 2^{-19-1-5} = 2^{-25}$$

2.1.5. Tétel. *Tehát az előzőeket összefoglalva: ,*

- $h(6n, 2n) \geq 2^{-25}$ minden $n \geq 1$ -re és
- $\exists h_k > 0 : h(kn, n) \geq h_k$ minden $k \geq 2$ -re és $n \geq 1$ -re.

2.2. Harris tétel

Emlékezzünk vissza, hogy a nyílt részgráf összefüggő komponenseit klasztereknek neveztük, ekkor jelöljük $r(C_0)$ -val a kezdőpontot tartalmazó nyílt klaszter sugarát, tehát

$$r(C_0) = \sup \{d(x, 0) : x \in C_0\},$$

ahol $d(x, y)$ a \mathbb{Z}^2 rács két csúcsának gráfi távolságát jelöli.

2.2.1. Tétel (Harris tétele). *Élperkoláció esetén a \mathbb{Z}^2 rácsban $\theta(1/2) = 0$, azaz a négy-zetrácson, ha minden élt $p = 1/2$ valószínűséggel húzunk be, akkor majdnem biztosan nincs végtelen klaszter.*

A bizonyítás közben egy erősebb állítást is belátunk:

2.2.2. Tétel.

$$\mathbb{P}_{1/2}(r(C_0) \geq n) \leq n^{-c}$$

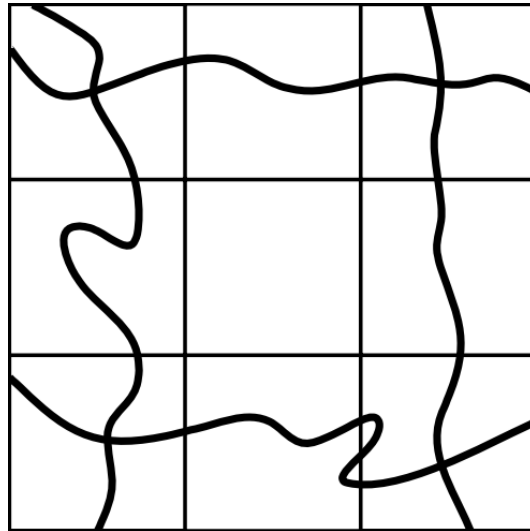
minden $n \geq 1$ esetén, ahol $c > 0$ egy konstans.

Továbbá, bármely n esetén

$$\theta(1/2) = \mathbb{P}_{1/2}((r(C_0)) = \infty) \leq \mathbb{P}_{1/2}((r(C_0)) \geq n) \leq n^{-c},$$

ezért $\theta(1/2) = 0$.

2.2.2 tétel bizonyítása. Emlékezzünk vissza, hogy a duális rácsban $1 - p$ valószínűséggel nyitottak az élek és ha az eredeti \mathbb{Z}^2 rácsban nyitott volt egy él, akkor a duálisában az annak megfelelő él nem lesz az. Emiatt $p = 1/2$ esetén a duális rács kötési is egymástól függetlenül nyitottak $p^* = 1/2$ valószínűséggel, így a 2.1.5 megjegyzés alapján az \mathbb{Z}^2 -ben egy $6n \times 2n$ -es téglalapban legalább 2^{-25} valószínűséggel található nyílt keresztezés. Vizsgáljunk két $6n \times 2n$ -es és két $2n \times 6n$ -es téglalapot \mathbb{Z}^2 -ben. Ezek egy négyzet alakú „gyűrűt” képeznek, ahogyan a 2.4 ábrán látható. Harris lemma szerint legalább $\varepsilon = 2^{-100} > 0$ valószínűséggel mindegyik téglalapot keresztezi egy nyitott duális út. Ha ez megtörténik, akkor ezeknek az utaknak az uniója tartalmaz egy nyitott duális „gyűrűt”, amely annak a közepét körülveszi; lásd 2.4 ábra.



2.4. ábra.

Minden $k \geq 1$ -re A_k legyen az a középpont köré elhelyezett négyzet alakú „gyűrű”, amelyet két $3 \cdot 4^k \times 4^k$ és két $4^k \times 3 \cdot 4^k$ duális téglalap alkot, ahogyan a 2.4 ábrán látható.

Legyen E_k az az esemény, hogy A_k tartalmaz egy nyitott duális kört, amely körbeveszi a belsejét, tehát az origót is. Ekkor $\mathbb{P}(E_k) \geq \varepsilon$ minden k -ra. Mivel az A_k események egymástól diszjunktak, az E_k események is függetlenek.

Ha az E_k esemény bekövetkezik, akkor A_k belsejében lévő pontokat nem lehet nyílt úttal

összekötni az A_k külső pontjaival \mathbb{Z}^2 -ben, tehát $r(C_0) \leq 3 \cdot 4^k/2 < 4^{k+1}$. Tehát

$$\mathbb{P}_{1/2}(r(C_0) \geq 4^{l+1}) \leq \mathbb{P}_{1/2}\left(\bigcap_{k=1}^l E_k^c\right) = \prod_{k=1}^l \mathbb{P}_{1/2}(E_k^c) \leq (1 - \varepsilon),$$

és 2.2.2 következik. □

2.3. Éles átmenet a kritikus pont körül

Az elkövetkezendő részben láthatjuk, hogy hatalmas változás következik be, a kritikus pont körül.

A perkoláció kontextusában egy e él pivotális az E eseményben egy ω konfiguráció mellett, ha az ω^+ és ω^- konfigurációk közül pontosan az egyik van E -ben. Itt ω^\pm olyan konfigurációk, amelyek egy e kivételével megegyeznek, ω^+ konfigurációban e nyitott, ω^- konfigurációban pedig zárt. Más szóval e akkor pivotális, ha az e állapotának megváltoztatása egymaga megváltoztatja, hogy az E esemény teljesül-e vagy sem. Az e hatása az E -re a következőképpen adható meg:

$$I_p(e, E) = \mathbb{P}_p(e \text{ pivotális } E\text{-ben}).$$

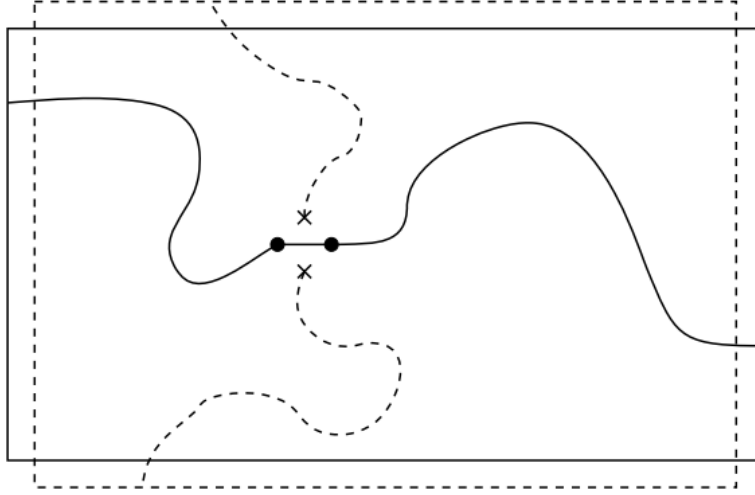
Ha E növekvő esemény, akkor ez

$$I_p(e, E) = \mathbb{P}_p(\omega^+ \in E, \omega^- \notin E).$$

2.3.1. Lemma. *Legyen R egy $m \times n$ méretű téglalap \mathbb{Z}^2 -ben, és legyen e egy él R -ben. Ekkor*

$$I_p(e, H(R)) \leq 2\mathbb{P}_{1/2}\left(r(C_0) \geq \min\{m/2 - 1, (n - 1)/2\}\right) \quad \text{minden } 0 < p < 1 \text{ esetén.}$$

Bizonyítás. A bizonyítás során R -ben dolgozunk, így csak az R -ben lévő élek állapotát kell figyelembe vennünk. Tegyük fel, hogy egy e él R -ben pivotális a $H(R)$ (növekvő) eseményében ω konfiguráció mellett. Mivel $\omega^+ \in H(R)$, ezen konfiguráció mellett van egy nyitott horizontális kereszteződés R -ben. Mivel $\omega^- \notin H(R)$, egy ilyen kereszteződésnek e -t kell



2.5. ábra. Az e él pivotális $H(R)$ -ben és a neki megfelelő e^* él pivotális $V(R^h)$ -ban

használnia. Tehát az ω konfigurációban az e egyik végpontja nyitott úttal csatlakozik R bal oldalához, a másik pedig a jobb oldalához kapcsolódik. Tehát az e legalább $m/2 - 1$ hosszú nyitott út kezdőpontja, így

$$I_p(e, H(R)) \leq 2\mathbb{P}_p\left(r(C_0) \geq m/2 - 1\right).$$

Mivel $\omega^- \notin H(R)$, ezért 2.1.1 miatt $\omega^- \in V(R^h)$. Hasonlóképpen, $\omega^+ \notin V(R^h)$, így az ω^- konfigurációban nyitott duális út keresztezi R^h -t függőlegesen és az e duálisát, e^* -t használja. Tehát ω -ban az e^* egyik végpontja nyílt duális út kezdőpontja, amely legalább $(n - 1)/2$ hosszú. Mivel a duális élek $1 - p$ valószínűséggel nyitottak, ezért

$$I_p(e, H(R)) \leq 2\mathbb{P}_{1-p}\left(r(C_0) \geq (n - 1)/2\right).$$

Minden α -ra az $r(C_0) \geq \alpha$ növekvő, tehát $\mathbb{P}_p(r(C_0) \geq \alpha)$ a p -ben növekvő függvény. Az állítás kijön $p \geq 1/2$ esetén az első-, $p \leq 1/2$ esetén pedig a második egyenlőtlenségből. \square

2.3.2. Lemma. *Legyen $p > 1/2$ és $\rho > 1$ rögzített egész. Ekkor minden $n \geq n_0$ esetén vannak olyan $\gamma = \gamma(p) > 0$ és $n_0 = n_0(p, \rho)$ konstansok, hogy*

$$h_p(\rho n, n) \geq 1 - n^{-\gamma}.$$

A lemma bizonyításához szükségünk van még két fontos eszközre. A következő tétel összekapcsolja A -ban az egyes változók hatását $\mathbb{P}_p(A)$ deriváltjával. Ezt az állítást Margulis[6] és később Russo[7] is felfedezte egymástól függetlenül.

2.3.3. Tétel (Margulis-Russo). *Ha A egy növekvő esemény (e_1, e_2, \dots, e_n) -ben és $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, akkor*

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \mathbb{P}_p(A) = I_p(e_i, A),$$

sőt még az is teljesül, hogy

$$\frac{\partial}{\partial p} \mathbb{P}_p(A) = \sum_{i=1}^n I_p(e_i, A).$$

Bizonyítás. Az első egyenletet elég $i = n$ -re belátnunk. Legyen $k \leq n$ esetén $x = (x_1, \dots, x_k)$ -re

$$p^x = \sum_{i: x_i=1} p_i \sum_{j: x_j=0} 1 - p_j$$

Legyen $i = 0, 1$ -re $x_i = (x_1, \dots, x_{n-1}, i)$, ekkor $p^x = p^{x_0} + p^{x_1}$. Ezek után legyenek

$$A_a = \{x : x_1 \in A, x_0 \in A\}$$

$$A_b = \{x : x_1 \in A, x_0 \notin A\}$$

Ekkor láthatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(A) &= \sum_{x \in A_a} (p^{x_0} + p^{x_1}) + \sum_{x \in A_b} p^{x_1} \\ &= \sum_{x \in A_a} p^x + p_n \sum_{x \in A_b} p^x, \end{aligned}$$

ahol p_n szerint deriválva megkapjuk az következő egyenletet:

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \mathbb{P}_p(A) = \sum_{x \in A_b} p^x,$$

melyben azt vesszük észre, hogy egy (x_1, \dots, x_n) -ben az n -edik koordináta pontosan akkor pivotális, ha $x \in A_b$, tehát ez az utolsó szumma pontosan $I_p(e_n, A)$. \square

Az alábbi tételt [4] Friedgut és Kallai bizonyították, mi itt azt a formáját mondjuk ki, amely a [2] könyvben található:

2.3.4. Tétel (Friedgut-Kalai). *Legyen A az $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ egy részhalmaza és $\mathbb{P}_p(A) = t$. Ekkor ha $I_p(e_i, A) \leq \delta$, akkor*

$$\sum_{i=1}^n I_p(e_i, A) \geq ct(1-t) \log(1/\delta),$$

ahol $c > 0$ konstans. \square

A 2.3.2 lemma bizonyítása. Legyen R egy $\rho n \times n$ téglalap. A 2.1.5 állítás miatt létezik ρ -tól függő $h_\rho > 0$ konstans, melyre

$$\mathbb{P}_{1/2}(H(R)) \geq h_\rho.$$

Az előző 2.3.1 lemma és 2.2.2 miatt $n \geq 2$ esetén

$$I_{p'}(e, H(R)) \leq n^{-\alpha} = \delta$$

R minden e élére és minden $p' \in [1/2, p]$, ha $\alpha > 0$ egy mindentől független konstans. Jelöljük most $\mathbb{P}_{p'}(H(R))$ -et $F(p')$ -vel, ekkor 2.3.4 tétel miatt

$$\sum_{e \in E(R)} I_{p'}(e, H(R)) \geq cF(p')(1-F(p')) \log(1/\delta)$$

minden $p' \in [1/2, p]$ -re, ahol $c > 0$ konstans. A 2.3.3 tétel miatt az összeg pont a p' szerinti

deriváltja $F(p')$ -nek. Ezért $g(p') := \log(F(p')/(1 - F(p')))$

$$\frac{d}{dp'}g(p') = \frac{1}{F(p')(1 - F(p'))} \frac{d}{dp'}F(p') \geq c \log(1/\delta) = \alpha c \log n$$

Láthatjuk, hogy $g(1/2)$ alulról korlátos egy ρ -tól függő konstans által. Tehát ha elegendően nagy $n_0(p, \rho)$ -t választunk, akkor $n \geq n_0(p, \rho)$ esetén

$$g(p) \geq ac(p - 1/2) \log n + g(1/2) \geq ac(p - 1/2)(\log n)/2$$

és ebből következik a bizonyítandó állítás. □

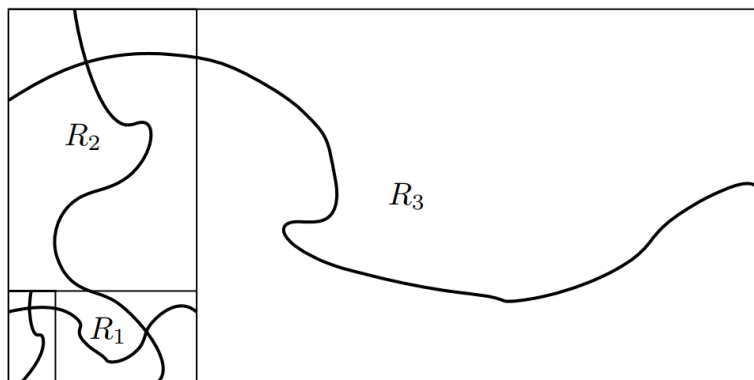
2.4. Kesten tétele

A fejezet ezárásaként belátjuk, hogy $p > 1/2$ esetén $\theta(p) > 0$, bizonyítva ezzel a Harris-Kesten tételt.

Legyen E_∞ az az esemény, hogy van végtelen klaszter.

2.4.1. Tétel (Kesten tétele). *Ekkor élperkoláció esetén \mathbb{Z}^2 -ben, ha $p > 1/2$, akkor $\mathbb{P}_p(E_\infty) = 1$, amiből következik, hogy $\theta(p) > 0$.*

Bizonyítás. Emlékezzünk, hogy $\mathbb{P}_p(E_\infty) > 0$ összefüggésből az következik, hogy $\mathbb{P}_p(E_\infty) = 1$ és $\theta(p) > 0$.



2.6. ábra. Az E_k -nak megfelelő R_k téglalapok és a keresztezések.

Rögzítsük $p > 1/2$, és legyen $\gamma = \gamma(p)$ és $n_0 = n_0(p, 2)$ a 2.3.2 lemma szerint. Legyen $n \geq n_0$ egész szám, amit később határozunk meg. Legyen $k = 0, 1, 2, \dots$, és R_k egy téglalap, melynek bal alsó sarka az origóban van, oldalhosszai $2^k n$ és $2^{k+1} n$, ahol a hosszabb oldal függőleges, ha k páros, és vízszintes, ha k páratlan. Legyen E_k az az esemény, hogy R_k -t a hosszabb oldal szerint keresztezi egy nyitott út. Figyeljük meg, hogy R_k és R_{k+1} bármely két ilyen keresztezése metszi egymást, tehát ha minden k -ra E_k teljesül, akkor E_∞ is teljesül. Ha n elég nagy, akkor a 2.3.2 lemma alapján

$$\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}_p(E_k^c) \leq \sum_{k \geq 0} (2^k n)^{-\gamma} = \frac{n^{-\gamma}}{1 - 2^{-\gamma}} < 1,$$

tehát $\mathbb{P}_p(E_\infty) \geq \mathbb{P}_p(\cap_{k \geq 0} E_k) > 0$.

Végezetül ez és a 2.2.1 tétel miatt már következik, hogy $p_H(\mathbb{Z}^2) = 1/2$. □

3. fejezet

Algoritmikus észrevételek

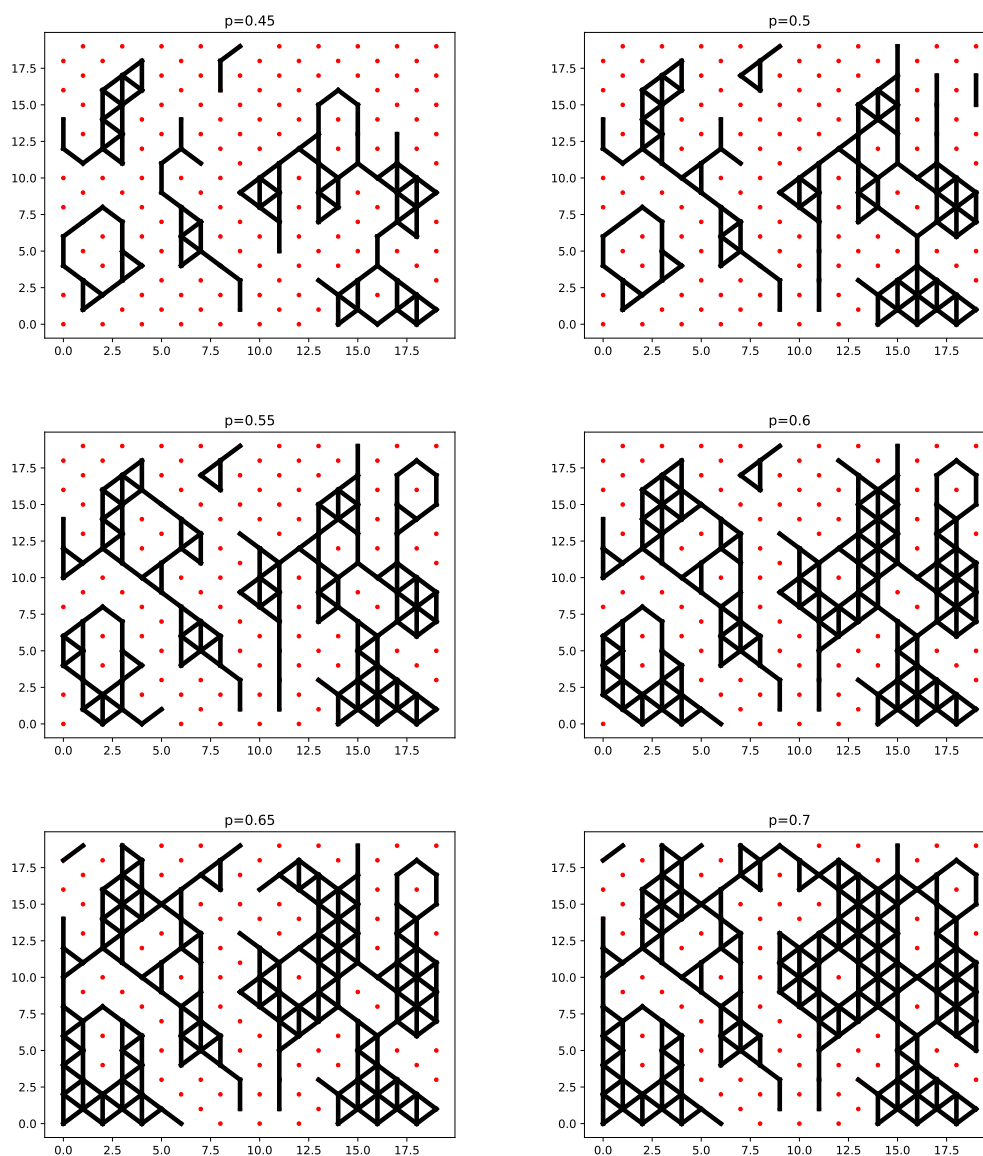
Ezen szakdolgozat keretén belül lefektettük a perkolációelmélet alapjait és bizonyítottuk a \mathbb{Z}^2 rácson általános Bernoulli perkoláció kritikus valószínűségét igazoló tételket.

Eddig csak a négyzetrácson vizsgáltuk az élek behúzását, azonban hasonló érvekkel bizonyítható a háromszögrácson is csúcsperkoláció esetén, hogy a kritikus valószínűség ugyancsak $p_H = 1/2$. Néhány más speciális esetben tudunk formulával leírható pontos értéket megadni, de sajnos más síkbeli rácsoknál nincs sok szerencsénk, a négyszögrácsban is csak statisztikai módszerekkel tudjuk közelíteni csúcsperkoláció esetén a kritikus valószínűséget.

Miközben az algoritmuson gondolkodtam a legnagyobb problémát mindig az idő jelentette. Az itt megadott program futásideje során egy gráf összes élét és emiatt csúcsát megvizsgálja, tehát eleve nem lineáris a futásidő.

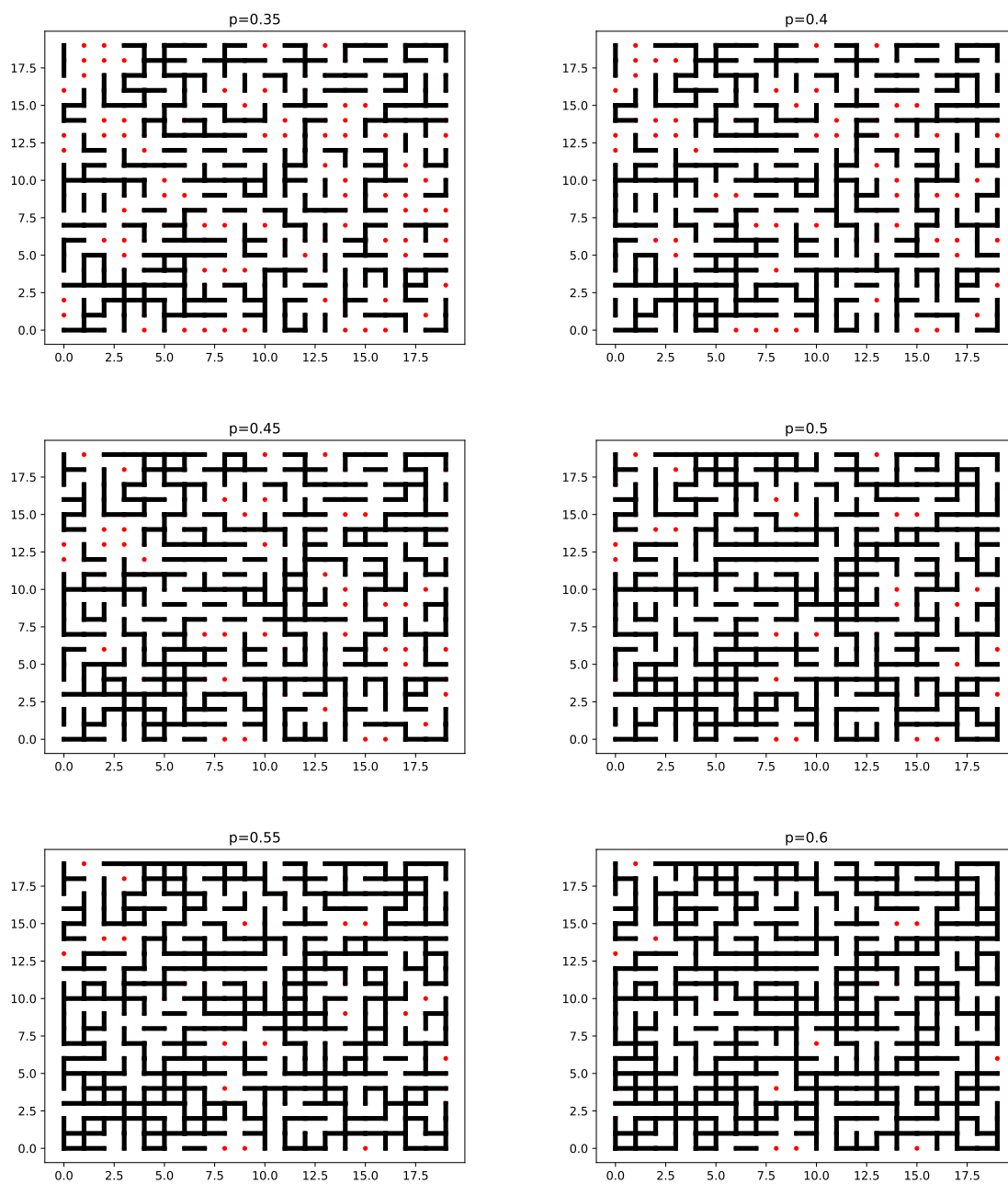
A program legenerálja az éppen használt alapgráfot (téglalap, háromszögrács, hatszögrács), majd az élek vagy csúcsok szerint azokhoz egy valószínűséget rendel. Union-Find adatstruktúra segítségével találja meg és köti össze a megfelelő komponenseket és találja meg a legnagyobb méretét.

A következő ábrákon különböző rácsoiban él- és csúcsperkolációt láthatunk adott p értékek mellett.



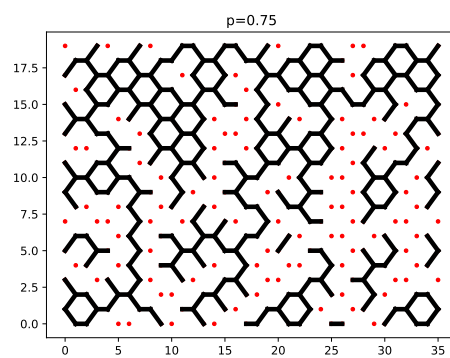
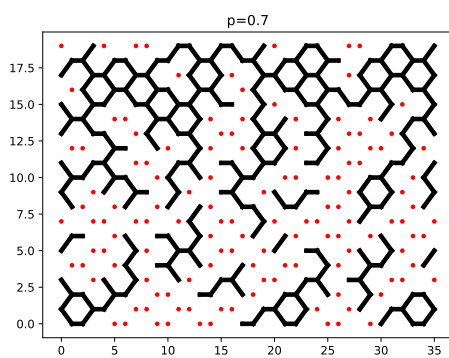
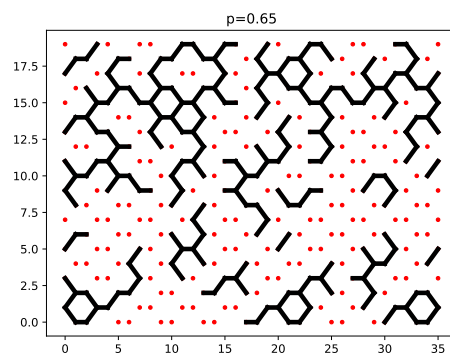
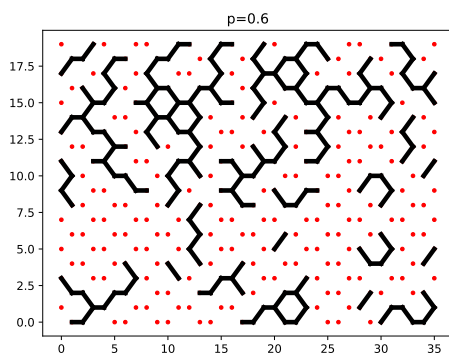
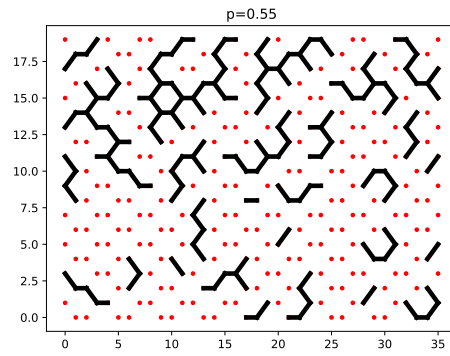
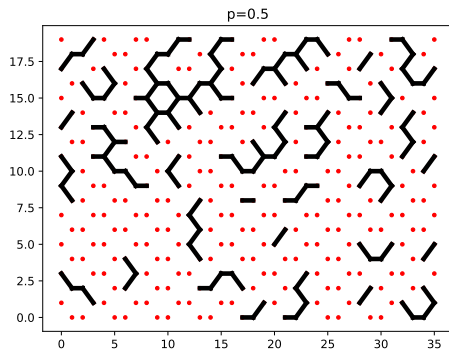
3.1. ábra. Itt a háromszögrácson látható, hogy p -szerint csúcsokat választunk ki

Ezekon az ábrákon a p szerint vesszük be az éleket vagy csúcsokat, és így p növelésével egy olyan élt, ami kisebb p -nél is benne volt, azt egy nagyobbánál is bevesszük.

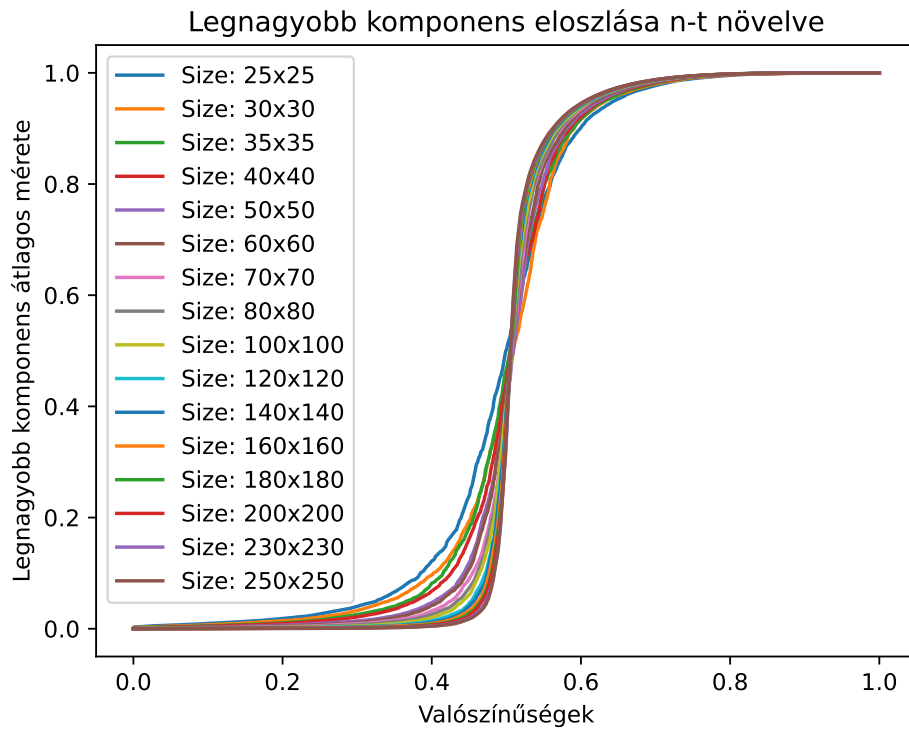


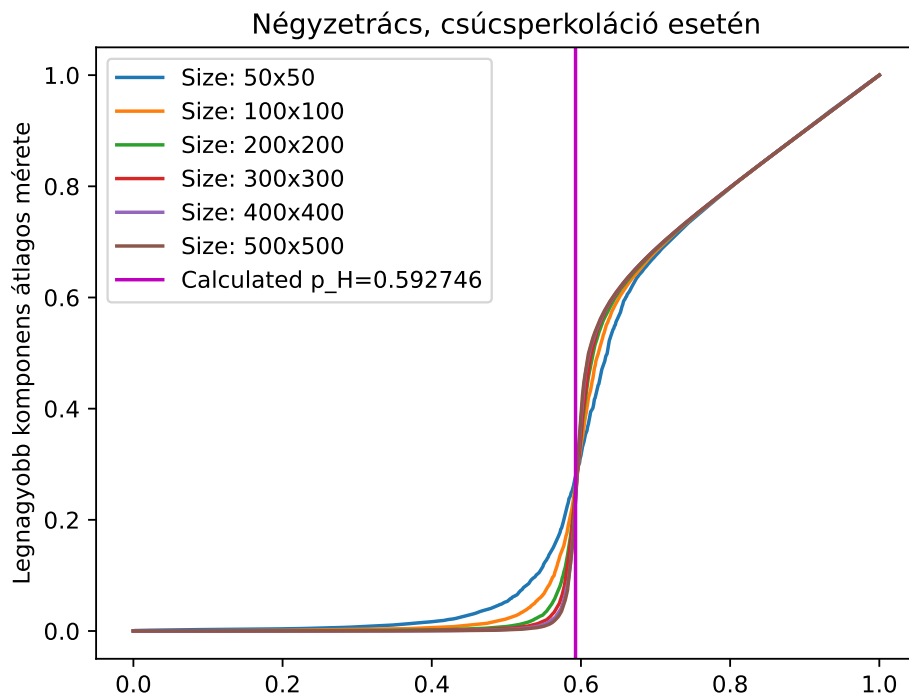
3.2. ábra. Ezen a 20×20 -as téglalapon $p = 0.35, 0.4, 0.45, 0.5, 0.55, 0.6$ mellett húztuk be az éleket. Figyeljük meg, hogy $H(R)$ csak $p = 0.45$ felett teljesül

Az alábbi ábrák azt mutatják, hogy egy megfelelő rácsban a legnagyobb fűrt mérete mekkora p függvényében. Elsőre az éleket a már ismert négyszögrácson nézzük, majd a hatszögrácson vizsgáljuk a csúcsok kiválasztását. Végül megnézzük a háromszögrácson mit tapasztalunk.

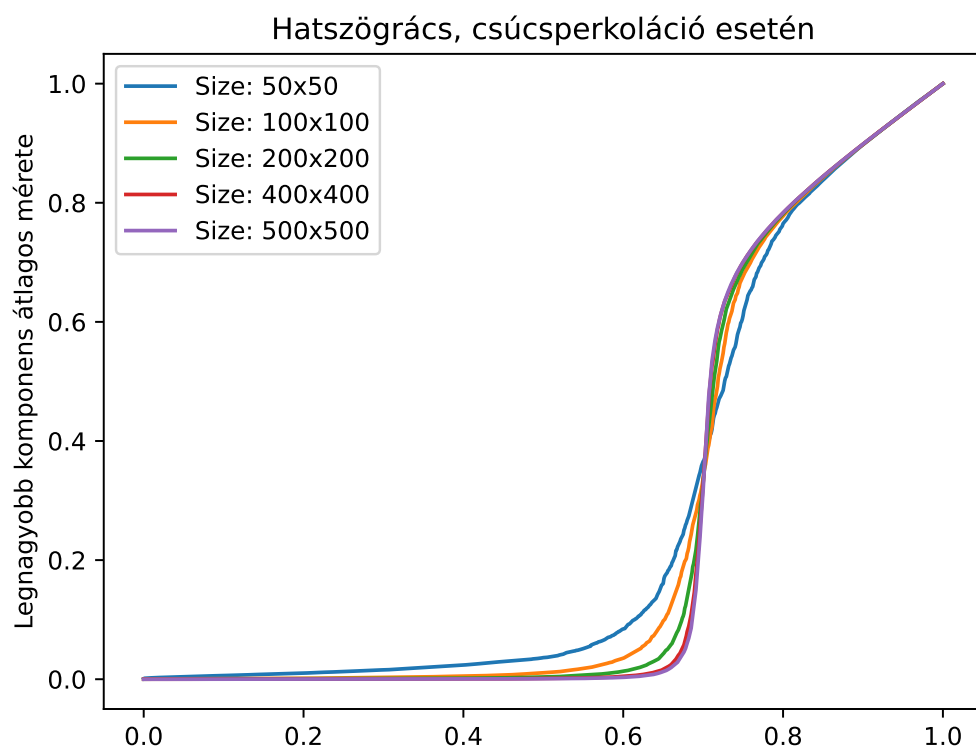


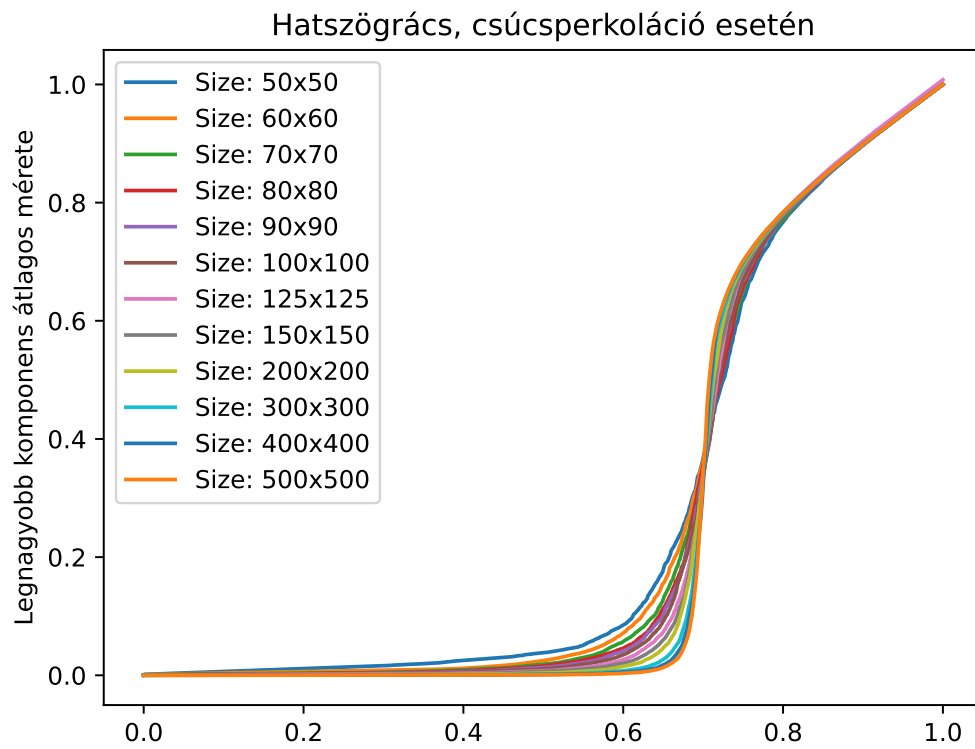
Láthatjuk, hogy a kritikus pont környékén egy éles változás történik a legnagyobb komponens méretében.



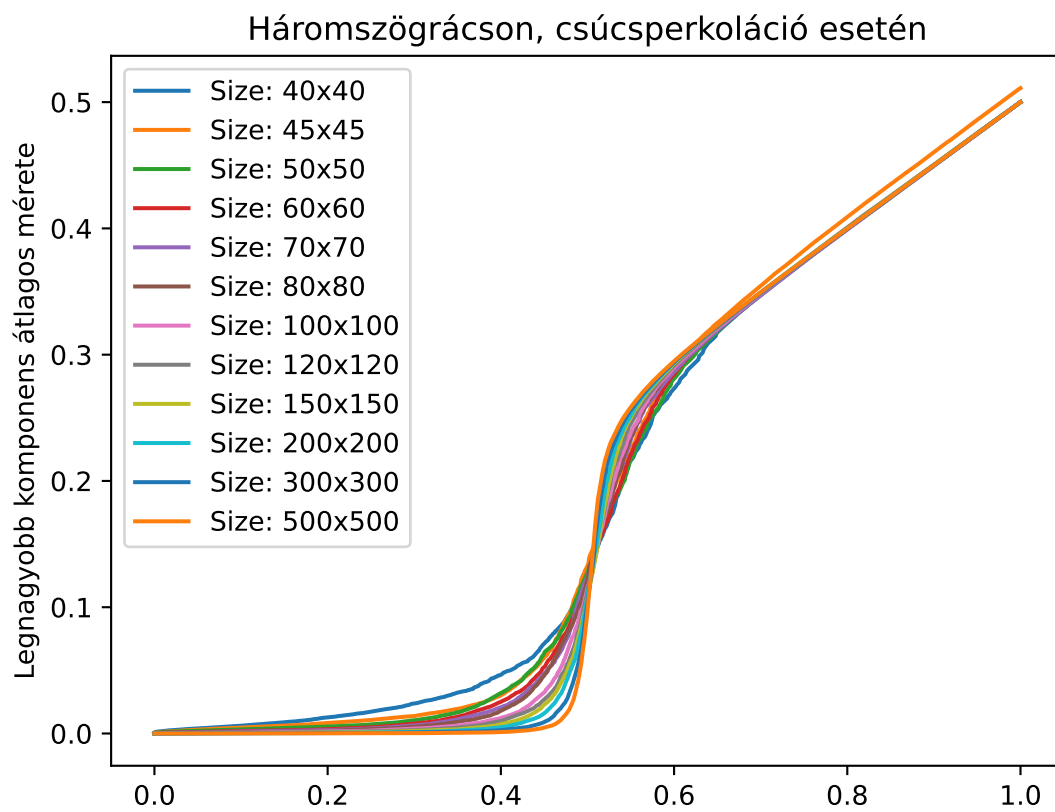


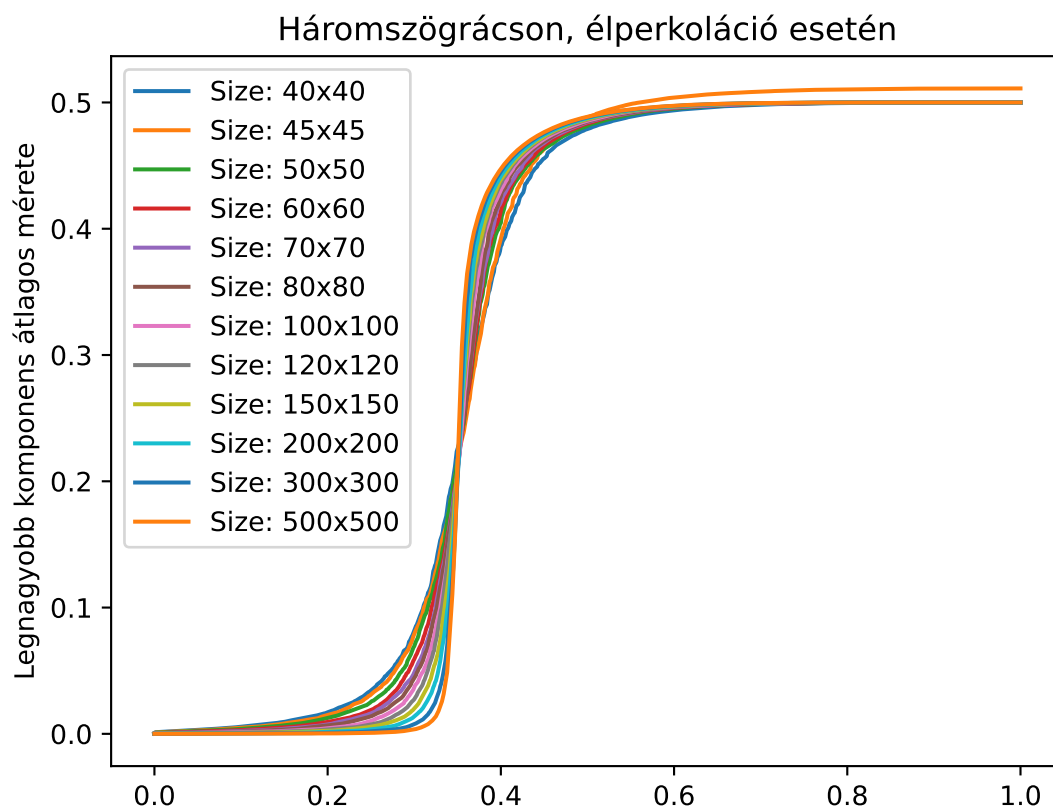
3.3. ábra. Mint látható, mindkét ábrán n növekedésével egyre keskenyedik az az ablak, ahol a legnagyobb komponensek átlagos száma felugrik. A második ábrán ugyanúgy négyzetrácson, csúcsperekolációt szimuláltunk. A számolt érték ebből a [5] cikkből származik.





3.4. ábra. Hasonló látható a hatszögrácsban, csúcskiválasztás esetén is, de érdemes megemlíteni, hogy csúcsperkoláció esetén az ugrás után a gráf inkább tovább nő.





3.5. ábra. A felső ábrán csúcs-, az alsón pedig élperkolációt vizsgáltunk

A. függelék

Függelék

A kód ezen a helyen érhető el: <https://github.com/AnonymusMaximusD/Perkolacio.git>

Irodalom

- [1] Michael Aizenman és David J. Barsky. „Sharpness of the phase transition in percolation models”. *Communications in Mathematical Physics* 108.3 (1987), 489–526. old.
- [2] Béla Bollobás és Oliver Riordan. *Percolation*. Cambridge University Press, 2006.
- [3] Simon R Broadbent és John M Hammersley. „Percolation processes: I. Crystals and mazes”. *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*. 53. köt. 3. Cambridge University Press. 1957, 629–641. old.
- [4] Ehud Friedgut. „Every Monotone Graph Property Has A Sharp Threshold”. *Proc Amer Math Soc* 124 (1996. jún.). DOI: 10.1090/S0002-9939-96-03732-X.
- [5] Jesper Lykke Jacobsen. „High-precision percolation thresholds and Potts-model critical manifolds from graph polynomials”. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 47 (2014).
- [6] G. A. Margulis. „Probabilistic properties of graphs with large connectivity”. Russian. *Probl. Peredachi Inf.* 10.2 (1974), 101–109. old. ISSN: 0555-2923.
- [7] Lucio Russo. „A note on percolation”. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* 43 (1978), 39–48. old.