Eötvös Lóránd Tudományegyetem

Természettudományi kar

Közlekedési játékok

Kratok Gyula

Bsc szakdolgozat, alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Király Tamás

Budapest, 2023

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek Király Tamásnak a szakdolgozat megírásához nyújtott segítséget. Az érdekes témát, a rendszeres konzultációkat, az ötleteket és a támogatást.

Az elmúlt három évben folytatott tanulmányaimban rengeteg nehézségbe ütköztem. Ezeket a barátaim és családom segítsége nélkül nem tudtam volna leküzdeni. Köszönöm a segítséget, a bizalmat, az őszinteséget és, hogy néha akkor is hittetek bennem, amikor én arra képtelen voltam. Nélkületek ez a dolgozat nem születhetett volna meg.

Bevezető

A közlekedési játékokról először Robert W. Rosethal publikált egy 1973-as cikkben és azóta a stratégiai játékelmélet rendkívül fontos részévé léptek elő. A nem-kooperatív játékok olyan ága ez, melynek legalapvetőbb koncepciója a következő. Játékosok erőforrások közül választanak azt is szem előtt tartva, hogy minimalizálják a költségüket, viszont minél többen választják ugyanazt az erőforrást, annak ára egyre drágább lesz.

Egy lehetséges felosztás a közlekedési játékok témakörben a résztvevők száma és a közlekedésre gyakorolt hatásuk szerint. Ez alapján megkülönböztetünk atomos és nem-atomos közlekedési játékokat, ahol előbbiben minden játékos döntése befolyásolja a modell kimenetelét, míg nem-atomos játékokban egyetlen játékos döntései elhanyagolhatók, mivel kontinuum sok játékos van a rendszerben. Az első 2 fejezetben leginkább [1] cikkre valamint a megjelölt játékelmélet jegyzetre támaszkodom.

A modellek valósághűbbé tétele érdekében egy lehetséges javítás, ha a résztvevőknek nem kell a játék elején leadniuk az egész stratégiájukat, hanem a játék során a többi játékos döntései által befolyásolva fokozatosan adják meg azt. Az ilyen modelleket dinamikus közlekedési játékoknak nevezzük. Ezen modellek felállításában atomos esetben a [3], nem-atomos esetben [5] irodalom állt segítségemre.

A dolgozatom során komoly figyelmet fordítok annak a vizsgálatára, hogy az önző stratégiválasztás mennyire tudja elrontani, a szociális optimumot. Egy központi autoritás kinevezésével, ami megszabhatja a játékosok stratégiáit, hogy az összegezett költséget minimalizálja, mennyivel tudunk jobb eredményt elérni, mint ha a játékosok nem-kooperatív módon viselkednének. Ezt a mérőszámot az anarchia árának nevezzük és 1999-es első említése óta számos kutatás témájává lépett elő. Ezen részekhez a [4] cikket használtam

A közlekedési játékokat, számos különböző területen alkalmazzák. A közlekedési hálózatokon kívül, telekommunikációs hálózatok vizsgálatánál és hálózati folyamok tanulmányozására is alkalmazzák az itt megállapított ereményeket.

Az elmúlt időszakban két kínai városban is bevezették az önvezető taxik működését. Az önvezető járművek egyre nagyobb mértékű alkalmazása miatt, a közlekedési játékok és az anarchia ára tanulmányozása még sohasem volt relevánsabb. A dolgozatom során elsősorban ezen terülek fogalmainak és tételeinek bemutatása a célom, valamint, hogy különböző esetekben a az egyensúlyi állapotokhoz vezető algoritmusokat ismertessem.

1. Atomos közlekedési játékok

1.1. Alapfoglamak

1.1. Definíció. *(Rosenthal 1973) Egy atomos közlekedési játék a következő elemekből áll* $\Gamma = (N, R, (\Sigma_i)_{i\in N}, (d_r)_{r\in R})$*, ahol:*

- $N = \{1, 2, .., n\}$*: A játékosok halmaza*
- R *: Az erőforrások halmaza általában* $|R| = m$
- $\Sigma_i \subseteq 2^R$ *: Az* i*. játékos stratégiáinak halmaza (stratégiatere)*
- $d_r : \{1, 2, .., n\} \to \mathbb{Z}$*: Monoton növő függvény, az* r *erőforrás árfüggvénye.*

Az atomos szó arra utal, hogy közlekedésben résztvevő elemek száma véges, és minden résztvevő a közlekedés $1/n$ részét adja. Megjegyzem, hogy ez az érték, lehet más is, ha a résztvevőket súlyozzuk, vagyis skalárisan szorozzuk valamilyen konvex kombinációval.

A közlekedési játékokra egy jellegzetes példa a hálózati közlekedési játékok. Ekkor a játék egy $G = (V, E)$ irányított gráfon (hálózaton) történik. Ekkor $R = E$, azaz az erőforrások halmaza megegyezik az élek halmazával és az i. játékos célja, hogy az s_i csúcsból a t_i csúcsba eljusson a lehető legolcsóbb módon. A stratégiáinak tere az $s_i - t_i$ utak halmaza.

1.2. Definíció. *Minden* $S = (s_1, s_2, .., s_n) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times .. \times \Sigma_n$ *stratégiavektorban,* $n_r(S)$*, annak a száma, hogy az* S *stratégiavektorban hány játékos használja az* r *erőforrást. Vagyis:*

$$n_r(S) = |\{i \in N : r \in s_i\}|,$$

így az r *erőforrás ára* $d_r(n_r(S))$ *Az* i*. játékos költsége pedig.*

$$c_i(S) = \sum_{r\in s_i} d_r(n_r(S))$$

1.3. Definíció. *Az* s_i *stratégiát az* $i \in N$ *játékos legjobb válaszának nevezzük, az* $s_{-i} = (s_1, ..s_{i-1}, s_{i+1}.., s_n)$*-nel szemben, ha* $c_i(s_i, s_{-i}) \leqslant c_i(s_{i'}, s_{-i})$ *minden* $s_{i'} \in \Sigma_i$*-re.*

1.4. Definíció. *Az S stratégiát egy Nash egyensúlynak nevezzük, ha $c_i(S) \leqslant c_i(s_{i'}, s_{-i})$ minden $s_{i'} \in \Sigma_i$ és $i \in N$ esetén. Vagyis, ha s_i legjobb válasz a többi játékosra nézve, minden játékos szempontjából.*

Ha egy stratégia Nash egyensúly az egyszerűen fogalmazva azt jelenti, hogy egyetlen játékosnak sem éri meg stratégiát változtatni, mivel azzal csak növeli a költségeit. A következő fejezetben néhány Nash egyensúllyal kapcsolatos tételt fogunk megvizsgálni és néhány speciális esetben megnézzük, hogy tudunk egy Nash egyensúlyt kapni.

1.2. Nash egyensúly

1.5. Definíció. *Az (S, S') stratégiapáros az i. játékos javító lépése, ha $c_i(S') < c_i(S)$ és $s_{-i} = s_{-i'}$*

Egy kezdeti konfigurációból kiindulva javító lépésekkel lépkedve, minden lépésben szigorúan javul egy játékos költségfüggvénye. Ha senkinek sincs javító lépése egy Nash egyensúlyban vagyunk. A probléma csak az, hogy milyen hosszú lehet egy ilyen javító lépésekből álló sorozat. Ehhez használjuk a következő tételt:

1.1. Tétel. *Minden atomos közlekedési játékban, minden javító lépésekből álló sorozat véges.*

A célunk, hogy a fenti tételt bizonyítsuk. Ehhez a következő függvényt fogjuk használni.

1.6. Definíció. *A $\Phi : S \to \mathbb{R}$ függvényt potenciálfüggvénynek nevezzük, ha egy játékos stratégiaváltoztatása esetén a függvény értékének a változása megegyezik a változtató játékos költségfüggvényének a különbségével.*

$$\Phi(S) - \Phi(s_i{}', s_{-i}) = c_i(S) - c_i(s_i{}', s_{-i})$$

Az ilyen típusú függvények rendkívül szemléletesek játékelméleti szempontból, mert ha egy játékos tesz egy javító lépést a függvény értéke csökken valamint a függvény egy lokális minimuma egy Nash egyensúlyt reprezentál, hiszen, ha senki más nem változtat, akkor egy adott játékosnak nem csökkenhet a költsége.

1.2. Tétel. *Egy közlekedési játékban az S stratégia Nash egyensúly pontosan akkor, ha nem létezik olyan $S' \in \Sigma$, hogy $s_i = s_i'$ minden i-re egy kivétellel és $\Phi(S') < \Phi(S)$*

Bizonyítás. Azt lássuk be, hogy S nem Nash egyensúly pontosan akkor, ha létezik S', hogy $s_i' = s_i$ minden i-re egy kivétellel és $\Phi(S') < \Phi(S)$

$\Leftarrow$

A potenciálfüggvény definiciója alapján:

$$0 > \Phi(S') - \Phi(S) = c_i(S') - c_i(S) \Rightarrow c_i(S') < c_i(S)$$

Vagyis s_i nem a legjobb válasz S_{-i}-re így S nem Nash egyensúly.

$\Rightarrow$

A másik irányban igazából ugyanez az ötlet. Legyen S egy olyan stratégia, ami nem Nash egyensúly, ekkor létezik $i \in N$ és $s_i' \in \Sigma_i$, hogy $c_i(s_i', s_{-i}) < c_i(S)$. Ebből pedig következik, hogy $\Phi(S') < \Phi(S)$.

□

Egy konkrét példa, ilyen tulajdonságú függvényre a Rosenthal potenciálfüggvény:

$$\Phi(S) = \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{n_r(s)} d_r(k)$$

Lássuk be, hogy a fenti függvény valóban eleget tesz a potenciálfüggvények tulajdonságainak.

1.1. Lemma. *A Rosenthal potenciálfüggvény valóban potenciálfüggvény*

Bizonyítás.

$$\Phi(s_i', s_{-i}) - \Phi(S) = \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{n_r(s_i', s_{-i})} d_r(k) - \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{n_r(S)} d_r(k) = \sum_{r \in R} (\sum_{k=1}^{n_r(s_i', s_{-i})} d_r(k) - \sum_{k=1}^{n_r(S)} d_r(k))$$

Jelöljük a belső összeget a kifejezésben Δ_r-rel. Az erőforrásokat 4 csoportba tudjuk osztani aszerint, hogy szerepelnek-e s_i-ben és s_i'-ben.

- Első eset: $r \in s_i'$ és $r \in s_i$ ekkor $\Delta_r = 0$

- Második eset: $r \notin s_i'$ és $r \notin s_i$ ekkor $\Delta_r = 0$
- Harmadik eset: $r \in s_i'$ és $r \notin s_i$ ekkor $n_r(s_i', s_{-i}) = n_r(S) + 1$ és $\Delta_r = d_r(n_r(s_i', s_{-i}))$
- Negyedik eset: $r \notin s_i'$ és $r \in s_i$ ekkor $n_r(s_i', s_{-i}) = n_r(S) - 1$ és $\Delta_r = -d_r(n_r(S))$

Most nézzük az egyenlet jobboldalát:

$$\begin{aligned} c_i(s_i', s_{-i}) - c_i(S) &= \sum_{r \in s_i'} d_r(n_r(s_i', s_{-i})) - \sum_{r \in s_i} d_r(n_r(S)) = \\ &= \sum_{r \in s_i' \setminus s_i} d_r(n_r(s_i', s_{-i})) - \sum_{r \in s_i \setminus s_i'} d_r(n_r(S)) = \sum_{r \in R} \Delta_r \end{aligned}$$

$\square$

Ezzel az eszközzel felszerelkezve már könnyedén beláthatjuk az első tételt.

Bizonyítás. Vegyük az i. játékos egy javító lépését. Ekkor $c_i(s_i', s_{-i}) < c_i(s)$ és mivel az árfüggvények egész számok ezért $c_i(s_i', s_{-i}) - c_i(s) \leqslant -1$. Minden S-re igaz, hogy:

$$\Phi(S) = \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{n_r(S)} d_r(k) \leqslant \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{n} |d_r(k)|$$

illetve,

$$\Phi(S) \geqslant -\sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{n} |d_r(k)|$$

Tehát a javító lépések száma kisebb, mint $2 \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{n} |d_r(k)|$ $\square$

Fontos megjegyezni, hogy a tétel, akkor is igaz, ha az árfüggvények nem egész számok. Ekkor folytonossági és kompaktsági érveket használunk fel a bizonyítás során, lásd a 2. fejezetben.

1. Következmény. *Minden közlekedési játékban van legalább egy Nash egyensúly*

1.3. Nash egyensúly keresési módszerek

Az 1.1 tétel bizonyításával implicit módon, már kaptunk is egy egyszerű algoritmust arra, hogy hogyan jutunk el Nash egyensúlyba. Elindulunk egy tetszőleges stratégiavektorból és addig lépkedünk amíg Nash egyensúlyba nem érünk. A kérdés csak az, hogy milyen gyors ez az algoritmus, vagyis milyen hosszú lehet maximum egy ilyen javító sorozat.

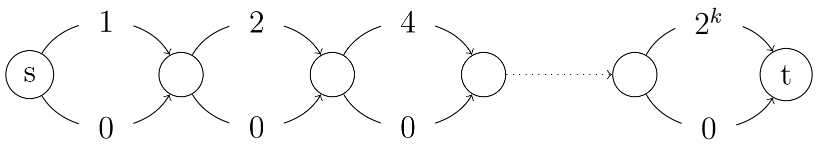
Erre a kérdésre egy felsőkorlátot már ismerünk az előző fejezet végéből.

$$2\sum_{r\in R}\sum_{k=1}^{n}|d_r(k)| \leqslant 2mn\max_{r,k}|d_r(k)|$$

Ez a felsőkorlát nem polinomiális, hanem pszeudopolinomiális, ami azt jelenti, hogy a futási idő függ a számok méretétől, vagyis a paramétereket reprezentáló bitek számában nem polinomiális. Nagyban függ az érték a függvényértékek maximumától, ezt el tudjuk kerülni egy másik felsőkorláttal.

$$|\Sigma_1 \times \Sigma_2 \times ... \times \Sigma_n| \leqslant 2^{mn}$$

Ez a felsőkorlát nem is durva, könnyedén tudunk konstruálni olyan példát, ahol valóban ilyen sok lépés szükséges.
Legyen $n = 1$, $m = 2(k+1)$. A hálózatunk a következő:



A fenti példánál összesen 2^k út (stratégia) van, és legrosszabb esetben a max költségű útból indul, majd mindig csak az eggyel jobbra vált, így nagyon hosszú javító sorozatokat is tudunk generálni. Bár ez a példa nem teljesen valóságszerű mégis szemléletesen bemutatja, hogy általánosságban Nash egyensúlyt keresni nem egyszerű feladat. Speciális konkrét esetekben, viszont tudunk polinomiális időben algoritmust adni.

1.3.1. Szingleton közlekedési játékok

1.7. Definíció. *Egy közlekedési játékot, Szingletonnak nevezünk, ha* $\forall i \in N$ *és* $\forall s_i \in \Sigma_i$ *igaz, hogy* $|s_i| = 1$

1.3. Tétel. *Egy szingleton közlekedési játékban, n játékos, és m forrás esetén minden javító sorozat* $o(n^2 m)$ *nagyságrendű.*

Bizonyítás.

$$V = \{d_r(k) : r \in R, 1 \leqslant k \leqslant n\}$$

$|V| \leqslant nm$
Új árfüggvényeket definiálunk:
$\tilde{d}_r(k)$: $d_r(k)$ sorszáma a növekvő sorrendbe rendezett V halmazban.
Vegyünk egy (S, S') javítólépést.

Ekkor tudjuk $c_i(S) = d_r(n_r(S)) > d_r(n_r(S')) = c_i(S')$, ebből következik, hogy $\tilde{d}_r(n_r(S)) > \tilde{d}_r(n_r(S'))$. Vagyis, minden javító lépés a régi függvények szerint egyben az új függvények szerint is az, tehát elég ez a költség szerint keresni a Nash egyensúlyt.

$$\Phi(S) = \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{n_r(S)} \tilde{d}_r(k) \leqslant \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{n_r(S)} nm = nm \sum_{r \in R} n_r(S) = n^2 m$$

□

1.3.2. Szimmetrikus hálózati közlekedési játékok

Szimmetrikus játékoknak azt az esetet, nevezzük, amikor a játékosok stratégiahalmaza megegyezik, vagyis minden játékos ugyanabból a halmazból választja a stratégiáját. Hálózati közlekedési játékoknál ez pontosan azt jelenti, ha minden játékos egy kitüntett s csúcsból szeretne eljutni egy t csúcsba.

Ebben az esetben használhatjuk a maximális folyam - minimális vágás (MFMC) algoritmust, hogy Nash egyensúlyt keressünk.

Új hálózatot készítünk, amiben minden élet, n párhuzamos éllel helyettesítünk. Minden él kapacitása 1, és az i. él árfüggvénye $d_e(i)$-vel egyenlő. Ezen a gráfon keresünk n nagyságú minimális költségű folyamot. Mivel a minimális költségű folyam a párhuzamos élekből, mindig a soron következőt választja ki, a d függvény monoton növő tulajdonsága miatt. Így a minimális folyam valójában a Rosenthal potenciált minimalizálja, és így megegyezik egy Nash egyensúllyal. A max folyam - min vágás algoritmus polinomiális és jól működik, valójában kívü esik a dolgozatom témáján, de leírása megtalálható például a [7] jegyzetben.

1.4. Az anarchia ára

Egy természetesen felmerülő kérdés, hogy mennyiben különbözik az önző nem-kooperatív stratégiaválasztás, attól az esettől, amikor valami központi autoritás választja ki az egyének stratégiáit. A kérdés az, hogy egy önző optimum, egy Nash egyensúly mennyire különbözhet a szociális optimumtól, azaz az összes játékos költségösszegének a minimumától.

1.8. Definíció. *Egy stratégia összköltsége, a játékosok költségeinek az összege.*

$$C(S) = \sum_{i \in N} c_i(S) = \sum_{e \in E} s_e d_e(s_e)$$

Az ezt a függvényt minimalizáló stratégiát pedig szociális optimumnak (SO) nevezzük.

Természetesen adódik, egy kissé bonyolultabb súlyozott eset melyben bevezetünk súlyokat a játékosokra, és a játékosok költségének valamilyen konvex kombinációját szeretnénk minimalizálni.

1.9. Definíció. *A Γ közlekedési játékban az anarchia ára:*

$$POA(\Gamma) = \frac{\max_{s \in NE} C(s)}{\min_{s \in S} C(s)}$$

Ahol NE a nash egyensúlyok halamaza. Ez azt jelenti hogy a Γ játékban az anarchia ára, a szociális optimum és a legrosszabb (legmagasabb összköltségű) Nash egyensúly aránya.

A fogalomnak létezik egy duális párja, amelyben a legjobb önző egyensúlynak az árát arányosítjuk a szociális optimumhoz. Ezt a stabilitás árának nevezzük.

$$POS(\Gamma) = \frac{\min_{s \in NE} C(s)}{\min_{s \in S} C(s)}$$

Az anarchia árával kapcsolatban rengeteg eredmény született, az elmúlt húsz évben, és a mai napig folyamatos kutatások tárgyát képezik. Ezen eredményekből szeretnék néhány fontosabbat ismertetni.

Az anarchia ára, elsősorban az éleken lévő függvényektől, valamint a közlekedési hálózat összetettségétől függ. Itt komoly eltérés tapasztalható, az atomos és nem-atomos játékok vizsgálata közben, de ezt részletesebben a következő fejezetben fogjuk tárgyalni, de néhány fogalmat már most is elkerülhetetlen definiálni.

Nem-atomos játékoknál az anarchia ára megegyezik egy $\rho(\mathcal{D})$ mennyiséggel, ahol $\mathcal{D}$ az árfüggvények egy osztálya. $d \in \mathcal{D}$ nem negatív és nem csökkenő függvény esetén.

$$\rho(d) = \sup_{x \geqslant y \geqslant 0} \frac{xd(x)}{yd(y) + (x-y)d(x)}$$

valamint, nem üres $\mathcal{D}$ esetén

$$\rho(\mathcal{D}) = \sup_{d \in \mathcal{D}} \rho(d)$$

Ezt a mennyiséget a Pigou korlátnak nevezik.

Általánosságban az anarchia áráról igaz állításokat megfogalmazni nehéz, így különböző megszorításokat kell tennünk a hálózatra és a függvényekre.

1.4. Tétel. *Atomos szingleton közlekedési játékokban, ha az árfüggvények $\mathcal{D}$ affin függvények halmaza, az anarchia ára legfeljebb $\rho(\mathcal{D})$.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathbf{o}$ a szociálisan optimális stratégiát és legyen $\mathbf{s}$ a legmagasabb összköltségű Nash egyensúly. Jelölje $s_e = n_e(S)$-t, valamint jelölje $\beta(\mathcal{D}) = 1 + \frac{1}{\rho(\mathcal{D})-1}$. A következő fennáll $\forall e \in E$:

$$\begin{aligned} s_e d_e(s_e) &= o_e d_e(s_e) + (s_e - o_e) d_e(s_e) \\ &\leqslant o_e d_e(s_e) + \beta(\mathcal{D}) s_e d_e(s_e) + (s_e - o_e) d_e(s_e) \end{aligned} \tag{1}$$

Mivel $\beta(\mathcal{D}) \geqslant 0$.

Minden élen, ahol $o_e > s_e$:

$$\begin{aligned} s_e d_e(s_e) &= o_e d_e(o_e) - o_e d_e(o_e) + s_e d_e(s_e) \\ &\leqslant o_e d_e(o_e) - (o_e - s_e) d_e(s_e + 1) \end{aligned} \tag{2}$$

Ez azért igaz, mert a d függvény nem csökkenő, és $s_e + 1 \leqslant o_e$. Most tegyük fel, hogy a következő teljesül.

$$\sum_{e:s_e>o_e} (s_e - o_e)d_e(s_e) \leqslant \sum_{e:o_e>s_e} (o_e - s_e)d_e(s_e + 1) \tag{3}$$

Használjuk (1) azonosságot, azokon az éleken, ahol $s_e \geqslant o_e$, és használjuk (2)-t, ott ahol $o_e > s_e$, majd a (3) egyenlőtlenséget használva a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} C(\mathbf{s}) \leqslant \sum_{e\in E} o_e d_e(o_e) + \beta(\mathcal{D}) \sum_{e:s_e \geqslant o_e} s_e d_e(s_e) + \\ \sum_{e:s_e>o_e} (s_e - o_e)d_e(s_e) - \sum_{e:o_e>s_e} (o_e - s_e)d_e(s_e + 1) \\ \leqslant C(\mathbf{o}) + \beta(\mathcal{D})C(\mathbf{s}) \end{aligned}$$

Vagyis megkaptuk, hogy $C(\mathbf{s}) \leqslant (1 - \beta(\mathcal{D}))^{-1}C(\mathbf{o}) = \rho(\mathcal{D})C(\mathbf{o})$. Egyedül azt kell még belátni, hogy a (3) egyenlőtlenség igaz szingleton közlekedési játékok esetén. Mivel $\mathbf{s}$ egy Nash egyensúly volt, minden e élen, ahol $s_e > o_e$ és minden e' élhez, igaz, hogy:

$$d_e(s_e) \leqslant d_{e'}(s_{e'} + 1)$$

és az is igaz, hogy:

$$\sum_{e:s_e>o_e} (s_e - o_e) = \sum_{e:o_e>s_e} (o_e - s_e)$$

mive szingleton hálózatokon $\sum_{e\in E} s_e = \sum_{e\in E} o_e$ □

A szingleton tulajdonságot, csak a (3) egyenlőtlenség fennállásakor használjuk ki így a tétel nem csak szingleton játékokra igaz, hanem mindenhol, ahol az egyenlőtlenség fennáll. $\rho(\mathcal{D})$ becsléséről részletesebben a következő fejezetben lesz szó. Ezek kimondottan speciális eseteknek számítanak. Ha kissé bonyolultabb hálózatokon szeretnénk modellezni az eredmények rögtön megváltoznak.

1.5. Tétel. *Atomos közlekedési játékokban, affin árfüggvények ($a_r x + b_r$, ahol $a_r, b_r \geqslant 0$) esetén az anarchia ára legfeljebb 5/2.*

Bizonyítás. Legyen $s \in NE$, o pedig a szociális optimum.
Azt kell belátnunk, hogy $C(s) \leqslant \frac{5}{2}C(o)$

Mivel s Nash egyensúly, így minden $i \in N$

$$c_i(s) \leqslant c_i(o_i, s_{-i})$$

A következőt látjuk be:

$$C(s) = \sum_{i \in N} c_i(s) \leqslant \sum_{i \in N} c_i(o_i, s_{-i}) \leqslant \frac{5}{3} C(o) + \frac{1}{3} C(s)$$

Ha ezt bebizonyítjuk az egyenletet átrendezve a kívánt eredményt kapjuk.

$$c_i(o_i, s_{-i}) = \sum_{r \in o_i} d_r(n_r(o_i, s_{-i})) \leqslant \sum_{r \in o_i} d_r(n_r(s) + 1)$$

Mivel, csak egy játékos vált statégiát, így minden forráson max eggyel növekedhet a felhasználók száma. Az összköltséget úgy is meg tudjuk kapni, hogy a forrásokon számoljuk meg az embereket a következő módon:

$$\sum_{i \in N} c_i(o_i, s_{-i}) \leqslant \sum_{i \in N} \sum_{r \in o_i} d_r(n_r(s) + 1) = \sum_{r \in R} \sum_{i : r \in o_i} d_r(n_r(s) + 1) = \sum_{r \in R} n_r(o) d_r(n_r(s) + 1)$$

Most felhasználjuk, hogy a költségfüggvények affinok.

$$\sum_{i \in N} c_i(o_i, s_{-i}) \leqslant \sum_{r \in R} n_r(o)(a_r(n_r(s) + 1) + b_r)$$

$$C(s) = \sum_{i \in N} \sum_{r \in s_i} d_r(n_r(s)) = \sum_{r \in R} n_r(s) d_r(n_r(s)) = \sum_{r \in R} n_r(s)(a_r n_r(s) + b_r)$$

A továbbiakhoz szükségünk lesz a következő lemmára.

1.2. Lemma. *Minden y, z nemnegatív egészekre teljesül, hogy* $y(z + 1) \leqslant \frac{5}{3} y^2 + \frac{1}{3} z^2$

A lemma bizonyítása viszonylag egyszerű esetszétválasztásokon alapul, és kizárólag technikai, ezért ettől most eltekintek. Megtalálható a [6] jegyzetben.

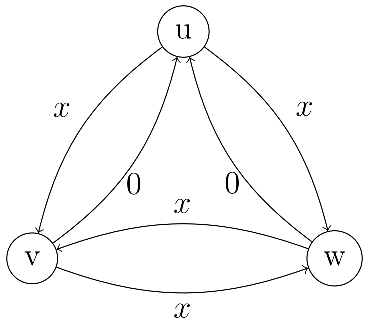
$$\begin{aligned} n_r(o)(a_r(n_r(s) + 1) + b_r) &= a_r n_r(o)(n_r(s) + 1) + b_r(n_r(o)) \leqslant \\ &\leqslant a_r(\frac{5}{3}(n_r(o))^2 + \frac{1}{3}(n_r(s))^2) + b_r n_r(o) \leqslant \\ &\leqslant \frac{5}{3} a_r (n_r(o))^2 + \frac{5}{3} b_r n_r(o) + \frac{1}{3} a_r (n_r(s))^2 + \frac{1}{3} b_r n_r(s) = \\ &= \frac{5}{3}(a_r n_r(o) + b_r) n_r(o) + \frac{1}{3}(a_r n_r(s) + b_r) n_r(s) \end{aligned}$$

Ezzel már mindenünk rendelkezésre áll, amire szükségünk volt, hogy belássuk a tételt.

$$\begin{aligned}C(s) &= \sum_{i\in N} c_i(s) \leqslant \sum_{i\in N} c_i(o_i, s_{-i}) \leqslant \sum_{r\in R} n_r(o)(a_r(n_r(s)+1)+b_r) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{r\in R}(\frac{5}{3}(a_r n_r(o)+b_r)n_r(o) + \frac{1}{3}(a_r(n_r(s))+b_r)n_r(s)) = \\ &= \frac{5}{3}C(o) + \frac{1}{3}C(s)\end{aligned}$$

Az egyenlőtlenséget átrendezve megkapjuk visszakapjuk a tétel állítását. □

Felmerül a kérdés, hogy a bizonyítás során nem használtunk-e túlságosan durva becsléseket. A válasz a kérdésre az, hogy nem ugyanis tudunk mutatni olyan feltételeknek eleget tevő közlekedési játékot, ahol ez a becslés éles.
Nézzük az alábbi gráfot:



Az alábbi hálózaton 4 játékosunk van. Az első u-ból v-be, a második u-ból w-be, a harmadik v-ből w-be, a negyedik w-ből v-be akar eljutni. Ha mindegyikük közvetlenül egy lépésben elmegy a célja felé mindegyikük költsége 1 lesz, az összköltsége a játéknak pedig 4, viszont, ha mindenki kétlépésben jut el a célba (pl. az első játékos u → w → v útvonalat választja), akkor a játékosok költségei sorban 3,3,2,2 lenne, az együttes költség 10. A második állapot, bár elsőre logikátlannak tűnik, de ha leellenőrizzük sorban a játékosokra, akkor Nash egyensúlyt kapunk. A két érték aránya pedig 2.5, így ez az anarchia árának alsó határa.

2. Nem atomos közlekedési játékok

Az alábbi fejezetben tárgyalt modellek, látszólag igen hasonlóak az atomos közlekedési játékokéhoz, ám hamar rájöhetünk, hogy az alapfogalmak és a tételek eredményei között is jelentős eltérések vannak.

A legnagyobb különbség az atomos és nem-atomos közlekedési játékok között, a résztvevők számában és egy játékos közlekedést befolyásolyó szerepének nagyságában mutatkozik. Atomos játékokban mindig megszámlálhatóan sok (sőt véges sok) játékos vesz részt. Ha n résztvevő van a forgalomban egy játékos a forgalom $1/n$-ed részét teszi ki. Nem-atomos közlekedési játékokban kontinuum sok résztvevő van és egy résztvevő az összforgalom elhanyagolható részét befolyásolja. Ez azt jelenti, hogy a forgalom összköltségét, az utak telítettségét egyetlen játékos változtatása nem befolyásolja.

Az eddigi modelleinkben intuitív példaként mindig a közlekedést hoztuk fel példaként, de itt ez az intuicíónk véget ér. A nem-atomos játékokat sokkal inkább telekommunikációs hálózatok és folyamfeladatok modellezésére használják, és ezentúl a résztvevőkre nem, mint játékosokra, sokkal inkább, mint részecskékre hivatkozunk. A fejezetben hálózati közlekedési játékokat vizsgálunk.

2.1. Alapfogalmak

A játék struktúrája, definíciója nagyon hasonló, a legnagyobb változás az, hogy eddig a játékosok egy stratégiavektorát definiáltuk, de mostantól ezt nem tudjuk, mert kontinuum sok résztvevőnk van. Az utak halmazára definiálunk folyamvektorokat, amik megmondják, hogy a közlekedés mekkora aránya használja az adott utat.

A játékot egy hálózaton definiáljuk $G(V, E)$, ahol adottak $(s_i, t_i), i \in \{1..k\}$ csúcspárok. Minden részecske valamely i-re s_i-ből t_i-be szeretne eljutni. Legyen $\mathcal{P}_i$ az $s_i - t_i$ utak halmaza és legyen $\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{P}_i$. Azt mindig feltehetjük, hogy t_i elérhető s_i-ből, vagyis $\mathcal{P}_i \neq \emptyset$.

A kontinuum sok játékost sikerült lejjebb faragni az utak számára, viszont exponenciálisan sok út lehet egy egészen egyszerű hálózatban is. Ez motiválja, hogy ne az utakon mérjük a folyamot, hanem az éleken. Az f folyam p utat használó része

f_p. Az $e \in E$ élet használó folyamot f_e-vel jelöljük. A folyam az éleken a következő vektort jelenti $\{f_e\}_{e\in E}$ és a következő képlet köti össze az utakat az élekkel.

$$f_e = \sum_{p\in\mathcal{P}:e\in p} f_p$$

A forgalom összmennyisége az $(r_i)_{i\in N}$ egy nemnegatív vektor, amit a következőképpen kapunk $i \in \{1, 2, .., k\}, \sum_{p\in\mathcal{P}_i} f_p = r_i$.

Egy folyamot megengedett folyamnak nevezünk, ha az r vektornak megfelelő mennyiségben szállítja a részecskéket, vagyis ha r-értékű a folyam.

Az előző fejezethez hasonlóan, itt is definiálunk az éleken egy monoton nemcsökkenő függvényt, ami ezúttal folytonos is lesz. Ezt itt költségfüggvénynek nevezzük és $\{c_e\}_{e\in E}$-vel jelöljük. A nem-atomos játékokat röviden a következő hármassal fogjuk definiálni $\Gamma = (G, r, c)$.

2.2. Egyensúly

A következő lépés, a nem-atomos közlekedési játékok vizsgálatánál az egyensúlyi állapot definiálása. Az előző fejezetben a Nash egyensúly röviden annyit jelentett, hogy stratégiváltással egy játékos sem tudja csökkenteni a költségeit. Nyilván kontinuum sok részecske stratégiahalmazát nem ellenőrizhetjük, így itt is az utak halmazának a segítségével definiáljuk az egyensúlyt.

2.1. Definíció. *Az f megengedett folyamban a $p \in \mathcal{P}$ út költsége $c_p(f) = \sum_{e:e\in p} c_e(f_e)$*

Ezzel pedig már definiálni tudjuk az egyensúlyi állapotunkat.

2.2. Definíció. *Legyen f egy megengedett folyam a $\Gamma = (G, r, c)$ játékban. Az f folyamot Wardrop egyensúlynak nevezzük, ha minden $i \in \{1, 2, .., k\}$, és minden $p, p' \in \mathcal{P}_i$, ahol $f_p > 0$, igaz, hogy:*

$$c_p(f) \leqslant c_{p'}(f)$$

Azaz az egyensúly csak a legolcsóbb utakat használja.

Megjegyzem, hogy az irodalomban főleg Wardrop egyensúlyként hivatkoznak az ilyen folyamokra, de Nash folyamokként is szokták emlegetni, mivel a Wardrop egyensúly valójában a Nash egyensúly végtelenesített változata, és tételként igazolva is van, hogy, ha a játékosok száma tart a végtelenbe a Nash egyensúly tart pontonként a Wardrop egyensúlyba.

2.1. Tétel. *Adott* $\Gamma = (G, r, c)$ *játékban:*

- *Mindig létezik legalább egy Wardrop egyensúly.*
- *Ha* f *és* g *Wardrop egyensúly akkor* $c_e(f_e) = c_e(g_e)$ *minden* $e \in E$

Bizonyítás. A bizonyításhoz az előző fejezetben már bevezetett potenciálfüggvényt fogjuk használni. Ahhoz, hogy nem-atomos esetben is értelmes legyen a definíció a függvényben nem összegezünk az éleken a játékosok választása szerint, hanem egy integrált kell kiszámolnunk, így a potenciálfüggvény tulajdonságait megtartjuk. Ezúttal is igaz, hogy egy folyam akkor lesz egyensúlyi, ha minimalizálja a potenciálfüggvényt.

$$\Phi(f) = \sum_{e \in E} \int_0^{f_e} c_e(x)dx$$

Mivel a költségek folytonosak, így a potenciálfüggvény is az, és mivel a folyamok halmaza konvex és kompakt, így a Weierstrass tétel szerint, a potenciálfüggvénynek van minimuma és fel is veszi azt, ezzel a tétel első részét be is láttuk.

A második rész bizonyításához felhasználjuk, hogy a potenciálfüggvény konvex. Ez a költségfüggvények monotonitásának következménye. A konvexitás miatt, minden lokális minimum egyben globális minimum is.

Tegyük fel, hogy f és g egyensúlyi folyamok. Tekintsük ezen folyamok konvex kombinációit $\lambda f + (1-\lambda)g, \lambda \in [0,1]$, ezek mind megengedett folyamok. A konvexitás miatt teljesül a következő egyenlőtlenség.

$$\Phi(\lambda f + (1-\lambda)g) \leqslant \lambda\Phi(f) + (1-\lambda)\Phi(g)$$

Mivel az f, g globális minimuma a függvénynek, így az egyenlőtlenség, egyenlőséggel teljesül, minden konvex kombinációra. Mivel Φ minden tagja konvex, ez akkor teljesül, ha a belső függvény:

$$h(x) = \int_0^x c_e(t)dt$$

lineáris f_e és g_e között, ez pedig csak akkor történhet meg, ha c_e konstans f_e és g_e között, ebből pedig már következik, hogy $c_e(f_e) = c_e(g_e), \forall e \in E$ $\square$

A következő tulajdonság még egy ekvivalens karakterizációja az egyensúlyi folyamoknak.

2.2. Tétel. *Az f megenegedett folyam Wardrop egyensúly a (Γ, r, c) játékban pontosan akkor, ha*

$$\sum_{e \in E} c_e(f_e) f_e \leqslant \sum_{e \in E} c_e(f_e) g_e$$

Minden g megengedett folyamra.

Bizonyítás. A $c_e(f_e)$ élköltségekre, az f folyam csak a legolcsóbb utakat használja, így

$$\sum_{e \in E} (g_e - f_e) c_e(f_e) \geqslant 0$$

Az egyenletet átrendezve a kívánt állítást kapjuk. $\square$

2.3. Az anarchia ára

Az anarchia áráról az előző fejezetben már jópár tételt beláttunk. A motivációnk, hogy bevezessük ezt a mérőszámot, és a definiálásának módja azonos, sőt az egyensúlyi folyamok árának egyértelműsége miatt könnyebb dolgunk van, mint eddig volt.

2.3. Definíció. *Egy folyam összköltsége a következő:*

$$C(f) = \sum_{p \in \mathcal{P}} c_p(f_p) f_p = \sum_{e \in E} c_e(f_e)$$

A folyamot, ami ezt a függvényt minimalizálja optimális folyamnak nevezzük.

Mivel a költségfüggvények folytonosak, és a folyamok tere kompakt ezért optimális folyam biztosan létezik, minden játékban.

2.4. Definíció. *A $\Gamma = (G, r, c)$ játékban az anarchia ára*

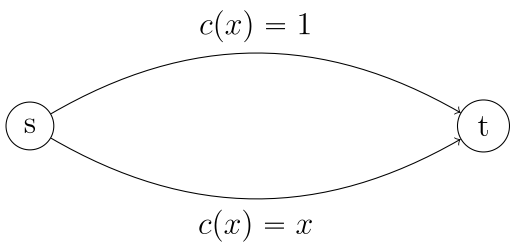
$$\rho(\Gamma) = \frac{C(f)}{C(f^*)}$$

Ahol, f egy Wardrop egyensúly, f^* pedig egy optimális folyam.

Beláttuk, hogy nem-atomos esetben az összes egyensúlyi folyamnak ugyanakkora a költsége így akármelyik használható a képletben. Ezért az anarchia ára jól definiált, kivéve abban az esetben, amikor van egy nulla költségű folyam, ekkor ez egyben egyensúlyi folyam is, mert senki nem csökkentheti a költségét és ebben az esetben az anarchia árát 1-nek definiáljuk.

2.3.1. Pigou korlát

Becsülni szeretnénk az anarchia árát. Tekintsük a következő modellt.



Menjen a hálózaton egységnyi folyam ($r = 1$). Az első dolog amit megállapíthatunk, hogy az alsó él soha nem lesz drágább, mint a felső így minden részecskének megéri ezt választania. Ha mindenki az alsó élet választja, mindenkinek 1 lesz a költsége és senkinek sem éri meg változtatnia, ezért ez egy Wardrop egyensúly.

A kérdés, hogy tudjuk-e az összköltséget csökkenteni. Tegyük fel, hogy az alsó élet a részecskék p-ed része választja ($0 \leqslant p \leqslant 1$). Ekkor a rendszer összköltsége: $p^2+(1-p)$. Ez egy másodfokú függvény, aminek minimumhelye van 1/2-ben és ekkor a függvény értéke 3/4. Az anarchia ára a rendszerben így $\frac{\frac{3}{4}}{1} = \frac{4}{3}$.

Ez a modell minden esetben ad egy természetes alsó korlátot az anarchia árára nem-atomos játékok esestében. Legyen $\mathcal{C}$ a költségfüggvények egy osztálya, ami tartalmazza a konstans függvényeket. Ekkor a $c \in \mathcal{C}$-hez tartozó Pigou hálózatban, a felső élen egy konstans $c(r)$ függvény van, az alsó élen pedig a c függvény.

2.5. Definíció. *Legyen $\mathcal{C}$ egy nem üres osztálya a költségfüggvényeknek. A Pigou korlát $\alpha(\mathcal{C})$, ahol*

$$\alpha(\mathcal{C}) = \sup_{c \in \mathcal{C}} \sup_{r \geqslant x \geqslant 0} \frac{rc(r)}{xc(x) + (r-x)c(r)}$$

Az alábbi definicióbál meg kell jegyezni, hogy nulla összköltségű folyamoknál a pigou korlátban $\frac{0}{0}$ lesz, amit 1-nek veszünk.

2.3. Tétel. *Legyen $\mathcal{C}$ a költségfüggvények egy osztálya, és $\alpha(\mathcal{C})$ a hozzátartozó Pigou korlát, valamint (G, r, c) egy nem-atomos közlekedési játék $\mathcal{C}$-beli költségfüggvényekkel, ekkor*

$$\rho(\Gamma) \leqslant \alpha(\mathcal{C})$$

Bizonyítás. A Pigou korlát definiciójából adódik, hogy:

$$\alpha(\mathcal{C}) \geqslant \frac{rc(r)}{xc(x) + (r-x)c(r)}$$

ezt átrendezve:

$$xc(x) \geqslant \frac{rc(r)}{\alpha(C)} + (x-r)c(r) \tag{4}$$

Ez minden $x, r \geqslant 0$-ra igaz. Vegyünk egy optimális folyamot f^*, és egy egyensúlyi folyamot f:

$$\begin{aligned} C(f^*) &= \sum_{e \in E} c_e(f_e^*) f_e^* \\ &\geqslant \frac{1}{\alpha(\mathcal{C})} \sum_{e \in E} c_e(f_e) f_e + \sum_{e \in E} (f_e^* - f_e) c_e(f_e) \\ &\geqslant \frac{C(f)}{\alpha(\mathcal{C})} \end{aligned}$$

Az első egyenlőtlenség a fenti (4) egyenlőtlenség összege az éleken ($x = f_e^*$, $r = f_e$), a másodikhoz pedig a 2.2 tételt használtuk fel. Az egyenlőtlenséget átrendezve a bizonyítandó állítást kapjuk. □

Ez a tétel egyrészt egy nagyon kellemes felső korlátot ad az anarchia árára, egy függvényosztály felett, viszont ezzel azt is beláttuk, hogy nem-atomos játékoknál, az anarchia ára független a hálózattól és csak a költségfüggvényektől függ. Lássuk egy alkalmazását a tételnek.

2.4. Tétel. *Nem-atomos közlekedési játokékoknál $\mathcal{C} = \{ax + b : a, b \geqslant 0\}$ mellett az anarchia ára 4/3.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $r = 1$. Ekkor a Pigou korlát:

$$\frac{a+b}{x(ax+b) + (1-x)(a+b)} = \frac{a+b}{ax^2 - ax + a + b}$$

A kifejezést maximalizálni, a nevezőt minimalizálni kell. Ezt elemi számolásokkal, megkaphatjuk, hogy $x = 0.5$ esetén minimális, ezt beírva.

$$\alpha(\mathcal{C}) = \frac{a+b}{\frac{3}{4}a+b} = 1 + \frac{a}{3a+4b}$$

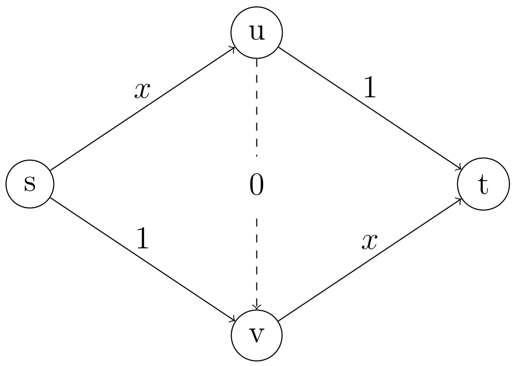
Jól látszik, hogy b növelésével csak csökken az érték, így $b = 0$, az anarchia ára pedig 4/3 $\square$

Be lehet látni hasonló módon, hogy konkáv költségföggvények esetén is 4/3 ez az érték.

Egyszerű függvényosztályokra a Pigou korlát jól működik, de amint megengedünk összetettebb függvényeket, amelyeken nehezen tudunk optimalizálni, rögtön problémákba ütközünk. Nem is kell olyan bonyolult függvényeket keresni. Legyen, $r = 1$, $c(x) = x^p$. Ekkor az eredeti példához hasonlóan egyensúly akkor van amikor mindenki az alsó élen megy és a költség ekkor 1, viszont, ha ϵ része a forgalomnak a felső utat választja, akkor a költség $\epsilon + (1-\epsilon)^{p+1}$, amit tart nullába ha epszilon tart nullába és p tart a végtelenbe. Így az anarchia ára tetszőlegesen nagy lehet a Pigou korlát pedig p növelésével tetszőlegesen nagy lehet.

2.3.2. Braess paradoxon

Nézzük a következő hálózatunkat.



Ha az ábrát elsőként az $u - v$ él nélkül vizsgáljuk, akkor egy egyszerű kétutas közlekedési hálózatot látunk. Optimális folyam, akkor van, ha a forgalom fele az egyik úton a msáik fel a másik úton megy. Ekkor mindkét út költsége 3/4-del lesz egyenlő, az összköltség 3/2. Mivel a két úton ugyanakkora a költség így senkinek nem éri meg váltani, tehát ekkor az optimális folyam egyben egy egyensúlyi folyam is. Az anarchia ára 1.

Most tekintsük a 0 költségű $u - v$ éllel együtt az ábránkat. Ekkor az $s - u - v - t$ út költsége sosem lesz több, mint ha az eddig 2 utunkat választottuk volna. Így önző nem kooperatív játékokban minden játékosnak ezt az utat kell választania. Így az összköltség 2 lesz, ráadásul senkinek nem éri meg változtatnia. Láttuk, hogy az $u - v$ él használata nélkül 3/2 a szociális költség minimum és ezt az új él nem vitte lejjebb. Ha csak ϵ része használja az új élet. Az összköltség $3/2 + \epsilon^2$-re nő. Így az új rendszerben az anarchia ára megnövekedett 4/3-ra.

Ezt a jelenséget, amikor egy úthálózathoz egy látszólagos javítással, itt például egy új út megnyitásával, szociális szempontból nem javítunk, sőt jelen esetben rosszabbá tesszük a helyzetet, Braess paradoxonnak nevezzük.

3. Dinamikus közlekedési játékok

Az eddigi modellekben a játékosok, mindig utakat választottak stratégiaként és későbbiekben nem tudtak az előre meghozott döntéseiken változtatni. Érdekes lenne azt vizsgálni, hogy mi változna, ha a játékosok időközben változtatni tudnának eredeti döntéseiken, mivel új információhoz jutottak és így más választások kedvezőbbnek tűnnek. A dinamikus közlekedési játékokban minden játékos minden körben egy élet választ, nem az egész utat. Így a játék fordulókból áll, ami során minden játékos egy élet választ ki és az éleken a játékosok számát dinamikusan mérik, így a játékosok alkalmazkodni tudnak más játékosok döntéseihez. Ebben a fejezetben újból atomos modelleket vizsgálunk, csak hálózati közlekedési játékokat, és ezeken belül is csak a szimmetrikus eseteket.

3.1. Dinamikus alapfogalmak

A játék ezúttal is egy irányított gráfon játszódik $G = (V, E)$, ahol minden játékos, s-ből (src,source) akar eljutni t-be (tgt, target). Az éleken monoton nem csökkenő függvények vannak, ezeket f-fel jelöljük (c mást fog jelölni). Feltesszük, hogy minden csúcsból elérhető t és t-ből csak egy hurokél indul rajta 0 költséggel. Ekkor a dinamikus NCG (network congestion games) $\Gamma = (G, n)$, ahol n a játékosok száma.

Jelölje: $[\![n]\!] = \{1, 2, .., n\}$. A dinamikus szemlélet miatt nagyon fontos, hogy minden kör végén ismerjük a játékosok aktuális helyzetét.

3.1. Definíció. *Egy konfiguráció a dinamikus hálózati közlekedési játékban egy leképezése a játékosok halmazának a gráfban elfoglalt pozíciójuk szerint.* $c : [\![n]\!] \to V$.

A kezdő konfiguráció amikor mindenki s-ben van a végső pedig amikor mindenki t-ben.

(G, n)-hez mindig tartozik egy úgynevezett állapotgráf, $\mathcal{M} = (C, T)$, ahol $C = V^{[\![n]\!]}$, az összes konfiguráció halmaza, $T \subseteq C \times \mathbb{N}^{[\![n]\!]} \times C$, élhalmaz, ahol a (c, w, c') eleme, akkor és csak akkor, ha létezik egy $\mathbf{e} = (e_i)_{i \in [\![n]\!]}$ élhalmaz E-ben, hogyha $e_i = (v_i, f_i, v_i')$ és $u_i = |\{j \in [\![n]\!] | e_j = e_i\}|$ esetén, $c(i) = v_i, c'(i) = v_i'$ és $w(i) = f_i(u_i)$. Szóval a c-ből c'-be váltás éle és az él költsége $cost_i(c, c') = w(i)$. Ez kevésbé formálisan azt jelenti, hogy azon a gráfon, ahol a csúcsok az összes konfiguráció, akkor van 2 csúcs között él, ha egy fordulóban az egyik konfigurációból a másikba juthatunk, a költség pedig a játékosok költségének a vektora a váltás esetén.

Két él (c, w, c') és (d, w', d') egymást követő, ha $c' = d$. Egy út pedig ilyen egymást követő élek sorozata, ami állhat egyetlen egy konfigurációból (triviális) is és lehet végtelen hosszú is. Az utak halmaza $\mathcal{P}$. Egy konkrét utat pedig ρ-val jelölünk, mert érdemes más jelölést használni egy absztrakt állapotgráfbeli útra, mint egy sima útra.

3.2. Definíció. *Minden úthoz, $\rho \in \mathcal{P}$, $\rho = (c_j, w_j, c'_j)_j$ és minden játékoshoz $i \in [\![n]\!]$ a költség 0, ha az út triviális, végtelen ha a játékos nem éri el a célt és végtelen hosszú az út, különben $cost_i(\rho) = \sum_{j=1}^{|\rho|-1} w_j(i)$. A szociális költség pedig $\sum_{i \in [\![n]\!]} cost_i(\rho)$.*

$\rho(j)(i)$ jelöli az i. játékos helyzetét a j. konfigurációban. Valamint a $\rho_{\leqslant j}$ a j-ig terjedő részút, valamint $\rho_{\geqslant j}$ a j utáni út.

Egy lépése az i. játékosnak a c konfigurációból az $e = (v, f, v') \in E$, ha $v = c(i)$. Egy mozgás vektor c-ből pedig egy vektor, ami a játékosok lépéseiből áll $\mathbf{e} = (e_i)_{i \in [\![n]\!]}$.

A dinamikus játékok struktúrájának a következő négyest értjük $\mathcal{S} = (C, T, M, U)$, ahol C és T már fent definiálva volt.

$M : C \times [\![n]\!] \to 2^E$, megadja az összes lehetséges lépését, bármely játékosnak, bármely konfigurációból.

$U : C \times E^{[\![n]\!]} \to T$ az átmenet függvény, ami minden konfigurációhoz, és minden mozgásvektorhoz, hogy $e_i \in M(c, i)$ és minden játékoshoz, hozzárendeli a váltást reprezentáló T-beli élet.

3.2. Dinamikus stratégiák

A dinamikus stratégiákat σ-val fogjuk jelölni.

3.3. Definíció. *Egy stratégiája az i. játékosnak $\mathcal{S}$-ben, $\sigma_i : \mathcal{P}([G, n], c) \to E$.*

Szóval egy stratégia minden véges úthoz egy élet rendel, úgy, hogy az út utolsó konfigurációjából az élen a játékos továbbléphet. Egy stratégiavektor: $\sigma = (\sigma_i)_{i \in [\![n]\!]}$. A stratégiák tere Σ a stratégiavektorok tere Σ^n.

Egy h részút után visszamaradó stratégia $\sigma^h = (\sigma_i^h)_{i \in [\![n]\!]}$, ahol $\sigma_i^h(h') = \sigma_i(h \cdot h')$, ahol $h \cdot h'$ a két út egymás után írása.

Egy σ stratégia kimenetele a c konfigurációból $\rho = (c_i, w_i, c_{i+1})_{i \geqslant 1}$, végtelen út amit a stratégiavektor futtatásából kapunk meg. Formálisan az egyetlen olyan végtelen út, hogy $U(c, \sigma(c)) = (c_1, w_1, c_2)$ és $\forall j \geqslant 2$ $U(c_j, \sigma(h')) = (c_j, w_j, c_{j+1})$, ahol $h' = ((c_1, w_1, c_2), .., (c_{j-1}, w_{j-1}, c_j))$.

Legyen a σ stratégiaprofil kimenetele $\rho = (t_j)_{j \geqslant 1}$, $t_j = (c_j, (w_j^i)_{i \in [\![n]\!]}, c_j')$. Azt mondjuk σ nyerő stratégia az i játékosnak, ha $\exists l$, hogy $c_l(i) = tgt$. A játékos költsége $cost_i(\sigma) = cost_i(\rho)$. A stratégiavektor sikeres, ha minden játékosnak sikeres ekkor $SocialCost(\sigma) = SocialCost(\rho)$.

3.4. Definíció. *Ha bármely két ρ, ρ' véges $\mathcal{M}$-beli k méretű útra igaz, hogy $\rho(j)(i) = \rho'(j)(i)$, $0 \leqslant j < k$, esetén $\sigma_i(\rho) = \sigma_i(\rho')$, akkor a σ_i stratégiát vak stratégiának nevezzük*

Ez azt jelenti, hogy az i játékos döntését nem befolyásolja, hogy a többi játékos eddig meghozott döntéseiben mit választottak. A vak stratégiák halmaza $\mathfrak{B}$

A stratégiavektorok és a költségfüggvények ismeretében, a legjobb válaszok, a Nash egyensúly és a szociálisan legjobb stratégiák definiálása ugyanúgy történik, mint az eddigiekben nem dinamikus esetben. Az újdonság, hogy most a stratégiák különféle alosztályai között kereshetünk Nash egyensúlyokat. Egy vak Nash egyensúly egy vak stratégia vektort jelent, ami azt jelenti, hogy a többi játékos költsége nő, ha egy másik vak stratégiára tér át.

3.2.1. Szociális optimum

A szociális optimum alatt, ezúttal is azt a stratégiaprofilt értjük, ami minimalizálja a játékosok költségeinek összegét. Dinamikus játékoknál ezt a mennyiséget, mint akármi mást is jóval összetettebb kiszámítani, a vizsgálatához a következő absztrakt súlyozott hálózatot tekintjük.

Minden konfigurációhoz rendelünk egy másik úgynevezett absztrakt konfigurációt $\bar{c} \in [\![n]\!]^V$, ahol $\bar{c} = |\{i \in [\![n]\!] : c(i) = v\}|$.

Minden (G, n) játéknak megfelel egy súlyozott $\mathfrak{p} = (A, B)$, ahol A az absztrakt konfigurációk halmaza, és (a, w, a') eleme $B \subseteq A \times \mathbb{N} \times A$ pontosan akkor, ha van egy leképezés $b : E \to [\![n]\!]$, ami teljesíti a következőket: $\sum_{e \in E} b(e) = n$ és $\forall v \in V$

$$a(v) = \sum_{e=(v,f,v')} b(e), \qquad w = \sum_{e=(v,f,v')} b(e) \times f(b(e)), \qquad a'(v) = \sum_{e=(v,f,v')} b(e)$$

Hasonlóan ebben a gráfban is az utak, stratégiáknak felelnek meg. A költsége ezeknek az absztrakt utaknak pedig az összege a súlyoknak az éleken.

3.1. Tétel. *Minden $w \in \mathbb{N}$-re létezik egy absztrakt út $\mathcal{M}$-ben pontosan akkor, ha létezik egy absztrakt út $\mathfrak{p}$-ben w költséggel*

A tétel következménye, hogy amikor a szociális optimumot jelentő stratégiát keressük, akkor azt nem kell a játék struktúrában keresni, elég ebben az absztrakt gráfban egy legkisebb költségű $\bar{c}_{src} - \bar{c}_{tgt}$ utat keresni, és az út költsége megegyezik a minimális szociális költséggel.

Legrövidebb utat több különféle hatásos algoritmussal is tudunk keresni, viszont a gráf amiben dolgozunk az exponenciális méretű. Absztrakt konfigurációkból összesen $(n+1)^{|V|}$-en lehet és ez problémát jelent. Ehhez nyújt kis segítséget a következő tétel.

3.2. Tétel. *Létezik egy legrövidebb út $\mathfrak{p}$-ben, amelynek maximum $n \cdot |V|$ a mérete.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy minden ρ $\mathcal{M}$-beli úthoz, amelyben az első $|V|$ lépés után senki nem érte el a célt, létezik egy ρ' út amelynek nem nagyobb a szociális költsége és legalább egy játékos elérte a célt. Nyilván, ha $\mathcal{M}$-ben ez igaz, akkor $\mathfrak{p}$-ben is az lesz.

Ehhez először minden G-beli csúcshoz hozzárendeljük az $opt(v)$ értéket, ami azt adja vissza, hogy hány élből áll a legkisebb költségű út tgt-be, ha az éleken a költség, annyi mintha egy játékos használná az éleket. Nyilván $opt(v)$, 0 és $|V| - 1$ közé fog esni, és csak akkor lesz 0, ha $v = tgt$.

Legyen H egy $n \times |V|$ méretű táblázat, ahol $H(i,j) = j + opt(\rho(j)(i))$. Ekkor minden i-re $H(i,1) \leqslant |V|$ és $H(i,|V|) \geqslant |V| + 1$, mivel senki sem ért célba az első $|V|$ lépésben. Tehát $\exists 1 \leqslant j_0 \leqslant |V|$ oszlop amelyben van táblázatbeli elem $|V|$-nél kisebb értékkel és ezen indexek között legyen j_0 a legnagyobb.

Válasszuk i_0-t, hogy $H(j_0, i_0) \leqslant |V|$, ρ'-t úgy kapjuk meg, hogy az i_0 játékos útját követjük ρ-ban j_0-ig utána pedig az optimális útvonalon megyünk. Ekkor az

i_0 játékos eléri a célt $H(i_0, j_0)$ lépésben és senki más nem használja az optimális részbeli éleket, mivel akkor lenne egy j_1 index, hogy $j_1 > j_0$ és lenne hozzá i_1, hogy $H(i_1, j_1) \leqslant |V|$. Így i_0 játékos költsége biztos nem növekedett, és a többi játékosnak is esetleg csökkkeni tudtak a költségei.

Végül válasszunk egy legrövidebb $\mathfrak{p}$-beli útat, ennek megfelel egy ρ út $\mathcal{M}$-ben és ehhez a fent leírt módon találhatunk egy ρ' utat, aminek nem növekszik a költsége és lesz olyan játékos, aki eléri a célt legtöbb $|V|$ lépés után. Ezt az érvelést használjuk rekurzívan a célba nem ért játékosokra és így a lépésszám maxuimum $n \cdot |V|$ $\square$

3.2.2. Nash egyensúly

A vak Nash egyensúly, valamint a vak stratégiahalmazok már említésre kerültek a dolgozat korábbi részeiben. A vak stratégiák tulajdonképpen azok a stratégiák amikkel eddig dolgoztunk a klasszikus modelljeinkben. Így annak a bizonyítása, hogy létezik minden játékban vak Nash egyensúly és az algoritmus amivel megtaláljuk azt rendkívül hasonló, mint az előző fejezetekben. Itt is egy potenciálfüggvényes érvelésre támaszkodunk. Atomos dinamikus közlekedési játékokra a következő potenciálfüggvényt szokás definiálni.

$$\Phi(\sigma) = \sum_{j=1}^{N_\sigma} \sum_{e \in E} \sum_{i=1}^{n_e(\sigma,j)} f_e(i)$$

Itt σ egy tetszőleges vak stratégiavektor N_σ pedig a leghosszabb út amit a σ stratégia bejár, $n_e(\sigma, j)$ pedig a játékosok száma akik az e élet, használják a j. lépésben a stratégiában. Ezzel a függvénnyel a legjobb válasz iterációval bizonyos idő után biztosan Nash egyensúlyba kerülünk.

3.3. Tétel. *Dinamikus hálózati közlekedési játékoknál vak Nash egyensúly mindig létezik és ki tudjuk számolni pszeudopolinomiális időben.*

A tétel bizonyítása a [3] mukában benne van. Most meg kell mutatnunk, hogy a vak Nash egyensúlyok, általános értelemben vett Nash egyensúlyok.

3.4. Tétel. *Dinamikus NCG-kben a vak Nash egyensúlyok Nash egyensúlyok.*

Bizonyítás. Vegyünk egy tetszőleges vak stratégiaprofilt $\sigma = (\sigma_i)_{i\in[\![n]\!]}$. Tegyük fel, hogy az i. játékosnak van egy nem vak σ_i' stratégiája, hogy $cost_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) < cost_i(\sigma)$. Definiáljuk a σ_i'' stratégiát, mint az i játékos (σ_i', σ_{-i}) stratégia kimenetelében megtett útja. Ekkor a két stratégia vektor kimenetele megegyezik. Tehát ha egy vak állapot nem Nash egyensúly és az egyik játékosnak van dinamikus stratégiája alacsonyabb költséggel, akkor az új stratégiát választhatjuk vaknak. □

Vak Nash egyensúlyt kereséshez használhatjuk, a klasszikus közlekedési játékoknál használt legjobb válaszos algoritmust, mivel tulajdonképpen az, hogy a többi játékos választása nem befolyásolja a mi döntésünket, azt jelenti, hogy az elején kiválasztjuk az egész utat, mint stratégiát és később nem változtatunk rajta.

A vak Nash egyensúlyok viszont nem reálisak a dinamikus szemléletben, mivel elég egyszerűen tudunk olyan példát mutatni amelyben az összes vak Nash egyensúlynál létezik olcsóbb egyensúly, ami dinamikus stratégiákat használ, így például a stabilitás vagy az anarchia árának számolásakor nem elég csak a vak eseteket figyelembe venni.

Szertnénk egy olyan algoritmust kapni, amivel dinamikus Nash egyensúlyokat tudunk keresni. Vegyük a dinamikus közlekedési játékot, (G, n) és a hozzá tartozó játék struktúrát (S, T, M, U). Ha van lehetőség c-ből c'-be jutni, az i. játékos költsége a váltás során $cost_i(c, c')$, és jelölje $dev_i(c, c')$ azon konfigurációk halmazát amelyek az i játékos stratégiaváltása során elérhetők.

$$dev_i(c, c') = \{c'' \in C : c \to c'', \forall j \in [\![n]\!] - \{i\}, c''(j) = c'(j)\}$$

Továbbá jelölje $val_{i,c}$ a legnagyobb költséget, amit kaphat az i. játékos, ha a c konfigurációból lépve a többi játékos összedolgozik ellene.

3.5. Tétel. *A ρ út a (G, n) játékban egy Nash egyensúly kimenetele akkor és csakis akkor ha:*

$$\forall i \in [\![n]\!] \quad \forall 1 \leqslant l < |\rho| \quad \forall c \in dev_i(\rho(l), \rho(l+1)) \quad cost_i(\rho_{\geqslant l}) \leqslant val_{i,c} + cost_i(\rho(l), c)$$

Az intuició az, hogy ha a $cost_i(\rho_{\geqslant l})$ szuffix költsége több, mint $val_{i,c}+cost_i(\rho(l), c)$, akkor az i. játékosnak van egy profitálható változatása, a többi játékos választásától függetlenül, mivel $val_{i,c}$ a maximális büntetés amit kaphat. A tétel azt mutatja, ha nincs ilyen szuffix akkor létezik egy Nash egyensúly ρ kimenetellel. Tegyük fel, hogy találtunk egy utat, ami kielégíti ezt a feltételt. Konstruálunk ehhez az úthoz egy Nash egyensúlyt. Az ötlet az, hogy ha az egyik játékos változtat, a többi játékos együttesen megbüntetik a változtató játékos költségének a maximalizálásával.

Definiálunk egy büntetésfüggvényt. $P_\rho : \mathcal{P}(G, n) \to \{0, 1, 2, .., n\}$, ami nyomon követi melyik játékos változtatott. Legyen $h' = h + (c, w, c')$ út, ekkor:

$$\mathcal{P}_\rho(h') \begin{cases} 0 & h' \subseteq \rho \\ i & h \subseteq \rho \text{ és } h' \nsubseteq \rho \text{ és } i = min\{[\![n]\!] : c'(i) \neq \rho(|h| + 1)(i)\} \\ P_\rho(h) & \text{különben} \end{cases}$$

Ez a függvény számontartja, hogy melyik játékos választ különböző útvonalat, ρ-tól, ha egyszerre több játékos változtat elsőként, akkor a minimális indexűt választja ki, ha senki sem változtat a függvény érték nulla. Minden i-re és c-re jelölje $\sigma_{-i,c}$ az a stratégia vektor ami maximalizálja i költségét c-ből. Ebben jelölje a j. játékos stratégiáját. $\sigma_{-i,c,j}$. Most minden $h' = h + (c, w, c')$ úthoz definiáljuk a következő stratégiát.

$$\tau_i(h') = \begin{cases} (c'(i), w(i), c''(i)) & \text{ha } P_\rho(h') = 0,\ \rho(|h'| + 1) = (c', w', c'') \\ \text{tetszőleges} & \text{ha } P_\rho(h') = i \\ \sigma_{-j,c,i}(h') & \text{ha } P_\rho(h') = j,\ j \neq i \end{cases}$$

Az első sor azt biztosítja, hogy ha senki sem változtat, akkor maradjanak a játékosok ρ vonalán. A harmadik sor azt biztosítja, hogy változtatás után a többi játékos koalícióba álljon és maximalizálja a változtató játékos költségét, a második sor pedig a változtató játékos költsége. Most megmutatjuk, hogy ez a stratégiaprofil már dinamikus Nash egyensúly.

Mutassuk meg, hogy valóban Nash egyensúly. Válasszunk egy játékost $j \in [\![n]\!]$ és egy τ'_j stratégiát. ρ' jelölje a (τ_{-j}, τ'_j) kiemenetelét, és l azt az indexet, ahol ρ és

ρ' utoljára megegyezik.

$$\begin{aligned} cost_j((\tau_{-j}, \tau'_j)) &= cost_j(\rho_{\leqslant l}) + cost_j(\rho(l), \rho'(l+1)) + cost_j((\tau_{-j}, \tau_j), \rho'_{\leqslant l+1}) \\ &\geqslant cost_j(\rho_{\leqslant l}) + cost_j(\rho(l), \rho'(l+1)) + val_{j,\rho'(l+1)(j)} \\ &\geqslant cost_j((\tau_i)_{i \in [\![n]\!]}) \end{aligned}$$

Itt a második sor, a koalíció stratégiaváltása után a j játékos minimalizálja a költségét, és így visszakapjuk a τ stratégiavektort.

Szeretnénk adni egy algoritmust, dinamikus Nash egyensúlyok keresésére.

Minden $\gamma = (\gamma_i)_{i \in [\![n]\!]}$ valós vektorhoz definiáljuk a következő gráfot:

$$\begin{aligned} &\mathcal{G}_{((A),n),\vec{\gamma}} = (C', T'), \text{ ahol:} \\ &C' = C \times ([\![Y]\!] \cup \{0, \infty\})^n, \ Y = |V| \max_{e \in E} f_e(n) \\ &T' \subset C' \times \mathbf{N} \times C' \end{aligned}$$

Az Y a legnagyobb költség amit egy játékos, egy stratégiaválasztás során kaphat. A kezdő csúcs (c_{src}, ∞^n). Az élek halmaza $((c, b), z, (c', b')) \in T$ pontosan akkor, ha $(c, w, c') \in T$, $z = \vec{\gamma} \cdot w$ (itt $\cdot$ a skaláris szorzat) és minden $i \in [\![n]\!]$-re

$$b'_i = \min(b_i - w_i, \min_{c'' \in dev_i(c(i), c'(i))} cost_i(c, c'') + val_{i,c''} - w_i)$$

Vegyük észre, hogy b'_i a definiciója szerint nem lehet negatív, így ha $((c, b), z, (c', b'))$ valamely i-re negatív akkor ez az él nincs a gráfban.

A $\mathcal{G}_{(A,n),\vec{\gamma}}$ mérete duplán exponenciális, mivel (C, T) gráf már exponenciális volt, míg az Y mérete miatt mégegyszer exponenciális, így ebben a gráfban maximum elméleti szinten tudunk következtetéseket levonni, alkalmazható algoritmust ezen az úton nem fogunk találni, viszont egy véges algoritmus létezését még beláthatjuk.

Bármely ρ út ebben a gráfban aminek az egyik csúcsa (c, b), ha egy Nash egyensúlyt reprezentál, akkor minden játékosnak nem lehet nagyobb a költsége, mint b_i az út hátralévő részében. A minimumos képletben a második tag az amire az i. játékos minimalizálhatja a költségét, ha a többiek a lehető legrosszabb stratégiákat választják ellene. b'_i definíciója, hogy az előző b_i értéket frissítjük, az új w_i-vel és a potenciális változtatások őt érintő miniumum költségével. Ha az úton b_i negatív lesz az azt jelenti, hogy volt egy olyan pont az úton, amikor volt egy jobb stratégiája attól függetlenül, hogy a többi játékos mit választott, vagyis a mostani út nem lehet egy Nash egyensúly kimenetele. Ezért leszűkítjük $\mathcal{G}_{(A,n),\vec{\gamma}}$ terét nem negatív b_i értékekre.

3.6. Tétel. *Egy dinamikus közlekedési játékra* (G, n) *és a* $\vec{\gamma}$ *vektorra a költsége a legrövidebb útnak* (c_{src}, ∞^n) *állapotból valamely* (c_{tgt}, b) *állapotba* $\mathcal{G}_{(A,n),\vec{\gamma}}$*-ben az a költsége a* $\vec{\gamma}$ *minimális Nash egyensúlynak.*

Eddig arról nem esett szó, hogy mit reprezentál a γ vektor az egész modellben. De most láthatjuk, hogy a γ különböző változtatásaival más Nash egyensúlyokat kaphatunk meg. Például, ha minden i-re $\gamma_i = 1$, akkor a minimális költségű Nash egyensúlyt kaphatjuk meg, ha $\gamma_i = -1$ minden i-re akkor peddig a legrosszabb Nash egyensúlyt kapjuk meg, ami elméleti szinten nagy segítség, ha meg akarjuk kapni az anarchia vagy a stabilitás árát. A 3.6 tétel bizonyítása nehéz, hosszú és a dolgozat célján mindenképp túlmutat, de a [3] munkában benne van.

4. Dinamikus folyamok

A dinamikus folyamok, a dinamikus atomos játékoknak a nem-atomos megfelelői.

Az előző fejezetben tárgyalt modelleinket az tette dinamikussá, hogy a játékosok több körben, a többi játékos addigi döntéseitől függően dinamikusan választottak stratégiákat. A második fejezetben tárgyalt nem-atomos modelleknél viszont az volt a legfontosabb tulajdonsága a modellnek, hogy egy játékosnak a változtatása elhanyagolható változás, és ezért az eddigi módon nem tudunk dinamikus stratégiákról beszélni, viszont, magát a hálózatot, amin a játék zajlik időfüggővé tehetjük: Minden élhez hozzárendelünk egy tranzit átutazási időt, ami azt mutatja, hogy egy részecskének (játékosnak) szükséges, hogy áthaladjon az élen.

Ez a felfogás azért is jó, mert sokkal valóságszerűbbé teszi a dinamikus folyamokat, mint közlekedést vagy telekommunikációs hálózatokat modellező eszközt a nem-atomos felfogásban és motiválja a vizsgálatát.

Ebben a fejezetben a dinamikus folyamoknak csak azt az esetét vizsgáljuk, amikor minden részecske ugyanabból a csúcsból indul és ugyanoda szeretne eljutni.

4.1. Időfüggő folyamok

A klasszikus nem-atomos játékok során használt jelölések és definíciók ebben a fejezetben is azonosak, vagy amikor különbség tapasztalható azt jelölni fogom. Így a költségfüggvények az utakon és az éleken úgyanúgy vannak definiálva, valamint a stratégiáknak megfelelő folyamok az utakon és ezeknek az élekre megszorított verziója is.

A folyamok hálózatát a $G = (V, E)$ gráf fogja jelölni s, mint forrás, t mint nyelő. Minden élre definiálunk egy átjutási időt (tranzitot) $\tau : E \to \mathbb{R}^+$ és egy kapacitás függvényt, $\nu : E \to \mathbb{R}^+$.

A klasszikus esetben egy stratégiát $(f_p)_{p \in \mathcal{P}}$ az utak segítségével tudtuk megadni. Vettük az $s - t$ utak halmazát és minden úthoz hozzárendeltük, hogy a folyam mennyiségének r-nek mekkkora része használja az adott utat, majd mivel az utak száma rettenetesen sok lehet, az élekre nézve is megadtuk ezt a mennyiséget. Időfüggő folyamok esetén, az éleken θ időpontban befolyó folyam a következő

4.1. Definíció. *Legyen $f = (f_e)_{e \in E}$, egy lokálisan integrálható, korlátos függvénycsalád, $f_e : \mathbb{R}^+ \to [0, r]$. Ekkor f-et a folyam függvény az éleken.*

Statikus esetben, hogy folyamokról beszélni tudjunk, teljesül a tömegmegmaradási szabály. Ez az időfüggő esetben is igaznak, kell, hogy legyen és a következőképpen néz ki:
$\forall v \in V \backslash \{s, t\}$, majdnem minden $\theta \in [0, \infty]$

$$\sum_{e \in \delta_v^-} f_e(\theta - \tau_e) = \sum_{e \in \delta_v^+} f_e(\theta)$$

Az egyenlet bal odalán a θ pillanatban e élet elhagyó részecskék mennyisége van, a jobb oldal pedig az ugyanabban a pillanatban belépőkét. Ha $\theta < \tau_e$ az értéket mindkét felén nullának definiáljuk.

4.2. Definíció. *A folyam értéke a θ időpontban a következő:*

$$|f|(\theta) = \sum_{e \in \delta_t^-} \int_0^{\theta - \tau_e} f_e(\xi) d\xi - \sum_{e \in \delta_t^+} \int_0^{\theta} f_e(\xi) d\xi$$

Az f folyam megengedett, ha majdnem minden θ időpillanatban. $f_e(\theta) \leqslant \nu_e$, $\forall e \in E$.

Ezekben a modellekben több hasonlóan releváns kérdésre kereshetjük a választ az igényeink szerint. Az egyik ilyen kérdés, hogy adott T idő alatt, mi a legnagyobb mennyiségű folyam, amit célba juttathatunk. Egy másik probléma, ennek a duálisa, amikor az a kérdés, hogy egy adott mennyiségű folyamot, hogyan tudunk a leggyorsabban célba juttatni, és mennyi időt vesz ez igénybe. Ez a modell általánosságban beszél a dinamikus folyamelméletről, a következő fejezetben egy megvalósításról lesz szó.

4.2. Determinisztikus sor modell

Ebben a fejezetben már egy konkrét játékelméleti modellt fogunk bemutatni. Feltételezzük, hogy mindenki s-ből t-be szeretne eljutni, és, hogy a gráf minden csúcsából t elérhető.

A forrásból minden pillanatban konstans $r > 0$ mennyiség folyik ki. Az éleken vizsgáljuk a be- és kifolyó folyamnak a mennyiségét. Ezeket a $f_e = (f_e^+, f_e^-)$ párral jelöljük, hogy ne kelljen a tranzit idő miatti késleltetést mindig figyelembe venni, és mert ebben a modellben nem is lesz igaz, hogy a θ pillanatban az e-élről ugyanannyi távozik. mint amennyi $\theta - \tau$ pillanatba befolyt.

4.3. Definíció. *Az e élbe be- és kifolyó összes folyam következő:*

$$F_e^+(\theta) = \int_0^\theta f_e^+(\xi)d\xi, \text{ és } F_e^-(\theta) = \int_0^\theta f_e^-(\xi)d\xi$$

A kumulatív és a sima folyamot is nullának definiáljuk ha $\theta < 0$. A folyammegmaradási szabályt ebben a modellben a következő két tulajdonság foglalja magában.

4.4. Definíció. *Azt mondjuk $f = (f_e^+, f_e^-)_{e \in E}$ egy időfüggő folyam, ha minden élen*

$$F_e^-(\theta + \tau_e) \leqslant F_e^+(\theta) \quad \forall \theta \in [0, \infty)$$

és minden $v \in V \backslash \{t\}$-re

$$\sum_{e \in \delta_v^+} f_e^+(\theta) - \sum_{e \in \delta_v^-} f_e^-(\theta) = \begin{cases} 0 & ha\ v \in V \backslash \{s, t\} \\ r & ha\ v = s \end{cases}$$

Az első egyenlőtlenség valójában csak azt jelzi, hogy magán az élen nem keletkezhet a semmiből folyam, a másik pedig klasszikus értelemben a folyammegmaradási szabály, ami egyben biztosítja, hogy a folyamatos befolyási ráta r.

Minden élnek van egy befogadóképessége, ami a kapacitás, amennyiben több részecske szeretne élet változtatni, mint amennyit a kapacitás megenged, az élek végén egy sor alakul ki, valamint ebben a modellben a részecskéknek az előzés nem megvalósítható, aki előbb kezdte az előbb is fog célba érni (mert mindenki a számára legjobb stratégiát választja) erre utalnak a névben a determinisztikus és a sor szavak.

4.5. Definíció. *Az $e \in E$ él sorában várakozó folyam mennyisége a θ időpontban*

$$z_e(\theta) = F_e^+(\theta - \tau_e) - F_e^-(\theta)$$

Az intuíciónk azt sejtetné, hogy az élek végén egy szakaszon torlódás alakul ki, de ettől most eltekintünk, a várakozási sornak nincs külön fizikai dimenziója és egy pontnak tekintjük.

4.6. Definíció. *Azt mondjuk egy f időfüggő folyam megenegedett, ha az élek nem lépik túl a kapacitást.*

$$f_e^-(\theta) = \begin{cases} \nu_e & \textit{ha } z_e(\theta) > 0 \\ \min\{f_e^+(\theta - \tau_e), \nu_e\} & \textit{különben} \end{cases}$$

Mivel a részecskéknek általában várakozniuk kell a sorokban, amikbe bekerülnek, így a következő fogalmat érdemes definiálni.

4.7. Definíció. *Egy tetszőleges részecske várakozás ideje, aki θ időben lépett be a τ_e tranzitidejű élre:*

$$q_e(\theta) = \frac{z_e(\theta + \tau_e)}{\nu_e}$$

Mivel a részecske θ időpontban érkezett meg, az él végén lévő sorba csak $\theta + \tau_e$ pillanatban érkezik meg. Így a várakozási periódusa $[\theta + \tau_e, \theta + \tau_e + q_e(\theta)]$

4.8. Definíció. *A részecske e élből való kilépési ideje, ha τ pillanatban érkezett meg:*

$$T_e(\theta) = \theta + \tau_e + q_e(\theta)$$

Mivel ebben rendszerben egyik részecske nem tudja megelőzni a másikat. A θ időpillanatban e élre összesen befolyt folyam megegyezik az e élről összesen kifolyt folyammal, a $T_e(\theta)$ pillanatban. A fenti fogalmak közötti összefüggéseket és azonosságokat a következő lemma foglalja össze.

4.1. Lemma. *Egy megengedett időfüggő folyamra $\forall e \in E, v \in V, \theta \in [0, \infty)$ igazak a következők:*

1. $q_e(\theta) > 0 \iff z_e(\theta + \tau_e) > 0$
2. $z_e(\theta + \tau_e + \xi) > 0, \forall \xi \in [0, q_e(\theta))$
3. $F_e^+(\theta) = F_e^-(T_e(\theta))$
4. *Ha* $\theta_1 < \theta_2$, $F_e^+(\theta_2) - F_e^+(\theta_1) = 0$ *és* $z_e(\theta_2 + \tau_e) > 0$ *akkor* $T_e(\theta_1) = T_e(\theta_2)$
5. *A T_e függvények monoton növekedők.*
6. $F_e^+, F_e^-, z_e, q_e, T_e$ *függvények majdnem mindehol differenciálhatók*

A legtöbb állítás közvetlenül a definíciókból következik, a bizonyítás technikai és további fontos információkat nem tudunk meg belőle.

4.3. Időfüggő Nash folyamok

Ebben a szekcióban az eddigiekhez hasonlóan megpróbáljuk definiálni az egyensúlyi állapotot. Minden részecske egy játékos, aki minimalizálni akarja az utazási idejét. A dinamikus nézőpont miatt, egy részecske a hálózatba nem rögtön lép be.

A ϕ részecske egy rögzített f folyamra ($\phi \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$) a, $T_s(\phi) = \frac{\phi}{r}$ időpontba érkezik. A többi csúcsra ezt a következőképpen definiáljuk

4.9. Definíció. *A megérkezési idő függvény $T_P : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to [0, \infty)$ egy adott $s - v$ útra, a részecskék halmazát képezi abba az időpontba, amikor a részecske megérkezik v-be a $P = (e_1, e_2, .., e_k)$ utat követve.*

$$T_p(\phi) = T_{e_k} \circ T_{e_{k-1}} \circ ... \circ T_{e_1} \circ T_s(\phi)$$

4.10. Definíció. *A leghamarabb megérkezési idő, pedig minden részecskére és adott csúcsra a megérkezési időt minimalizálja.*

$$l_v(\phi) = \min_{P \in \mathcal{P}_v} T_p(\phi)$$

Nyilván adott T függvényekhez a leghamarabbi utat effektíven ki tudjuk számolni egy Dijkstra vagy más legrövidebb útkereső algoritmussal. Mivel l_v monoton növekedő függvények minimuma így majdnem mindenhol differenciálható.

Egy egyensúlyban minden részecske a leggyorsabb úton akar eljutni a célba így ezek a részecskék csak olyan utakon haladnak, amiken a leggyorsabban oda tudnak érni. Egy $e = uv$ élet ϕ aktívnak nevezünk, ha $l_v(\phi) = T_e(l_u(\phi))$. Ilyen éleket használva jut el a leggyorsabban a célba.

$$E'_\phi = \{e = uv \in E : l_v(\phi) = T_e(l_u(\phi))\}$$

A $G'_\phi = (V, E'_\phi)$ gráf az aktív élek halmaza, ϕ-nek.

4.11. Definíció. *Egy megengedett időfüggő f folyam, időfüggő Nash folyam, vagy dinamikus egyensúly, ha a következő feltételt teljesíti.*

$$f_e^+(\theta) > 0 \implies \theta \in l_u(\Phi_e) \quad \forall e = uv \in E, \theta \in [0, \infty),$$

ahol, $\Phi_e = \{\phi \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} : e \in E'_\phi\}$, a részecskék azon halmaza, amelyekre e aktív.

Ez a definíció azt jelenti, hogy minden részecske csak a neki aktuálisan aktív utakat használja, és $l_t(\phi)$ idő alatt befejezi az útját, feltéve, hogy az összes előző részecske útja le van fixálva.

A következő tétel a Nash folyamok karakterizációja.

4.1. Tétel. *Legyen f egy megengedett időfüggő folyam, $\Phi_e = \{\phi \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} : e \in E'_\phi\}$, valamint $\Phi_e^c = \mathbb{R}_{\geqslant 0} \backslash \Phi_e$, akkor a következő állítások ekvivalensek:*

1. *f egy időfüggő Nash folyam*
2. *$\forall e = uv$, igaz hogy $f_e^+(\theta) = 0$ majdnem minden $\theta \in l_u(\Phi_e^c)$*
3. *$F_e^+(l_u(\phi)) = F_e^-(l_v(\phi))$ igaz, $\forall uv \in E$, és ϕ részecskére.*
4. *Minden uv élre és majdnem minden $\phi \in \Phi_e^c$ igaz, hogy $f_e^+(l_u(\phi)) \cdot l'_u(\phi) = 0$*
5. *$\forall \phi$, és $e = uv \in E$ igaz: Ha $F_e^+(l_u(\phi) - \epsilon) < F_e^+(l_u(\phi))$ $\forall \epsilon > 0$ akkor $e \in E'_\phi$*

Ezen karakterizációk közül a legfontosabb a 3. ugyanis valahogy ennek a segítségével szeretnénk konstruálni egy ilyen Nash folyamot.

4.3.1. Nash folyamok konstrukciója

4.12. Definíció. *Azon éleket, amelyeken a ϕ részecskének várakoznia kell, újraállított éleknek nevezzük*

$$E_\phi^* = \{e = uv \in E : q_e(l_u(\phi)) > 0\}$$

Belátható, hogy torlódás akkor alakul csak ki egy élen, ha az aktív. Mivel, ha nem lenne aktív akkor a sor utolsó részecskéinek sem lett volna aktív ez, pedig a Nash tulajdonságot megszegi. Jelölje $(x_e)_{e\in E}$ a következőt.

$$x_e(\phi) = F_e^+(l_u(\phi)) = F_e^-(l_v(\phi))$$

Ekkor az $(x'_e)_{e\in E}$ egy statikus egy nagyságú folyam.

$$\sum_{e\in\delta_v^+} x_e(\phi) - \sum_{e\in\delta_v^-} x_e(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{ha } v \in V\backslash\{s,t\} \\ \phi & \text{ha } v = s \end{cases}$$

Mivel f folyam volt, és ezeket a folyamokat ugyanaddig integráljuk. a 4.1 tétel 3. része miatt. Ha deriváljuk x értékeket, ϕ szerint, akkor is marad minden csúcson nulla az érték, kivéve s-t ahol 1 lesz.

Minden időfüggő Nash folyamban a stratégiák halmaza egy speciális struktúrát követ, amit úgy hívunk, hogy vékony folyamok újraállítással. Ezek statikus $s-t$ folyamok, a részecske aktív éleinek gráfján, valamint egy valós értékű címkével az éleken.

Legyen $G' = (V, E')$ egy aciklikus részgráfja G-nek és $E^* \subseteq E'$

4.13. Definíció. *Egy statikus $s-t$ folyamot $(x'_e)_{e\in E}$ egy értékkel és $(l'_v)_{v\in V}$ címkékkel vékony folyamnak nevezünk újraállítva E^*-on, ha:*

$$
\begin{aligned}
l'_s &= \frac{1}{r} \\
l'_v &= \min_{e=uv\in E'} \rho_e(l'_u, x'_e) \quad \forall v \in V\backslash\{s\} \\
l'_v &= \rho_e(l'_u, x'_e) \quad \forall e = uv \in E' \text{ ,ahol } x'_e > 0
\end{aligned}
$$

ahol ρ a következő

$$
\rho_e(l'_u, x'_e) = \begin{cases} \frac{x'_e}{\nu_e} & ha\ e = uv \in E^* \\ \max\{l'_u, \frac{x'_e}{\nu_e}\} & ha\ e = uv \in E'\backslash E^* \end{cases}
$$

Ez a fogalom elsőnek bonyolultnak és szükségtelennek tűnhet, de ezekre a vékony folyamokra lesz szükségünk, hogy Nash folyamot konstruáljunk, és ahogy azt a jelölésekből sejteni lehet kiderül, hogy nem is ismeretlen számunkra ez a fogalom.

4.2. Tétel. *Egy időfüggő Nash folyam $f = (f_e^+, f_e^-)_{e\in E}$ $(x'_e)_{e\in E'_\phi}$ deriváltjai az $(l'_v(\phi))_{v\in V}$ címkékkel egy vékony folyamot alkotnak, ahol az újraállított élek E^*_ϕ lesznek, az aktív élek alkotta gráfon, minden részecskére.*

Ennek a tételnek valójában a fordítottját szeretnénk használni ugyanis ekkor, ha ismerjük az (x'_e) és a l'_v értékeket minden részecskére, akkor abból már meg tudjuk kapni a folyamértékeket. Az elméleti teljességhez még hozzátartozik a következő 2 tétel is, amelyeknek a bizonyítását a [5] jegyzetben megtaláljuk.

4.3. Tétel. *Vegyünk egy aciklikus $G' = (V, E')$ gráfot, s, t csúcsokkal és kapacitásokkal, és egy $E^* \subseteq E'$ élhalmazt. Ha minden csúcs elérhető s-ből akkor létezik egy vékony folyam $((x'_e)_{e \in E}, (l_v)_{v \in V})$ újraállítva E^*-on.*

4.4. Tétel. *A csúcs címkéket a vékony folyamokban egyértelműen meghatározza a hálózat.*

A konstrukcióra az ötlet a következő. Kiindulunk egy kisebb összemennyiségű folyamból és azt bővítsük, úgy hogy dinamikus Nash folyam maradjon, amíg el nem érjük a kívánt folyammennyiséget. Tegyük fel, hogy adott egy $[0, \phi)$ mennyiségű dinamikus Nash folyam. Ekkor ezeknek a részecskéknek jól definiáltak az $(l_v)_{v \in V}$ címkéi, amelyekből megkpahatjuk minden részecskére az aktív és a újraállított élek halmazát $(G'_\phi = (V, E'_\phi), E^*_\phi)$.

Ki akarjuk terjeszteni a címkéinket egy $\alpha > 0$ valós számig. Minen $v \in V, e \in E$-re és $\xi \in [0, \alpha]$:

$$l_v(\phi + \xi) = l_v(\phi) + \xi \cdot l'_v \quad \text{és} \quad x_e(\phi) = x_e(\phi) + \xi \cdot x'_e$$

Ha ez megvan már bőviteni tudjuk a ki- és befolyam függvényeinket minden $e = uv$ élen.

$$f_e^+ = \frac{x'_e}{l'_u} \quad \theta \in [l_u(\phi), l_u(\phi + \alpha)) \text{ és } f_e^-(\theta) = \frac{x'_e}{l'_v} \quad \theta \in [l_v(\phi), l_v(\phi + \alpha))$$

Ezt a folyamatot α-bővítésnek nevezzük. Mi a legnagyobb α amíg a Nash tulajdonság megmarad. Nézzük a következő 2 feltételt.

$$\begin{aligned} l_v(\phi) - l_u(\phi) + \alpha(l'_v - l'_u) &\geqslant \tau_e \quad \forall e = uv \in E^* \\ l_v(\phi) - l_u(\phi) + \alpha(l'_v - l'_u) &\leqslant \tau_e \quad \forall e = uv \in E \backslash E' \end{aligned} \tag{5}$$

Az első egyenlőtlenség azért felelős, hogy egy részecske se érjen előbb a célba, mint a tranzit idő, a második pedig azért, hogy a nem aktív éleket a részecskék ne használják a bővítésben, minden alkalommal, amikor az egyik feltétel sérül, újra kell számolni az egész vékony folyamot az újraállításokkal, mert vagy egy nem aktív él aktívvá vált, vagy egy újraállított él elvesztette a várakozási sorát és kikerült E^*-ból.

4.2. Lemma. *Az α bővítések megengedett időfüggő folyamok lesznek és a kiterjesztettek címkék megegyeznek a leghamarabb megérkezési idővel az új részecskékkel.*

4.5. Tétel. *Egy adott időfüggő Nash folyamból* $f = (f_e^+, f_e^-)_{e\in E}$ $[0,\phi)$*-re és* $\alpha > 0$*-ra, a (6)-os feltételek teljesülése esetén egy* α *bővítés időfüggő Nash folyamot ad* $[0,\phi+\alpha)$*-ra.*

Bizonyítás. Mivel Nash folyamból indulunk $F_e^+(l_u(x)) = F_e^-(l_v(x))$ minden $x \in [0,\phi)$-re tehát $\xi \in [0,\alpha)$ esetén

$$F_e^+(l_u(\phi+\xi)) = F_e^+(l_u(\phi)) + \frac{x'_e}{l'_u}\cdot\xi\cdot l'_u = F_e^-(l_v(\phi)) + \frac{x'_e}{l'_v}\cdot\xi\cdot l'_v = F_e^-(l_v(\phi+\xi))$$

A 4.2-es lemma és a 4.1-es tétel szerint ekkor a bővítés egy dinamikus Nash folyamot ad. □

A teljesség kedvéért még meg kell jegyezni, hogy dinamikus Nash folyam minden ϕ-re létezik és ezzel a módszerrel megtaláljuk azt, viszont a módszer gyorsaságát és effektívségét nem minden esetben tudjuk garantálni. Ennek a bizonyítása bonyolult és meghaladja a dolgozat szintjét, lásd a [5] munkában.

Hivatkozások

[1] Dimitris Fotakis. *A selective tour through congestion games.* National Technical University of Athens, 15780 Athens, Greece.

[2] Nicolas Wagner Frédéric Meunier. *Equilibrium Results for Dynamic Congestion Games.*

[3] Suman Sadhukhan Nathalie Bertrand, Nicolas Markey and Ocan Sankur. *Dynamic network congestion games.* Univ Rennes, Inria, CNRS, IRISA, France.

[4] Tim Roughgarden. *Selfish routing and the price of anarchy.* Department of computer science, Stanford university, 2006.

[5] Leon Sering. *Nash flows over time.* Berlin 2020.

[6] Papp Júlia Végh László, Király Tamás. *Játékelmélet jegyzet.*

[7] Frank András és Király Tamás. *Operációkutatás jegyzet.* Budapest 2013.

NYILATKOZAT

Név: Kratok Gyula

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: GWPGIH

Szakdolgozat címe:
Közlekedési Játékok

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2023. 06. 04.

a hallgató aláírása