Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Matematikai Intézet

Igazságos tortaosztási feladat és változatai

SZAKDOLGOZAT

Szerző:

Takács Lili

matematika BSc

alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Cseh Ágnes

tudományos főmunkatárs

KRTK-KTI

Belső konzulens:

Bérczi-Kovács Erika

adjunktus

Operációkutatási Tanszék

Budapest, 2023

NYILATKOZAT

Név: Takács Lili

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika Bsc

NEPTUN azonosító: O4GLBV

Szakdolgozat címe:

Igazságos tortaosztási feladat és változatai

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2023. 05. 23.

Takács Lili

a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt köszönettel tartozom témavezetőmnek, Cseh Ágnesnek, aki megismertetett a témával, ellátott releváns forrásokkal, valamint számtalan hasznos észrevételével és ötletével segítette a dolgozat létrejöttét. Együttműködésünk nem jöhetett volna létre Bérczi-Kovács Erika nélkül, köszönöm az adminisztrációban nyújtott segítségét és bíztató szavait.

Szeretném kifejezni hálámat egyetemi oktatóimnak, illetve középiskolai tanáraimnak, akik tudásuk átadása mellett megszerettették velem a matematikát és a tanulás élményét.

Nem utolsósorban köszönöm családomnak és barátomnak az esztétikai, illetve nyelvtani meglátásokat a szakdolgozatommal kapcsolatban. Támogatásukra és szeretetükre tanulmányaim során mindvégig számíthattam.

Előszó

Hogyan osszunk el igazságosan egy tortát? Két személy esetén mindenki ismeri az „egyik felez, másik választ" módszert, mellyel garantáljuk, hogy mindenki legalább a tárgy felét megkapja. Sőt, ez az eljárás akkor is használható, amikor a játékosok más-más véleménnyel vannak a torta egyes részeiről. Az Ószövetségben így osztotta el Ábrahám és Lót Jordánt és Kánaánt, továbbá a mai napig ezt az eljárást kell alkalmazni a Nemzetközi Tengerfenék Kiaknázási Egyezmény [21] szerint abban az esetben, hogyha egy fejlett ország bányászni szeretne a tengerfenéken. A hasznosítani kívánt területet ketté kell osztani, és egy, a fejlődő országok érdekeit szem előtt tartó szervezet kiválasztja azt a részt, amelyet érintetlenül kell hagyniuk. Steinhaus a II. világháború miatt bujkálásra kényszerült, ezalatt kezdett el a több személyre való általánosításon dolgozni. Tanítványai által meg is született az első ezt megvalósító eljárás, ezzel egyidejűleg pedig egy új kutatási terület.

A torta csak egy metafora, beszélhetnénk földterület, örökség, műsoridő, számítási erőforrás elosztásáról is. És mi a helyzet, akkor hogyha a ház körüli teendőket kell felosztanunk a családtagok között, vagy esetleg a klímaváltozás megfékezésével kapcsolatos költségeket a világ országai között? Ezekben az esetekben az osztozkodás tárgya nemkívánatos, a részvevők minél kevesebb részt szeretnének magukénak tudni. Rögtön adódik egy harmadik feladat is, a vegyesen jó és rossz alaphalmaz elosztása: egy finom torta, amelynek egy része odaégett, adósságot is tartalmazó örökség, esetleg házkörüli teendők, ahol valamely családtag hobbija a kertészkedés.

Az igazságos elosztások elmélete ma is aktívan kutatott terület a közgazdaságtanon, számítás- és politikatudományon belül, ez látszik az irodalomjegyzékben szereplő dátumokból is. Bár jelenleg a gyakorlatban nemigen alkalmazzák, vannak erre irányuló kezdeményezések. Shtechman és szerzőtársai valós adatokra alapozva alakították tovább az ismert eljárásokat a földosztás feladatára különböző heurisztikákat felhasználva [17]. Egyre több figyelmet fordítanak a tortavágási problémának a mesterséges intelligencia területén is, Balkanskiék cikke [2] összegzi a legfrissebb eredményeket és a potenciális alkalmazási területeket a gyártásszervezéstől a légiirányításig.

Szakdolgozatom célja, hogy az igazságos torta-, házimunka- és égett-tortaelosztás néhány területét bemutassam. Főként arányos és részesedések szerinti igazságos elosztásokról lesz szó a Robertson–Webb-modell keretein belül. Emellett bár rövidebb terjedelemben, de megemlítem ezek alternatíváit is, hogy az Olvasó lássa, milyen sokszínű és szerteágazó témáról van szó.

Az 1. fejezetben formálisan definiálom a feladatot és arra keresek választ, hogy a hétköznapokban olyan könnyen használt igazságos kifejezést hogyan lehet matematikailag megfogalmazni.

Az ezt követő két részben a tortaosztás problémájával foglalkozok. A 2. fejezetben röviden áttekintem a klasszikus arányos igazságos feladatra adott eljárásokat. A 3. fejezet már az általánosított részesedéseket is tartalmazó játék köré íródott, főként Cseh Ágnes és Fleiner Tamás cikke [5] alapján. Az eljárások bemutatása mellett a feladat bonyolultságára vonatkozó állítás is szerepel.

A 4. fejezetben áttérek házimunkákra, ez a fejezet tulajdonképpen az előző kettő tükörképe. Az eredetileg megfogalmazott cél az volt, hogy [5] eredményeit átültessem ebbe a környezetbe. Az eljárások átalakítása mellett sikerült azt is megmutatni, hogy az $O(n \log D)$ alsó korlát házimunkáknál is fennáll a részesedéseket is tartalmazó feladat esetén, ez új eredmény.

A szakdolgozat írása közben sok eljárásról kiderült, hogy általánosabb helyzetben, előjeles értékelőfüggvényekkel is működnek. Az égett torta koncepciója folytonos elosztásokra nézve nemigen tárgyalt terület, az észrevételeimet az 5. fejezet tartalmazza.

1. fejezet

Alapfogalmak

Egy osztozkodási problémában játékosok valamilyen szabály szerint igazságosan szeretnék elosztani a rendelkezésre álló tárgyat. A továbbiakban erre tortaként vagy házimunkaként fogunk hivatkozni attól függően, hogy az a játékosok számára kívánatos vagy kerülendő. Résztvevőink eltérő véleményt alkothatnak a heterogén torta különböző részeiről, viszont abban egyetértenek, hogy mennyi az összértéke. Feltesszük, hogy mindenki csak a saját értékelőfüggvényét ismeri. Olyan eljárást szeretnénk megadni, amely bizonyos típusú kérdéseket intézhet a játékosokhoz, a válaszokból kapott információ alapján pedig végül minden játékoshoz hozzárendel egy-egy szeletet. A most következő formális definícióknál [13], [20] könyvekre és [14] cikkre hagyatkozunk.

1. Definíció. $(\mathcal{P}, \Omega, \mathcal{A}, (\mu_i)_{i\in|\mathcal{P}|})$-t *osztozkodási problémának* nevezzük, ha adottak:

- $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ osztozkodásban résztvevő játékosok véges nemüres halmaza,
- Ω alaphalmaz, az osztozkodás tárgya,
- $\mathcal{A}$ szigma-algebra Ω-n, a lehetséges kiosztható részek halmaza,
- $\mu_i : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ a P_i-hez tartozó értékelőfüggvény egy nemnegatív, normált mérték Ω-n, azaz:
  - $A \in \mathcal{A}$ esetén $\mu_i(A) \geq 0$,
  - $\mu_i(\emptyset) = 0$, $\mu_i(\Omega) = 1$,
  - $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{A}$-beli, páronként diszjunkt sorozatra $\mu_i\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

2. Definíció. Az osztozkodási probléma *folytonos*, ha minden i-re bármely $A \in \mathcal{A}$ részhez és minden $\lambda \in [0,1]$ értékhez létezik $B \subset A$ úgy, hogy $\mu_i(B) = \lambda\mu_i(A)$.

A továbbiakban csak folytonos problémákat fogunk tárgyalni.

Megjegyzés. Egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mu_i)$ mértéktér esetén $A \in \mathcal{A}$ atom, ha $\mu_i(A) > 0$ és minden $B \in A$, $B \in \mathcal{A}$ esetén $\mu_i(B) = \alpha\mu_i(A)$, ahol $\alpha \in \{0,1\}$. A 2. Definíció ekvivalens azzal, hogy Ω nem tartalmaz atomokat [14]. Ha a $[0,1]$ intervallumon a Borel-halmazokat tekintjük, akkor ez azt jelenti, hogy minden egypontú $\omega \in [0,1]$-re fennáll $\mu_i(\{\omega\}) = 0$. Továbbá ekkor az eloszlásfüggvény, azaz $F : x \mapsto \mu_i([0,x])$ folytonos.

3. Definíció. $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ a torta vagy házimunka egy *elosztása*, ha:

- minden i-re $X_i \in \mathcal{A}$,
- minden $i, j < n, i \neq j$-re $X_i \cap X_j = \emptyset$,
- $\cup_{i=1}^n X_i = \Omega$.

Igazságos elosztásról beszélünk, ha $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ emellett teljesíti a játékosok által megkívánt igazságossági kritériumokat is. Ezekről az 1.1. részben lesz szó.

A továbbiakban az elosztandó tárgyat a $[0,1]$ intervallummal azonosítjuk, $\mathcal{A}$-t pedig a Borel-algebra Ω-ra való megszorításának vesszük.

Megjegyzés. Ez valójában nem jelent nagy megszorítást, bármilyen $\mathbb{R}^n$-beli korlátos tartományt levetíthetünk egy egyenesre, így egy szakaszt kapva. A szakaszon belül egy intervallum mértékét ezután az eredeti tartomány két párhuzamos hipersíkja közé eső darabjának mértékével teszünk egyenlővé. Sajnos a fenti nem működik, ha fontos az alkalmazás szempontjából, hogy összefüggő tortaszeletet kapjanak a játékosok, hiszen a vetítésnél egy intervallum ősképe nem feltétlen lesz ilyen.

1.1. Mit nevezünk igazságosnak?

4. Definíció. Legyen $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ elosztása a $[0,1]$ tortának, ahol X_i darabot P_i játékos kapja.

- *Arányosan igazságos* (vagy egyszerűen igazságos) az elosztás, ha minden i-re $\mu_i(X_i) \geq \frac{1}{n}$.

- *Pontos* az elosztás, hogyha egyenlőség teljesül, azaz $\mu_i(X_i) = \frac{1}{n}$ minden i-re.
- A *részesedések szerint igazságos* esetben adott minden i-re P_i-nek $k_i \geq 0$ követelése a tortára nézve úgy, hogy azok összege egyet tesz ki. A résztvevők akkor lesznek elégedettek, ha megkapják jogos jussukat, azaz ha minden i-re $\mu_i(X_i) \geq k_i$.

  Amennyiben minden k_i racionális és D a legkisebb egész úgy, hogy minden i-re $k_i = \frac{d_i}{D}$, $d_i \in \mathbf{N}$ alakban előáll, akkor az egyszerűség kedvéért d_i követelést társítunk P_i-hez és a torta összértékét D-re módosítjuk.
- *Irigységmentes* az elosztás, ha $\mu_i(X_i) \geq \mu_i(X_j)$ minden $1 \leq i < j \leq n$ párra, azaz hogyha senki sem cserélné el szívesen a szeletét egy másik játékoséra.
- Bármely előző típus (kivéve a pontos elosztást) mellé odatehetjük az *erős* jelzőt, ha mindenkinél szigorú egyenlőtlenség teljesül.

5. Definíció. Legyen $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ elosztása a $[0, 1]$ házimunkáknak, ahol X_i darabot P_i játékosnak kell elvégeznie.

- *Arányosan igazságos* (vagy egyszerűen igazságos) az elosztás, ha minden i-re $\mu_i(X_i) \leq \frac{1}{n}$.
- *Pontos* az elosztás, hogyha egyenlőség teljesül, azaz $\mu_i(X_i) = \frac{1}{n}$ minden i-re.
- A *részesedések szerint igazságos* esetben adott minden i-re P_i-nek $k_i \geq 0$ maximális terhelése úgy, hogy azok összege egyet tegyen ki. A résztvevők akkor lesznek elégedettek, hogyha legfeljebb k_i részét kell a feladatoknak elvégezniük, azaz ha minden i-re $\mu_i(X_i) \leq k_i$.

  Racionális esetben ugyanúgy bevezethetjük d_i-ket és D-t, mint a 4. Definícióban.
- *Irigységmentes* az elosztás, ha $\mu_i(X_i) \leq \mu_i(X_j)$ minden $1 \leq i < j \leq n$ párra, azaz hogyha senki sem végezné el szívesen a másik feladatait a sajátja helyett.
- Bármely előző típus (kivéve a pontos elosztást) mellé odatehetjük az *erős* jelzőt, ha mindenkinél szigorú egyenlőtlenség teljesül.

A hétköznapi értelemben az igazságos kifejezést elég sok mindenre használjuk, így matematikailag nehezen formalizálható. A fenti definíciók mellett további szempontokat is figyelembe vehetünk egy-egy eljárás jellemzésénél.

1.1.1. Igazmondás

Mivel az eljárás számára nem ismert a játékosok által használt mérték, felismerni se tudjuk, hogyha egy-egy résztvevő hazudik a kérdések megválaszolása során. Még a szakirodalmak között sincs egyetértés, hogy az eljárásoknak garantálnia kell-e, hogy ne történjenek ilyen esetek azzal, hogy igazmondásra ösztönöznek. A következő definícióban két fogalmat vezetünk be az ilyen tulajdonságnak is eleget tevő megoldásoknak [23] alapján. A szakdolgozatomban ismertetett példák csak az első kritériumnak tesznek eleget.

6. Definíció. Egy eljárás *gyengén igazmondásra ösztönző* amennyiben, ha egy játékos helyesen válaszol minden kérdésre, akkor ez garantálja számára a jogos részesedését.

Az *erősen igazmondásra ösztönző* megoldásoknál elvárjuk azt is, hogy hamis válaszokkal ne lehessen többletre sem szert tenni, azaz a játékosok domináns stratégiája mindenképpen az őszintén válaszolás legyen.

1.1.2. Szimmetria

A klasszikus „egyik felez, másik választ" módszernél a felező játékos biztosan 1/2 értékű tortával fog távozni, míg társa általános értékelőfüggvények esetén ennél többet kap. Igazságosnak nevezhetjük így ezt az eljárást? Hogyan döntjük el, ki kapja az előnyösebb szerepet? Megoldhatnánk a feladatot egy érmefeldobással is, viszont ha determinisztikus eljárásokhoz ragaszkodunk olyat kell találnunk, amely ugyanúgy kezeli a résztvevőket. A játékbeli szerepek vizsgálatának ötletével Manabe és Okamoto [12] állt elő.

7. Definíció. Egy $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ partíciót visszaadó eljárás *szimmetrikus*, ha a játékosok sorszámainak bármely σ permutációja után újrafuttatva minden i-re $\mu_i(X_i) = \mu_{\sigma(i)}(X_{\sigma(i)})$.

Azaz azt szeretnénk elérni, hogy ne számítson a játékosok sorrendje, P_i játékos sorszámát tetszőlegesen megváltoztatva pont ugyanannyi értékű tortát kapjon. Az „egyik felez, másik választ" módszer is kijavítható, hogy ezt garantálja. Kérjük meg P_1-et és P_2-t is, hogy jelölje meg, szerinte hol van az alaphalmaz fele, legyenek c_1 és c_2 a kapott válaszok. Ezután vágjuk el $(c_1 + c_2)/2$-nél a tortát és mindenki kapja meg azt a részt, ahová a jelölése esik. Ha $c_1 = c_2$, akkor tetszőlegesen adjuk oda a két részt, úgyis pont ugyanannyit érnek mindkét játékos számára. Világos, hogy itt teljesen mindegy a játékosok sorszáma abban az esetben, ha nem hazudnak mértékfüggvényeikről. Általában is igaz, hogy amennyiben a játékosoknak minden körben ugyanazon az alaphalmazon ugyanazt a műveletet kell végrehajtaniuk, akkor szimmetrikus eljárással van dolgunk. Döntetlen helyzeteket viszont nem szabad a játékosok sorszáma alapján feloldanunk, véletlenszerűen kell választanunk közöttük.

1.2. Robertson–Webb-modell

Ahhoz, hogy eljárásokról beszélhessünk, meg kell adnunk, hogy egyáltalán mik a lehetséges lépések. A futásidőt nem a vágások számában szeretnénk mérni, hanem egy tortadarab kiértékelését is egy lépésnek szeretnénk számolni.

8. Definíció. A *Robertson–Webb-modell* műveletei P_i játékosra, adott $x \in [0,1]$ esetén a következő $[0,1]$-beli eredményt szolgáltatják:

- *Vágás*$(P_i,\ x)$ azt a legkisebb $y \in [0,1]$-et adja vissza, amire $\mu_i([0,y]) = x$,
- *Mérés*$(P_i,\ x)$ megadja $\mu_i([0,x])$ értékét.

A legegyszerűbb, két játékos közötti „egyik felez, másik választ" osztozkodás például így nézne ki a modellben: Az első résztvevő *Vágás*$(P_1,\ \frac{1}{2})$-vel elfelezi a tortát valamilyen x pontnál. Társa *Mérés*$(P_2,\ x)$ segítségével megtudja az első szelet értékét, ha ez nagyobb félnél, akkor ezt kéri, ellenkező esetben a másik darabot.

Megjegyzés. Egy tetszőleges intervallum megmérése, egy már elkészült darabon belüli való vágás, illetve egy szelet megfelelő arányú kettéosztása is konstans sok művelettel elérhető. Mi elsősorban a megoldás bonyolultságát szeretnénk meghatározni, így a továbbiakban néhol ezeket is egy műveletként fogjuk számontartani.

Az, hogy egy adott problémára a Robertson–Webb-modellen belül nincs megoldás, nem jelenti azt, hogy igazságos elosztás se létezne. Erre mutatok most két példát, illetve egy-egy lehetséges alternatív modellt, amelyben már képesek leszünk kezelni őket.

Pazarlásmentes elosztás: Egy elosztást *pazarlásmentesnek* hívunk, ha egyik játékos sem kap olyan tortaszeletet, amely számára 0-t ér, de van olyan játékos, aki számára az pozitív értékkel bírna. Jelölésekkel: minden i, j párra és $Z \in X_i$, $Z \in \mathcal{A}$-ra, ha $\mu_i(Z) = 0$, akkor $\mu_j(Z) = 0$. Pazarlásmentes elosztás mindig létezik. Az elosztások halmaza kompakt, így vehetjük rajta a $\sum_{i=1}^{n} \mu_i(X_i)$-t maximalizáló elosztást [7]. Ez egyben pazarlásmentes is lesz, hiszen ha lenne P_i játékos számára értéktelen, de más számára értékes darabja, akkor ezt átadva nőne a maximalizálandó kifejezés.

Viszont a Robertson–Webb-modell keretein belül nem tudjuk biztosítani egy ilyen elosztás előállítását, hiszen véges sok lépés végrehajtásával csak véges sok intervallummal kapcsolatban kapunk információt. Nem tudjuk garantálni, hogy ezek belsejében nincsen egy értéktelen szakasz, mely pazarlásnak minősülne [22].

Megoldásként pazarlásmentes vagy Pareto-hatékony elosztásokat emiatt általában szigorúan pozitív mértékekkel vizsgálnak; vagy felteszik, hogy az eljárás ismeri az értékelőfüggvényeket (*közvetlen kinyilatkoztatás*).

Pontos elosztás: Sajnos pontos elosztásokat sem tudunk a Robertson–Webb-modellen belül találni, annak ellenére, hogy talán ez tűnik a leginkább igazságot teremtő kritériumnak 1.1. szakasz fogalmai közül.

1. Tétel. *Már két személyre sem létezik pontos elosztást előállító eljárás [13].*

Bizonyítás. Teljes indukciót alkalmazunk. Kezdetben, mikor még Ω egy darabban volt, nem volt pontos elosztásunk. A $k-1$. lépés elvégzése után legfeljebb k darabra vágtuk a tortát vagy a házimunkát, $\{A_1, ..., A_k\}$-ra. Ahhoz, hogy az eljárás véges időben befejeződjön, ezeket egy ponton két halmazra kell osztania úgy, hogy azok mindkét játékosnak pontosan 1/2-et érjenek. Feltehetjük, hogy a $k-1$. lépés után egyik darab sem 0 értékű, hiszen elképzelhető, hogy ekkor mindkettőjüknek az, így semmisnek tekinthetnénk. Mivel eddig nem álltunk meg, így a 2^k lehetséges partíció közül egy sem adott pontos elosztást.

Az is feltehető, hogy a következő művelet során P_1 az A_k darabot A_{k_1} és A_{k_2} szeletekre osztja ketté. Legyen $\eta = \min_{S \subset \{1,2,...k-1\}} |1/2 - \sum_{i \in S} \mu_2(A_i)|$. Mivel P_1 nem ismeri P_2 értékelőfüggvényét, feltehető, hogy A_{k_1}-et akkorára vágta, hogy $\mu_2(A_{k_1}) = \frac{1}{2} \min\{\eta, \mu_2(A_k)\}$. A most szóba jövő 2^{k+1} elosztás fele már eddig is rendelkezésünkre állt, így ezek nem megfelelőek. Elég azokat vizsgálnunk, ahol A_{k_1} és A_{k_2} nem ugyanahhoz a játékoshoz kerülne. Viszont ekkor az A_{k_1}-t tartalmazó részhalmazból A_{k_1}-t elhagyva a maradék μ_2 szerinti értéke 1/2-től legalább η-val eltérne, így ehhez A_{k_1}-et hozzávéve is legalább $\eta/2$ különbség állna fenn a 1/2-től. Azaz a k. lépésben sem tudnánk pontos elosztást készíteni. $\square$

A Robertson–Webb-modell egy sokszor használt alternatívája az úgynevezett *mozgókéses eljárás*, amely segítségével például az előző feladat is megoldható. Itt műveletek helyett késeket tudunk az alaphalmaz felett végighúzni, amelyet a játékosok bekiabálással tudnak megállítani és vágásra bírni. Megkérjük P_1-et hogy az intervallum bal végpontjától indulva vegyen két kés közé pontosan $1/2$ értékű tortát. Ezután mozgassa a késeket jobbra úgy, hogy közéjük eső szakasz minden pillanatban épp felet érjen. A végén természetesen az első kés éppen a második kiindulópontjában állna meg. P_2-nek eközben azt a feladatot adjuk, hogy mihelyst a két kés közötti darabot $1/2$-nek értékeli, állítsa meg a folyamatot. Ilyen pillanat biztosan lesz, hiszen az értékelőfüggvényekből készülő eloszlásfüggvények folytonosságát feltettük.

2. fejezet

Arányosan igazságos elosztások

A következőkben végigvesszük a klasszikus arányosan igazságos elosztási feladatra adott legfontosabb eljárásokat a legelső, Steinhaus tanítványaitól származótól kezdve [18], Fink eljárásán át [10], Even és Paz több szempontból is legjobb megoldást szolgáltató eredményével bezárólag [8].

2.1. Banach–Knaster-eljárás

Rendezzük sorba az n játékost és kérjük meg P_1-et, hogy vágjon le egy $1/n$ nagyságú szeletet. Ezt továbbadjuk P_2-nek, hogyha szerinte többet ér, mint $1/n$, akkor nyessen le belőle annyit, hogy épp $1/n$ legyen. Ez így megy P_n-ig. A megcsonkított darabot az a játékos kapja meg, aki utoljára vágott belőle, így számára ez pont $1/n$ értéket képvisel. A többi játékos szerint ez a szelet legfeljebb $1/n$ értékű, így ők is elégedettek lesznek, hogy a komplementerén kell rekurzívan tovább osztozkodniuk.

A futásideje $O(n^2)$, legfeljebb $n(n-1)/2$ vágás és ugyanennyi mérés történik. A végén egy ember kivételével mindenki pontosan $1/n$ értékű tortadarabot fog kapni. Az eljárás szimmetrikus, hiszen a játékosok sorrendjétől függetlenül az első szeletet, a torta bal szélét az a személy fogja megkapni, akire $\textit{Vágás}(P_i, 1/n)$ a legkisebb értéket veszi fel.

2.2. Fink eljárása

Az eljárást rekurzívan definiáljuk, két főre az „egyik felez, másik választ" módszert alkalmazzuk. Tegyük fel, hogy $n-1$ játékosra már van jó arányosan igazságos elosztásunk. Kérjük meg ezt az $n-1$ személyt, hogy az eddig neki kiosztott tortát ossza n egyenlő részre. P_n ezután minden társának felosztásából választ egy-egy szeletet, így az egész torta legalább $1/n$ részét megszerezve. A többiek sem járnak rosszul, hiszen nálunk marad az eddigi legalább $1/(n-1)$-ed rész $(n-1)/n$-ede, azaz az egész torta legalább $1/n$-ed része.

Az eljárás futásidőben rosszabb az előbbinél, hiszen $\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = n(n-1)(2n-1)/6$ vágást igényel, azaz $O(n^3)$ idejű. Viszont egyszerű megoldást nyújt a feladat online változatára, amikor sorban érkeznek új játékosok már egy meglévő osztozkodás közepén. Megéri késni ennél az osztozkodásnál, hiszen indukcióval könnyen belátható, hogy P_1 minden esetben pontosan $1/n$ tortát kap, míg másoknak többre is van esélye.

2.3. Even–Paz-eljárás

Ez is rekurzív eljárás. Minden játékost megkérünk, hogy jelölje meg a torta $\frac{\lfloor n/2 \rfloor}{n}$ részét, majd ezután megkeressük a jelölések közül az $\lfloor n/2 \rfloor$-edik legkisebbet és itt elvágjuk a tortát. Két részfeladatot definiálunk: az első $\lfloor n/2 \rfloor$ jelöléshez tartozó játékos a vágás előtti részen fog tovább osztozkodni, a többiek pedig a vágás utánin. Így az első részfeladatban résztvevők mind úgy gondolják, hogy egy legalább $\frac{\lfloor n/2 \rfloor}{n}$ értékű tortán kell megosztozniuk összesen $\lfloor n/2 \rfloor$-n. Hasonlóan a második szeletre jutók is legalább akkorának érzik a szeletüket, mint amennyi együttesen feltétlen járna nekik. Ahhoz, hogy az új torta $\frac{\lfloor n/2 \rfloor}{n}$ részét megjelölhessék, természetesen szükség lesz egy *Mérés* műveletre.

Egy körben összesen $O(n)$ művelet történik, hiszen mindenkinek jelölnie kell, viszont lecsökken az iterációk száma $O(\log n)$-re, így a futásidő $O(n \log n)$. Bizonyított, hogy ennél gyorsabban a feladat nem megoldható [24]. A későbbiekben a jogosultságokat is tartalmazó feladatnál az arra vonatkozó legjobb elérhető komplexitásról szóló tétel bizonyítása szerepel (4. Tétel), ez annak egy speciális esete. További előny, hogy az eljárás végén mindenki pontosan egy intervallumot kap kézhez, ez az eddigi módszereknél nem volt igaz. A szimmetria is fennáll, hiszen kezdetben mindenkitől ugyanazt kérdezzük, így a sorrendjüktől függetlenül ugyanazon a részproblémán fogják folytatni a játékot.

3. fejezet

Igazságosság részesedések szerint

A fejezet első részében racionális követelések esetét tárgyaljuk. Megvizsgáljuk, hogy jelen ismereteinkkel hogyan tudnánk megvalósítani az elosztást, majd Cseh Ágnes és Fleiner Tamás eljárásával foglalkozunk részletesebben. A 4. Tételnél megnézzük a szerzőpáros bizonyítását arra vonatkozólag, hogy a feladat bonyolultsága $O(n \log D)$. Végül az irracionális feladatra is megoldást mutatunk. A fejezet főként [5] alapján íródott.

3.1. Visszavezetés klónozással

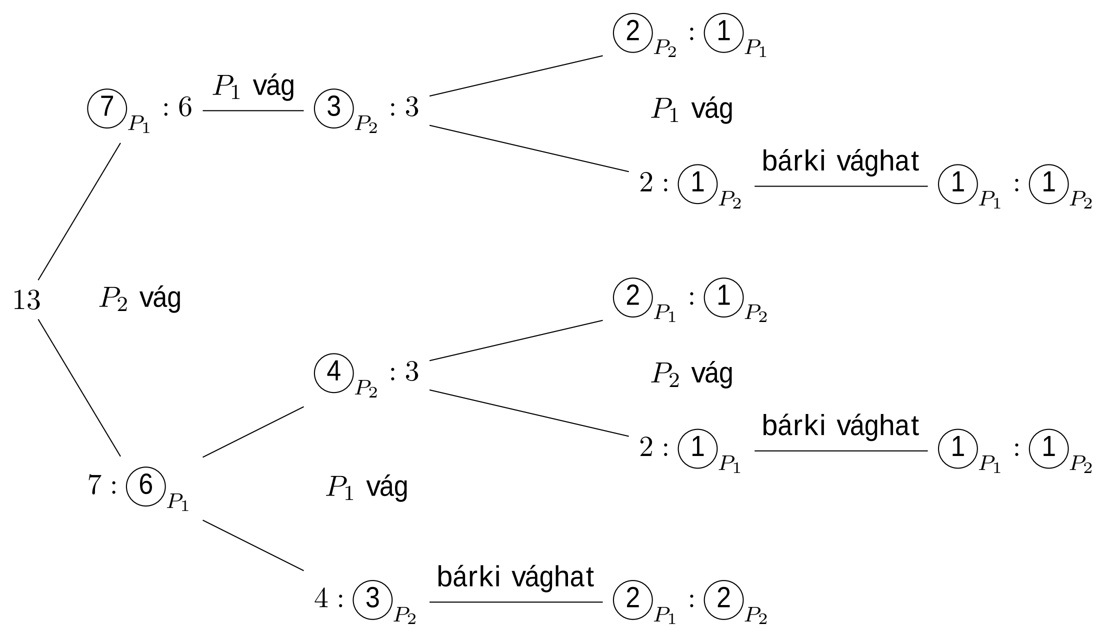
A d_i követelésű P_i játékost "klónozzuk", azaz d_i darab 1 követelésű játékost készítünk belőle. A másolatok ugyanazt az értékelőfüggvényt használják. Ezután alkalmazhatjuk bármelyik módszert, amelyik egyenlő igazságos elosztást alakít ki D darab játékos között. Minden játékosra a másolatainak tortaszeleteit összeuniózva az igazságossági kritériumot teljesítő partíciót kapunk. Even és Paz eljárása $O(D \log D)$ idő alatt megoldást szolgáltat.

Megjegyzés. A klónozással elveszítjük azt a tulajdonságot, hogy összefüggőek legyenek a kiosztott darabok. Sajnos ilyen tulajdonságot is biztosító megoldásra a későbbiekben sem számíthatunk. A következőkben vázolunk egy felállást, ahol nincs olyan igazságos elosztás, ahol minden játékos összefüggő szeletet kap [15]. Osszuk fel a $[0, 1]$ intervallumot $2n - 1$ egyenlő darabra. P_1 értékelőfüggvénye minden páros sorszámú részintervallumon azonosan 0, a többi részintervallumot egyenként $1/n$-re értékeli. Minden $1 < i \leq n$ esetén P_i mértéke 0 a $2i$-edik részintervallumon kívül. Ha $d_1 > 1/n$, akkor legalább két páratlan indexű részintervallumot kell érintenie

P_1 szeletének. Azonban ha a többi játékos követelése is pozitív, akkor nem lehet összefüggő Ω_1, hiszen ez esetben tartalmaznia kellene teljes egészében egy páros indexű részintervallumot is, viszont ekkor az a társa, akinek csak itt volt pozitív a függvénye, elégedetlen marad.

3.2. Közel felező eljárás

Két személyre: Először értsük meg, két játékos között hogy működik a közel felező eljárás (továbbiakban KFE) [13]. Feltehetjük, hogy $d_2 < d_1$. Kérjük meg P_2-t, hogy vágja el a tortát $\lfloor (d_1 + d_2)/2 \rfloor$ arányban és a két szeletet megcímkézi, annak megfelelően, hogy az ő mértéke szerint mennyit érnek. Mivel a torta összértékében a játékosok egyetértenek, P_1 az egyik darabot legalább annyinak fogja értékelni, mint amennyit a címke mond, ezt a darabot ő kiveszi és a címke értékével csökken a követelése. Fontos részlet, hogy mindig az a játékos választ, akinek nagyobb még a jogosultsága, így nemnegatív marad a csökkentett d_1. Rekurzívan folytatjuk a megmaradt tortafélen az új követelésekkel. Az eljárás legfeljebb $2\lceil \log(d_1 + d_2) \rceil$ műveletigényű, hiszen minden körben feleződik a fennmaradó, el nem osztott követelés mennyisége.



1. ábra. KFE lehetséges lefutásai $d_1 = 8, d_2 = 5$ esetben. A csúcsokban a vágási arányok állnak, a bekarikázott elemek az indexben megjelölt játékoshoz kerülnek.

n **személyre:** Több játékosra rekurzívan oldjuk meg az elosztást. Tegyük fel, hogy az első $k-1$ személy már megegyezett a torta $d_1 : d_2 : \cdots : d_{k-1}$ arányú elosztásán. P_k mindegyik $P_i, i < k$ játékostól a nála lévő tortadarab $d_k/(d_1 + d_2 + \cdots + d_{k-1})$ részét fogja a KFE-vel megszerezni, így elérve a kívánt arányát.

Az előző lépésszámot szeretnénk általánosan is megvizsgálni az n játékos esetében. Az i. játékos sorra kerülésekor $i-1$ KFE fog lefutni, mind $2\lceil \log(d_1+d_2+\cdots+d_i)\rceil$ művelettel legfeljebb. Tehát a műveletigény $\sum_{i=2}^{n} 2(i-1)\lceil \log(d_1 + d_2 + \cdots + d_i)\rceil$, ami felülről becsülhető $n(n-1)\lceil \log(D)\rceil$-vel.

Az eljárás már két személy esetén sem szimmetrikus, hiszen $1/2 - 1/2$ követelések esetén pont az „egyik felez, másik választ" módszert adja.

3.3. Ramsey-felbontással

Két személyre egyszerű megoldásnak tűnik az is, hogy P_1 D darab egyenlő részre vágja a tortát, majd P_2 kiválaszt ebből d_2 darab szimpatikus szeletet. Viszont így a tortán $D-1$ darab vágást ejtünk. Ugyanezt az alapötletet követi [13]-ban található, számelméleti eszközöket alkalmazó eljárás, viszont kevesebb vágással. Ehhez szükségünk lesz egy definícióra:

9. Definíció. Pozitív egész a, b-re az $a + b$ P partíciója az (a, b) pár *Ramsey-felbontása*, amennyiben bármely $L \subset P$ esetén:

- vagy létezik $S \subset L$, hogy az S-beli elemek összege a,
- vagy létezik $S \subset P \setminus L$, hogy az S-beli elemek összege b.

Kérjük meg P_1-et, hogy vágja fel a tortát (d_1, d_2) szerinti Ramsey-felbontás arányai alapján. Ezután P_2 határozza meg ezek közül azt az L részhalmazt, amely szerinte többet ér, mint a rajta lévő címke. Hogyha a címkékből összegként elő tudja állítani d_2-t, akkor vegye ki a nekik megfelelő darabokat, így elégedett lesz. Ha ez nem sikerül, akkor a definíció szerint L komplementeréből P_1 elő tudja állítani d_1-et, ezek lesznek az ő szeletei. P_2 számára ezek mind olyan részek voltak, amelyek kevesebbet értek, mint kellett volna, így ő a komplementerhalmazzal elégedett lesz. Látjuk, hogy P_1 mindkét esetben pontosan a követelése mennyiségét kapja, így nincs szimmetria.

Például a $(8, 13)$ egyik Ramsey-felbontása a $\{8, 5, 3, 2, 1, 1, 1\}$. Amennyiben az L-beli címkék $\{8, 3, 2, 1\}$, akkor P_2 megkapja $\{8, 3, 2\}$ halmazt. Hogyha L $\{8, 2, 1, 1\}$ lett volna, akkor P_1 tudta volna előállítani 8-at a komplementerből $\{5, 3\}$-ként.

Kérdés, hogy hogyan találunk Ramsey-felbontást, illetve hány elemből áll egy ilyen. A számelméleti háttér [13]-ban megtalálható, most pusztán csak az algoritmust közlöm $(a, b), a < b$ legrövidebb Ramsey-felbontásának megtalálására:

- Tegyük be a-t P-be.
- Ha $a = b - a = 1$, akkor rakjuk be P-be $1, 1$ elemeket és készen vagyunk.
- Ellenkező esetben ismételjük meg $(a, b - a)$-ra.

Legalább $\log_\phi \min\{d_1, d_2\}$ vágásra van szükségünk, ahol $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$, így sajnos nem érünk el jobb eredményt, mint a KFE-nél. Az ott használt rekurzióval ezt a módszert is általánosíthatjuk n személyre.

3.4. Cseh és Fleiner eljárása

A KFE-hez hasonlóan ugyanúgy közel felezni szeretnénk a tortát minden körben, miközben a játékosokat is megosztjuk a két szelet között. Az egyszerűség kedvéért a tortaszeletekhez tartozó játékosokat újraindexeljük, mégpedig balról jobbra aszerint, hogy hol jelölték meg a torta felét. A jelölések alapján kiválasztjuk a középső játékost, ő az, ahol ha P_1-től elkezdjük összeadni a követeléseket, akkor meghaladjuk a torta $\lfloor D/2 \rfloor$ részét. Ő emiatt mindkét szeleten tovább fog játszani, itt felhasználjuk a klónozás alapötletét.

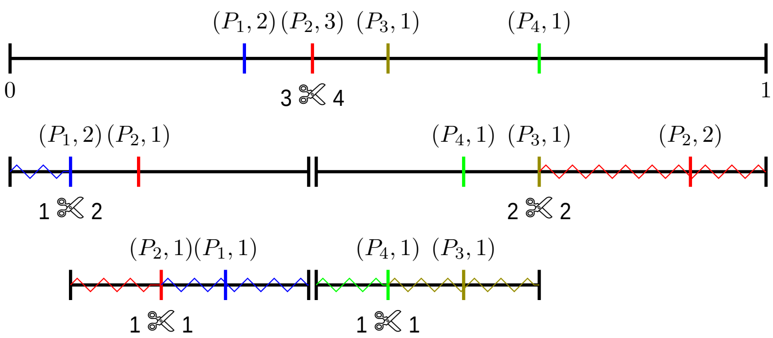
Konkrétabban:

- Minden játékos megjelöli az Ω torta $\lfloor D/2 \rfloor$ részét, balról jobbra a jelölések szerint újraindexeljük a személyeket.
- Meghatározzuk a középső játékost, P_j-t: j legyen az az index, ahol $\lfloor D/2 \rfloor \leq d_1 + d_2 + \cdots + d_j$ és $\lfloor D/2 \rfloor > d_1 + d_2 + \cdots + d_{j-1}$. (Vagy $j = 1$, ha $d_1 \geq \lfloor D/2 \rfloor$.)
- Elvágjuk a tortát P_j jelénél Ω_1-re és Ω_2-re. P_j-t klónozzuk.

- $P_1, P_2, \ldots, P_j$ Ω_1-en fog osztozkodni. A hozzájuk tartozó követelések: $d_1, d_2, \ldots, d_{j-1}, \lfloor D/2 \rfloor - (d_1 + d_2 + \cdots + d_{j-1})$. Módosítjuk a mértékeket is $\mu_i \cdot \lfloor D/2 \rfloor / \mu_i(\Omega_1)$-re.

- $P_j, P_{j+1} \ldots, P_n$ Ω_2-n fog osztozkodni $(d_1 + d_2 + \cdots + d_j) - \lfloor D/2 \rfloor$, $d_{j+1}, d_{j+2} \ldots, d_n$ követelésekkel. Módosítjuk a mértékeket $\mu_i \cdot \lceil D/2 \rceil / \mu_i(\Omega_2)$-re.

Ugyanaz a helyzet áll fenn, mint az Evan–Paz-eljárás során, kezdetben mindenkihez ugyanazt a kérést intézzük. Így amennyiben nem a játékosok sorszáma segítségével oldjuk fel az esetlegesen pont ugyanoda kerülő jelölésekből fakadó döntetleneket, akkor fennáll a szimmetria.



2. ábra. Példa az eljárásra. A játékosok neve melletti érték az aktuális követelésük, a hullámozott részek a kiosztásra kerülő darabok.

2. Tétel. *A fent vázolt eljárás megoldja az egyenlőtlen tortavágási feladatot.*

Bizonyítás. Leellenőrizzük, hogy helyesen generáltuk-e a két részproblémát. Elsőre azt, hogy az Ω_1-hez rendelt játékosok ugyanannyinak, a követeléseik összegének ($\lfloor D/2 \rfloor$) értékelik-e a tortájukat. Ez teljesül, pont így állítottuk be a szorzótényezőt a mértékfüggvények módosításakor. Még azt kell megvizsgálnunk, hogy ha P_i játékos megkapja d_i követelését a módosított mértékfüggvénye szerint, akkor ennek a darabnak az értéke az eredeti mértéke szerint is ér-e d_i-t. Ez igaz, ha $\mu_i \cdot \lfloor D/2 \rfloor / \mu_i(\Omega_1) \leq \mu_i$ fennáll. Tehát elég, hogy $\mu_i(\Omega_1) \geq \lfloor D/2 \rfloor$, ami pedig teljesül, hiszen P_i Ω_1 egy részhalmazát vallotta $\lfloor D/2 \rfloor$ értékűnek és nemnegatív mértékfüggvényekkel foglalkozunk csak.

Ω_2-re is igazak a fenti tulajdonságok, ebben az esetben az új mértékfüggvény azért lesz az eredetinél minden lehetséges szeleten kisebb vagy egyenlő, mert P_i játékosok számára $\mu_i(\Omega_1) \leq \lfloor D/2 \rfloor$ volt a kezdeti jelöléskor, így $X \setminus \Omega_1 = \Omega_2$ legalább $\lceil D/2 \rceil$ mértékű. $\square$

A műveletigény becsléséhez vezessük be a $T(n, D)$ jelölést, mely az n játékos általi D összértékű torta elosztásának lépésszáma.

3. Tétel. *Ha $n \geq 2$, $n < D$, akkor $T(n, D) \leq 2(n-1)\lceil \log D \rceil$ a fenti módszert használva.*

Bizonyítás. A bizonyításhoz n szerinti teljes indukciót alkalmazunk, $n = 2$-re az eljárás a KFE-vel egyezik meg azzal a különbséggel, hogy itt csak vágás műveleteket végzünk, így a becslés a kezdőesetre helyes. Tegyük fel, hogy $n-1$-ig igaz az állítás bármely D-re.

$$T(n, D) \leq n + max_{1 \leq i \leq n}\{T(i, \lfloor D/2 \rfloor) + T(n-i+1, \lceil D/2 \rceil)\}$$

fennáll, hiszen miután mind az n játékos bejelölte a torta közel felét, rekurzívan meghívjuk kétszer az eljárást. Az indukciós feltevést a fenti becslésbe beírva:

$$\begin{aligned} T(n, D) \leq n + max_{1 \leq i \leq n}\{2(i-1)\lceil \log \lfloor D/2 \rfloor \rceil + 2(n-i)\lceil \log \lceil D/2 \rceil \rceil\} \leq \\ n + max_{1 \leq i \leq n}\{2(i-1)(\lceil \log D \rceil - 1) + 2(n-i)(\lceil \log D \rceil - 1)\}. \end{aligned}$$

Az utolsó becslés páros D-re triviális, páratlan D-re azt használjuk fel, hogy $\log D$ nem lehet egész. Azaz:

$$\lceil \log \lfloor D/2 \rfloor \rceil \leq \lceil \log \lceil D/2 \rceil \rceil = \lceil \log(D+1)/2 \rceil = \lceil \log(D+1) - 1 \rceil = \lceil \log(D) \rceil - 1.$$

Tovább számolva:

$$T(n, D) \leq n + 2(n-1)(\lceil \log D \rceil - 1) \leq 2(n-1)\lceil \log D \rceil.$$ □

3.5. Bonyolultság

A következőkben belátjuk, hogy ez az eredmény aszimptotikusan éles is, azaz $n \log D$-vel egyenlő alsó korlátot adunk a műveletigényre. Egy feladatra alsó korlátot találni kihívást jelent, hiszen minden lehetséges algoritmust le kell fednie a bizonyításunknak. Egy sokszor hasznos alsókorlát-módszer az, hogy ellenséges stratégiát definiálunk [11]. Képzeljük el, hogy az Algoritmus és Ellensége játszik egymás ellen. Az Algoritmus célja az, hogy a legkevesebb körben megoldja a feladatot az előre definiált műveletei segítségével, ez számunkra itt a *Vágás* és a *Mérés*. Az Ellenség az ellenséges stratégiát követve próbálja ezt megakadályozni, célja előállítani az Algoritmus legrosszabb futásidejű inputját. Azaz jelen helyzetben megszabhatja a játékosok számát, követelését, illetve hogy milyen értékelőfüggvényük legyen. Feltesszük, hogy az Ellenség bármennyi számítást elvégezhet a körök között, viszont arra nincs ráhatással, hogy az Algoritmus milyen műveleteket fog kérni. Mivel egy szabályos lefutás során n és d_i-k a kezdetektől fogva ismertek, így ezeket a játék elején meg kell mondania az Algoritmusnak. Viszont a mértékek nem publikusak, így az Ellenségnek ezeket nem kell előre lefixálnia, feladata csak annyi, hogy az Algoritmus kéréseire érvényes választ adjon. Ezalatt azt értjük, hogy a leállás után az Ellenségnek tudnia kell olyan, szabályoknak megfelelő értékelőfüggvényeket mutatnia, amellyel az összes korábbi válasza konzisztens.

Ellenséges stratégia: Adott P játékos, μ mértékfüggvénye, illetve egy D értékű torta. Az a célunk, hogy kis méretű, de μ-re nézve pozitív értékű darabokat tartsunk fenn. A műveletekre adott választ egy ellenséges stratégia alapján választjuk meg. Természetesen a játék folyamán az eddigi kérdésekre adott válaszok adnak a torta néhány szeletének értékéről információt. Az eljárás lefolyása során mindig beszélhetünk az aktuális morzsákról, azaz a torta minimális alkotóelemeiről. Pontosabban Ω két tetszőleges pontja akkor, és csak akkor tartozik egy morzsába, hogyha az eddigi összes művelet során mindig azonos szeletben voltak. Kezdetben egy morzsánk volt, maga az egész Ω. Vegyük észre, hogy minden pillanatban a morzsák a $[0,1]$ részintervallumai, a torta egy partícióját adják. Azt nem jelenthetjük ki, hogy minden morzsa értéke ismert, de az igaz, hogy egy morzsa valódi részhalmazának pontos értékéről nincs információnk.

Olyan ellenséges stratégiát szeretnénk kreálni, amely minden $\mu(C) > 0$ morzsa hosszát alulról korlátozza. Sőt annyi engedményt is teszünk, hogy ellenségünk minden körben az összes keletkező morzsa pontos értékét elárulja. A morzsák halmazát jelölje M. Egy új művelet során az ellenség a művelet paraméterei és az eddigi morzsák adatai alapján határozza meg a választ. Ezzel egyidőben kijelöli az új morzsákat, mely a következő műveletnél az M partícióként fog szolgálni. A válaszadás szabályai:

***Mérés*(P, x):** Az eddigi M partíció annyiban változik, hogy egy $C = [a, b]$ morzsát az x osztópont kétfelé fog vágni. Hogyha $x - a > b - x$, akkor az újonnan keletkező két morzsa közül $[a, x]$ μ mértékét $\mu([a, b])$-re állítjuk, $[x, b]$-jét pedig 0-ra.

Ellenkező esetben fordítva, azaz mindig a nagyobb Lebesgue-mértékű intervallumhoz rendeljük a morzsa teljes értékét. Végül válaszként a $[0, x]$-be eső kisintervallumok értékének összegét adjuk vissza.

***Vágás*$(P,\ x)$:** Balról jobbra megkeressük azt a $C = [a, b]$ morzsát, amelyre $\mu([0, a]) \leq x$ és $\mu([0, b]) \geq x$. (Lehet több ilyen is, ha egymás melletti morzsák 0 értékűek, ekkor az első ilyet.) A Lebesgue-mértéke szerint osszuk ketté ezt a morzsát és rendeljünk $x - \mu([0, a])$, illetve $\mu([0, b]) - x$ értéket a két félhez. A művelet ezután visszaadja az $(a + b)/2$-t mint vágási pontot.

1. Lemma. *Az ellenséges stratégiát követve q művelet után minden pozitív értékű tortaszelet legalább $D/2^q$ Lebesgue-mértékű.*

Bizonyítás. Elég belátni, hogy minden pozitív értékű morzsa legalább $D/2^q$ Lebesgue-mértékű. Kezdetben az egész tortára igaz az állítás. Azt szeretnénk megmutatni, hogy mindkét műveletünk csak olyan új morzsáknak ad pozitív értéket, amelyeknek hossza az eddigi morzsa legalább fele. *Mérés* művelet során a nagyobbik darabnak adjuk a teljes morzsa értékét, ez a művelet rendben van. *Vágás* során csak egy darab morzsát vágunk el, ezt pedig pont a Lebesgue-mértéke szerint feleztük meg. Összességében tehát megmarad a kívánt tulajdonság. □

4. Tétel. *Az egyenlőtlen tortaosztás feladatának megoldásához $\Omega(n \log D)$ művelet szükséges. [5]*

Bizonyítás. Vegyünk egy olyan esetet az eredeti problémán, ahol $c_1 n$ játékosunk van $c_2 n$ összköveteléssel. Itt c_1, c_2 tetszőleges 0 és 1 közötti konstansok úgy, hogy $c_1 n$ egész legyen. Őket *szerény* játékosoknak hívjuk, hiszen követelésük visszafogott a számukhoz képest. A maradék $(1 - c_1)n$ játékosunk *mohó*, az ő követeléseik összege $D - c_2 n$. A legegyszerűbb ilyen eset az, ahol $n - 1$ szerény játékosunk van 1 követeléssel, és egy mohó játékosunk $D - (n - 1)$ követeléssel. Minden mohó játékos mértékfüggvénye legyen a Lebesgue-mérték. A 1. Lemma garantálja, hogy P_i játékos q_i művelete után a P_i számára pozitív értékű tortaszeletek legalább $D/2^{q_i}$ méretűek. Adjuk össze a szerény játékosoknak allokált tortaszeletek hosszát egy tetszőleges igazságos elosztásnál:

$$\sum_{i=1}^{c_1 n} \frac{D}{2^{q_i}} \leq c_2 n.$$

Osszunk le c_1nD-vel mindkét oldalon:

$$\frac{1}{c_1n} \cdot \sum_{i=1}^{c_1n} \frac{1}{2^{q_i}} \leq \frac{c_2}{c_1D},$$

majd a baloldalon alkalmazzuk a számtani-mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenséget:

$$\sqrt[c_1n]{2^{-\sum_{i=1}^{c_1n} q_i}} \leq \frac{c_2}{c_1D}.$$

Majd mindkét oldalon logaritmust véve:

$$\frac{1}{c_1n} \cdot -\sum_{i=1}^{c_1n} q_i \leq \log \frac{c_2}{c_1} \; - \log D,$$

és átrendezve alsó becslést kapunk a műveletek számára:

$$\sum_{i=1}^{c_1n} q_i \geq c_1n(\log D + \log \frac{c_1}{c_2}) \sim \Omega(n \log D).$$

Ezzel beláttuk, hogy a szerény játékosok céljainak eléréséhez legalább $\Omega(n \log D)$ művelet szükséges a fenti esetre, sőt amennyiben c_1 vagy c_2 ismert, pontosabb becslést is szolgáltattunk. $\square$

3.6. Irracionális követelések

Emlékeztető. Mivel a követelések úgysem fejezhetők ki egész számokkal, ezért a tortát újra 1 összértékűnek tekintjük. A keveredés elkerülése érdekében az i. játékos részesedésére a k_i jelölést használjuk.

Cseh és Fleiner eljárását fogjuk úgy módosítani, hogy az általános esetre is alkalmazható legyen. Így véges, de felső korlát nélküli műveletszámú megoldást kapunk. Először keresünk egy $A \subseteq \Omega$ szeletet úgy, hogy $\mu_i(A) > 0$ teljesüljön minden P_i játékosra, és legyen két játékosunk, akik nem értenek egyet ennek értékén, azaz $\mu_i(A) < \mu_j(A)$ valamilyen i, j indexekre. Ezután két részproblémát generálunk A-ra és $\Omega \setminus A$-ra úgy, hogy lecsökkentjük k_i-t A-n 0-ra, de cserébe megnöveljük $\Omega \setminus A$-n. Pont fordítva k_j-t növeljük A-n és csökkentjük $\Omega \setminus A$-n. Mindezt úgy tesszük, hogy az első részproblémán csak $n - 1$ játékosunk maradjon irracionális követelésekkel, a másodikon pedig n, ámde racionálisokkal. Ezt azért érhetjük el, mert a második darabon a követeléseket összeadva egy kicsit kevesebbet kapunk, mint ahogy a játékosok $\Omega \setminus A$-t értékelik. Ezt a pluszt eloszthatjuk a követelések között úgy, hogy racionálissá kerekítsük őket. Az eljárást iteratívan folytatva minden keletkező irracionális problémát képesek vagyunk felosztani egy racionálisra és egy eggyel kisebb irracionálisra.

Konkrétabban: Feltehető, hogy $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_n$. Első lépésként P_1-et megkérjük, hogy vágjon le egy k_1 értékű darabot a tortából, ezt elnevezzük A-nak. Megkérjük a többieket, hogy értékeljék ki A-t, legyen P_j az a játékos, aki a legmagasabbra becsüli a szeletet. Tudjuk, hogy $\mu_j(A) \geq k_1$. Innen két eset lehetséges:

- Ha $\mu_j(A) = k_1$, akkor $\mu_i(A) \leq k_1$ minden játékosnak. A-t odaadjuk P_1-nek és $\mathcal{I}_1$ részproblémaként $\Omega \setminus A$-t osztjuk szét $n-1$ játékos között ugyanazokkal a követelésekkel. Természetesen az értékelőfüggvényeket módosítanunk kell, $\frac{1-k_1}{1-\mu_i(A)} \cdot \mu_i$-re minden megmaradt játékosnak. Az eset feltételei miatt a konstans, amivel a mértékfüggvényt szoroztuk kisebb vagy egyenlő, mint 1. Így elérjük, hogy $P_2, P_3, \ldots, P_n$ ugyanúgy $1-k_1$-nek értékelje $\Omega \setminus A$-t.

- Ha az előző eset nem áll fenn, akkor $\mu_j(A) = k_1 + \epsilon$ valamilyen $\epsilon > 0$-ra. Két $\mathcal{I}_{2a}$, $\mathcal{I}_{2b}$ részfeladatot definiálunk.

  a) $\mathcal{I}_{2a}$-ban a torta legyen A, P_1 követelését csökkentsük 0-ra, P_j-ét növeljük $k_j + k_1$-re. A többiekét nem változtatjuk. Hogy mindenki 1-re értékelje a torta egészét az értékelőfüggvényeket megszorozzuk $1/\mu_i(A)$-val.

  b) $\mathcal{I}_{2b}$-ban a torta $\Omega \setminus A$, P_1 követelése $k_1 + \frac{k_1^2}{1-k_1}$, P_j követelése pedig $k_j - \frac{k_1(k_1+\epsilon)}{1-(k_1+\epsilon)}$, a többiek követelése nem változik. Itt is szükséges egy konstanssal megszorozni az értékelőfüggvényeket, mégpedig $\frac{1}{1-\mu_i(A)}$-val.

2. Lemma. *Ha a $\mathcal{I}_1$-beli igazságos elosztáshoz hozzávesszük a P_1-nek adott A szeletet, akkor az eredeti feladat egy igazságos elosztását kapjuk.*

Bizonyítás. Világos, hogy P_1 elégedett a darabjával, hiszen $\mu_1(A) = k_1$. $\mathcal{I}_1$ minden játékosa az ott kapott darabjával is elégedett az eredeti mértékfüggvényre nézve, hiszen az legalább $\frac{1-\mu_i(A)}{1-k_1} \cdot k_i \geq k_i$-t ér az eredeti tortából. □

3. Lemma. *Ha minden játékos $\mathcal{I}_{2a}$-n és $\mathcal{I}_{2b}$-n megkapja a követelését, akkor a két torta unióján is elégedettek az eredeti problémát tekintve.*

Bizonyítás. Minden játékosra számoljuk ki, mennyit ér a két részproblémán a követelésének összege az eredeti tortára vetítve:

- k_1: $0 + (k_1 + \frac{k_1^2}{1-k_1}) \cdot (1 - k_1) = k_1$,
- k_j: $(k_j + k_1) \cdot (k_1 + \epsilon) + (k_j - \frac{k_1(k_1+\epsilon)}{1-(k_1+\epsilon)}) \cdot (1 - (k_1 + \epsilon)) = k_j$,
- k_i, ahol $i \neq 1, i \neq j$: $k_i \cdot (\mu_i(A) + 1 - \mu_i(A)) = k_i$. □

4. Lemma. *Ha kissé megnöveljük $\mathcal{I}_{2b}$-n a követeléseket, akkor átalakíthatjuk egy racionális követelésekkel rendelkező igazságos elosztási problémává.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy a követeléseket összeadva $\mathcal{I}_{2b}$-n szigorúan D-nél kisebb értéket kapunk:

$$k_1 + \frac{k_1^2}{1-k_1} + k_j - \frac{k_1(k_1+\epsilon)}{1-(k_1+\epsilon)} + \sum_{i\neq 1, i\neq j} k_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} k_i + \frac{k_1^2}{1-k_1} - \frac{k_1(k_1+\epsilon)}{1-(k_1+\epsilon)} < 1,$$

mivel $\epsilon > 0$-t feltettük. Így tehát a követelések összege kisebb, mint amire a játékosok $\Omega \setminus A$-t értékelik. Ezt a kis különbséget szétoszthatjuk a játékosok között úgy, hogy minden játékos követelése immár racionális legyen. □

5. Tétel. *Bármilyen n játékosra felírt irracionális követeléseket tartalmazó igazságos elosztási feladat átalakítható a fent leírt módszerrel legfeljebb $n-1$ darab racionális feladattá, így megoldható véges sok művelettel.*

Bizonyítás. Teljes indukciót használunk. Először tehát $n = 2$-re vegyünk egy irracionális problémát és vezessük vissza racionálissá. P_1 jelöljön be egy A darabot, ami k_1-et ér neki. Megkérjük P_2-t, hogy értékelje ki A-t. Ha $\mu_2(A) < k_1$, akkor P_1 megkapja A-t, P_2 pedig elégedett lesz a maradék $\Omega \setminus A$-val, mert $\mu_2(\Omega \setminus A) > k_2$. Ha a fenti nem teljesül, akkor $\mu_2(A) = k_1 + \epsilon$ valamely $\epsilon > 0$-ra. Ekkor P_2 megkapja A-t és ketten tovább osztozkodnak $\Omega \setminus A$-n $k_1 + \frac{k_1^2}{k_2}$ és $k_2 - \frac{k_1(k_1+\epsilon)}{k_2-\epsilon}$ követelésekkel. A 2. és 3. Lemmák miatt igaz lesz, hogy a két szelet unióján igazságos elosztást kapunk. Továbbá a 4. Lemma szerint $\Omega \setminus A$ a követelések összege szigorúan kisebb, mint $k_1 + k_2$, így felkerekíthetjük őket racionális számokká. Így végül csak egy racionális követeléseket tartalmazó kétszemélyes elosztást kell megoldanunk.

Tegyük fel, hogy azt már beláttuk, hogy $n-1$ játékossal a tétel állítása igaz, fel tudtuk bontani $n-2$ racionális játékká. Ha adott egy n játékosra felírt irracionális követeléseket is tartalmazó feladat, akkor a fentiek alapján át tudjuk alakítani $\mathcal{I}_1$-re, vagy $\mathcal{I}_{2a}$-ra és $\mathcal{I}_{2b}$-re. A 2. és 3. Lemmák alapján, ha ezeket megoldjuk, akkor az eredeti problémára is megoldást kapunk. $\mathcal{I}_1$ egy irracionális $n-1$ játékosra felírt feladat. Ugyanúgy $\mathcal{I}_{2a}$ is. Ezeket az indukciós feltétel alapján legfeljebb $n-2$ darab racionális elosztás segítségével meg tudjuk oldani. $\mathcal{I}_{2b}$-ben a 4. Lemmánk szerint a követeléseket fel tudjuk kerekíteni racionálissá. Így legrosszabb esetben is $n-1$ darab racionális feladatra át tudjuk alakítani az eredeti elosztási problémát. $\square$

Megjegyzés. Az irracionális követelések esete nehéz, hiszen nem használható a klónozás alapötlete. A fenti megoldásnál korlátot a műveletszámra a követelések racionálissá kerekítése miatt nem adhatunk, hiszen nem tudjuk, hogy ezek nevezőinek mi lesz a legkisebb közös nevezője. A [16]-ban előforduló eljárás például más megközelítést használ. Nem kerekíti a követeléseket, viszont szükség van a torta l részre való osztására úgy, hogy $l \cdot k_i$ törtrésze valamilyen futás során kiderülő ϵ értéknél kisebb legyen. Racionális esetben D minden ϵ-ra megfelelő l lesz, ám irracionális esetben itt sem tudunk adni korlátot.

Azóta több, különböző elven működő eljárás is megjelent a feladatra, azonban egyik sem korlátos n-ben és valamely, az irracionális követelésekből származtatott függvényben. Nyitott kérdés, hogy megoldható-e az osztozkodás ezzel a feltétellel.

4. fejezet

Házimunkák elosztása

A dolgozat elején definiáltuk az igazságos házimunka-elosztás feladatát. Itt az eddigiekkel ellentétben játékosaink Ω-ból minél kevesebb részesedést szeretnének magukénak tudni. Az általunk tortára tárgyalt arányos, illetve részesedések szerint igazságos változatokra adott eljárások egyszerűen módosíthatóak az új felállásra, az ezekre adott megoldásaimat fogom a későbbiekben vázolni. Továbbá bizonyítást mutatok arra, hogy a részesedések szerint igazságos házimunka-elosztás $n \log D$ időnél hatékonyabban nem valósítható meg, ez új eredmény (7. Tétel).

Általában nem igaz, hogy minden tortára vonatkozó eredmény könnyedén átvihető lenne nemkívánatos alaphalmazra. Vegyük például az irigységmentes elosztásokat. Három személyre, tortára a Selfridge–Conway-eljárás 5 lépésben megoldást ad. Ám házimunkás megfelelőjét Oskuinak az előző átalakításával már csak 9 művelettel sikerült megoldania [13]. Általánosan n személyre felülről korlátos eljárást adnia az irigységmentes tortaelosztásra először 2016-ban Aziznak és Mackenzie-nek sikerült, viszont ez is $n^{n^{n^{n^{n^{n}}}}}$ lépést igényelt [1]. Házimunkára vonatkozó párját nehezen sikerült megtalálni, annak ellenére, hogy a terület egyik legkutatottabb nyitott problémája volt. Végül két évvel később Dehghaninak sikerült megoldania, ám módszere teljesen más struktúrát követ [6].

Emellett olyan probléma is akad, ahol nemhogy eljárásokat nem tudunk egyszerűen átvinni, hanem a megoldhatóság is eltér. A 6. Definícióban beszéltünk már az erősen igazmondásra ösztönzés kritériumáról. Ezzel a feltétellel szeretnénk irigységmentes eljárást keresni két játékos között. Sőt egy olyan engedményt is teszünk, hogy a játékosaink csak szakaszonként konstans értékelőfüggvényeket használhatnak, melyet a játék elején felfednek számunkra. Tao megmutatta, hogy ilyen nem létezik torta esetén [19], viszont Bei cikke [3] leír egy ilyen tulajdonságokkal rendelkező házimunka-elosztást előállító eljárást.

4.1. Arányosan igazságos elosztások

Az alábbi táblázat összefoglalja a tortára bemutatott eljárások főbb tulajdonságait. Ezeket szeretnénk módosítani házimunkákra.

	Banach–Knaster	Fink	Even–Paz
Futásidő	$O(n^2)$	$O(n^3)$	$O(n \log n)$
Vágások	legf. $\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$	$n \log n$
Mérések	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{(n-1)n(n+1)}{3} - n + 1$	$n \log n$
Alapötlet	egy körben egy személyt kielégítünk	minden új körben eggyel több személy között osztjuk el	"oszd meg és uralkodj": felezzük a játékosokat és a tortát
Szimmetria	igen	nem	igen
Esély $>1/n$-re	csak annak a játékosnak, aki utoljára kap tortát	P_1-en kívül mindenkinek	csak annak nem, akinek mindig a jelölésénél vágtunk

1. táblázat. Arányosan igazságos eljárások

- **Banach–Knaster:** Ugyanúgy megkérjük az első játékost, hogy vágjon le egy $1/n$ értékű szeletet, viszont ezt a játékosok egymás közt továbbadva nem csökkenteni, hanem növelni fogják, amennyiben úgy érzik, hogy számukra kevesebb, mint $1/n$-et ér. A szeletet ugyanúgy az a személy kapja meg, aki utoljára változtatott a méretén.

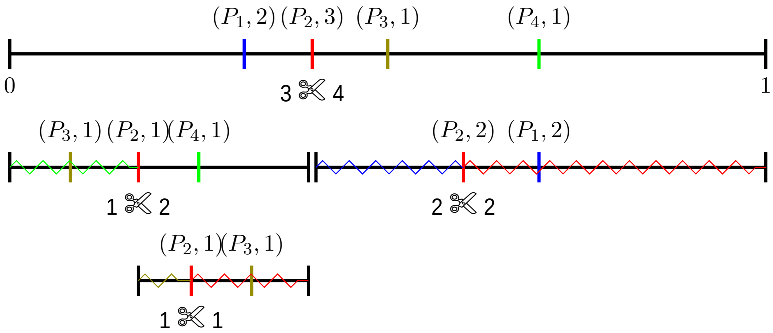
- **Fink:** Az eljárást változtatás nélkül felhasználhatjuk. P_n, amikor az $n-1$ darab társának n darab egyenlő részre osztott szeletéből választ, egyszerűen nem a számára legnagyobb, hanem a legkisebb értékű részt fogja kivenni, így összesen legfeljebb $n-1$-szer $\frac{1}{(n-1)n}$ egységnyi munkát kell elvégeznie.

- **Even–Paz:** Első lépésként ugyanúgy minden játékost megkérünk, hogy jelölje be a feladatok $\lfloor n/2 \rfloor$ részét, a végső vágást az $\lceil n/2 \rceil$. vonalnál végezzük el. A vágás előtti rész legyen Ω_1, az utána lévő Ω_2. Ezután minden játékost épp az ellenkező szelethez rendelünk, mint amelyikre a vonala esik. Az Ω_1-et kapó játékosok egy olyan halmazt jelöltek meg $\lfloor n/2 \rfloor$ értékűnek, amelynek részhalmaza Ω_1, így ők tényleg legfeljebb az $\lfloor n/2 \rfloor$ mértékű részen osztozkodnak tovább. Az Ω_2 tulajdonosai szerint pedig Ω_1 legalább $\lfloor n/2 \rfloor$-t ér, így ők ennek komplementerével úgy gondolják jól járnak. A két "félen" ezután rekurzívan folytatjuk az osztozkodást.

4.2. Igazságosság részesedések szerint

- A klónozás ötlete itt is ugyanúgy működik azzal, hogy az Even–Paz-eljárást már sikerült átalakítanunk.
- **KFE:** Nincs szükség módosításra, egyszerűen a két "fél" közül a soron következő játékos azt fogja választani, amelyik számára legfeljebb annyit ér, mint amennyit a címke mond.
- Ugyanez igaz a **Ramsey-felbontásnál** is, L részhalmaz a címkénél kevesebbet érő darabokból fog állni.
- **Cseh–Fleiner:** Ugyanúgy minden játékos megjelöli az alaphalmaz $\lfloor D/2 \rfloor$ részét, balról jobbra a jelölések szerint újraindexeljük a személyeket. A középső játékosunk, P_j most az a személy lesz, akinél a részesedéseket összeadva elérjük $\lceil D/2 \rceil$-t, azaz j az az index, ahol $\lceil D/2 \rceil \leq d_1 + d_2 + \cdots + d_j$ és $\lceil D/2 \rceil > d_1 + d_2 + \cdots + d_{j-1}$. Elvágjuk Ω-t P_j jelénél, őt pedig klónozzuk. Az Even–Paz eljáráshoz hasonlóan most is mindenkit pont az ellentétes szelethez rendelünk, mint ahová a jelölése esik, azaz:
  - $P_1, P_2, \ldots, P_j$ Ω_2-n fog osztozkodni. A hozzájuk tartozó terhelések: $d_1, d_2, \ldots, d_{j-1}, \lceil D/2 \rceil - (d_1 + d_2 + \cdots + d_{j-1})$. Módosítjuk a mértékeket is $\mu_i \cdot \lceil D/2 \rceil / \mu_i(\Omega_2)$-re.
  - $P_j, P_{j+1}, \ldots, P_n$ Ω_1-en fog osztozkodni $(d_1 + d_2 + \cdots + d_j) - \lceil D/2 \rceil$, $d_{j+1}, d_{j+2}, \ldots, d_n$ terhelésekkel. Mértékeik változnak $\mu_i \cdot \lfloor D/2 \rfloor / \mu_i(\Omega_1)$-re.

  A helyességhez egyszerűen ellenőriznünk kell, hogy ha a módosított függvénnyel egy játékos legfeljebb az új részesedését kapja az alaphalmazon, akkor az eredeti feladatban is elégedett lenne-e. Ez igaz, ha $\mu_i \cdot \lceil D/2 \rceil / \mu_i(\Omega_2) \geq \mu_i$ fennáll. Tehát elég, hogy $\mu_i(\Omega_2) \leq \lceil D/2 \rceil$, ami pedig teljesül, hiszen P_i Ω_1 egy részhalmazát vallotta $\lfloor D/2 \rfloor$ értékűnek, így Ω_2 szerinte legfeljebb $\lceil D/2 \rceil$-t érhet. Hasonló felírható a másik részproblémába eső játékosokra is.



3. ábra. Példa a módosított eljárásra a 2. ábrán szereplő felállás szerint.

- **Irracionális eset:** Itt is azt szeretnénk kihasználni, hogy Ω egy A részhalmazát két játékos nem ugyanannyira becsüli. Legyen P_1 a legkisebb követelésű játékos, P_j pedig az a személy, aki a legkevesebbre becsüli a P_1 által levágott k_1 értékű szeletet. Innen megint adott két eset aszerint, hogy $j = 1$ teljesül-e. Ha igen, odaadjuk A-t P_1-nek és $\mathcal{I}_1$-t megoldjuk. Ha $\mu_j(A) = d_1 - \epsilon$ alakú valamilyen $\epsilon > 0$-ra, akkor $\mathcal{I}_{2a}$-ra és $\mathcal{I}_{2b}$-re vezetjük át a feladatot.

	$\mathcal{I}_1$	$\mathcal{I}_{2a}$	$\mathcal{I}_{2b}$
alaphalmaz	$\Omega \setminus A$	A	$\Omega \setminus A$
k_1	0	0	$k_1 + \frac{k_1^2}{1-k_1}$
k_j	k_j	$k_j + k_i$	$k_j - \frac{k_1(k_1-\epsilon)}{1-(k_1-\epsilon)}$
k_i	k_i	k_i	k_i
μ_i	$\frac{1-k_1}{1-\mu_i(A)} \cdot \mu_i$	$\frac{1}{\mu_i(A)} \cdot \mu_i$	$\frac{1}{1-\mu_i(A)} \cdot \mu_i$

2. táblázat. Részfeladatok irracionális követelések esetén

Egyszerű számolással leellenőrizhető, hogy ha a játékosok a részfeladatokon legfeljebb a részesedésüknek megfelelő házimunkát kapnak, akkor az eredeti Ω-ra, illetve részesedésekre nézve se lépik át a határukat.

Ellentétben a tortás változattal $\mathcal{I}_{2b}$-n a terheléseket összeadva szigorúan 1-nél nagyobb értéket kapunk. Ezt a kis különbséget szétoszthatjuk a játékosok között úgy, hogy részesedéseiket egy kicsit csökkentve minden játékosé racionális legyen. A csökkentéssel csak növeljük az itteni játékosok elégedettségét. Teljes indukcióval megkapjuk, hogy összesen legfeljebb $n-1$ racionális feladattá alakíthatjuk az eredeti problémát. Az eljárás tehát véges, azonban felülről nem korlátozható a szükséges műveletek száma.

4.3. Bonyolultság

Visszatérünk a racionális esethez és az n játékosra felírt D értékű házimunka-elosztásról szeretnénk belátni, hogy $n \log D$ műveletnél kevesebbel nem megoldható. Cseh és Fleiner eljárásának ennyi lépésre van szüksége, az átalakított változat is ugyanannyi műveletet végez, így következik, hogy a becslés éles is. A bizonyítás Farhadi és Hajiaghayi arányos házimunka-elosztás komplexitására vonatkozó eredményének [9] kiszélesítése.

4.3.1. Fogalmak

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért a játékosokat a mértékfüggvényeikkel azonosítjuk. Így a μ függvénnyel játszó P játékosra *Vágás*(P, x) és *Mérés*(P, x) ebben a szakaszban *Vágás*(μ, x) és *Mérés*(μ, x) lesz. Először bevezetünk néhány új fogalmat, illetve ezekhez kapcsolódóan teszünk néhány egyszerű észrevételt.

10. Definíció. Egy A darab *sűrűsége* μ szerint $\rho(\mu, A) = \mu(A)/|A|$, ahol $|A|$ az A darab Lebesgue-mértékét jelöli.

11. Definíció. Adott $0 \leq \beta \leq 1 \leq \gamma$ számokra egy μ értékelőfüggvény (β, γ)-*sűrű*, ha $\beta \leq \rho(\mu, I) \leq \gamma$ teljesül minden nemüres I intervallumra. Továbbá egy mértéket *pozitívnak* tekintünk, ha $\rho(\mu, I) > 0$ teljesül minden I-re.

12. Definíció. Tetszőleges μ pozitív értékelőfüggvényre μ^* jelölje a *duálisát*, amelyet a következőképpen definiálunk: $\mu^*([x, y]) = \textit{Vágás}(\mu, y) - \textit{Vágás}(\mu, x)$.

5. Lemma. *Pozitív μ duálisára a következők teljesülnek:*

- *Mérés*$(\mu^*, y) =$ *Vágás*(μ, y),
- *Vágás*$(\mu^*, x) =$ *Mérés*(μ, x).

Azaz minden μ^*-ra vonatkozó műveletet μ segítségével ugyanannyi időben megválaszolhatunk.

Bizonyítás. A duális mérték definíciója alapján:

$$\textit{Mérés}(\mu^*, y) = \mu^*([0, y]) = \textit{Vágás}(\mu, y) - \textit{Vágás}(\mu, 0).$$

A második állításhoz elég belátnunk, hogy $\mu^*([0, \textit{Mérés}(\mu, x)]) = x$, hiszen ekkor a *Vágás* művelet tényleg megfelelő pontját adta vissza a $[0, 1]$ intervallumnak:

$$\mu^*([0, \textit{Mérés}(\mu, x)]) = \textit{Vágás}(\mu, \textit{Mérés}(\mu, x)) - \textit{Vágás}(\mu, 0) = x - 0. \qquad \square$$

Megjegyzés. Ha μ^* μ duálisa, akkor μ^* duálisa μ.

Bizonyítás. Jelöljük $\hat{\mu}$-val μ^* duálisát. Ha megmutatjuk, hogy minden $[0, x]$ intervallumon $\hat{\mu}$ és μ értéke megegyezik, akkor készen vagyunk. A 12. Definíció és az 5. Lemma alapján:

$$\hat{\mu}([0, x]) = \textit{Vágás}(\mu^*, x) = \textit{Mérés}(\mu, x) = \mu([0, x]). \qquad \square$$

Megjegyzés. A Lebesgue-mérték (λ) duálisa önmaga, hiszen $\lambda^*([x, y]) = \textit{Vágás}(\lambda, y) - \textit{Vágás}(\lambda, x) = y - x = \lambda([x, y])$.

13. Definíció. Legyen D tetszőleges pozitív egész, μ egy mérték. Egy A darab *D-nehéz* μ-re nézve, ha Lebesgue-mértéke legfeljebb $1/D$ és μ szerinti mértéke legalább $1/(2D)$, azaz $|A| \leq 1/D$ és $\mu(A) \geq 1/(2D)$.

Hasonlóan A *D-könnyű*, ha $|A| \geq 1/(2D)$ és $\mu(A) \leq 1/D$.

Megjegyzés. Egy darabra egyszerre mindkét tulajdonság is fennállhat.

6. Lemma. *Egy pozitív $(0, 2)$-sűrű függvény duálisa pozitív és $(1/2, \infty)$-sűrű.*

Bizonyítás. Legyen $[x, y]$ egy nemüres intervallum, be kell látnunk, hogy a sűrűsége legalább $1/2$ μ^* szerint. A definíciók alapján $\rho(\mu^*, [x, y]) = \frac{\textit{Vágás}(\mu, y) - \textit{Vágás}(\mu, x)}{y - x}$. Jelölje ℓ $\textit{Vágás}(\mu, x)$-et, r pedig $\textit{Vágás}(\mu, y)$-t. Ekkor igaz, hogy $\textit{Mérés}(\mu, \ell) = x$, illetve $\textit{Mérés}(\mu, r) = y$. Így:

$$\rho(\mu^*, [x, y]) = \frac{\textit{Vágás}(\mu, y) - \textit{Vágás}(\mu, x)}{y - x} = \frac{r - \ell}{\textit{Mérés}(\mu, r) - \textit{Mérés}(\mu, \ell)} = \frac{1}{\rho(\mu, [\ell, r])}.$$

Mivel μ $(0, 2)$-sűrű volt, így $\rho(\mu, [\ell, r])$ 0 és 2 közé esik. Emiatt reciproka legalább $1/2$. $\square$

14. Definíció. Pozitív μ mértékre és $I = [a, b]$ intervallumra a következőképpen definiáljuk *I duálisát*: $I^* = [\textit{Mérés}(\mu, a), \textit{Mérés}(\mu, b)]$.

Egy tetszőleges diszjunkt $I_1, I_2, \ldots, I_k$ intervallumokból álló A darab duálisa $\cup_{i=1}^{k} I_i^*$.

7. Lemma. *Ha A D-könnyű μ-re nézve, akkor A^* D-nehéz μ^*-ra.*

Bizonyítás. A álljon $I_1, I_2, \ldots, I_k$ intervallumokból. Két feltételt kell ellenőrizni. Először egy tetszőleges $I = [a, b]$ intervallumra számoljuk ki a keresett mértékeket, utána ezt összegezzük mindkét esetben. A Lebesgue-mértékre vonatkozó feltétel:

$$|I^*| = \mathit{Mérés}(\mu, b) - \mathit{Mérés}(\mu, a) = \mu(I)$$
$$|A^*| = \sum |I_k^*| = \mu(A) \leq 1/D.$$

A μ^*-ra vonatkozó:

$$\mu^*(I^*) = \mu^*([\mathit{Mérés}(\mu, a), \mathit{Mérés}(\mu, b)]) =$$
$$= \mathit{Vágás}(\mu, \mathit{Mérés}(\mu, b)) - \mathit{Vágás}(\mu, \mathit{Mérés}(\mu, a)) = b - a = |I|$$
$$\mu^*(A^*) = \sum \mu^*(I_k^*) = \sum |I_k| = |A| \geq 1/(2D).$$

□

4.3.2. Értékfa

Az előző, bonyolultsággal foglalkozó bizonyítás során azt akartuk elérni, hogy minden pozitív értékű darab nagy méretű maradjon. Mivel mohó játékosaink a Lebesgue-mértékkel játszottak, így a többiek pozitív értékű darabjainak kicsinek kellett lenniük, hogy mindenki elégedetten távozzon. Így sikerült a felállással kikényszerítenünk kellően sok műveletet. Itt ez a gondolatmenet nem működik, hiszen felülről van korlátozva a játékosoknak adható munkamennyiség. Azt az ötletet is el kell vetnünk, hogy bármely keletkező darabot nagy értékűnek állítunk be, hiszen a *Vágás* művelettel a folytonosság miatt játékosaink bármilyen apró értékű darabot előállíthatnak. Így az előbbiekben bevezetett D-nehéz darabokat fogjuk segítségül hívni és megmutatni, hogy bizonyos feltételek mellett sok műveletre van szükség, hogy egy eljárás ilyet találjon. Ehhez definiálunk egy *értékfát*, illetve megnézzük néhány tulajdonságát.

Tegyük fel, hogy $D \geq 3^{11}$ és háromnak hatványa. Egy harmadfokú fát (minden csúcsnak három gyereke van) konstruálunk, melynek D levele van. A bal-, középső és jobboldali gyerekét egy u belső csúcsnak $l(u), m(u), r(u)$-val jelöljük. A fában minden csúcshoz egy-egy részintervalluma tartozik $[0, 1]$-nek, erre I_u-ként hivatkozunk ezentúl. Jelölje $\mu(u), |u|$ és $\rho(u)$ I_u értékét, hosszát, illetve sűrűségét. A gyökércsúcshoz tartozó intervallum $[0, 1]$, értéke, hossza és sűrűsége 1. Egy u csúcs gyerekeinek intervallumaira teljesül, hogy $I_u = I_{l(u)} \cup I_{m(u)} \cup I_{r(u)}$, és $|I_{l(u)}| = |I_{m(u)}| = |I_{r(u)}| = \frac{1}{3}|I_u|$.

Azaz az egy szinten lévő csúcsok intervallumai kiadják az alaphalmaz egy-egy partícióját, valamint egy k-adik szinten lévő csúcshoz tartozó intervallum $1/3^k$ hosszúságú.

Az értékek meghatározásánál úgy szeretnénk eljárni, hogy u három gyerekének értékének összege megegyezzen a szülő értékével. A fa éleihez értékeket rendelünk, ezeket arra használjuk, hogy megállapítsuk a csúcsok értékeit. Ehhez össze kell szoroznunk a gyökértől a csúcsig vezető út éleinek címkéit.

15. Definíció. Egy u csúcsot *kritikusnak* nevezünk, ha $\rho(u) \cdot \beta > 2$, ahol $\beta = 2^{6/\ln(D)}$.

Egy kritikus csúcs gyerekeihez vezető élekre egységesen 1/3-ot írunk, ezek az élek *egyenletesek*. A többi csúcsnak lesz egy *nehéz* éle, amihez $\beta/3$-at társítunk, illetve két *könnyű* éle, melyeknek értéke $1/2 - \beta/6$. Mivel $D \geq 3^{11}$, így $1/3 \leq \beta/3 < 1/2$ teljesül, azaz minden nehéz él értéke e két korlát között van. Hasonlóan a könnyű éleké 1/3 és 1/4 között.

A leveleken a megadott érték egyenletesen oszlik el, azaz ha u levélcsúcs, akkor minden $I \in I_u$-ra $|I| = \frac{\mu(u)|I_u|}{|I|}$. Így a fenti fa segítségével bármilyen tetszőleges intervallum értékét meg tudjuk határozni.

Az így definiált értékfa tényleg additív mértéket ad a $[0,1]$ intervallumon, hiszen bármely csúcsból kiinduló 3 élre írt szám összege 1 lesz.

Megjegyzés. Egy kritikus csúcsnak és gyerekeinek sűrűsége megegyezik, hiszen a gyerekek értéke és mérete is épp harmada a szülőjének. Így a kritikus csúcsok gyerekei is kritikusak lesznek.

16. Definíció. Bevezetjük a $h(u), q(u), z(u)$ jelöléseket egy tetszőleges u csúcshoz vezető útban a nehéz, könnyű, illetve egyenletes élek számára.

8. Lemma. *Egy u csúcs sűrűségére fennáll $\rho(u) = \beta^{h(u)}(3/2 - \beta/2)^{q(u)}$.*

Bizonyítás.

$$\rho(u) = \frac{\mu(u)}{I_u} = \frac{\beta/3^{h(u)}(1/2 - \beta/6)^{q(u)}(1/3)^{z(u)}}{1/3^{h(u)+q(u)+z(u)}} = \beta^{h(u)}(3/2 - \beta/2)^{q(u)}. \qquad \square$$

9. Lemma. *Egy fent vázolt értékfa által meghatározott értékelőfüggvény* $(0,2)$*-sűrű.*

Bizonyítás. Meg kell mutatnunk, hogy bármely I intervallum sűrűsége 0 és 2 közé esik. A fán minden hozzárendelt érték pozitív, így a sűrűség is. A másik határhoz tegyük fel, hogy van olyan intervallum, melynek sűrűsége nagyobb, mint 2. Ekkor kell lennie a fában olyan levélnek is (u), ahol ez teljesül.

Ha u kritikus, akkor vegyük az u-hoz vezető utat: $u_1, u_2, \ldots, u_k = u$. Legyen u_t az úton az első kritikus csúcs. Mivel u_1 a gyökér, így $t > 1$. Ekkor $\rho(u) = \rho(u_t) \leq \beta\rho(u_{t-i})$. Mivel u_{t-1} nem kritikus, így $\beta\rho(u_{t-i}) \leq 2$, ellentmondásra jutottunk.

Ha u nem kritikus, akkor $\rho(u) < \beta\rho(u) \leq 2$, tehát megint nem sértheti meg a feltételt. □

17. Definíció. Egy u nem kritikus csúcs *értékes*, ha $\rho(u) \geq 1/2$.

A következő fontos lemma megteremti a kapcsolatot a D-nehéz darab keresés és az értékfa között.

10. Lemma. *Ha egy eljárás D-nehéz darabot talál $(0, 2)$-sűrű értékelőfüggvényre $T(D)$ művelet alatt, akkor $O(T(D))$ művelet segítségével egy értékes vagy kritikus csúcsot is találunk a fában.*

Bizonyítás. Vegyük a fa által meghatározott értékelőfüggvényt, ami a 9. Lemma miatt megfelelő sűrű, így alkalmazhatjuk rá az eljárásunkat. Legyen A az ezáltal adott darab. A D-nehéz, azaz $|A| \leq 1/D$ és $\mu(A) \geq 1/(2D)$. Így $\rho(A) \geq 1/2$. A legfeljebb $O(T(D))$ intervallum uniója, így megkereshetjük egy olyan I részintervallumát $O(T(D))$ időben, amelyre $\rho(I) \geq 1/2$. I hossza is legfeljebb $1/D$, így legfeljebb kettőlevélbe nyúlhat bele. Így ki tudunk közülük választani egy olyat, amelynek még mindig $1/2$-nél nagyobb a sűrűsége. Ez mindenképpen kritikus vagy értékes. □

Tehát az eredeti feladatot, azaz hogy belássuk, hogy D-nehéz darabot keresni csak $\log D$ lépésben lehetséges, sikerült átvezetnünk egy másikká. Ha belátjuk, hogy az értékfában egy értékes vagy kritikus csúcs megtalálásához $\Omega(D)$ művelet szükséges, akkor készen leszünk a tétel bizonyításával. Ebben lesz segítségünkre a következő lemma.

11. Lemma. *Bármely értékes vagy kritikus levélre* $h(u) > \log(D)/6 - 1$.

Bizonyítás. Ha u kritikus, akkor $\beta\rho(u) > 2$ miatt $\rho(u) > 2/\beta$. Írjuk be az egyenlőtlenségbe a 8. Lemmában $\rho(u)$-ra kapott képletet:

$$2/\beta < \rho(u) = \beta^{h(u)}(3/2 - \beta/2)^{q(u)} \leq \beta^{h(u)}$$
$$\beta^{h(u)+1} > 2 \implies h(u) > log_\beta 2 - 1 = \log(D)/6 - 1.$$

A másik eset, hogyha u értékes, ekkor $\rho(u) \geq 1/2$. Mivel a csúcshoz vezető út nem tartalmaz kritikus élt, $h(u)+q(u) = \log_3 D$. Tegyük fel, hogy $h(u) \leq \log(D)/6$. Ekkor a csúcs sűrűsége nem lehet több mint $\beta^{\log(D)/6}(3/2-\beta/2)^{\log_3 D-\log(D)/6}$. Ellenőrizhető, hogy a fenti kifejezés n-ben monoton nő, így felülről becsülhető végtelenben vett határértékével, ami kisebb, mint $1/2$. Így u-ra teljesülnie kell a lemmabeli egyenlőtlenségnek. □

4.3.3. Ellenséges stratégia

Ahhoz, hogy megmutassuk azt, hogy értékes vagy kritikus csúcsot találni nehéz feladat, meg kell vizsgálnunk, milyen kapcsolat áll fenn az értékfa, illetve a játékvezető által feltett kérdések között. Kezdetben a játékvezető nem ismeri a játékosok értékelőfüggvényeit, azaz a mi esetünkben az értékfát. Számára minden élre írt érték ismeretlen. A játékvezető által kért műveletekre úgy fogunk válaszolni, hogy néhány élt felfedünk úgy, hogy abból a válasz egyértelműen kiszámítható legyen. Azt mondjuk, hogy a fenti folyamat egy adott pillanatában u csúcs *felfedett*, hogyha a gyökértől u-ig vezető út során előforduló csúcsok (ebbe beleértve magát u-t is) minden éle ismert. Ekkor az alábbi információk állnak rendelkezésünkre, ezek mindegyike egyszerűen ellenőrizhető:

12. Lemma. *A játék közben a következők igazak:*

- *Ha u felfedett, akkor $\mu(u)$-t ismerjük.*
- *Ha u felfedett, $I_u = [a, b]$, akkor $\mu([0, a]), \mu([0, b])$ is kiszámítható.*
- *Ha u, v felfedett levelek, $x \in I_u, y \in I_v$ tetszőleges pontok az intervallumaikból, akkor $\mu([0, x]), \mu([0, y]), \mu([x, y])$ is meghatározható.*
- *Legyen u felfedett levél, $x \in I_u$, α egy érték, v egy olyan levél, amely tartalmazza azt az y pontot, amelyre $\mu([x, y]) = \alpha$. Ekkor u és v legutolsó közös őse meghatározható a fában.*

Az ellenséges stratégia első $\lfloor(\log(D)/6 - 1)/2\rfloor$ lépésében a következőket fogjuk betartani:

- Ha egy csúcsból kimenő él fel van fedve, akkor mind a három fel van.
- Bármely csúcsból induló út m művelet elvégzése után legfeljebb $2m$ nehéz élt tartalmaz.

- A felfedett csúcsok egy összefüggőségi komponensbe tartoznak.

Az első $\lfloor(\log(D)/6-1)/2\rfloor$ művelet jól definiált, hiszen mivel $D>3^{11}$, így a fenti érték pozitív.

A műveletekre az alábbi módon fogunk válaszolni:

Mérés*(értékfa, x)***: Legyen u_k a 0 pontot tartalmazó levél, $u_1, u_2, \ldots, u_k$ a gyökérből a levélbe vezető út, melyen u_ℓ az első felfedetlen csúcs. Felfedjük $u_i \in \{u_\ell, u_{\ell+1}, \ldots, u_{k-1}\}$ éleit úgy, hogy az u_i és u_{i+1} között menő él könnyű legyen, továbbá bármely csúcsból pontosan két könnyű és egy nehéz él menjen. Ugyanezt ismételjük meg x-hez vezető úton. Ekkor az $[0,x]$ intervallum értéke a 12. Lemma szerint meghatározható.

Vágás*(értékfa, x)***: A 0 pont esetében ugyanazt megismételjük, mint az előbb. Legyen y az a pont, amire $\mu(0,y)=x$. A 12. Lemma szerint meg tudjuk keresni az 0-t és y-t tartalmazó levelek utolsó közös ősét, legyen ez a csúcs u. Nevezzük u'-nek az u-ból y-t tartalmazó levélig menő út első felfedetlen csúcsát. Képzeljük most u'-t gyökérnek és az így módosult érték, amit "vágnunk kell" legyen γ. Ha $\gamma>\beta/3$, akkor az első gyerekhez vezető él legyen nehéz, a másik kettő könnyű. Egyéb esetben az első kettő legyen a könnyű él. Mivel $\beta/3<1/2$, így az az él u'-ből mely az y-t tartalmazó levélhez vezet mindkét esetben könnyű lesz. Ezután u'-ből az úton lefelé ezt ismételgetjük, addig míg azt y-t tartalmazó levélhez nem érünk.

13. Lemma. *Ha egy eljárás képes arra, hogy kritikus vagy értékes levelet találjon a fában, akkor a műveletigénye legalább* $\log D$.

Bizonyítás. A fenti stratégiát követve a megmaradó tulajdonságok tényleg teljesülnek, ez egyszerűen ellenőrizhető. Így minden út legfeljebb $\log(n)/6-1$ nehéz élet tartalmaz. Viszont mi a 11. Lemmában beláttuk, hogy bármely értékes vagy kritikus levélhez vezető úton több mint $\log(n)/6-1$ nehéz él van. Így az eljárás nem tud biztosan ilyen levelet mutatni. Ezen a ponton minden intervallum sűrűsége kisebb mint 2, így semelyik felfedett csúcs sem kritikus. Vagyis a fenti élcímkézés megfelel az értékfa szabályainak, teljesül, hogy minden csúcsból két könnyű és egy nehéz él indul. Mivel a $\lfloor(\log(n)/6-1)/2\rfloor$ lépés nem volt elegendő, így a műveletigény tényleg $\Omega(\log n)$. □

6. Tétel. *Ha egy eljárás képes arra, hogy tetszőleges* $(0,2)$*-sűrű* μ *értékelőfüggvényre nézve* D*-nehéz darabot találjon, akkor a legrosszabb esetben* $\Omega(\log D)$ *műveletre van szüksége.*

Bizonyítás. Legyen $T(D)$ a műveletigénye a D-nehéz darabot találó eljárásnak. Ekkor $O(T(D))$ időben egy kritikus vagy értékes csúcsot is meg tudunk adni 10. Lemma szerint. Ennek a komplexitása viszont $\Omega(\log D)$, így $T(D) = \Omega(\log D)$. □

Játékfelállás: Határozzuk meg, milyen esetekre akarjuk bizonyítani azt, hogy $n \log D$ lépésre szükségünk van a helyes házimunka-elosztás megtalálásához. Válasszunk c tetszőleges konstanst (melyre cn egész) és legyen:

- cn darab szerény játékosunk $(1/2, \infty)$-sűrű értékelőfüggvényekkel, $1/D$ követeléssel,
- $(1-c)n$ mohó játékos a Lebesgue mértékkel és összesen $\frac{D-cn}{D}$ követeléssel (nem szabjuk meg, hogyan osztozkodnak ezen belül).

A következő lemma alsó becslést ad az igazságos elosztásban szereplő D-könnyű darabok számára:

14. Lemma. *A fenti feladat bármely igazságos* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *elosztásánál legalább* $cn/3$ *darab* D*-könnyű lesz a tulajdonosa számára.*

Bizonyítás. $\sum |X_i| = 1$ és első cn játékosainkra $\mu_i(X_i) \leq 1/D$ feltételek adottak, hiszen igazságos elosztásunk van. A mérték sűrűsége miatt továbbá fennáll $\mu_i(X_i) \geq |X_i|/2$, így $|X_i| \leq 2\mu_i(X_i) \leq 2/D$ teljesül. Tegyük fel, hogy az első cn személy között t olyan kiosztott darabunk van, amely kisebb, mint $\frac{1}{2D}$. A szerény játékosok által megkapott darabok méretének legalább $\frac{cn}{D}$-t el kell érnie ahhoz, hogy a mohó társaik összesen legfeljebb a részesedéseiknek megfelelő munkát kapjanak. Ekkor a Lebesgue-mértékeket felülről becsülve a szerény játékosokra és összeadva a darabokra a következőt mondhatjuk el:

$$\frac{t}{2D} + \frac{2(cn-t)}{D} \geq \frac{cn}{D} \implies t \leq \frac{2cn}{3}.$$

Azaz a szerény játékosok legalább harmadának van könnyű darabja, az ő számuk $\Omega(n)$, így az n darab között a könnyűek száma is $\Omega(n)$. □

7. Tétel. *Bármely igazságos egyenlő házimunka-elosztást előállító eljárás* $\Omega(n \log D)$ *műveletet igényel a legrosszabb esetet tekintve.*

Bizonyítás. Legyen az eljárás komplexitása $T(n, D)$. Válasszunk c-t úgy, hogy $cn \leq n$ egész. Vegyünk cn darab $(0, 2)$-sűrű pozitív értékelőfüggvényt, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{cn}$-t, valamint a Lebesgue-mértéket $\mu_{cn+1}, \mu_{cn+2}, \ldots, \mu_n$-nek és oldjuk meg az igazságos elosztást a duálisukra úgy, hogy az első cn darab játékos részesedése $1/D$, a többieké pedig összesen $\frac{D-cn}{D}$. Legyenek a játékosoknak járó részek $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Egy-egy μ_i^*-ra vonatkozó műveletet $O(1)$ időben meg tudunk válaszolni μ_i segítségével is 5. Lemma alapján. Így a partíciót $O(T(n, D))$ időben elkészíthetjük.

A duális értékelőfüggvények $P_1, P_2, \ldots, P_{cn}$ esetén $(1/2, \infty)$-sűrűek 6. Lemma alapján. Így a 14. Lemma szerint legalább $cn/3$ D-könnyű darab van X_i-k között. Vegyük minden X_i-nek a duálisát, jelöljük Y_i-vel. Mivel egy X_i legfeljebb $O(T(n))$ intervallum uniója, így ezek meghatározása is $O(T(n))$ lépésben sikerül. Ekkor Y_i-k között legalább $cn/3$ D-nehéz darab van μ_i-kre nézve (hiszen 7. Lemma alapján duális függvényre nézve könnyű darab duálisa nehéz). Ezeket meg is tudjuk találni gyorsan, csak meg kell őket mérnünk. Így a 6. Tétel miatt $T(n, D) = \Omega(n \log D)$, hiszen eljárást kapunk $\Omega(n)$ D-nehéz darab megtalálására. $\square$

5. fejezet

Osztozkodás egy megégett tortán

Hogyan tudjuk elosztani a tortánkat abban az esetben, hogyha egyes részei égettek, emiatt néhány játékosnak nemkívánatosak? Vagy épp az otthoni feladatokat, hogyha egy-egy családtag mégis szeret porszívózni vagy mosogatni? Azaz mi történik, hogyha az 1. Definícióban a játékosoknak általános mértéket engedünk meg?

Elsőre azt gondolnánk, a feladat nem nehéz, hiszen először felosztjuk a tortát olyan részekre, amelyekre jut olyan játékos, aki pozitívnak tekinti, illetve egy olyanra, amelyet senki sem kedvel. Ez utóbbit a házimunkákra megismert eljárások egyikével elosztjuk az n játékos között. Az olyan részeket, amelyeket a játékosok egy részhalmaza végig nemnegatívnak tekintett, pedig az eredeti eljárások segítségével osztunk el csak a kedvelői között. A fenti gondolatmenet ott bukik el, hogy az engedélyezett műveletekkel nem tudjuk kideríteni, hogy egy μ_i mértéke a torta mely részein negatív, hiszen akár végtelen sok ilyen szakasz is előfordulhat.

A vegyes alaphalmaz ötlete először [4]-ben merült fel, ám szerzői homogén, tovább nem osztható tárgyak partícióját vizsgálták. Az azóta megjelent cikkek vagy ugyanezen a modellen dolgoznak, vagy irigységmentes elosztást keresnek az égett tortán. A következőkben áttekintjük, hogy a szakdolgozatban eddig szereplő eljárások közül melyek alkalmazhatóak égett torta esetén is, illetve elmagyarázzuk, hol a probléma azoknál, amelyek nem működnek.

Égett torta értéke: Először is meg kell állapodnunk az égett torta összértékén, illetve a részesedéseken. Továbbra is elvárjuk, hogy a játékosok megegyezzenek Ω értékén, és mivel a mértékeket át tudjuk skálázni, így csak a 0, 1, -1 kerülhet szóba. A 0 eset érdektelen, hiszen igazságos elosztást készíthetünk úgy, hogy egy játékosnak odaadjuk a torta egészét, így mindenkit elégedetté téve. A -1 és 1 értékű torta esete nem pont ugyanaz. Pozitív összérték esetén mindenki legalább a pozitív részesedésének megfelelő tortát akar kapni, viszont vannak égett szeletek is ott, ahol a játékosok mértéke negatív. Negatív összérték esetén ugyan előfordulhatnak kívánatos részek mindenki számára, ám az alaphalmaz így is összességében negatív értékű, így mindenki legalább a negatív követelését szeretné megkapni, azaz felülről korlátozni, hogy mennyi nem kívánatos "égett tortát" kap. A házimunkák elosztása ennek a speciális esete, végig negatív mértékekkel.

Mi azt az esetet fogjuk áttekinteni, amikor az összérték 1, és minden játékos követelése pozitív. A másik nagyon hasonlóan működik.

Megjegyzés. Elsőre érdekesnek tűnhet az az eset is, ahol néhány játékos -1-nek, mások 1-nek értékelik a vegyes alaphalmazt. Viszont ekkor egyszerűen kihagyhatjuk az osztozkodásból a -1-es játékosokat, hiszen nekik így nem kell veszteséget elkönyvelniük, társaik pedig több részt tudnak szerezni a számukra értékes tortából.

5.1. Működő eljárások

- **Fink:** Kezdőesete az „egyik felez, másik választ". Ez továbbra is rendben van, hiszen P_1 mindkét esetben $1/2$ értékhez fog jutni, P_2 is elégedett lesz, hiszen a számára jobb szeletet választhatja. Ez az indukció kezdőesete. Mikor már $n-1$-re jó elosztásunk van, akkor az eljárás szerint mindenki felosztja n részre a saját eddigi szeletét. P_n ezután kiválaszt mindenkitől egy részt. Természetesen előfordulhat, hogy egy P_i játékos n szelete számára mind negatív, de ekkor egyszerűen a legkevésbé rossz mellett dönt. Így egy $n-1$ tagú összeg minden tagjának legalább $1/n$ részét megszerzi, ezek összege is legalább $1/n$-et tesz ki. A régi játékosok is elégedettek maradnak.

- **KFE:** Továbbra is igaz lesz, hogy mikor P_i, $i \in \{1, 2\}$ a két "közel fél" rész közül választ, akkor az egyik darabot legalább annyira fogja értékelni, amennyit a címke mond, hiszen társával egyetértenek az alaphalmaz összértékén. Az eljárás során mindig a címke értékével csökkentjük a még fennmaradó követeléseket. Mivel mindig az a játékos osztja ketté a tortát, akinek kisebb a követelése, elkerüljük, hogy ezek 0 alá kerüljenek. Itt nem fog előfordulni olyan, hogy egy játékosnak negatív címkéjű szeletet kell elfogadnia, hiszen a még el nem osztott égett torta összértéke végig pozitív marad és a címkékre írt értékek ennek "közel felei".

- **Ramsey-felbontás:** Ugyanazt a címkés érvelést használhatjuk, mivel a követelések pozitívak, így a Ramsey-felbontás is jól definiált.

Megjegyzés. A hagyományos tortaosztás során a játékosok maximális nyeresége a torta összértékében korlátozva van. Előjeles mértékek esetén azonban a szereplők tetszőlegesen nagy nyereséget tudnak elkönyvelni. Például „egyik felez, másik választ" során lehet, hogy P_2 a számára felajánlott két fél közül az egyiket $-x$-re, a másikat $x+1$-re értékeli tetszőleges $x>0$-ra.

5.2. Nem működő eljárások

A fenti módszerekben az volt a közös, hogy nem tettünk egy $B \subset A$ értékére állítást $\mu_i(A)$ alapján. A tortás és házimunkás esetben ezt megtehettük, fennállt a $\mu_i(B) \leq \mu_i(A)$ reláció. Viszont előjeles mértékek esetén óvatosabbnak kell lennünk, nézzük meg tehát, hol történik meg ez a tiltott lépés a többi eljárásban.

- **Banach–Knaster:** Vegyünk csak 3 játékost. P_1 bejelöli a szerinte $1/3$ részt a pontban. Tegyük fel, hogy a $[0,a]$ szakaszt P_2 kisebbnek találja, mint $1/3$, így nem csonkítja tovább, viszont P_3 szerint többet ér ennél, ezért b pontban bejelöli a szerinte $1/3$ részt. Hogyha feltesszük, hogy a *Vágás* művelet az első megfelelő pontot adja vissza, akkor az igaz, hogy P_1 számára nem okoz problémát, hogy $[0,b]$-t P_3-nak allokálja a játékvezető, hiszen $b<a$ és az eloszlásfüggvény folytonossága miatt $\mu_1([0,b]) < 1/3$ fennáll. Viszont attól, hogy P_2 $[0,a]$-t $1/3$-nál kisebbnek mondta nem biztos, hogy $[0,b]$-t annak fogja, hiszen $\mu_2([b,a])$ szakasz tetszőlegesen negatív lehet.

  Javítás: Ki fogjuk használni, hogy *Vágás* a legkisebb jó értéket adja vissza. Egy-egy kör kezdetén minden játékosnak meg kell jelölnie az $1/n$ részt az alaphalmazon. Ezután kiválasztjuk a legelső jelölést, P_k-ét, és neki odaadjuk az általa lemetszett tortát. Ez a szelet mindenki más szerint legfeljebb $1/n$-et ér, hiszen ellenkező esetben az eloszlásfüggvény folytonossága miatt P_k jelölése előtt is lett volna egy megfelelő vágási pont a játékosok számára.

- **Even–Paz:** Legyen 4 játékosunk, illetve számozzuk át a személyeket úgy, hogy az első kör során a jelölések P_1, P_2, P_3, P_4 sorrendben legyenek. A szabályok szerint el kell vágnunk P_2 jelénél a tortát és P_1 és P_2 ezen az első felen fog osztozkodni a továbbiakban. Ahhoz, hogy az érvelésünk működjön, azt a tulajdonságot használtuk ki ekkor, hogy mivel P_2 jele elé esett P_1 jele, az új tortát P_1 is legalább 1/2 értékűnek gondolja. Viszont lehet, hogy a két jel közötti rész P_1 számára rettentően ellenszenves, így itt sajnos ez nem áll fenn.
- **Cseh–Fleiner:** Ennek alesete az Evan–Paz-eljárás, hogyha egyenlőek a részesedések, így sajnos ez sem működik égett tortán.

Bonyolultság: Mivel az "oszd meg és uralkodj" elven működő Even–Paz- és Cseh–Fleiner-eljárás elbukott előjeles mértékek esetén, így jelenleg mások a legjobb elérhető lépésszámaink. Arányos igazságos eljárás esetén az eddigi $O(n \log n)$ helyett jelenleg a javított Banach–Knasterrel tudunk $O(n^2)$ műveletszámot elérni. Részesedések esetén a KFE-t tudjuk alkalmazni $O(n^2 \log D)$ futásidővel. Amennyiben D nem sokkal nagyobb, mint n, a javított Banach–Knaster klónozásos verziója gyorsabb lehet a maga $O(D^2)$ idejével.

A hagyományos torta elosztása a vegyes alaphalmaz egy alesete, így az ott komplexitásra adott alsó korlátok továbbra is fennállnak.

Nyitott kérdés, hogy az Even–Paz-eljárást hogyan lehetne kijavítani erre az esetre. Hogyha ez megtörténne, valószínűleg ugyanazt a változtatást a Cseh–Fleiner-eljáráson is végrehajthatnánk. Így viszont jelenleg nem tudjuk, elérhető-e az áhított $O(n \log n)$, illetve $O(n \log D)$ bonyolultság.

Összefoglalás

Véget ért az ünnepség, képesek voltunk elosztani a tortát a vendégek között, és igazságosan kitakarítani a házat. Az incidens az odaégett süteménnyel sem akadályozhatott meg bennünket. Sikerült az arányos és a részesedéses feladat kívánatos alaphalmazra ismert eljárásait jellemeznünk, megértenünk, majd átalakítanunk.

Külön örülök, hogy sikerült azt is bebizonyítani, hogy az $O(n \log D)$ alsó korlát a követeléses házimunka-feladat esetén is fennáll. A bonyolultságról szóló bizonyítások azonban mindkét esetben arra a játékfelállásra építettek, ahol sok szerény és néhány nagyon mohó játékosunk van. Nyitott kérdés maradt, hogy mi a műveletigénye az olyan eseteknek, ahol a játékosok követelése $1/n$-hez közeli (például, ha két játékos $49 : 51$ arányban próbál osztozkodni). Egy következő lépcsőfok lehet az irracionális eset komplexitásának eldöntése is.

A jövőben szeretnék még időt szánni az előjeles értékelőfüggvények további vizsgálatára. Így, hogy az Evan–Paz-eljárás elbukott ebben a környezetben, nem tudjuk, hogy megegyeznek-e a bonyolultságok.

Szakdolgozatom írása közben meglepett, mennyire szerteágazó témát sikerült választanom, mennyi változata lehet egy eredetileg egyszerűnek és kissé komolytalannak tűnő feladatnak. Remélem az Olvasó tetszését is elnyerte az enyém mellett.

Irodalomjegyzék

[1] Haris Aziz és Simon Mackenzie. „A discrete and bounded envy-free cake cutting protocol for any number of agents”. *2016 IEEE 57th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*. IEEE. 2016, 416–427. old.

[2] Eric Balkanski, Simina Brânzei, David Kurokawa és Ariel Procaccia. „Simultaneous cake cutting”. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*. 28. köt. 1. 2014.

[3] Xiaohui Bei, Guangda Huzhang és Warut Suksompong. „Truthful fair division without free disposal”. *Social Choice and Welfare* 55 (2020), 523–545. old.

[4] Anna Bogomolnaia, Hervé Moulin, Fedor Sandomirskiy és Elena Yanovskaya. „Competitive division of a mixed manna”. *Econometrica* 85.6 (2017), 1847–1871. old.

[5] Ágnes Cseh és Tamás Fleiner. „The complexity of cake cutting with unequal shares”. *ACM Transactions on Algorithms (TALG)* 16.3 (2020), 1–21. old.

[6] Sina Dehghani, Alireza Farhadi, MohammadTaghi HajiAghayi és Hadi Yami. „Envy-free chore division for an arbitrary number of agents”. *Proceedings of the Twenty-Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. SIAM. 2018, 2564–2583. old.

[7] Lester E Dubins és Edwin H Spanier. „How to cut a cake fairly”. *The American Mathematical Monthly* 68.1P1 (1961), 1–17. old.

[8] Shimon Even és Azaria Paz. „A note on cake cutting”. *Discrete Applied Mathematics* 7.3 (1984), 285–296. old.

[9] Alireza Farhadi és MohammadTaghi Hajiaghayi. „On the Complexity of Chore Division”. *Proceedings of the Twenty-Seventh International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI-18*. 2018, 226–232. old.

[10] AM Fink. „A note on the fair division problem”. *Mathematics Magazine* 37.5 (1964), 341–342. old.

[11] Sally A Goldman és Kenneth J Goldman. *A practical guide to data structures and algorithms using Java*. Chapman és Hall/CRC, 2007.

[12] Yoshifumi Manabe és Tatsuaki Okamoto. „Meta-Envy-Free Cake-Cutting Protocols." *MFCS*. Springer. 2010, 501–512. old.

[13] Jack Robertson és William Webb. *Cake-cutting algorithms: Be fair if you can*. AK Peters/CRC Press, 1998.

[14] René L Schilling és Dietrich Stoyan. „Continuity assumptions in cake-cutting". *arXiv preprint arXiv:1611.04988* (2016).

[15] Erel Segal-Halevi. „Cake-cutting with di erent entitlements: How many cuts are needed?": *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 480.1 (2019), 123382. old.

[16] Harunor Shishido és Dao-Zhi Zeng. „Mark-choose-cut algorithms for fair and strongly fair division". *Group Decision and Negotiation* 8 (1999), 125–137. old.

[17] Itay Shtechman, Rica Gonen és Erel Segal-Halevi. „Fair cake-cutting algorithms with real land-value data". *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems* 35 (2021), 1–28. old.

[18] Hugo Steinhaus. „The problem of fair division". *Econometrica* 16 (1948), 101–104. old.

[19] Biaoshuai Tao. „On existence of truthful fair cake cutting mechanisms". *Proceedings of the 23rd ACM Conference on Economics and Computation*. 2022, 404–434. old.

[20] Attila Tasnádi. *Igazságos elosztások*. Typotex, 2014.

[21] *United Nations Convention on the Law of the Sea*. [Online; megtekintés: 2023. 03. 01.] 1982. URL: https://www.un.org/Depts/los/convention_agreements/convention_overview_convention.htm.

[22] Wikipedia. *E cient cake-cutting*. [Online; megtekintés: 2023. 02. 15.] 2022. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Efficient_cake-cutting&oldid=1068685257.

[23] Wikipedia. *Fair cake-cutting*. [Online; megtekintés: 2023. 02. 15.] 2023. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Fair_cake-cutting&oldid=1139232951.

[24] Gerhard J Woeginger és Jiří Sgall. „On the complexity of cake cutting". *Discrete Optimization* 4.2 (2007), 213–220. old.