Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi kar

Kockázati mértékek összehasonlítása

Kurucz Máté

Szakdolgozat, matematika BSc, alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Arató Miklós

Budapest, 2023

NYILATKOZAT

Név: KURUCZ MÁTÉ

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: OK42GJ

Szakdolgozat címe: Kockázati mértékek összehasonlítása

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2023. június 7.

Kurucz Máté

a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

Előszó

Életünk minden szakaszában előfordul, hogy fel kell mérnünk, megéri-e megcselekednünk valamit. Átszaladjak-e az úttesten, hogy ne késsek az egyetemi órámról, tudván, hogy elüthet egy autó, vagy pedig fogadjam el az 5 perces csúszást. Az ilyen fajta döntési esetekben nem mindig rendelkezünk objektív, számszerűsíthető mértékkel. Nem ez a helyzet a pénzügyi piacok esetében, ahol az évek folyamán sokféle számszerűsített mértéket kifejlesztettek már, melyek segítenek a kockázat felmérésében, s objektív alapot adhatnak egy döntés meghozatalához. Ezen dolgozatban bemutatunk néhány a gyakorlatban is használt kockázati mértéket, különösebb figyelmet szentelve azok koherenciájára.

Az első fejezetben definiáljuk a kockázati mértékek fogalmát, mit jelent koherenciájuk, valamint pénzügyi kontextusba helyezzük a matematikai definíciókat. A második fejezetben a kockáztatott érték nevű kockázati mértékre koncentrálunk, példákon keresztül szemléltetve szubadditivitásának hiányát. Ezután a harmadik fejezetben feltárjuk kapcsolatát kettő koherens kockázati mértékkel, közben jobban megismervén ezen kockázati mértékek tulajdonságait.

Az utolsó két fejezetben nagyobb szerepet kap a várható többletveszteség, mely az új banki szabályozások szerint a kockáztatott értéket hivatott leváltani. A negyedik fejezetben kétféleképpen is megmutatjuk, hogy a Várható többletveszteség koherens, mindkét esetben más oldalát megismerve. Az utolsó fejezetben a kockáztatott érték és a várható többletveszteség összehasonlításán kívül még kísérletet teszünk nagyfokú közelítést alkalmazva egy valós szcenárió veszteségének becslésére.

1.0 Kockázati mértékek és koherencia

Ebben a fejezetben bevezetjük a kockázati mértékek fogalmát, feléjük tanusított elvárásainkat, valamint a koherens tulajdonságukat [1] 2. és 3. fejezetét követve, közben figyelve arra, hogy a pénzügyi világból érkező motivációkat is megérthessük.

1.1 Kockázati mértékek

Definiálunk tehát az alábbiakban néhány pénzügyi fogalmat, melyek megértése hozzásegít a kockázati mértékek gyakorlati oldalának meglátásához.

Definíció 1.1.1. *(Pénzügyi instrumentum) Pénzügyi instrumentumnak nevezünk minden olyan szerződést két fél között, melynek pénzben kifejezhető értéke van. A dolgozat szempontjából itt olyan eszközöket értünk, melyek tőkével rendelkeznek és kereskedhetőek a piacokon. Pl.: részvények, kötvények, különféle határidős ügyletek. Néhány együttesen kereskedett pénzügyi instrumentumot nevezzük termékkombinációnak.*

Definíció 1.1.2. *(Tőzsdei pozíció) A tőzsdei pozíció egy pénzügyi eszköz vétele vagy eladása azzal a reménnyel, hogy azt a jövőben újra kereskedik. Ily módon a befektető nyereségre törekszik. A továbbiakban csak pozícióként említjük.*

Definíció 1.1.3. *(Portfólió) Adott befektető (legyen egyéni vagy intézményi) befektetéseit a portfóliója tartalmazza. Ezek lehetnek például részvények, értékpapírok, stb..*

A kockázatmegosztás egy fajtáját, ha egy portfólióban többfajta pozíciót is tarttunk, diverzifikációnak hívjuk. Mivel a befektetéseket együtt kezelve más, akár jobb kockázati értékelést kaphatunk, mintha az egyes befektetések kockázatát külön értékelnénk és összeadnánk, a befektetők portfólióik diverzifikálására vannak ösztönözve.

Definíció 1.1.4. *(Referencia intrumentum) A referencia instrumentum egy olyan kockázatmentes pénzügyi eszköz, melynek árát egy adott pénznemben egynek rögzítjük és* $r > 0$

hozama fix. Régiónként és pénzügyi környezetenként változik, hogy engedélyezi a felügyelőszerv, hogy lehet-e r kisebb, mint 0.

Természetesen a gyakorlatban nem létezik kockázatmentes pézügyi instrumentum, még a legbiztonságosabbnak tartott diszkont kincstárjegyek esetén fennáll a fizetésképtelenség esélye (pl. államcsőd miatt). Amikor a referencia instrumentumra hivatkozunk, akkor ettől eltekintünk. Pontfóliónk kockázatát tehát oly módon csökkenthetjük, hogy a portfóliónkhoz olyan tőkét adunk hozzá, melyet a referenciaeszközbe fektetünk be..
Tekintsünk tehát egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mértékteret, a legyen X egy valószínűségi változó a véges, n elemű Ω a halmazon. Legyen G az összes Ω-n értelmezett valószínűségi változónak a halmaza. Ezeket pénzügymatematikailag a következőképpen tudjuk tekinteni: Ω legyen különböző pozíciók halmaza, s legyen X egy véletlen változó, ami meghatározza egy bizonyos t jövőbeli időpillanatban a az adott pozíció végleges nettó értékét. Ω végessége miatt $\mathbb{R}^n$-nel azonosíthatjuk G-t és ekkor legyen L_+ a benne lévő nemnegatív, L_- a nempozitív és L_{--} a negatív koordinátájú elemek kúpja.
Ha az X valószínűségi változót a egy pozíció árfolyamának mozgását írja le, akkor pozitív értékeit nyereségként, negatív értékeit veszteségként értelmezzük. Példaképp tegyük fel, hogy minden nap a tőzsde nyitásakor eladunk egy bizonyos részvényt. Legyen Z_i $i \in \mathbb{N}$ a részvény nyitóárfolyama az egyes napokon. Ekkor a nyitóárfolyam mozgását leírni hivatott X valószínségi változó a következő: $X_0 = 0, X_i = Z_i - Z_{i-1}$, ahol $i \in \mathbb{N}^+$. A dolgozatban később előforduló X valószínűségi változókra tehát tekinthetünk ilyen módon, így könnyebben nyerhetünk pénzügyi értelmet a dolgozatban többségüknben matematikai módon megfogalmazott állításoknak.
Mivel nem minden termékkombináció elérhető a piacokon, azok természetéből és a felügyelőszervek szabályozásaiból adódóan, bevezetjük az akceptancia halmaz fogalmát, mely az elérhető termékkombinációkat foglalja magában. $\mathcal{A}$ jelölje az összes regulátor által engedélyezett végleges nettó értékek halmazát egy adott fizetőeszközben kifejezve. Ahhoz, hogy a kockázati mértékek és az akceptancia halmazok között mélyebb összefüggést fogalmazhassunk meg, a későbbiekben megkövetelünk néhány tulajdonságot $\mathcal{A}$-tól.

- T1) $L_+ \subseteq \mathcal{A}$
- T2) $\mathcal{A} \cap L_{--} = \emptyset$
- T2') $\mathcal{A} \cap L_- = \{0\}$ (Ez erősebb, mint T2).)

- T3) $\mathcal{A}$ konvex (Ez tükrözi a szabályozószerv konzekvenciáját.)

- T4) $\mathcal{A}$-ra teljesül a pozitív homogenitás, azaz $\forall\lambda \geq 0$-ra ha $B \in \mathcal{A}$, akkor $\lambda B \in \mathcal{A}$

Definíció 1.1.5 (Kockázati mérték)**.** *$\rho(X) : G \to \mathbb{R}$ egy kockázati mérték. Ha pozitív, az adott pozícióhoz a kereskedőnek $\rho(X)$ mennyiségű tőkét kell hozzáadnia, ha negatív, $-\rho(X)$ tőkét elvonhat belőle.*

Most egy olyan kockázati mértéket mutatunk be példaképp, mely megtalálható az Egyesült Államokbéli Értékpapír-kereskedők Nemzeti Szövetségének és Az Egyesült Államok Értékpapír- és Tőzsdefelügyeletének (SEC) szabályzatában is, követve [1] 12−14. oldalát. Ennek a kockázati mértéknek kiszámításakor a portfoliókat értékpapírok listájaként tekintik és a kockázatot kvantifikálva tőkepótlási mennyiséget szeretnénk meghatározni. Az egyszerűség kedvéért minden portfólióbéli pozícióra feltesszük, hogy lejárati dátumuk azonos, valamint mindegyikre teljesül, hogy vagy egy adott értékpapírra vonatkozó ”long call” opció, vagy ”short call” opció. A módszerben a következőt tesszük: egy (vonatkozó európai) short és egy (európai) long call pozíciót párosítunk, ezeket jelöljük C_H-val és C_K-val, lehívási árfolyamuk H és K), az ezekhez tartozó standard kockázat legyen $K - H$, ha $H \leq K$ és ezt a párost $S_{H,K}$-val jelöljük.

Megjegyzés 1.1.6. *A long call opció megvásárlásával a befektető jogot vásárol arra, hogy a jövőben egy meghatározott lejárati időpontban az ügyletben meghatározott áron egy bizonyos értékpapírt megvásárolhasson. A short call opció esetében pedig az eladás jogát vásárolja meg.*

Most tekintsük az A portfóliót mely tartalmaz a_H darab H lehívási árfolyamú call pozíciót, ahol $H \in \mathcal{H}$ és $\mathcal{H}$ a lehívási árfolyamok egy véges halmaza. A probléma visszavezethetősége miatt feltehető, hogy $\sum_H a_H = 0$. Ha ki szeretnénk számolni a portfoliónkhoz szükséges tőkeinjekciót, az alábbi lineáris programozás feldattal találkozunk:

$$inf_{n_{H,K}} \sum_{H,K,H \neq K} n_{H,K} (H - K)^+ ,$$

ahol $n_{H,K}$ azt jelöli, hogy a portfólió a C_H-C_K párosból hány darabot tartalmaz.

$$\forall H, K, H \neq K \colon n_{H,K} \geq 0, A = \sum_{H,K,H \neq K} n_{H,K} S_{H,K}$$

Ezzel olyan párokba állítását kaphatjuk meg a portfóliónak, hogy minden pár nemnegatív nettő értékkel jelenik meg benne a közös lejárati dátumra vonatkozóan.
Most tekintsük a lineáris programozás feladat duálisát, mely felírható a következő alakban:

$$inf_{\pi_K} \sum_K \pi_K a_K,$$

ahol

$$\forall K \in \mathcal{H}\ \pi_K < 0 \text{ és } \pi_H - \pi_K \geq H - K, \text{ ha } H > K.$$

Alkalmazzuk a dualitás tételt a feladatra, s azt kapjuk, hogy A legkisebb végső nettó értéke a közös lejáratkor nem lehet nagyobb, mint a legalacsonyabb szükséges tőkeinjekció mértéke.

Definíció 1.1.7 (Kockázati mérték akceptancia halmazzal)**.** *Tekintsünk egy olyan referenciaeszközben nevezett pénzügyi terméket, melynek r hozama fix, valamint a rögzített A akceptancia halmazt. Ekkor legyen* $\rho_{\mathcal{A},r} : G \to \mathbb{R}$:

$$\rho_{\mathcal{A},r}(X) = \inf\{m | mr + X \in \mathcal{A}\}.$$

Nem csupán kockázati mértékeket lehet definiálni akceptancia halmazok segítségével, hanem fordítva is megtehető ez:

Definíció 1.1.8. *(Akceptancia halmaz kockázati mértékkel) Legyen* ρ *egy kockázati mérték, ekkor*

$$A_\rho = \{X \in G | \rho(X) \leq 0\}$$

1.2 Koherencia

Ha meggondoljuk, hogy milyen céllal szeretnénk használni kockázati mértékeket, eszünkbe juthat néhány tulajdonság, melyet az alkalmazó elvárna a fogalomtól. Néhány természetesnek tűnő tulajdonsággal definiálom a koherens kockázati mértékeket, melyek dolgozatomban fontos szerephez fognak jutni. Ezeket a tulajdonságok természetesen nem hagyományos értelemben vett axiómák, de az akceptancia halmazokhoz tartozó tulajdonságoktól való kellő megkülönböztetés érdekében axiómaként hivatkozunk rájuk.

- (T) axióma: eltolás invariancia, azaz $\forall X \in G$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\rho(X + \alpha r) = \rho(X) - \alpha$$

- (S) axióma: szubadditivitás, azaz $\forall X_1, X_2 \in G$

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$$

- (PH) axióma: pozitív homogenitás, azaz $\forall \lambda \geq 0$, $\forall X \in G$

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$$

- (M) axióma: monotonitás, azaz

$$\forall X, Y \in G, \text{ ahol } X \leq Y: \ \rho(Y) \leq \rho(X)$$

- (R) axióma: relevancia, azaz

$$\forall X \in G, X \leq 0, X \neq 0: \rho(X) > 0$$

Megjegyzés 1.2.1. *Az (S) axióma több entitás szempontjából is kulcsfontosságú információt foglal magában. A kereskedést lefolytató szervezet számára így követhető marad a pozíciók felvevése (hiszen két pozíciót így jobban megéri például egy számlán felvenni a kereskedőnek). A nagy összképre is rávetíthető ez a gondolatmenet, ugyanis a nagyobb, sokszínűbb tevékenységi palettával rendelkező cégek számára számára kedvezőbben alakulhatnak a tőkekalkulációk egy (S) axiómát teljesítő kockázati mérték használatával, másképpen fogalmazva ugyanazzal a tőkemennyiséggel több üzletet köthetnek, ha nem döntenek szétaprózódás mellett. Ez a felügyelő szervek szempontjából sem jelentéktelen, a kevesebb, de nagyobb cég könnyebben áttekinthető piaci tevékenységet eredményez.*

Definíció 1.2.2 (Koherens kockázati mérték)**.** *ρ kockázati mérték koherens, ha teljesíti (T), (S), (PH), (M) axiómákat.*

A következőkben néhány összefüggést látok be az akceptancia halmazok és az előbbi axiómák között a jobb megértés érdekében.

Állítás 1.2.3. *Ha a B akceptancia halmazra teljesül T1), T2), T3) és T4), akkor az általa indukált $\rho_{B,r}$ kockázati mérték koherens, valamint $A_{\rho_{B,r}} = \overline{B}$, ahol $\overline{B}$ a B lezártja.*

Bizonyítás: T2) miatt létezik minden X-re egy ω, aminek a valószínűsége pozitív, így X nem egy üres pozíciót határoz meg, s ezzel együtt a konvexitásból következik $\rho(X)$ végessége.
Ezután belátjuk, hogy az indukált mértékre teljesül (T). Tekintsük az alábbi egyenlőtlenséget:

$$inf\{p|X + (\alpha + p) \cdot r \in B\} = inf\{q|X + q \cdot r \in B\},$$

ebből pedig

$$\rho_{B,r}(X + \alpha \cdot r) = \rho(X) - \alpha.$$

Most belátjuk, hogy $\rho_{B,r}$-re teljesül a szubadditivitás. Ha $X + m \cdot r \in B$, $Y + nr \in B$, akkor a pozitív homogenitás miatt $n(x + r \cdot m) \in B$, $m(Y + r \cdot n)$ konvxexitás miatt ezek konvex kombinációja $X + Y + (m + n) \cdot r \in B$, így teljesül a szubadditivitás.
Ezután következzen a pozitív hogenitás ellenőzése. Tegyük fel, hogy $m \geq \rho_{B,r}(X)$, ekkor $\lambda X + \lambda \cdot m \cdot r \in B$. $\rho_{B,r}$ definíciójából és a pozitív homogenitást kihasználva kapjuk, hogy $\rho_{B,r}(\lambda X) \leq \lambda \cdot m$. Most azt tegyük fel, hogy $m \leq \rho_{B,r}(X)$, ekkor $\forall \lambda > 0$-ra $\lambda X + \lambda \cdot m \cdot r \cdot \notin B$, ebből pedig következik, hogy $\rho_{B,r}(\lambda X) \geq \lambda \cdot m$. Tehát $\rho_{B,r}(\lambda X) = \lambda \rho_{B,r}(X)$.
Az axiómák közül utoljára a monotonitást látjuk be. T1) miatt, ha $X \leq Y$ és $\rho(X) = m$, akkor $Y - X \in B$, $X + m \cdot r \in B$ és a konvexitás miatt $(Y - X) + X + m \cdot r \in B$, azaz $Y + m \cdot r \in B$, s ebből már következik $\rho(Y) \leq m$. Ezzel pedig beláttuk, hogy a $\rho_{B,r}$ kockázati mérték koherens.
Mivel minden $X \in B$-re $\rho_{B,r} \leq 0$, ezért definíció szerint $X \in \mathcal{A}_{\rho_{B,r}}$. A korábbiakból adódik, hogy $\mathcal{A}_{\rho_{B,r}}$ zárt, ezzel pedig beláttuk, hogy $\mathcal{A}_{\rho_{B,r}} = \overline{B}$.

Állítás 1.2.4. *Ha ρ kockázati mérték koherens, akkor az általa generált akceptancia halmaz $\mathcal{A}_\rho$ zárt és teljesíti T1)-T4) tulajdonságokat, valamint $\rho = \rho_{\mathcal{A}_\rho,r}$.*

Bizonyítás: Először belátjuk, hogy minden ρ koherens kockázati mérték konvex. Indirekt módon tegyük fel, hogy ρ nem konvex. Ekkor

$$\frac{1}{2}(\rho(X + Y)) = \rho\left(\frac{X + Y}{2}\right) \geq \frac{1}{2}(\rho(X) + \rho(Y)),$$

a pozitív homogenitást kihasználva, s ez ellentmond ρ szubadditivitásának, azaz ρ kon-

vex. A konvexitásból következik a G-n való folytonossága, így $\mathcal{A}_\rho = \{X \in G | \rho(X) \leq 0\}$ zárt, konvex kúp.
Most ellenőrizzük, hogy teljesül T1) $\mathcal{A}_\rho$-ra. A pozitív homogenitásból következik, hogy $\rho(0) = 0$. A monotonitás miatt $\forall 0 \leq X \in G$-re $\rho(X) \leq 0$, azaz $X \in A_\rho$, tehát $L_+ \subseteq A_\rho$.
A következő lépésben vizsgáljuk a kettes tulajdonság meglétét. Legyen most $X \in L_{--} = \{X | \forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) < 0\}$. Kérdés, hogy $\rho(X)$ milyen értékeket vehet fel. Legyen $\rho(X) < 0$. A monotonitásból következik, hogy mivel $X \geq 0$, ami ellentmond annak, hogy $M \in L_{--}$. Ha $\rho(X) = 0$, akkor $\exists \alpha > 0$, hogy $X + \alpha r \in L_{--}$, amire ha alkalmazzuk az eltolási axiómát, akkor $\alpha \leq 0$ ellentmondásba ütközünk, így skatulyaelv miatt $\rho(X) > 0$. Viszont emiatt $X \notin A_\rho$, azaz megkaptuk a második axiómát.
A hármas tulajdonság azonnal következik ρ konvexitásából, valamint T4) ρ pozitív homogenitása miatt teljesül.
Hátra maradt tehát belátni, hogy a koherens kockázati mérték által generált akceptancia halmaz, és az ezen akceptancia halmaz által generált kockázati mérték megegyezik. $\forall X$-re legyen δ olyan, hogy $\rho_{A_\rho,r}(X) < \delta$. Ekkor $X + \delta r \in A_\rho$, azaz $\rho(X + \delta r) \leq 0$, az eltolás-invariancia miatt $\rho(X) \leq \delta$. Tegyük fel indirekt módon, hogy $\rho(X) > \rho_{A_\rho,r}(X)$. Ekkor $\exists \beta$, hogy

$$\rho_{A_\rho,r}(X) < \beta < \rho(X) \implies \rho(X) \leq \beta < \rho(X),$$

ami ellentmondás. Itt felhasználtuk, hogy $\rho_{A_\rho,r}(X) < \beta$, akkor és csak akkor, ha $\rho(X) \leq \beta$ definíció alapján. Az egyenlőtlenség egyik irányával készen vagyunk, most a másik irányt fogjuk belátni.
Most $\forall X$ legyen $\rho(X) < \delta$, ekkor $\rho(X + \delta r) < 0$ és $X + \delta r \in \mathcal{A}_\rho$, így $\rho_{\mathcal{A}_\rho,r}(X + \delta r) \leq 0$. Tegyük fel indirekten, hogy $\rho_{A_\rho,r}(X) > \rho(X)$. Ekkor $\exists \gamma$, hogy

$$\rho_{A_\rho,r}(X) > \gamma > \rho(X) \implies \gamma \geq \rho_{A_\rho,r}(X) > \gamma,$$

ami ellentmondás. Felhasználtuk az előbb látott ekvivalenciát. Mivel $\rho \leq \rho_{A_\rho,r} \leq \rho$, ezért $\rho = \rho_{A_\rho,r}$ és ezt akartuk belátni.
Az utolsó olyan állítás, mely összefüggést fogalmaz meg a koherens kockázati mértékek és az akceptancia halmazok között és ebben a munkában helyet kap, beemeli feltételei közé az egy fokkal erősebb T2') alaptulajdonságot, mely A és L_- metszetének ürességét fogalmazza meg.

Állítás 1.2.5. *Ha a B halmaz teljesíti T1)-et, T2')-t, T3)-at és T4)-et, akkor a koherens kockázati mérték $\rho_{B,r}$ teljesíti a relevancia axiómát is. Az állítás megfordítása pedig az alábbi módon igaz: Ha a ρ koherens kockázati mérték teljesíti a relevancia axiómát, akkor az általa generált akceptacia halmaz teljesíti T2')-t.*

Bizonyítás: ($\Rightarrow$) Legyen $X \in G, X \leq 0, X \neq 0$, ekkor $X \in L_{-}$ és $X \neq 0$, tehát T2') miatt $X \notin B$, azaz $\rho_{b,r}(X) > 0$.
($\Leftarrow$) $\forall X \in L_{-}$-ra és $X \neq 0$-ra a relevancia axióma miatt $\rho(X) > 0$, így pedig $X \notin B$.
A kockázatmérés egy prevalens módja a szcenáriókra alapozott kockázatmérés, mely során előre meghatározott szcenáriók kimeneteleit vizsgáljuk.

Definíció 1.2.6 (Valószínűségi változó tartója)**.** *Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ egy valószínűségi változó az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn. X tartója a legkisebb zárt $R_X \subseteq \mathbb{R}$, melyre* $\mathbb{P}(X \in R_X) = 1$

Definíció 1.2.7. *(Szcenáriókra (forgatókönyvekre) alapozott kockázati mérték / Valószínűségi mértékek családja által definiált kockázati mérték) Legyen Ω véges, $\mathcal{P}$ Ω-n értelmezett valószínűségi mértékek nem üres halmaza, valamint legyen r a referencia instrumentum teljes hozama. Ekkor $\rho_{\mathcal{P}}$ egy szcenáriókra alapozott kockázati mérték, ahol*

$$\rho_{\mathcal{P}} = \sup\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[-\frac{X}{r}\right] | \mathbb{P} \in \mathcal{P}\}$$

Állítás 1.2.8. *A szcenáriókra alapozott kockázati mértékek koherensek. Akkor és csak akkor teljesítik az (R) axiómát, ha az adott családba tartozó valószínűségi változók tartóinak uniója megegyezik Ω-val.*

Bizonyítás: Először lássuk be, hogy a kockázati mérték koherens. A pozitív homogenitás, az eltolás invariancia és a monotonitás mind következnek a várható érték alaptulajdonságaiból. A szubadditivitás belátása kevésbé triviális, ehhez tekintsük a következőket:

$$\sup\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[-\frac{X+Y}{r}\right] | \mathbb{P} \in \mathcal{P}\} = \sup\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[-\frac{X}{r}\right] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[-\frac{X}{r}\right] | \mathbb{P} \in \mathcal{P}\} \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[-\frac{X}{r}\right] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[-\frac{Y}{r}\right],$$

a szuprémumra vonatkozó háromszögegyenlőtlenség miatt.
Most térjünk át az (R) axiómára vonatkoz állításra. Legyen ρ egy koherens kockázati mérték, X pedig egy nempozitív, de nem a csupa nulla valószínűségi változó. Ekkor $\forall \omega \in \Omega$ létezik egy $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$, amire $X(\omega) \geq \lambda \mathbf{1}_{\{\omega\}}(\omega) \leq 0$, ahol $\lambda \leq 0$ s így a pozitív

homogenitás és monotonitás következtében az (R) axióma a következővel ekvivalens $0 < \rho(X) < \rho(\mathbf{1}_{\{\omega\}})$. Ez pedig megegyezik azzal, hogy minden szcenárió legalább egy $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ szupportjában megtalálható.

Tekintsünk most egy másik példát. Míg az előző példa nem volt koherens, most egy olyat konstruálunk a fenti módon, hogy az előző állítás miatt koherens lesz.

Szeretnénk alsó becslést kapni egy pénzintézet működési kockázati tőkéjére. Ennek legalább akkorának kell lennie, mint az intézet számára, illetve az által prezentált egyes szcenáriókra vonatkozóan kalkulált legnagyobb várható veszteség. A szcenáriók a következők lehetnek a példa kedvééert:

- Tűzeset következik be a pénzintézet épületében. A tűz több emeletre is átterjed, kritikus infrastruktúra sérül.
- Az üzletkötés folytonossága szempontjából kritikális informatikai rendszer 24 órán keresztül nem üzemel, az üzletkötés szünetel.
- Alkalmazottak egy csoportjáról bebizonyosodik, hogy bennfentes kereskedelemben vettek részt. Negatvan bolyásolták az intézmény értékét és a szabályozószerv bírságot szab ki.
- Stb..

Legyen $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ tehát azon szcenáriók véges halmaza, melyek a regulátor által a pénzintézet részére lettek bocsájtva, valamint azok, melyek a pénzintézet saját kockázatelemzése során azonosított. Ezek elemzésének figyelembe vételével kell a tőkeszámításaikat elvégezniük. Legyen $\Omega = \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ az s_i szcenáriók legnagyobb várható veszteségei (USD-ben megadva). Most legyen $\forall i = 1, 2, ..., n$-re $\mathbb{P}_i$ az ω_i-hez tartozó valószínűségi tömegfüggvény, azaz $\mathbb{P}_i(\omega_i) = 1$, különben 0. Ha minderre a korábbi definíciót alkalmazzuk, akkor azt kapjuk $r = 1$ választással, hogy a koherens kockázati mértékünk a legnagyobb előforduló veszteség lesz. Ha a működési kockázati tőke ezt nem képes fedezni, legalább a kettő különbségének megfelelő tőkeinjekciót kell alkalmaznia a pénzintézetnek.

Megjegyzés 1.2.9. *A továbbiakban az $r = 1$ választással fogunk élni, alkalmazkodva a szektorban bevett gyakorlathoz. Ennek megfelelően egy kockázati mértéknek az X valószínűségi változóra vett értékének a kiszámításakor nem kell a diszkontált $\frac{X}{r}$ változatát figyelembe venni.*

2.0 A kockáztatott érték

Ebben a fejezetben a kockázatott érték kockázati mértékkel (Value at Risk - VaR) foglalkozunk, követve [1] 2. fejezetét. Bemutatjuk, hogy mely elvárt tulajdonságok közül melyekkel rendelkezik a kockázatott érték, valamint több ízben is saját példákkal demonstráljuk, hogy milyen hátrányai lehetnek használatának.

2.1 A kockáztatott érték és tulajdonságai

A VaR definiálásához azonban még meg említenünk egy másik fogalmat, valamint megjegyezzük, hogy a dolgozatban a jobbról folytonos eloszlásfüggvénnyel dolgozunk.

Definíció 2.1.1 (Kvantilis)**.** *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező, X pedig egy ezen definiált valószínűségi változó. Legyen* $\alpha \in]0,1[$. *X-nek* α*-kvantilisa q, ha az alábbi három tulajdonság egyike teljesül:*

- $\mathbb{P}\left[X \leq q_\alpha\right] \geq \alpha \geq \mathbb{P}\left[X < q_\alpha\right]$
- $\mathbb{P}\left[X \leq q_\alpha\right] \geq \alpha$ *és* $\mathbb{P}\left[X \geq q_\alpha\right] \geq 1 - \alpha$
- *ha X eloszlásfüggvénye* F_X, *akkor* $F_X(q) \geq \alpha$ *és* $F_X(q-) = \lim_{x \to q, x<q} F(x) \leq \alpha$.

Legyen továbbá

$$q_\alpha^- = \inf\{x | \mathbb{P}\left[X \leq x\right] \geq \alpha\},$$

valamint

$$q_\alpha^+ = \inf\{x | \mathbb{P}\left[X \leq x\right] > \alpha\}.$$

Definíció 2.1.2 (Kockáztatott érték - VaR, Value at Risk)**.** *Legyen az X valószínűségi változó kockáztatott értéke az* $\alpha \in]0,1[$ *paraméter és* $\mathbb{P}$ *szerinti eloszlás mellett a valószínűségi változó* q_α^+ *kvantilisának az ellentettje.*

$$VaR_\alpha(X) = -\inf\{x | \mathbb{P}[X \leq x] > \alpha\}$$

A kockáztatott érték ilyen módon való definiálása által rögtön a szükséges tőkeinjekció mértékét kapjuk meg kiszámításkor. Azonban mielőtt komolyabban megismerjük, gondoljuk meg, hogy mit is jelent a definíció. Meghatározza, hogy $100(1-\alpha)$ százalékos valószínséggel mekkora lesz a legnagyobb veszteség, ami az adott valószínűségi változó által leírt értékmozgás meghatároz, s ennek a veszteségnek az ellentettjét jelöli meg, mint előírt tőkeeredményt.
Ellenőrizzük, hogy mely axiómák teljesülnek a kockázatott értékre a korábbi listából. Az eltolásinvariancia ($\beta \geq 0$):

$$VaR_\alpha(X+\beta) = -\inf\{x|\mathbb{P}[X+\beta \leq x] > \alpha\} = -\inf\{x|\mathbb{P}[X+ \leq x-\beta] > \alpha\},$$

a monotonitás $\forall X, Y \in G$, ahol $X \leq Y$:

$$VaR_\alpha(X) = -\inf\{x|\mathbb{P}[X \leq x] > \alpha\} \geq -\inf\{x|\mathbb{P}[X+(Y-X) \leq x] > \alpha\} =$$
$$= -\inf\{y|\mathbb{P}[Y \leq y] > \alpha\} = VaR_\alpha(Y)$$

mind teljesülnek rá, valamint hasonlóan könnyen megállapítható, hogy a pozitív homogenitás is teljesül a koherens elvárások közül.

2.2 Példák a VaR hiányosságaira

Létezik kettő ellenérv ezen kockázati mérték használata ellen, ezeket többféleképpen is demonstálom.
Az első példa nélkülöz minden pénzügyi megfontolást, pusztán matematikai jellegű. Vegyünk 100 darab független, azonos eloszlású valószínűségi változót, legyenek ezek
$X_1, ..., X_{100}$, ahol X_1 egy 0.03 várható értékű Bernoulli-típusú valószínűségi változó. Ekkor $\forall 1 \leq i \leq 100$ $VaR_{0.9}(X_i) = 0$, s emiatt $\sum_{i=0}^{100} VaR_{0.9}(X_i) = 0$. Most számoljuk ki a $VaR_{0.9}\left(\sum_{i=0}^{100} X_i\right)$-t. Mivel Bernoulli-típusú valószínűségi változók összege binomiális, ezért ha $Y = \left(\sum_{i=0}^{100} X_i\right)$, akkor $\mathbb{P}(Y=k) = \binom{100}{k} 0.03^k 0.97^{100-k}$. Most számítsuk ki $\mathbb{P}(Y \geq 1)$-et.

$$\mathbb{P}(Y \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(Y=0) = 1 - \binom{100}{0} 0.3^0 0.97^{100-0} = 0.9524$$

Emiatt tehát $VaR_{0.9}(Y) \geq 1$, amiből rögtön látjuk, hogy a $VaR_{0.9}$ ebben az esetben nem szubadditív. A következetesség kedvéért számoljuk ki $VaR_{0.9}(Y)$-t, figyelembe véve, hogy

Y egy diszkrét valószínűségi változó.

$$\mathbb{P}(Y \geq 2) = \sum_{i=2}^{100} \mathbb{P}(Y = i) = \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} 0.3^i 0.97^{100-i} = 0.805$$

Így láthatjuk, hogy $VaR_{0.9}(Y) = 1$.

Most követve [1] 13 − 15. oldalán szereplő példák strukrúráit, tekintsünk kettő további példát.

Vegyünk most kettő olyan pénzügyi terméket (derivatívát), A-t és B-t melyeket ugyanazon r_T árfolyamú részvény árából származtatjuk, ahol T az időpillanatot jelöli. Áraik kezdetben legyenek a és b, a számolás kedvért $a, b \in (300, 400)$, USA dollárban. Árfolyamaik a rögzített T időpontban legyenek S_A és S_B, ahol $0 < L < U$:

$$S_A = \left\{ \begin{array}{l} 500 - a\$, \text{ ha } r_T > U \\ 200 - a\$, \text{ ha } L < r_T \leq U \\ 300 - a\$, \text{ ha } r_T \leq L \end{array} \right\} \text{ és } S_B = \left\{ \begin{array}{l} 300 - b\$, \text{ ha } r_T > U \\ 200 - b\$, \text{ ha } L < r_T \leq U \\ 500 - b\$, \text{ ha } r_T \leq L \end{array} \right\}$$

Legyen $\mathbb{P}(r_T > U) = 0.07$, $\mathbb{P}(L < r_T \leq U) = 0.07$, $\mathbb{P}(r_T \leq L) = 0.84$, ami egy teljes eseményrendszer. Ekkor a 10%-os kockázatott értéke 2A-nak $600 - 2a < 0$, hasonlóan 2B-nek $600 - 2b < 0$, azonban A+B-nek $900 - a - b$, ami pozitív, így megállípítható, hogy nem teljesül a szubadditivitás a kockáztatott érték esetében.

Az előző kettő példa arra koncentrált, hogy a VaR nem szubadditív, a következőben a fő fókusz áthelyeződik arra, hogy a VaR nem ösztönzi használóit azok kockázataianak ésszerű allokációjára. Legyen $\Omega = \omega_1, \omega_2, \omega_3$ a lehetséges események halmaza, ahol $\mathbb{P}(\omega_1) = 0.9$ és $\mathbb{P}(\omega_3) = \mathbb{P}(\omega_i) = 0.05$. Legyen 2 kockázatkerülő értékpapír-kereskedőnk, mindkettő a következő adott jövőbeli meghatározott időpontban realizált profittal:

$X(\omega_1) = 200\$$, $X(\omega_2) = X(\omega_3) = -100\$$. Ekkor $VaR_{0.9}(X) = -100\$$, azaz 100\$-os tőkeinjekciót kellene végrehajtania mindkét kereskedőnek.

Tegyük fel, hogy a két kereskedő egymás között reallokálja a realizált profitot az alábbi módon: $X(\omega_1) = 200\$ = X_1(\omega_1) = X_2(\omega_1)$, $X_1(\omega_2) = X_2(\omega_3) = -70\$$, $X_1(\omega_1) = X_2(\omega_2) = -130\$$. Ekkor $VaR_{0.9}(X_1) = VaR_{0.9}(X_2) = -70\$$. A kockázatkerülő kereskedők szeretnék a veszteség mértékét minimalizálni, így az ő stratégiájukat a VaR használata nem segítette elő. Ennek megértéséhez hasonlítsuk össze a tőke hozzáadása utáni pozíciókat! Ha mindketten az $X + 70\$$-os profiteloszlással élnek, legfeljebb 30\$-t veszíthetnek, míg a számukra legrosszabb esetet tekintve a reallokált profit akár 60\$-os veszteséget is jelenthet valamelyikük számára.

Azon plauzibilis szcenáriók meghatározása, melyeket figyelembe kell vennünk a kockázatmérés folyamata során, nagy fontossággal bír. Ez mind a szabályozószerveket, mind a szabályozott piaci szereplőket nagy feladat elé állítja. A regulátornak az általa meghatározott szcenáriókat ki kell hirdetnie a szabályozásuk alá tartozó intézetek részére, amelyek a rendelkezésükre bocsátott szcenáriókhoz még hozzácsatolhatnak továbbiakat saját belátásuk és kockázati étvágyuk/toleranciájuk alapján. Ezután pedig a cégeknek az alkalmazottaik számára is ki kell szabnia szerepüknek megfelelő kockázati határokat. Bár lehetséges, hogy ezeket a limiteket egyesével nem lépik túl, előfordulhat, hogy a pozícióik uniója áthágja, ennek követése azonban bonyolult. Részben emiatt volt népszerű a piaci szereplők között a kockázatott érték használata, ugyanis alkalmazása közben a szubadditivitás ellenőrizhetőségének hiánya nem játszik kritikus szerepet.

3.0 A feltételes várható érték és a legrosszabb feltételes várakozás

A pénzügyi világban a várható nyereség eloszlása általában nehézfarkú eloszlás. A biztosító szektor adózott eredményéről rendelkezésünkre álló adatok is például olyan eloszlást jeleznek, hogy nagyobb valószínűséggel fordul elő, hogy az adott időszak eredménye a szórásnál nagyobb mértékben tér el az átlagos eredménytől. Olyan messzire azonban nem merészkedünk az 1. ábra esetében, hogy ilyen kevés adatpont mellett az eloszlásukról magabiztosan megállapítsuk nehézfarkú mivoltát.

3.1 Kettő kockázati mérték és kapcsolatuk a kockáztatott értékkel

Most bevezetünk kettő kockázati mértéket, melyek többek között nehézfarkú eloszlások vizsgálatakor is hasznosnak bizonyulnak. Mindkettő fontos szereppel bírt a koherens kockázati mértékek elméletének előrehaladásában. A fejezetben nem csupán mennyiségi, hanem minőségi összehasonlításukra is kitérünk, és további motivációval fognak szolgálni

1. Ábra: Portfolio elemzése

napjainkban is használt kockázati mértékek konstrukcióinak megértéséhez és megismeréséhez. A fejezetben [1] 5. fejezetét követjük, valamint saját példákkal segítjük a megértést.

Definíció 3.1.1 (Feltételes várható extrém érték - CTE_α)**.** *Legyen $\mathbb{P}$ egy valószínűségi mérték Ω-n, valamint legyen $\alpha \in]0,1[$. Ekkor az X valószínűségi változó feltételes kockáztatott értéke a következő:*

$$CTE_\alpha(X) = -\mathbb{E}_\mathbb{P}\left[X | X \leq -VaR_\alpha(X)\right].$$

Tehát a feltételes vérható extrém érték az eloszlás farokrészének a várható értékét adja meg.

Definíció 3.1.2 (Legrosszabb feltételes várakozás - WCE_α)**.** *Legyen $\mathbb{P}$ egy valószínűségi mérték Ω-n, valamint legyen $\alpha \in]0,1[$. Ekkor az X valószínűségi változó legrosszabb feltételes várakozása a következő:*

$$WCE_\alpha(X) = -\inf\{\mathbb{E}_\mathbb{P}\left[X|A\right] | \mathbb{P}(A) > \alpha\}$$

Ebben a dolgozatban kiemelt fontosságot tulajdonítunk annak, ha kockázati mérték koherens mivoltának, így a WCE_α esetében is kitérünk ennek a következő ténynek a rövid tárgyalására.

Állítás 3.1.3. *A WCE_α kockázati mérték koherens $\forall \alpha \in]0,1[$-ra.*

Bizonyítás:

- WCE_α-ra teljesül az eltolásinvariancia: $\forall X$ valószínűségi változóra és $\beta \in \mathbb{R}$-ra

$$\begin{aligned} WCE_\alpha(X+\beta) &= -\inf\{\mathbb{E}_\mathbb{P}\left[X+\beta|A\right] | \mathbb{P}(A) > \alpha\} = \\ &= -\left(\inf\{\mathbb{E}_\mathbb{P}\left[X|A\right] | \mathbb{P}(A) > \alpha\} + \beta\right) = \\ &= -\inf\{\mathbb{E}_\mathbb{P}\left[X|A\right] | \mathbb{P}(A) > \alpha\} - \beta \\ &= WCE_\alpha - \beta \end{aligned}$$

- WCE_α-ra teljesül a szubadditivitás. Kihasználva az infimumra vonatkozó fordított háromszögegyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned}WCE_{\alpha}(X+Y) &= -\inf\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X+Y|A]\,|\mathbb{P}(A)>\alpha\}\leq\\ &\leq \inf\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-X|A]\,|\mathbb{P}(A)>\alpha\}+\inf\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-Y|A]\,|\mathbb{P}(A)>\alpha\}=\\ &= WCE_{\alpha}(X)+WCE_{\alpha}(Y)\end{aligned}$$

- A pozitív homogenitás azonnal következik az infimum és a várható érték azon tulajdonságából, mely szerint nemnegatív szorzót ki lehet emelni a művelet elé.
- Legyenek X, Y valószínűségi változók, melyekre $X \leq Y$ teljesül. Ekkor:

  $$WCE_{\alpha}(X) = -\inf\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X|A]\,|\mathbb{P}(A)>\alpha\} \geq -\inf\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y|A]\,|\mathbb{P}(A)>\alpha\} = WCE_{\alpha}(Y)$$

  Ezzel tehát beláttuk, hogy WCE_{α}-ra teljesül a monotonitás is, s hogy WCE_{α} egy koherens kockázati mérték.

Most lássunk be egy egyenlőtlenséget a két fenti kockázati mérték között!

Állítás 3.1.4. $\alpha \in]0,1[$*-ra és* $\forall X$ *valószínűségi változóra*

$$CTE_{\alpha} \leq WCE_{\alpha}.$$

Bizonyítás: Vizsgálni fogjuk, hogy $F_X(q_{\alpha}^{+}(X))$ milyen értéket vehet fel. Mivel definíció szerint $q_{\alpha}^{+}(X) = \inf\{x|\,[X \leq x] > \alpha\}$, és $F_X(x) = \mathbb{P}[X < x]$, ezért

$$F_X(q_{\alpha}^{+}(X)) = \mathbb{P}[X < q_{\alpha}^{+}(X)] = \mathbb{P}[X < \inf\{x|\,[X \leq x] > \alpha\}] \geq \alpha.$$

Így két esetet különböztethetünk meg, aszerint, hogy az egyenlőséget és a szigorú egyenlőtlenséget.
1. eset: Tegyük fel, hogy $F_Y(q_{\alpha}^{+}(X)) > \alpha$. Vegyük a következő halmazt: $A = \{\omega|X(\omega) \leq q_{\alpha}^{+}(X)\}$. A feltétel miatt $P[A] > \alpha$. Ekkor

$$\begin{aligned}CTE_{\alpha}(X) &= -\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X|X \leq -VaR_{\alpha}(X)] = -\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X|X \leq \inf\{x|\mathbb{P}[X \leq x] > \alpha\}] =\\ &= -\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X|A] \leq \sup\{-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X|A]\} = -\inf\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X|A]\} \leq\\ &\leq -\inf\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X|A]\,|\mathbb{P}[A] > \alpha\} = WCE_{\alpha}(X).\end{aligned}$$

Most tekintsük azt az esetet, amikor $F_X(q_{\alpha}^{+}(X)) = \alpha$. Az eloszlásfüggvény jobbról folytonosságából és abból, hogy az α-szintű jobboldali kvantilils egy infimum, következik, hogy $F_X\left(q_\alpha^+(X)+\epsilon\right)>\alpha$. A korábbiakhoz hasonlóan legyen $A_\epsilon=\{\omega|X(\omega)\leq q_\alpha^+(X)+\epsilon\}$.

$$\begin{aligned}WCE_\alpha(X)&=-\inf\{\mathbb{E}_\mathbb{P}[-X|A]\,|\mathbb{P}(A)>\alpha\}\geq-\inf\{\mathbb{E}_\mathbb{P}[-X|A_\epsilon]\,|\mathbb{P}(A_\epsilon)>\alpha\}=\\&=-\inf\{\mathbb{E}_\mathbb{P}[-X|A_\epsilon]\}=-\frac{\mathbb{E}\left[Y\cdot\mathbf{1}_{A_\epsilon}\right]}{\mathbb{P}[A_\epsilon]}\end{aligned}$$

Az eloszlásfüggvény jobboldali folytonossága miatt $\lim_{\epsilon\to0}[A_\epsilon]=F_Y\left(q_\alpha^+(X)\right)$, valamint ϵ-nal a 0-hoz tartva $A_\epsilon=A_0$. Vegyük tehát az egyenlőtlenségsorozat jobb oldalának határértékét, ez $-\mathbb{E}_\mathbb{P}[X|A_0]=CTE_\alpha(X)$. Ezzel pedig mindkettő lehetséges esetre beláttuk az egyenlőtlenséget.

Sokáig a legelterjedtebb kvantilis alapú kokázati mérték a kockáztatott érték volt. Feltéve azt, hogy egy adott intézet a korábban említett okok miatt koherens kockázatmérést szeretett volna inkább alkalmazni, vizsgálhatjuk annak lehetőségeit, hogy tudhatott ennek az elképzelésnek eleget tenni, mely hasonló kockázati mértékek tudnak koherensen viselkedni, s milyen feltételek mellett.

Lemma 3.1.5. *Legyen* $\mathbf{P}$ *valószínűségi mértékek egy családja, mely a korábban látott módon meghatározza a* ρ *koherens kockázati mértéket, valamint legyen* $\alpha\in\,]0,1[$. *Ekkor* $\rho\geq VaR_\alpha$ *akkor és csak akkor, ha* $\forall B$ *halmazra, melyre* $\mathbb{P}[B]>\alpha$ *és* $\forall\epsilon>0$*-ra* $\exists\mathbb{Q}\in\mathbb{P}$ *úgy, hogy* $\mathbb{Q}[B]>1-\epsilon$.

Bizonyítás:

Először a szükségességet látjuk be. Éljünk az $X=-\mathbf{1}_B$ ahol $\mathbb{P}[B]>\alpha$ választással, erről fogjuk belátni, hogy teljesíti az állításban szereplő $\mathbb{Q}$ halmaztól elvárt tulajdonságokat.

$$VaR_\alpha(-\mathbf{1}_B)=-\inf\{x|\mathbb{P}[-\mathbf{1}_B\leq x]>\alpha\}=-\inf\{x|\mathbb{P}[\mathbf{1}_B\geq x]>\alpha\}$$

kihasználva $\mathbf{1}_B$ indikátor mivoltát, valamint a B esemény valószínűségét, kapjuk, hogy $VaR_\alpha(-\mathbf{1}_B)=1$. A feltétel szerint $\rho\geq VaR_\alpha$, ezt kihasználva, kapjuk tehát, hogy $\rho(-\mathbf{1}_B)\geq 1$. Mivel $\rho_\mathcal{P}=\sup\{\mathbb{E}_\mathbb{P}[-X]\,|\mathbb{P}\in\mathcal{P}\}$, a szuprémum tulajdonságaiból adódik, hogy $\forall B$ halmazra, melyre $\mathbb{P}[B]>\alpha$, $\exists\mathbb{Q}\in\mathbb{P}$ úgy, hogy $\mathbb{Q}[B]>1-\epsilon$.

Tekintsük most az elégségességet! Legyen $-k=VaR_\alpha(X)$, ekkor a kockázatott érték kvantilis tulajdonságából következik, hogy $\mathbb{P}[X\leq k]\geq\alpha$, valamint $\mathbb{P}[X\leq k+\delta]\geq\alpha$.

Éljünk egy olyan $\mathbb{Q} \in \mathbf{P}$ választásával, melyre teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\mathbb{Q}\left[X \leq k + \delta\right] \geq 1 - \delta.$$

Átalakítás után:

$$\mathbb{Q}\left[-X \geq -k - \delta\right] \geq 1 - \delta.$$

Tudjuk, hogy ahol $-X \geq (-k - \delta)$, ott $\mathbb{Q}\left[X\right] \geq 1 - \delta$, ahol $-X \leq (-k - \delta)$, ott $\mathbb{Q}$ legfeljebb δ. Ekkor:

$$\mathbb{E}\left[-X\right] \geq (-k - \delta)(1 - \delta) - \delta - X \geq (-k - \delta)(1 - \delta) - \delta |X|$$

Tartsunk δ-val 0-hoz, melyből $\rho(X) \geq -k \Leftrightarrow \rho(X) \geq VaR_\alpha$, ezt kellett belátnunk.

Vegyünk el egy olyan szituációt, hogy egy pénzintézet egyszerre több szabályozószervv felügyelete alatt áll. Mind azzal az elvárással él, az intézet egy koherens kockázati mérték egyike által megkötve legyen képes működni. Azonban a pénzintézet nem csupán megfelelni szeretne, hanem mindemellett még költséghatékony működést is szem előtt tartaná piaci érdekekből. Erre az elgondolásra nyújt egy általánosabb megoldást a következő állítás.

Állítás 3.1.6. *$\forall X$ valószínűségi változóra ás $\forall \alpha \in]0,1[$-ra*

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{\rho(X) \,|\rho \text{ koherens és } \rho \geq VaR_\alpha\}$$

Bizonyítás: Ismét legyen $-k = VaR_\alpha(X)$. Definíció szerint ekkor $\mathbb{P}\left[X \leq k\right] \geq \alpha$ és $\forall\delta > 0$-ra $\mathbb{P}\left[X \leq k\right] \geq \alpha$. Cél, hogy konstruáljunk $\forall\delta > 0$-ra egy olyan ρ koherens kockázati mértéket, mely $\forall X$-re $\rho(X) \in \overline{\beta}\left(VaR_\alpha(X) + \frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)$.

Vegyünk egy olyan B halmazt, melyre $\mathbb{P}\left[B\right] > \alpha$. Ekkor az előbbiek miatt $\mathbb{P}\left[B \cap \{X \geq\}\right] > 0$. Definiájuk tehát a következő valószínűségi változókat: $\mathbf{h}_B := \frac{\mathbf{1}_{B\cap\{X\geq k\}}}{\mathbb{P}[B\cap\{X\geq k\}]}$, $\mathbb{Q}_B := \mathbf{h}_B \cdot \mathbb{P}$. Mindezek segítségével legyen

$$\rho := \sup\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[-X\right] |\mathbb{P} \in \{\mathbb{Q}_B | \mathbb{P}\left[B\right] > \alpha\}\}.$$

Erről belátjuk, hogy teljesíti az állításban szereplő feltételeket, azaz egyszerre nagyobbegyenlő és kisebbegyenlő a VaR_α-nál. Korábbi állításunk szerint ρ koherens. Minden alkalmas B halmazra $\mathbb{Q}_B[B] = 1$, így a lemma miatt $\rho \geq VaR_\alpha$. Azonban

$$\rho(X) = \sup_{\mathbb{E}_B} \mathbb{E}_{Q_B}[-X] \leq -k = VaR_\alpha,$$

ezzel pedig az állítást beláttuk.

Láttuk korábban, hogy a kockáztatott érték nem koherens. Érdemes megjegyezni, hogy ha feltesszük, hogy $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, akkor a kockáztatott érték koherens módon viselkedik standard normális eloszlású valószínűségi változók esetében.

Most be szeretnénk bizonyítani, hogy bár szerepel a feltételes várható extrém érték definíciójában a kockáztatott érték, a kockáztatott érték koheherens mivoltához elégséges feltételeknél gyengébb feltételek teljesülésekor is koherensen viselkedik.

Állítás 3.1.7. *Legyen Ω egy n elemű véges eseménytér, melyen $\mathbb{P}$ legyen a klasszikus valószínűség, továbbá legyen $\alpha \in]0,1[$. Ha az X valószínűségi változóra teljesül, hogy $\forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega \ (\omega_1 \neq \omega_2)$ esetén $X(\omega_1) \neq X(\omega_2)$, akkor $CTE_\alpha(X) = WCE_\alpha(X)$.*

Bizonyítás: Legyenek $q = -VaR_\alpha(X)$, $B = \{X \leq q\}$ és X lehetséges értékei: $x_1 < ... < x_n$. Válasszuk K-t úgy, hogy $\frac{k}{n} \leq \alpha < \frac{k+1}{n}$.

Be fogjuk látni, hogy $-VaR_\alpha = q_\alpha^+(Y) = q = x_{k+1}$. $\forall u > q$ valós számra a VaR_α definíciója szerint

$$\frac{\#\{i | x_i \leq u\}}{n} > \alpha.$$

Most kihasználva, hogy $\#\{i | x_i \leq u\} \in \mathbb{N}$

$$\#\{i | x_i \leq u\} > \alpha \cdot n, \text{ és } \#\{i | x_i \leq u\} \geq k+1$$

Élve az $u = x_{k+1}$ választással, akkor egyenlőség fog állni, így beláttuk a fenti egyenlőségsorozatot.

Ekkor $Y(B) = \{x_1, ..., x_{k+1}\}$, valamint

$$TVaR_\alpha = -\mathbb{E}_\mathbb{P}[X | X \leq -VaR_\alpha(X)] = -\frac{x_1 + ... + x_{k+1}}{k+1}$$

Most legyen $C \neq B$ egy olyan halmaz, amely tartalmaz legalább $k+1$ darab különböző eseményt. Ekkor $-Y(C)$ elemeit összeadva szigorúan kisebb összeget fogunk kapni, mint $(k+1) \cdot TVaR_\alpha$. Használjuk az előző tételt, s arra utunk, hogy az érvényes feltételekkel $CTE_\alpha = WCE_\alpha(X)$.

Mivel a legrosszabb feltételes várható érték koherens, ezért az állítás feltételeinek teljesülésekor a feltételes kockáztatott érték is koherens.
A matematika alapszakos hallgatók körében gyakran felmerül egy-egy új fogalom bevezetésekor, hogy mire lehet az jó, mi olyan tulajdonsággal rendelkezhet, hogy megérje a táblára vésni. A legrosszabb feltételes várakozás esetében először feltűnhet a definícióban szereplő infimum, mely a gyakorlati számolásokban nem praktikus. Ezen felül pedig nem előnyös, hogy a WCE feltételezi, hogy teljesen ismerjük az adott szituációban releváns valószínűségi teret, míg a gyakorlatban aligha ez az igazság. Mindezek mellett azonban elméleti jelentőséggel bír, hogy a WCE_α a legkisebb koherens kockázati mérték, mely dominálja az α paraméterhez tartozó kockáztatott értéket. Ezt látjuk be a következő állításban.

Állítás 3.1.8. *Legyen Ω egy n elemű véges eseménytér, melyen $\mathbb{P}$ legyen a klasszikus valószínűség, továbbá legyen $\alpha \in]0,1[$. Legyen ρ egy koherens kockázati mérték, melynek adott valószínűségi változón felvett értékét meghatározza a valószínűségi változó eloszlása. Ha ρ dominálja az α-paraméterű kockázatott értéket, akkor dominálja az ugyanilyan szinthez tartozó legrosszabb feltételes várakozást is.*

Bizonyítás: Legyen X egy tetszőleges valószínűségi változó, s legyen az ehhez az X-hez tartozó $-VaR_\alpha(X) = q$. Legyen $A = \{\omega | X(\omega) \leq q\}$. Ekkor az előző bizonyításhoz hasonlóan $|A| = p > n \cdot \alpha$, valamint $A = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$, ahol $\forall 1 \leq i \leq p-1$-re $X(\omega_i) \leq X(\omega_{i+1})$.
Most tekintsük X egy módosítottját:

$$\forall i \leq p\text{-re legyen } \overline{X}(\omega_i) = \frac{X(\omega_1) + ... + X\left(\omega_p\right)}{p} = \mathbb{E}[X|X \leq q], \text{különben } X(\omega_i)$$

. Tekintsünk a σ-ra úgy, hogy az azon permutációcsoport egy eleme, mely csak az első p természetes számon hat. Éljünk az alábbi jelölésekkel: $X^\sigma(\omega_i) = X(\omega_{\sigma(i)})$, ahol ha $i > p$, akkor $X^\sigma(\omega_i) = X(\omega_i)$. Ekkor azt vehetjük észre, hogy $\overline{X} = \frac{1}{p!}\sum_\sigma X^\sigma$.
Feltettük, hogy ρ egy adott valószínűségi változóhoz rendelt értékét csak a valószínűségi változó eloszlása határozza meg, emiatt $\rho(X^\sigma) = \rho(X)$. Korábban láttuk, hogy ha egy kockázati mérték koherens, akkor konvex. Ezeket kihasználva:

$$\rho\left(\overline{X}\right) = \rho\left(\frac{1}{p!}\sum_\sigma X^\sigma\right) = \rho(X)$$

Kihasználva az utolsó feltételét az állításnak, a kockáztatott értékkel való alsó becsléssel kapjuk, hogy $\rho\left(\overline{X}\right) \geq VaR_\alpha\left(\overline{X}\right)$. Mivel $VaR_\alpha\left(\overline{X}\right) = \mathbb{E}\left[-X|X \leq q\right]$, ezért $\forall i \leq p$-re $\overline{X}\left(\omega_i\right) \leq X\left(\omega_p\right)$, hiszen úgy tettük sorrenbe az ω_i-ket, hogy $X\left(\omega_p\right)$ nagyobbegyenlő legyen, mint a nála kisebb indexekhez tartozó X-értékek. Mindezeket felhasználva kaphatjuk az alábbi egyenlőtlenségsorozatot:

$$\mathbb{E}\left[-X|X \leq q\right] = VaR_\alpha\left(\overline{X}\right) \leq \rho\left(\overline{X}\right) \leq \rho\left(\frac{1}{p!}\sum_\sigma Y^\sigma\right) \leq \rho\left(X\right)$$

Most vegyük az X valószínűségi változók olyan sűrű halmazát Ω-n, amelyre fennáll az előző állítást kihasználva, hogy $\mathbb{E}\left[-X|X \leq q\right] = TVaR_\alpha\left(X\right) = WCE_\alpha\left(X\right)$. A kapott összefüggést pedig hozzácsatolva az egyenlőtlenségsorozatunkhoz kapjuk, hogy $\rho\left(X\right) \geq WCE_\alpha$. Ezt szerettük volna belátni.

3.2 Kiszámítás véges esetben és példák

A következő példában rávilágítunk arra, hogy amennyiben nem teljesülnek az előző állítás feltételei, csakugyan előfordulhat, hogy a CTE_α nem koherensen viselkedik. Legyen $\Omega = \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, mindre teljesül, hogy $\mathbb{P}\left(\omega\right) = \frac{1}{4}$. Mondjunk ellent a fenti állításnak olyan módon, hogy a meghatározott valószínűségi változóink egy értéket több helyen is felvegyenek.

Legyen $X_1\left(\omega_i\right) = \left\{\begin{array}{ll} -1, & \text{ha } i = 1 \\ 0, & \text{különben} \end{array}\right\}$, és $X_2\left(\omega_i\right) = \left\{\begin{array}{ll} -1, & \text{ha } i = 2 \\ 0, & \text{különben} \end{array}\right\}$.

Tekintsük a 0.5-es konfidencia szintet. Ekkor

$$Var_{0.3}\left(X_1\right) = Var_{0.3}\left(X_2\right) = \frac{1}{4}, \text{ azonban } Var_{0.3}\left(X_1 + X_2\right) = 1.$$

Ebből pedig

$$CTE0.3\left(X_1\right) = CTE_{0.3}\left(X_2\right) = \frac{1}{3}, \text{ és } CTE_{0.5}\left(X_1 + X_2\right) = 1.$$

Megkaptuk tehát, hogy a feltételes várható extrém érték nem minden esetben viselkedik koherensen.

Most fókuszáljunk az eddig megismert kockázati mérték definíciónk konkrét esetekben való kiszámítására!

Állítás 3.2.1. *Legyen* $|\Omega| = n < \infty$, $\alpha \in]0,1[$, $X \to \mathbb{R}$ *olyan, hogy* X *értékkészlete* $x_1 < ... < x_n$, *valamint* $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$ *és* $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. *Ha* $\sum_{i=1}^{k-1} p_i \leq \alpha < \sum_{i=1}^{k} p_i$, *akkor némi számolás után:*

- A diszkrét eset miatt $VaR_\alpha(X) = -\inf\{x|\mathbb{P}(X \leq x) > \alpha\} = -\min\{x|\mathbb{P}(X \leq x) > \alpha\}$. Veggyük észre, hogy $VaR_\alpha \neq -x_{k-1}$, ugyanis $\mathbb{P}(X \leq -x_k) \leq \alpha$. Mivel $\mathbb{P}(X < x)$ monoton nő, ezért $VaR_\alpha > -x_{k-1}$. Ezzel a megszorítással a VaR minimumtolajdonságát észben tartva a következő vizsgálandó érték x_k. Valóban, x_k a legkisebb X érték, melyre $\mathbb{P}(X \leq x) > \alpha$ teljesül, azaz $VaR_\alpha = -x_k$.
- Észrevesszük, hogy a feltétel és az előző pont miatt elég lesz k-ig szummáznunk.

$$CTE_\alpha(X) = -\mathbb{E}(X|X \leq -VaR_\alpha(X)) =$$
$$= \mathbb{E}(-X|X \leq x_k) = \mathbb{E}(-X|X \in \{x_1, ..., x_k\}) = -\frac{\sum_{i=1}^{k} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{k} p_i}$$

A fenti esetben legrosszabb feltételes várakozást, kiszámolása nehéz feladat. Ekkor

$$WCE_{\alpha(X)} = -\inf\{\mathbb{E}_\mathbb{P}[X|A]\,|\mathbb{P}(A) > \alpha\} = -\min_{I \in N, \mathbb{P}\left(\sum_{i \in I} p_i\right) > \alpha} \frac{\sum_{i \in I} p_j x_j}{\sum_{i \in I} p_j}.$$

Erről a feladatról pedig a fenti megszorítások mellett megállapthatjuk, hogy NP-teljes feladat. ([2])

4.0 Várható többletveszteség

A korábban bevezetett kockázati mértékek ismertett hiányosságait és gyengeségeit a 2008-as válság óta egyre szigorúbb szabályozószervek is felismerték. Ennek következtében a Bázeli Bankfelügyeleti Bizottság felügyeleti keretrendszerének legfrissebb újításai, a Basel III-as szabályozás már a várható többletveszteséget határozza meg, mint irányadó kockázati mértéket ([4]). A fejezetben a fő fókusz a várható többletveszteség megkülönböztető, koherens tulajdonságára fogunk fókuszálni, követve [3] 2. és 3. fejezetét.

Definíció 4.0.1 (Várható többletveszteség - Expected Shortfall, ES)**.** *Legyen* $\alpha \in \,]0,1[$ *és* Ω *egy tetszőleges eseménytér, ekkor legyen* $ES_\alpha : G \to \mathbb{R} \cup \infty$ *az* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó várható többletvesztesége:*

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_q(X)\,dq$$

A korábbi meggondoláshoz hasonlóan tekintsük a várható többletveszteséget a diszkrét esetben:

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_s(X)\,ds = -\frac{1}{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{k-1} x_i p_i + \left(\alpha - \sum_{i=1}^{k-1} p_i\right) x_k\right)$$

Mostantól kezdve nem tesszük fel, hogy Ω elemszáma véges.

4.1 Diszkrét approximálhatóság

Tétel 4.1.1 (A várható többletveszteség szubadditivitása)**.** *Legyen* $\mathbb{P}$ *egy valószínűségi mérték* Ω*-n, legyen* $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *tetszőleges valószínűségi változók és* $\alpha \in \,]0,1[$*. Ekkor az* α *konfidencia-szinthez tartozó várható többletveszteség szubadditív, azaz*

$$ES_\alpha(X+Y) \leq ES_\alpha(X) + ES_\alpha(Y).$$

Az tételnek több bizonyítása létezik, most kettő bizonyítást mutatunk meg, mindkettő több lemmára fog épülni.

Maguk a bizonyítások csak arra az esetre fognak kiterjedni, ha $X, Y \in L^\infty = \{f(x) \,|\, \inf\{C \geq 0 : |f(x)| \leq C$ majdnem minden x-re$\} < \infty\}$. Hátra marad tehát az az általánosabb eset, amikor X, Y-ról csak annyi infromáció áll rendelkezésre, hogy mérhetőek.

Lemma 4.1.2. *Tegyük fel, hogy a tétel teljesül* $\forall X, Y \in L^\infty$. *Ekkor teljesül* $\forall X, Y \in L^0$.

Lemma bizonyítása: *i*) Röviden gondoljuk meg azt az esetet, amikor $\mathbb{E}[X_+] = +\infty$. Ekkor a mérhetőség miatt $\mathbb{E}[-X_-] < +\infty$, s X várható értéke is $+\infty$. Ekkor könnyen adódik, hogy a tételben szereplő egyenlőtlenség mindkét oldala $+\infty$, s triviálisan teljesül. Analóg a $-\infty$ esetre.

ii) Most legyenek $X, Y \in L^1$, alul korlátos valószínűségi változók. Ekkor a várható többletveszteség eltolás-invarianciája miatt feltehető, hogy $X, Y \geq 0$. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $X_k = \min\{X, k\}$, $Y_k = \min\{Y, k\}$, valamint $Z_k = X_k + Y_k$. Ekkor $X_k, Y_k, Z_k \in L^\infty$, amiből

$$ES_\alpha(Z_k) \leq ES_\alpha(X_k) + ES_\alpha(Y_k) \leq ES_\alpha(X) + ES_\alpha(Y).$$

Vegyük észre, hogy $Z_k = \min\{X + Y, X + k, Y + k, 2k\} \geq \min\{X + Y, 2k\}$. Mindezekből kapjuk az alábbi egyenlőtlenség-sorozatot:

$$ES_\alpha(X + Y) \geq ES_\alpha(Z_k) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_q(Z_k)\,dq \geq$$

$$\geq -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_q(\min\{X + Y, 2k\})\,dq = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \min\{VaR_q(X + Y), k\}dq$$

Tartsunk k-val a $+\infty$-be, s ekkor felhasználva a monoton konvergencia tételt a jobb oldal $ES_\alpha(X + Y)$-hez fog tartani. A rendőr-elv miatt pedig $\lim_{k\to+\infty} ES_\alpha(Z_k) = ES_\alpha(X + Y)$, azaz a fenti egyenlőtlenség-sorozatban k-val a végtelenbe tartva a tételt kapjuk L^1-re. Analóg kapjuk a felülről korlátos esetet.

Végül alkalmazzuk az *i*)-ben és a *ii*)-ben kapottakat! Legyen $X, Y \in L^0$, s legyen $\overline{X} = \min\{X, -VaR_\alpha(X)\}$, hasonlóan $\overline{Y}$. Ekkor $X + Y \geq \overline{X} + \overline{Y}$, valamint $ES_\alpha(X) = ES_\alpha\left(\overline{X}\right)$, analóg Y-ra. Felhasználva *I*)-t és *ii*)-t:

$$ES_\alpha(x + Y) \leq ES_\alpha\left(\overline{X} + \overline{Y}\right) \leq ES_\alpha\left(\overline{X}\right) + ES_\alpha\left(\overline{Y}\right) = ES_\alpha(x) + ES_\alpha(Y).$$

Ezzel pedig beláttuk a lemmát, így a továbbiakban csakugyan elegendő lesz az L^∞ esettel foglalkozni.

Lemma 4.1.3 (Eloszlási transzformált)**.** *$\forall X$ valószínűségi változóra $\exists U_X \sim U[0,1]$ valószínűségi változó, melyre $X = F_X^{-1}(U_X)$ majdnem mindenütt, ahol F^{-1} az általánosított eloszlásfügg- vény: $F^{-1} = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u,\ u \in]0,1[\}$ ([5])*

Eloszlási transzformált lemma bizonyítása: Legyen $V \sim U[0,1]$ egy X-től független valószínűségi változó. Legyen U_X a következő:

$$U_X = F(X,V) = F_X(X-) + V(F_X(X) - F_X(X-)) = \mathbb{P}(X < x) + V\mathbb{P}(X = x)$$

ahol $\forall x \in \mathbb{R}$ $F_X(x-) = \lim_{y\to x-0}(y)$, valamint $F_X(X,V)$
Legyen $\alpha \in]0,1[$ és legyen q_α^- az alsó-α kvantilisa X-nek. Ekkor
$U_X \leq \alpha$ akkor és csak akkor, ha $(X,V) \in A = \{(X,\lambda) : \mathbb{P}(X < x) + \lambda\mathbb{P}(X = x)\}$.
Most végezzünk esetszétválasztást!
i) $\mathbb{P}\left(X = q_\alpha^{-1}\right) > 0$. Ekkor

$$A = \{X < q_\alpha^-(X)\} \cup \{X = q_\alpha^-(X), \mathbb{P}(X < q_\alpha^-(X)) + V\mathbb{P}\left(X = q_\alpha^{-1}\right) \leq \alpha\}$$

Ezt tovább alakítva, valamint az egyenlőség két oldalán $\mathbb{P}$-t alkalmazva:

$$\mathbb{P}[F(X,V) \leq \alpha] = \mathbb{P}(X < q_\alpha^-(X)) + \mathbb{P}\left(X = q_\alpha^{-1}\right)\mathbb{P}\left(\frac{\alpha - \mathbb{P}\left(X < q_\alpha^{-1}\right)}{\mathbb{P}(X = q_\alpha^{-1})}\right) =$$

$$= \mathbb{P}(X < q_\alpha^-(X)) + \mathbb{P}\left(X = q_\alpha^{-1}\right)\frac{\alpha - \mathbb{P}\left(X < q_\alpha^{-1}\right)}{\mathbb{P}(X = q_\alpha^{-1})} = \alpha.$$

ii) $\mathbb{P}\left(X = q_\alpha^{-1}\right) = 0$. Ekkor

$$\mathbb{P}[F(X,V) \leq \alpha] = \mathbb{P}(X < q_\alpha^-) = \mathbb{P}(X \leq q_\alpha^-) = \alpha.$$

Ezzel beláttuk, hogy $U_X \sim U[0,1]$. Definícióból adódóan:

$$F^{-1}(X) \leq U \leq F^{-1}(X)$$

Most legyen $u \in [F(x), F(x+))$, erre az u-ra pedig tejesül, hogy $F^{-1}(u) = x$, azaz beláttuk azt is, hogy az U_X általánosított inverze megegyezik X-szel majdnem mindenütt.
Tétel 1. Bizonyítás:

Egy olyan bizonyítást mutatunk elsőre, amely diszkrét approximációkra épül.

Definíció 4.1.4 (n-diszkrét valószínűségi változó)**.** *Egy l-dimenziós valószínűségi vektorváltozó valamilyen $n \in \mathbb{N}$-ra n-diszkrét, ha az értékkészlete legfeljlebb n vektorból áll, s ezeket $\frac{k}{n}$ valószínűséggel veszi fel, ahol $k \in \mathbb{N}^+$.*

Megjegyzés 4.1.5. *ha a k-dimenziós $\underline{X} = (X_i)$ valószínűségi vektorváltozó n-diszkrét, akkor az X_i valószínűségi változók is azok, azonban az állítás megfordítása nem mindig igaz.*

A bizonyítás első felében belátjuk, hogy a tétel igaz kétdimenziós n-diszkrét valószínűségi vektorváltozókra, majd pedig ilyenekkel közelítünk tetszőleges valószínűségi vektorváltozókat.

Lemma 4.1.6 (Szubadditivitás 2-dimenziós n-diszkrét valószínűségi vektorváltozókra)**.** *Legyen (X, Y) 2-dimenziós valószínűségi vektorváltozó. Ekkor $\forall\alpha \in]0, 1[$ esetén $ES_\alpha \leq ES_p(X) + ES_\alpha(Y)$.*

Megjegyzés 4.1.7. *Ha az állításban szerepelne a extra feltétel, hogy $\nexists X_i, X_j$, $i \neq j$, melyre $X_i = X_j$, akkor a bizonyítás lényegében megegyezne, a $TVaR$ és a WCE kapcsolatáról szóló tétel bizonyításával. Néhány átalakítás után fel is fogjuk használni ezt az összefüggést.*

Lemma bizonyítása

- *i*) Tegyük fel, hogy m, n természetes számok, $\alpha = \frac{m}{n}$ és $(m; n) = 1$. Legyen n a legkisebb természetes szám, amire (X, Y) n-diszkrét. Partíciónáljuk Ω-t az Ω_i ($i = 1, 2, ..., n$) partíciókba úgy, hogy Ω_i-n (X, Y) az (x_i, y_i) értéket veszi fel. Ekkor ha az új eseményektérnek a Ω_i-k által alkotott halmazt tekintjük, a feltételeink megegyeznek egy korábbi tételünkkel, ami meghatározta, hogy ebben az esetben a CTE_α koherens és megegyezik a fenti számítások alapján a várható többletveszteséggel ugyanazon α mellett, azaz ES_α szubadditív ebben az esetben.

- *ii*) Most legyen $\alpha = \frac{a}{b}$ egy racionális szám, úgy, hogy $0 < a < b$ és tovább nem egyszerűsíthető. Legyen $m \in \mathbb{N}^+$, vegyük $\alpha = \frac{am}{bm}$-t és ekkor X bm-diszkrét lesz, azaz *i*)-t felhasználva kapjuk a szubadditivitás teljesülését.

- iii) ES_α definíciójábül, következik, hogy mint $\alpha \to \mathbb{R}$ leképezés, folytonos. Az átviteli elvből következik az állítás tetszőleges

Lemma 4.1.8. *Vegyünk $X_1, X_2, ... \in L^\infty$ valószínűségi változókat, melyek $k \to +\infty$ mellett sztochasztikusan konvergálnak X-hez. Ekkor $\forall\alpha \in]0,1[$-ra az α konfidencia szinten vett várható többletveszteségük is konvergál egymáshoz.*

Lemma bizonyítása Elegendő lenne belátni, hogy az állítás a várható többletveszteség helyett a kockáztatott értékre is teljesül. Ekkor kihasználva, hogy az ES_α a VaR-nak egy integrálja, ezért a monoton konvergencia tétel miatt teljesülne az állítás. A VaR nem más, mint a kvantilis függvény ellentette, annak az inverze pedig az eloszlásfüggvény. [7] 0.1-es számú állítására hivatkozva pedig láthatjuk, hogy ha az eloszlásfüggvények konvergálnak egymáshoz, akkor a VaR értékek is. Ez pedig teljesül hiszen maguk a valószínűségi változók konvergálnak egymáshoz sztochasztikusan.
Most pedig rátérhetünk az utolsó lemmánkra, melyre szükségünk lesz a szubadditivitás ezen módon történő bizonyításakor.

Lemma 4.1.9 (Szubadditivitás külön-külön n-diszkrét valószínűségi változókra)**.** *Legyen X és Y két n-diszkrét valószínűségi változó, valamint $\alpha \in]0,1[$. Ekkor $ES_\alpha(X+Y) \leq ES_\alpha(X) + ES_\alpha(y)$.*

Bizonyítás: Felthető, hogy $X, Y \leq 0$, ugyanis a várható többletveszteség eltolás-invariáns, valamint mindkettő valószínűségi változó korlátos az n-diszkrét tulajdonságuk miatt. Ekkor legyen (X, Y) értékkészlete $\{(x_1, y_1), ..., (x_m, y_m)\}$, ahol szintén az n-diszkrét tulajdonságból következik, hogy $m \leq n^2$.
Célunk az lesz, hogy alkalmazhassuk az n-diszkrét két-dimenziós valószínűségi változók szubadditivitásáról szóló lemmát.
Legyen $A_i = \{(X, Y) = (x_i, y_i)\},\ i = 1, ..., m$. Mivel Ω elemszáma végtelen, ezért találhatunk $\forall A_i$-re olyan racionális valószínűségű $B_i^k \in,\ k = 1, 2, ...$ halmazokat, hogy $B_i^1 \subseteq B_i^2 \subseteq ... \subseteq B_i^k$ és $\mathbb{P}(A_i) - \mathbb{P}\left(B_i^k\right) < \frac{1}{k}$. Legyen most

$$X_k = \sum_{i=1}^{m} X\mathbf{1}_{B_i^k},\ Y_k = \sum_{i=1}^{m} Y\mathbf{1}_{B_i^k},\ k = 1, 2, ...$$

Az egyenlőtlenségből azonnal következik, hogy ha $k \to \infty$, akkor $X_k \to X$ és hasonlóképp $Y_k \to Y$.
Vegyük észre, hogy (X_k, Y_k) valószínűségi tömegfüggvénye $\forall k \in \mathbb{N}^+$-ra racionális értéket vesz fel, azaz $\exists m_k \in \mathbb{N}^+$, amire (X_k, Y_k) m_k-diszkrét. Felhasználva korábbi lemmánkat az várható többletveszteség n-diszkrét valószínűségi vektorváltozókra vonatkozó szubaddi-

tivitásáról, valamint az ES_α monotonitását:

$$ES_\alpha(X_k + Y_k) \leq ES_\alpha(X_k) + ES_\alpha(Y_k) \leq ES_\alpha(X) + ES_\alpha(Y)$$

Ezzel pedig a lemmát beláttuk.

1.Bizonyítás befejezése: Legyen $X_k = F_X^{-1}(U_k)$ és $Y_k = F_Y^{-1}(W_k)$, ahol $U_k(\frac{\lfloor 2^k U_X \rfloor}{2^k}$, $W_k = \frac{\lfloor 2^k U_Y \rfloor}{2^k}$ és U_X, U_Y az X-hez és Y-hoz tartozó eloszlási transzformáltak. Ekkor $0 < 2^k U_X < 2^k$ egy valószínűséggel, azaz $\lfloor 2^k U_Y \rfloor \in \{0, 1, ..., 2^k - 1\}$. Tehát egy valószínűséggel $\mathbb{P}\left(U_k = \frac{\gamma}{2^k}, \text{ahol } \gamma \in \{0, 1, ..., 2^k - 1\}\right) = \frac{1}{2^k}$. Ebből következik, hogy X_k és Y_k 2^k-diszkrétek. Ahogy $U_k \to U_X$ és $U_k \to V_X$ sztochasztikusan, ha $k \to \infty$, úgy tart $X_k \to X$ és $Y_k \to Y$ sztochasztikusan. Ekkor a 4.10-es lemmát falhsználva X_k-ra és Y_k-ra beláttuk, hogy a várható többletveszteség szubadditív.

Következmény 4.1.9.1. *Innen pedig könnyen látható, hogy a koherenciához szükséges többi tulajdonág könyen teljesül, azaz a várható többletvveszteség egy koherens kockázati mérték.*

4.2 Optimalizációs tulajdonságok

Annak érdekében, hogy a szóban forgó kockázati mérték több tulajonságát is megismerhessük, egy második bizonyítást is megadunk az olvasó számára, mely valamelyest kevesebb valószínűségelméleti ismeretet igényel, azonban annál több számolást.

2. Bizonyítás: Az első lemma egy ekvivalens átírást ad számunkra L^1-ben, mellyel a későbbiekben könnyebb lesz számolni, valamint könnyebben lehet vele interpretálni a várható többletveszteséget.

Lemma 4.2.1. $\forall \alpha \in]0, 1[\,, X \in L^1$

$$ES_\alpha(x) = VaR_\alpha - \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[(X + VaR_\alpha(X))_-\right]$$

Bizonyítás:

$$
\begin{aligned}
ES_\alpha(X) &= \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha -F_X^{-1}(q)\,dq = \\
&= -F_X^{-1}(\alpha) + \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \left(-F_X^{-1}(q) + F_X^{-1}(\alpha)\right)dq = \\
&= -F_X^{-1}(\alpha) - \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \left(F_X^{-1}(q) - F_X^{-1}(\alpha)\right)dq = \\
&= VaR_\alpha(X) - \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[\left(F_X^{-1}(U_X) + VaR_\alpha(X)\right)_-\right] = \\
&= VaR_\alpha - \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[(X + VaR_\alpha(X))_-\right],
\end{aligned}
$$

felhasználva az eloszlási transzformáltról szóló lemmát.

Megjegyzés 4.2.2. *A lemmából azonnal következik az alábbi egyenlőtlenség:*

$$ES_\alpha(X) \leq VaR_\alpha(X),$$

azaz a várható többletveszteség ugyanazon portfólió esetén legalább annyi tőke hozzáadását követeli meg, mint az ugyanazon konfidencia-szinthez tartozó kockáztatott érték, azaz előbbi egy konzervatívabb kockázatméréshez vezet - ugyanolyan α mellett.

Megjegyzés 4.2.3. *A gyakorlatban többször felmerülő állítás, hogy a várható többletveszteség alkalmas a valószínűségi változó eloszlásának farokrészében található kockázat felmérésére, ennek az kijelentésnek a fenti lemma egy alkalmas, precíz matematikai alátámasztása, illetve megfogalmazása.*

Lemma 4.2.4. $\forall X \in L^1, \alpha \in \,]0,1[$

$$\alpha ES_\alpha(X) = \mathbb{E}\left[XI_{\{X<-VaR_\alpha(X)\}}\right] + VaR_\alpha(X)\left(\alpha - \mathbb{P}(X < -VaR_\alpha)\right)$$

Lemma bizonyítása:

$$
\begin{aligned}
\alpha ES_\alpha(X) &= \alpha VaR_\alpha(X) - \mathbb{E}\left[(X + VaR_\alpha(X)\,I_{\{X<VaR_\alpha(X)\}})\right] \\
&= \mathbb{E}\left[XI_{\{X<-VaR_\alpha(X)\}}\right] + VaR_\alpha(X)\left(\alpha - \mathbb{P}(X < -VaR_\alpha)\right)
\end{aligned}
$$

Lemma 4.2.5. *Legyen $\alpha \in \,]0,1[$, $X \in L^\infty$. Ekkor*

$$VaR_\alpha(X) \in \arg\min_{t\in\mathbb{R}}\{t - \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[(X+t)_-\right]$$

Lemma bizonyítása: Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
f(t) &= t - \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[(X+t)_-\right] = \\
&= t - \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{-t} (F_X(X))\,dx, \forall t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Legyen $t_0 = VaR_\alpha(X)$, valamint $t_1 > t_0$. Ekkor

$$
\begin{aligned}
f(t_1) - f(t_0) = (t_1 - t_0) - \frac{1}{\alpha}\int_{-t_1}^{-t_0} F_X dx &\geq \\
\geq (t_1 - t_0) + \frac{1}{\alpha}(\alpha)(t_1 - t_0) &= 0.
\end{aligned}
$$

kihasználtuk, hogy $x \in (-t_1, -t_0)$, valamint minden ilyen x-re $F_X(x) \geq \alpha$, azaz $1 - F_X(x) \leq 1 - \alpha$. Most legyen $t_2 < t_0$. Analóg:

$$
\begin{aligned}
f(t_2) - f(t_0) = (t_2 - t_0) + \frac{1}{\alpha}\int_{-t_2}^{-t_0} F_X dx &\geq \\
\geq (t_2 - t_0) + \frac{1}{\alpha}(\alpha)(-t_2 + t_0) &= 0.
\end{aligned}
$$

Ezzel tehát beláttuk a lemmát.

Következmény 4.2.5.1. *Legyen $X \in L^\infty$ és $\alpha \in]0,1[$. Ekkor*

$$
ES_\alpha(X) \in \min_{t\in\mathbb{R}}\{t - \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[(X+t)_-\right].
$$

A 4.12-es lemma szerint a kifejezésnek minimumhelye van $t_0 = VaR_\alpha(X)$-ban, a kiértékelése pedig t_0-ban megegyezik az $ES_\alpha(X)$-szel a 4.11-es lemma szerint.

2. Bizonyítás befejezése: Legyen tehát $t_1 = VaR_\alpha(X)$, valamint $t_2 = VaR_\alpha(Y)$. A 4.11-es lemma szerint:

$$
ES_\alpha(X) + ES_\alpha(Y) = t_1 + t_2 - \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[(X+t_1)_-\right] - \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[(Y+t_2)_-\right].
$$

Használjuk ki, hogy $-(x+y)_- \leq -(x)_- - (y)_-$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$!

$$\begin{aligned} ES_\alpha(X) + ES_\alpha(Y) &= t_1 + t_2 - \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[(X+t_1)_- + (Y+t_2)_-\right] \\ &\geq t_1 + t_2 - \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[(X+Y+t_1+t_2)_-\right] \\ &\geq \min_{t\in\mathbb{R}}\{t - \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[(X+Y+t)_-\right]\} \\ &= ES_\alpha(X+Y), \end{aligned}$$

felhasználva a 4.13-as lemmát. Ezzel pedig ismét beláttuk, hogy a várható többletveszteség szubadditív.

5.0 ES vagy VaR: összehasonlítás, gyakorlati alkalmazások

Ebben a fejezetben megcélozzuk a két, fejezetcímben szereplő kockázati mértékről eddig megszerzett ismereteink kvalitatív és kvantitatív összehasonlítását, valamint további, gyakorlatban is fontos szempontokat említünk, melyek további összevetés alapjául szolgálhatnak. Követni fogjuk [6] egyes fejezetét, valamint egy közelítéses metódusokat felhasználó saját alkalmazást is bemutatunk.

5.1 Összehasonlítás és utólagos ellenőrzés

Tekintettel arra, hogy az előző fejezet nagy részét a várható többletveszteség koherenciájának szenteltük, legelső összehasonlítási pontunk, mely talán a regulátori szempontból is első számú volt, az az, hogy a VaR nem koherens, ellentétben a várható többletveszteséggel. Fontos megemlítenünk még továbbá, hogy a várható többletveszteség konzervatívabb kockázati mértéknek számít, hiszen legalább akkora, mint az azonos paraméterű kockáztatott érték.

Amikor letelik azon időszak, melyre meghatároztuk a VaR, illetve ES predikiónkat, a szabályozószervek megkövetelik a pénzintézetektől, hogy utólagos ellenőrzéseket (ún. backtestinget) folytassanak annak érdekében, hogy a kalkulációknak megfelelő limiteket betartva tevékenykedtek-e az adott időszakban. Mindemellett a szabályozószerveket segíti a az utólagos ellenőrzés abban is, hogy a szabályozott intézeteken belüli kockázati modelleket elfogadja, vagy épp ellenkezőleg, kiszűrje azokat, melyek alábecsülték a fennálló kockázatot. Tekintsünk mindkét kockázati mértékre egy-egy példát, miképp lehet rajtuk a backtestinget elvégezni.

A kockáztatott érték esetében egy egészen intuitív módja létezik az utólagos ellenőrzésnek. Emlékezzünk, hogy a VaR azt hivatott meghatározni, hogy $100\alpha\%$-os valószínűséggel mekkora lesz a legnagyobb veszteségnek az ellenttje, melynél nagyobb összeget nem fogunk elveszíteni. Feltételezzük, hogy az adott időperiódusra vonatkozóan napi rendszerességgel rögzített jósolt és valós középárfolyamokkal rendelkezünk, melyekből kiszámíthatjuk a napi vételre és másnapi eladásra vonatkozó profitunkat. Ekkor megszámolhatjuk a jósolt adatokkal generált adatok kockázatott értékére vonatozó tényleges túllépések számát, melyet elosztva az adathalmazunk elemszámával megkaphatjuk azok százalékos arányát. Amennyiben ez a szám kisebb, mint α, a modellünk megfelelően működött.

A várható többletveszteség ellen szóló egyik érv sokáig úgy, szólt, hogy az a VaR-ral ellentétben nem végezhető rajta utólagos ellenőrzés. Bár a várható többletveszteség csakugyan nem olyan intuitív módon ellenőrizhető utólag, mint a VaR, azonban ma már több módszer is létezik erre. Ezekből az alábbiakban bemutatunk egyet ebben a dolgozatban.

Feltesszük, hogy T napon keresztül X_t írja a t-edik napon egy bank profitját, melynek valódi eloszlása egy valós F_t eloszlásfüggvény által van meghatározva. Feltesszük továbbá a számításaink egyszerűsítése céljából, hogy X_t-k függetlenek, viszont azt nem, hogy azonos eloszlásúak, lévén némely napokon feszült piaci körülmények folyásolják be a bank profitját, némelyeken pedig korántsem beszélhetünk ilyenről. Feltesszük, hogy ezek az eloszlások folytonosak és szigorúan monoton nőnek.

Legyen egy modellünk, mely megpróbálja előre megjósolni az F_t-ket, ezek legyenek analóg módon a P_t eloszlásfüggvények. A T nap eltelte után szeretnénk ellenőrizni, hogy a predikciók pontosak voltak-e. Legyenek a P_t-k segítségével kalkulált kockázati mértékek:

$$Var^P_{\alpha,t} = -P_t^{-1}(\alpha)$$
$$ES^P_{\alpha,t} = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha P_t^{-1}(q)\,dq$$

Most legyen $I_t^P = (X_t + VaR_{\alpha,t}(X) < 0)$, az indikátora annak, hogy egy $VaR_\alpha(X)$-túllépés történt, és ahol $X \sim P$. Tekintsük továbbá a feltétel nélküli extrém értéket:

$$ES_{\alpha,t}(X_t) = -\mathbb{E}\left[\frac{X_t I_t^F}{\alpha}\right].$$

Legyen a próbastatisztika a következő:

$$Z = \sum_{t=1}^{T} \frac{X_t I_t^F}{T\alpha ES_{\alpha,t}} + 1$$

A fenti feltételekkel definiáljuk a következő statisztikai próbát:

$$\begin{aligned} H_0 &: \ \forall t \in \mathbb{R} \ P_t^{[\alpha]} = F_t^{[\alpha]} \\ H_1 &: \ \forall t \in \mathbb{R} \ ES_{\alpha,t}^{F} \geq ES_{\alpha,t}^{P} \\ & \quad \ \forall t \in \mathbb{R} \ VaR_{\alpha,t}^{F} \geq VaR_{\alpha,t}^{P} \end{aligned}$$

Ekkor

1. $\mathbb{E}_{H_0}[Z] = 0$
2. $\mathbb{E}_{H_1}[Z] < 0$

Feltehetjük, hogy költséghatékony működésre törekedés miatt a fordított irányú egyenlőtlenség esetét az egyenlőség esetére redukálhatjuk. Ha az 1. pontban meghatározottak teljesülnek, akkor

$$\mathbb{E}_{H_0}\left[\frac{X_t I_t^F}{\alpha}\right] = -ES_{\alpha,t}^{F}(X) = -ES_{\alpha,t}^{P}(X),$$

melyből

$$\mathbb{E}_{H_0}[Z] = \mathbb{E}_{H_0}\left[\frac{X_t I_t^F}{\alpha ES_{\alpha,t}^{P}(X)} + 1\right] = 0.$$

Most térjünk át arra az esetre, amikor a 2. pontban szerelő egyenlőtlenségek teljesülnek. $VaR_{\alpha,t}^{P} \leq VaR_{\alpha,t}^{F}$-ből azonnal adódik hogy $I_t^F \leq I_t^P$. Eltolásbéli invariancia miatt fetehetjük, hogy $VaR_{\alpha,t}^{P} > 0$. Tehát amikor $I_t^P = 1$, akkor $X_t < 0$. Mindezek segítségével kapjuk, hogy $X_t I_t^P \leq X_t I_t^F$. Ebből:

$$\mathbb{E}\left[X_t I_t^P\right] \leq \mathbb{E}\left[X_t I_t^F\right] = -\alpha ES_{\alpha,t}^{F} \leq -\alpha ES_{\alpha,t}^{P},$$

melyből

$$\mathbb{E}_{H_1}[Z(X)] = \mathbb{E}_{H_0}\left[\frac{X_t I_t^F}{\alpha ES_{\alpha,t}^{P}(X)} + 1\right] < 0.$$

Ennek a statisztikai próbának az elvégzésével tehát utólagosan ellenőrizhetőek a várható többletveszteségre adott predikciók.

5.2 Alkalmazások

Térjünk vissza most a már korábban említett szcenárió alapú, historikus kockázatméréshez. Vegyünk egy közepes méretű bankot, melynek a sikeressége együtt mozog a pi-

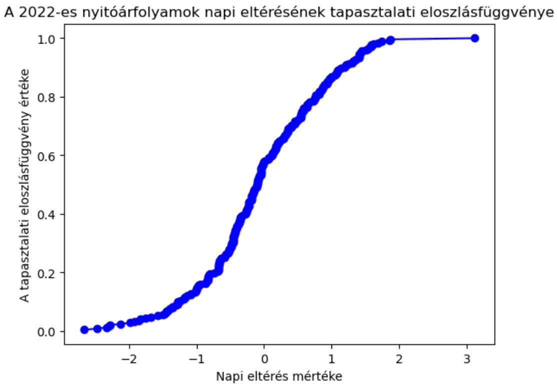
accal, valamelyest sikertelen stratégiái miatt. Legyen ez a stratégia az, hogy S&P 500 indexből származtatott derivatívákba fektet be az intézmény, így profitját modellezhetjük például a JPMorgan Equity Index Fund-A árfolyamának mozgásával, melyből a bank egyszerre 1.000.000 darabot birtokol.
Legyen az adott szcenáriónk a következő: a bank által használt, kereskedéséhez kritikus, harmadik fél által biztosított alkalmazások leállnak egy napra, azaz arra az időszakra a bank megszűnik aktív piaci szereplőnek lenni. Megjegyezzük, hogy csupán néhány másik bank érintett, így a piaci volumenek nem változnak meg lényegesen azon a napon. Tegyük fel, hogy mindez a 2022-ben történt, s a periódusban a banknak legfeljebb 1.000.000 darab fent említett termékbe fektetett be, valamint a releváns regulátor (pl. az Amerikai Központi Jegybank) 1 millió dollárra bünteti a pénzintézetet működési kockázati mulasztásai miatt.

Megjegyzés 5.2.1. *Az egyszerűsítés és a könnyebb szemléltethetőség kedvéért tettük fel a kizárólagos stratégiát, valamint tekintettünk el az egyértelműen felmerülő likviditási kockázattól. Azonban választásunk miatt legalább a portfólió kellő mértékű diverzifikáltsága miatt nem kell aggódnunk.*

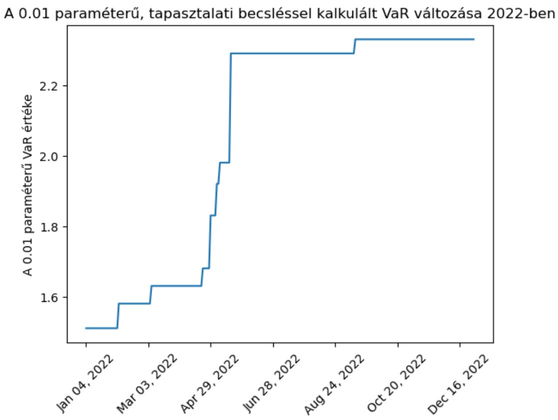
Legyenek tehát a lehetséges becslések a következők, ahol a VaR-t a nyitóárfolyamok tapasztalai eloszlásfüggvényének segítségével közelítjük:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= (1.000.000\$ \times -VaR_{0,01} - 1.000.000\$) = -3.330.000\$,\\
L_2 &= (1.000.000\$ \times -ES_{0,01} - 1.000.000\$) = -6.976.666\$,\\
L_2 &= (1.000.000\$ \times -ES_{0,05} - 1.000.000\$) = -26.666.666\$
\end{aligned}
$$

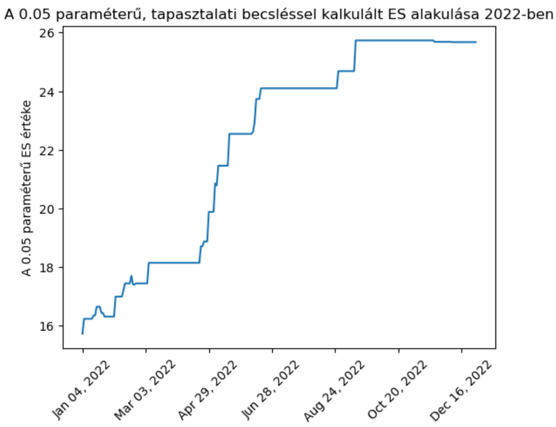
Az utóbbi predikció a hatóságok által javasolt 0.01 paraméterű VaR és 0.05 paraméterű ES normáleloszlás esetén való ekvivalenciájának tapasztali vizsgálatának kedvéért. Az alábbi ábrán megtekinthetjük a napi nyereségnek a nyitóárfolyamok által becsült tapasztalati eloszlását 2022-re, bejelölve rajta az egyes kiszámolt kockázati mértékek ellentettjeit. Ezután vessünk egy pillantást a VaR és az ES időbeli változására. Kiszámítjuk a fenti módokon 2022-re az elmúlt 12 hónap adataiból VaR-t és ES-t. Az piaci gyakorlatnak megfelelően az elmúlt 12 hónapot 250 nappal számítjuk. A kockázati mértékek változását az alábbi ábrákon követhetjük. A 2021-hez képest sokkal volatilisebb 2022 a kockázat növekedésével vonható párhuzamba.



2. Ábra



3. Ábra



4. Ábra

Összefoglalás

A dolgozatban írása közben sikerült megértenünk, hogy mik azok a kockázati mértékek, mit hivatottak meghatározni: döntések objektív, számszerűsített alapjául szolgálnak. Bevezettük a kockáztatott értéket, a gyakorlatban legeltejedtebb kockázati mértéket és a vele definiált feltételes extrém értéket is, példákon keresztül megfigyelve hiányossákagaikat. Megismertük, hogy ebben a kontextusban mit jelent a koherencia, valamint koherens mértékeink közül szó esett a legrosszabb feltételes várakozásról és részletesebben a várható többletveszteségről, mely egy új alternatíva a kockáztatott értékre.
Bemutattuk az utólagos ellenőrzés motivációját, valamint a kockáztatott érték és várható többletveszteség esetén útmutatást adtunk a megvalósításukra. Végül pedig örülök, hogy historikus adatatokra alapozva egy lehetséges szcenárió veszteségére is közelítést tudtunk adni a fenti kockázati mértékek segítségével.
A továbbiakban tervezek többet megtudni arról, hogy folytonos eloszlások esetén mi a piaci gyakorlata a tárgyalt kockázati mértékek kiszámításának, valamint hogy egyes kereskedési stratégiák hogyan módosulnak egy kockáztatott értékben vagy várható többletveszteségben meghatározott kockázati limit bevezetése esetén.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni konzulensemnek, Arató Miklósnak az egész éves munkáját. Nem csupán szakdolgozatom előrehaladását segítette türelemmel, hanem közben megerősített továbbtanulási szándékaimban is, mindkettőért hálás vagyok.

Irodalomjegyzék

$\boxed{1.}$ Philippe Artzner, Freddy Delbean, Jean-Marc Eber és David Heath. Coherent Measures of Risk. 1999, Mathematical Finance, 9. évfolyam, 3. szám, 203-228.

$\boxed{2.}$ Stefano Benati. The computation of the worst conditional expectation. 2004, European Journal of Operational Research, 155. évfolyam, 2. szám, 414-425. ISSN: 0377-2217.

$\boxed{3.}$ Paul Embrechts és Roudu Wang. Seven Proofs for the Subadditivity. 2015, Dependence Modeling, 3. évfolyam, 1. szám, 126-140. ISSN: 2300-2298.

$\boxed{4.}$ Explanatory note on the minimum capital requirements for market risk. 2019, Bank for international settlements.

$\boxed{5.}$ Ludger Lüschendorf. On the distributional transform, Sklar's theorem, and the empirical copula process. 2009, Journal of Statistical Planning and Inference, 139. évfolyam, 11. szám, 3921-3927,

$\boxed{6.}$ Carlo Acerbi és Balazs Szekely. Backtesting Expected Shortfall. 2014, MSCI Inc..

$\boxed{7.}$ Sidney I. Resnick. Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes. 2008, Springer Science+Business Media New York, New York.

Ábrajegyzék