NYILATKOZAT

Név: Lizák Viktor

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: TT16SZ

Szakdolgozat címe:
Topologikus és variációs módszerek a differenciálegyenletek elméletében

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2023.06.05

Lizák Viktor

a hallgató aláírása

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Lizák Viktor

Topologikus és variációs módszerek a differenciálegyenletek elméletében

Matematika BSc Szakdolgozat

Témavezető:

Dr. Simon Péter
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2023

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Szakdolgozatomban néhány topologikus illetve variációs módszert mutatok be differenciálegyenletek megoldhatóságának bizonyításához. A módszerek a matematika több ágára is építenek: differenciálegyenletek mellett a dolgozat szinte egészében felhasználom a klasszikus analízis, funkcionálanalízis, és az algebrai topológia eredményeit is. A dolgozat két részre osztható: az elsőben klasszikusnak mondható módszerek szerepelnek, a másodikban a bifurkációelmélet eszközei, melyek hangsúlyosabb szerepet kapnak. A két rész hasonlóan épül fel, először elméleti eredmények találhatóak, majd differencálegyenleteket is magában foglaló feladatokon keresztül mutatom be alkalmazásukat. Az itt bemutatott gyakorlati alkalmazások mind fizikai motivációval bírnak, a megfelelő fejezetekben egy rövid összefoglalóban fejtem ki milyen probléma vezet el egy-egy differenciálegyenlethez. Az első rész fő elméleti eredménye a Leray-Schauder alternatíva tétel, melyet felhasználva megmutatom, hogy egy fém rúd melegítésekor beálló hőegyensúlyi állapotot le lehet írni egy közönséges differenciálegyenlet segítségével. A második rész legfontosabb eszköze a Krasnoselskii-Rabinowitz tétel. Alkalmazása során bebizonyítom egy differenciálegyenlet család megoldhatóságát bizonyos feltételek mellett, majd a dolgozat utolsó fejezetében egy családból választott egyenlet megoldásán haladok végig. A téma lehető legszéleskörűbb kifejtése érdekében némely olyan eredmény bizonyítás nélkül szerepel, amely nem tartozik a szorosan a dolgozat témájához.

1. fejezet

Klasszikus módszerek

Néhány elméleti eredményt mutatok be, amelyek segítségével bizonyítható differenciálegyenletek megoldhatósága. Némely tételt vagy állítást nem bizonyítok a tömörebb dolgozat érdekében, a bizonyítások megtalálhatók az [1] forrásban.

1.1. Tétel (Cauchy-Peano egzisztencia tétel). *$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pont egy környezetében. Ekkor létezik egy $\alpha > 0$ és következő egyenletnek is létezik megoldása:*

$$y' = f(x, y) \qquad y(x_0) = y_0$$

az $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ intervallumon.

1.2. Definíció. *Legyen X metrikus tér, jelölje $C(X)$ az X-en értelmezett valós értékű folytonos függvények halmazát. $A \subseteq C(X)$ ekvifolytonos az $x \in X$ pontban, ha minden $\epsilon > 0$ esetén létezik $\delta_x > 0$, amire minden olyan $x, y \in X, d(x, y) < \delta_x$-re $|u(x) - u(y)| < \epsilon$ minden $u \in A$.*

Ismert, hogy véges dimenziós normált terekben a korlátos és zárt halmazok egybeesnek a kompakt halmazokkal. Végtelen dimenzióban ez általában nem igaz. Az alábbi tétel jellemzést ad a kompakt halmazokra a folytonos függvények $C(X)$ normált terében, amelyet a maximum normával látunk el.

1.3. Tétel (Ascoli-Arzela). *X kompakt metrikus tér. Ha $A \subseteq C(X)$ ekvifolytonos és korlátos, akkor A relatív kompakt.*

Az alábbi definíció a dolgozat egészében fontos szerepet játszik:

1.4. Definíció. *Legyenek X, Y normált terek, az $f : X \to Y$ függvényt teljesen folytonosnak nevezzük, ha minden $S \subseteq X$ korlátos halmaz esetén $f(S)$ relatív kompakt.*

1.5. Definíció. *Legyenek X, Y normált terek, az $f : X \to Y$ függvényt kompaktnak nevezzük, ha $f(X)$ relatív kompakt.*

1.6. Definíció. *Legyen k természetes szám. Ekkor $C^k[a,b]$ jelöli a k-szor folytonosan differenciálható valós értékű függvények terét.*

1.7. Tétel. *A $j : C^{k+1}[a,b] \to C^k[a,b]$ beágyazás teljesen folytonos.*

1.8. Definíció. *Legyen X normált tér, $F = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ X egy véges elemszámú részhalmaza. F konvex burka:*

$$con(F) = \{\sum_{j=1}^{n} t_j x_j : t_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n} t_j = 1\}$$

1.9. Tétel (Schauder projekciós lemma). *Legyen K az X normált tér kompakt részhalmaza, d a norma által indukált metrika. Adott $\epsilon > 0$ esetén létezik egy véges F részhalmaza X-nek és egy $P : K \to con(F)$ Schauder projekciónak nevezett leképezés, amelyre $d(P(x), x) < \epsilon$ minden $x \in K$.*

Bizonyítás: Az $F = x_1, ..., x_m$ halmaz legyen a K egy véges ϵ-hálója. Minden $i = 1, ..., m$ esetén legyen $\phi_i : R \to \mathbb{R}$, $\phi_i(x) = \epsilon - d(x, x_i)$ ha $x \in B(x_i; \epsilon)$ és $\phi_i(x) = 0$ különben. Legyen

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{m} \phi_i(x)$$

és

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} x_i$$

A P leképezés folytonos, hiszen $\phi_i(x)$-ek is folytonosak. Számoljuk ki egy tetszőleges pont távolságát a projekció képétől:

$$d(P(x), x) = || \sum_{i=1}^{m} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} x_i - \sum_{i=1}^{m} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} x|| =$$

$$|| \sum_{i=1}^{m} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} (x_i - x)|| \leq \sum_{i=1}^{m} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} ||x_i - x|| <$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} \epsilon = \epsilon$$

hiszen $\phi_i(x) = 0, \; ha \; ||x_i - x|| \geq \epsilon$.

1.10. Tétel (Schauder fixpont tétel). *Legyen C egy zárt, konvex részhalmaza egy normált térnek, és $f : C \to C$ kompakt leképezés. Ekkor f-nek létezik fixpontja.*

A következő tétel a schauder fixponttétel egyszerű következménye, ugyanis egy kompakt halmazon értelmezett folytonos függvény teljesen folytonos is.

1.11. Tétel (Általánosított Brouwer fixpont tétel). *Egy normált tér kompakt, konvex részhalmazán értelmezett folytonos függvénynek létezik fixpontja.*

1.12. Definíció. *Legyen X tetszőleges normált tér. Az $f : X \to X$ leképezés kielégíti a Leray-Schauder peremfeltételt, ha létezik egy $r > 0$ valós szám, hogy $||x|| = r$-ből következik $f(x) \neq \lambda x$ minden $\lambda > 1$-re.*

1.13. Tétel (Leray-Schauder alternatíva). *Legyen $f : X \to X$ teljesen folytonos leképezés, X normált tér és f teljesíti a Leray-Schauder peremfeltételt. Ekkor f-nek létezik fixpontja.*

Bizonyítás: A Schauder fixpont tétel által megkövetelt konvex halmaz legyen $C = B_r = \{x \in X : ||x|| \leq r\}$ és jelölje $f|B_r : B_r \to X$ az f függvény megszorítását B_r-re, ekkor $f|B_r$ kompakt. f nem feltétlenül képezi B_r-t saját magára, ezért egy retrakció segítségével fogok egy függvénykompozíciót definiálni. Legyen $\rho : X \to B_r$ a retrakció, ami:

$$\rho(x) = \tfrac{r}{||x||}x, \text{ ha } ||x|| \geq r$$

és az identikus függvény a B_r részhalmazon.

Felhasználva a most definiált leképezést legyen $f^* = \rho f : B_r \to B_r$. f teljesen folytonossága miatt $f(B_r)$ benne van egy kompakt halmazban, jelölje ezt K. ρ-t folytonos függvényként értelmeztem, ezért $f^*(B_r) \subseteq \rho(K)$ és így f^* is kompakt leképezés. Ezáltal teljesülnek a Schauder fixpont tétel feltételei, amiből következik, hogy létezik $x \in B_r$, amire $f^*(x) = x$. Most belátom, hogy erre az x pontra teljesül $f(x) \in B_r$, amiből már következik, hogy x a keresett fixpont, mert $f^*(x) = \rho(f(x)) = f(x)$. A Leray-Schauder peremfeltételt fogom felhasználni $f(x) \in B_r$ bizonyításához. Ha fennállna $f(x) \notin B_r$, akkor igaz lenne $||f(x)|| > r$, amiből következik:

$$x = f^*(x) = \rho(f(x)) = \tfrac{r}{||f(x)||}f(x)$$

Az előbbi egyenlőségből adódik:

$$||x|| = ||\tfrac{r}{||f(x)||}f(x)|| = r$$

Az egyenlőséget másképp felírva:

$$f(x) = \tfrac{||f(x)||}{r}x = \lambda x$$

ahol $\lambda > 1$, mert $||f(x)|| > r$. Ez pedig a Leray-Schauder peremfeltétel miatt ellentmondáshoz vezet, amivel beláttam, hogy $f(x) = x$.

Ez az eredmény azért alternatíva tétel, mert állítása szerint az $f(x) = \lambda x$, $\lambda > 1$ egyenletnek van megoldása tetszőlegesen nagy $||x||$-ra, vagy pedig $f(x) = x$-nek van megoldása.

2. fejezet

A klasszikus módszerek egy alkalmazása

Egy fém rúd melegítésének matematikai modelljét fogom bemutatni. Élek néhány megszorítással: felteszem, hogy a rúd anyaga homogén, kezdetben a rúd hőmérséklete megegyezik a környezetével és a hőmérséklet változatlan marad a két végpontban a folyamat során. A melegítés során a rúd elér egy egyensúlyi állapotot, amikor nem változik már a rúd hőmérséklete, bár az egyes pontokban különböző lehet. Azzal a feltevéssel élek, hogy a hőegyensúlyi állapot leírható egy közönséges differenciálegyenlettel. Nem törekszem arra, hogy megkeressek egy explicit alakot: csupán belátom a korábbi elméleti eredmények segítségével, hogy létezik megoldás, ami már közelíthető numerikus módszerekkel. A modellben a rudat a [0,1] intervallummal fogom reprezentálni, így a rúd egy pontja megadható egy $s \in [0,1]$ számmal. A hőmérsékletet egy $y = y(s,t)$ kétváltozós függvénnyel fogom nyomon követni, s jelöli a rúd egy pontját, t pedig az időpontot. A most bevezetett jelölésekkel a következő két megszorítást tettem fel korábban: $y(s,0) = 0$ minden s-re és $y(0,t) = y(1,t) = 0$ minden t-re. Azt is feltettem, hogy egy idő után már nem változik meg a rúd hőmérséklete, azaz létezik egy $t_0 \in \mathbb{R}$, amire minden $t_1, t_2 \geq t_0$-ra $y(s,t_1) = y(s,t_2)$ $\forall s \in [0,1]$. Fizikából és a parciális differenciálegyenletek elméletéből következik, hogy az y függvény kielégít egy közönséges differenciálegyenletet:

$$\text{(ky')' + q(s, y) = 0}$$

Ahol k adja meg a rúd anyagának hővezető képességét. q alakja is ismert: $q(s,y) = R(s)y + S(s)$, ahol $R(s) < 0$ és $S(s) > 0$ minden s-re.

Az eddigiek ismeretében rátérhetünk a differenciálegyenlet tisztán matematikai vizsgálatára. Általában a hővezetési együttható nem függ y-tól, de ebben az esetben nemlineáris hővezetésről van szó, amikor is az együttható hőmérsékletfüggő.

Felhasználva, hogy k kizárólag y-tól függ és alkalmazva a láncszabályt az előbbi differenciálegyenletre, adódik:

$$ky'' + k'(y')^2 + q(s, y) = 0$$

Átrendezve y''-t és behelyettesítve q-t:

$$y'' = -\tfrac{1}{k}[k'(y')^2 + Ry + S] = f(s, y, y')$$

A következő cél az f vizsgálata y maximumában, azaz abban a pontban, ahol a rúd hőmérséklete eléri a maximumát. Ez nyilvánvalóan egyik végpont sem lehet és y deriváltja eltűnik ebben a pontban. Általánosabb formában folytatom f vizsgálatát, egy háromváltozós $f(s, u, p)$ alakot tekintek. Ha y eléri maximumát, akkor a függvény

$$f(s, u, 0) = -\tfrac{1}{k}[Ry + S]$$

alakú. Ha $|u|$ elég nagy, akkor

$$u(Ru + S) = Ru^2 + Su < 0$$

mert $|u|^2 > |u|$ és $R(s) < 0\ \forall s$. A k függvény pozitív, hiszen a hővezető képesség nem lehet 0 vagy negatív, ezért létezik egy M pozitív szám, amire ha $|u| > M$, akkor $uf(s, u, 0) > 0$.

Az egyenlet általános alakja így néz k:

$$f(s, u, p) = -\tfrac{1}{k(u)}[k'(u)p^2 + q(s, u)].$$

Alkalmazva a háromszög egyenlőtlenséget:

$$|f(s, u, p)| \leq |\tfrac{k'(u)}{k(u)}|p^2 + |\tfrac{q(s,u)}{k(u)}|$$

Az f viselkedését pár sorral korábban már leírtam az $|u| > M$ esetben. Most a $-M \leq u \leq M$ eset következik. Az eddig mondottak alapján a $k(u)$ és $k'(u)$ füg gvények folytonosak és korlátosak a $[-M, M]$ intervallumon, valamint $k(u) > 0$ ugyanitt. A $q(s, u)$ folytonos ezen az intervallumon, ezért korlátos is.

Ezért léteznek A és B pozitív számok, melyekre:

$$|\tfrac{k'(u)}{k(u)}| < A,\ |\tfrac{q(s,u)}{k(u)}| < B$$

minden $0 \leq s \leq 1$ és $-M \leq u \leq M$. Amiből következik, hogy

$$|f(s, u, p)| < Ap^2 + B$$

minden p-re és az előbbi intervallumokon s-re és u-ra. Ezzel elérkeztem egy ismert egyenlet megfogalmazásához. Keressük azt az $y : [0, 1] \to \mathbb{R}$ függvényt, ami kielégíti az alábbi egyenletet

$$y'' = f(s, y, y')$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

ahol $f = f(s, u, p) : [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, ami rendelkezik az alábbi két tulajdonsággal:

1. létezik $M > 0$, amire $|u| > M$-ből következik $uf(s, u, 0) > 0$
2. létezik $A, B > 0$, amire ha $0 \leq s \leq 1$ és $|u| \leq M$, akkor $|f(s, u, p)| < Ap^2 + B$ minden p-re.

Az imént leírt egyenlet a másodrendű nemlineáris Dirichlet peremértékfeladat. A fejezet következő részében bemutatom hogyan lehet topologikus eszközökkel bizonyítani a feladat megoldhatóságát. Az egyenlet bal oldalán lévő második deriváltra mint operátorra fogok tekinteni, jelölje L azt az operátort, ami egy $[0, 1]$ intervallumon értelmezett függvényhez a második deriváltját rendeli, pontosabban:

$$L : C^2[0, 1] \to C[0, 1], Lv = v''$$

A definíciót csak olyan v függvényekre mondtam ki, melyek második deriváltja folytonos. Ha L olyan izomorfizmus lenne, amelynek létezne folytonos inverze, akkor a differenciálegyenlet $y = L^{-1}f(s, y, y')$ alakba írható lenne. Jelölje T a $T(v) = L^{-1}f(s, y, y')$ operátort. A feladat ezzel T egy fixpontjának megkeresésére redukálódna. Az eddigi feltételeket figyelembe véve L-nek nem feltétlenül létezik inverze, de ha létezik is és találunk egy fixpontot, még ez sem elegendő, ugyanis előfordulhat, hogy y fixpont nem teljesíti a Dirichlet peremfeltételt, ezért egy szűkebb függvényosztállyal dolgozom tovább.

2.1. Definíció. $C_0^2[0, 1] = \{f \in C^2[0, 1] |$ *f teljesíti a Dirichlet peremfeltételt*$\}$

Az L operátor értelmezési tartománya mostantól legyen C_0^2, és azt állítom, hogy ezen az értelmezési tartományon L-nek már létezik egy $L^{-1} : C[0, 1] \to C_0^2[0, 1]$ folytonos inverze. Az inverzet egy $G : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ *Green függvény* segítségével fogom definiálni:

$$G(s,t) = \begin{cases} (t-1)s, & ha \quad 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ t(s-1), & ha \quad 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Adott $v \in C[0, 1]$ legyen

$$L^{-1}v(t) = \int_0^1 G(s, t)v(s)ds$$

A függvényt más formába átírva

$$w(t) = L^{-1}v(t) = (t-1)\int_0^t sv(s)ds + t\int_t^1 (s-1)v(s)ds$$

azonnal látszik, hogy $w(0) = w(1) = 0$, így a Dirichlet feltételt kielégíti. Másrészt

$$w'(t) = \int_0^t sv(s)ds + \int_t^1 (s-1)v(s)ds$$

ezért $w''(t) = v(t)$. A Green függvények részletes tárgyalása megtalálható az [5] forrásban.

Az egyenlet vizsgálatát a jobboldalával folytatom. Felteszem, hogy u' egy folytonos függvény és legyen

$$F(u)(s) = f(s, u(s), u'(s)) \ (\forall s \in [0,1])$$

Az imént definiált $F : C^1[0,1] \to C[0,1]$ operátor az f-re vonatkozó *Nemitski operátor*. Az f függvény folytonosságából következik F folytonossága. Most már majdnem készen állok a feladatot egy operátor fixpontkeresésévé redukálni, hiszen L-nek létezik inverze, csupán az operátorok értelmezési tartományainak összehangolása maradt hátra. Az F operátor értelmezése tartománya a $C^1[0,1]$ lineáris tér, viszont az egyenlet megoldhatóságához egy $C_0^2[0,1]$-beli függvényre van szükség, ezért még egy $j : C_0^2[0,1] \to C^1[0,1]$ beágyazásra is szükség van a kompozícióban, amivel készen is állok a T operátor értelmezésére:

$$T : C_0^2[0,1] \xrightarrow{j} C^1[0,1] \xrightarrow{F} C[0,1] \xrightarrow{L^{-1}} C_0^2[0,1]$$

Most két állítást szükséges belátni a Leray-Schauder alternatíva tétel (1.13 tétel) alkalmazásához:

(i) T teljesen folytonos

(ii) T kielégíti a Leray-Schauder peremfeltételt

Szükség van még egy norma értelmezésére, egy $u \in C^2[0,1]$ függvény normáját fogom definiálni, ahol a $||\cdot||$ norma jel a maximum normát jelöli a folytonos függvények terében.

2.2. Definíció. $||u||_2 = ||u|| + ||u'|| + ||u''||$

Az első állítást az Arzela-Ascoli tétel (1.3 tétel) segítségével fogom belátni. A tételben szereplő normált tér ebben az esetben $X = C_0^2[0,1]$. Az 1.5 tétel szerint a $C^2[0,1] \to C^1[0,1]$ beágyazás teljesen folytonos, ebből nyilvánvalóan következik, hogy $j : C_0^2[0,1] \to C^1[0,1]$ is teljesen folytonos, és ezzel beláttam, hogy $T = L^{-1}Fj$ teljesen folytonos. Már csak a második feltétel ellenőrzése maradt hátra, azt szükséges megmutatni, hogy létezik $r > 0$ valós szám, amire ha $u \in C_0^2[0,1]$, $||u||_2 = r$, akkor $T(u) \neq \lambda u$ minden $\lambda > 1$. Azt fogom belátni, hogy ha $T(u) = \lambda u$ valamilyen $\lambda > 1$-re, akkor $||u||_2 < r$, ebből már következik, hogy ha $||u||_2 \geq r$, akkor $T(u) \neq \lambda u$ minden $\lambda > 1$. Tegyük fel, hogy $u \in C_0^2[0,1]$, amire $\lambda u = T(u) = L^{-1}Fj(u)$, ami ekvivalens $L(u) = \frac{1}{\lambda}Fj(u)$-val valamilyen $\lambda > 1$-re. Ez felírható egy peremértékfeladatként: keressünk egy $y \in C^2[0,1]$-et, amire

$$\begin{aligned} y'' &= f_\lambda(s, y, y') \\ y(0) &= y(1) = 0 \end{aligned}$$

ahol

$$f_\lambda(s, y, y') = \frac{1}{\lambda} f(s, y, y')$$

valamilyen $\lambda > 1$-re. Azt fogom belátni, hogy ha az egyenletnek létezik egy y megoldása, akkor szükségképpen $||y||_2 < r$ egy r valós számra, amit szintén meg fogok határozni.

2.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f = f(s, u, p) : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folyotonos függvény az alábbi két tulajdonsággal: (1) létezik egy M pozitív szám, amire, ha $|u| > M$, akkor $uf(s, u, 0) > 0$ és (2) létezik A, $B > 0$, amire ha $0 \leq s \leq 1$ és $|u| \leq M$, akkor $|f(s, u, p)| < Ap^2 + B$ minden p-re. Ekkor létezik $r > 0$, amire ha $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ megoldása a*

$$\begin{aligned} y'' &= f_\lambda(s, y, y') \\ y(0) &= y(1) = 0 \end{aligned}$$

egyenletnek, ahol $f_\lambda(s, y, y') = \frac{1}{\lambda} f(s, y, y')$ valamilyen $\lambda > 1$-re, akkor $||y||_2 < r$.

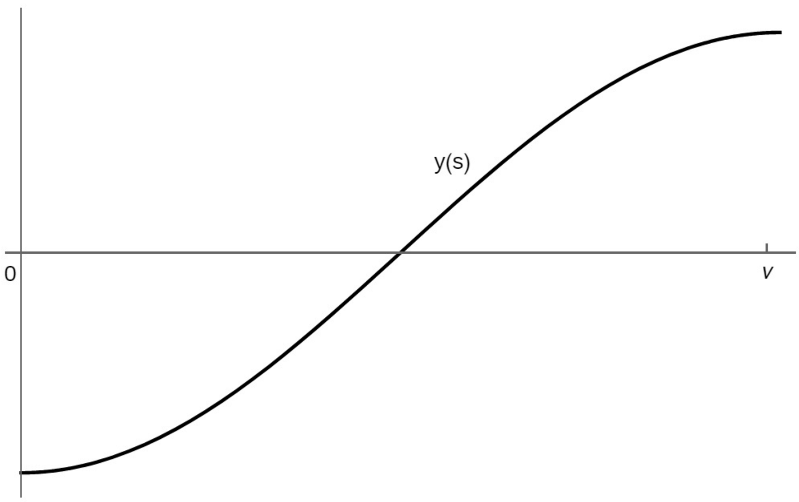
Bizonyítás: Keresek M_0, M_1, M_2 három valós számot, amelyek függetlenek λ-tól, és ha y egy megoldás, akkor $||y|| < M_0, ||y'|| < M_1$ és $||y''|| < M_2$. Ebben az esetben az $r = M_0 + M_1 + M_2$ jó választás. Megmutatom, hogy a tételben említett (1) tulajdonság miatt az $M_0 = M$ választás megfelelő. $|y(s)|$ nem veheti fel a maximumát $s = 0$-ban vagy $s = 1$-ben a peremfeltételek miatt. Jelölje s_0 a maximumpontot. Az $\frac{1}{2}y^2(s)$ függvénynek szintén van maximuma az s_0 pontban, ezért a második deriváltja a pontban nempozitív. Ha y megoldása a differenciálegyenletnek, akkor

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\tfrac{1}{2}y^2(s)\right)\Bigg|_{s_0} = (y'(s_0))^2 + y(s_0)y''(s_0) = y(s_0)f_\lambda(s_0, y(s_0), 0)$$

amiből következik, hogy $uf(s_0, u, 0) \leq 0$, $u = y(s_0)$. Az (1) feltételből következik, hogy $|u| \leq B$, ezért $|y(s_0)| \leq M$, és így $||y|| \leq M$. A bizonyítást M_1 keresésével folytatom. Osszuk fel a $[0, 1]$ intervallumot véges sok részintervallumra, úgy hogy ha $[\mu, \nu]$ egy részintervallum, amire ha y' egy konstans sehol sem nulla szignumfüggvény $[\mu, \nu]$-n, akkor$y'(\mu), y'(\nu)$ közül legalább az egyik nulla. Négy esetet különböztethetünk meg annak függvényében, hogy $y'(s) > 0$ vagy $y'(s) < 0$ (μ, ν)-n, és $y'(\mu) = 0$ vagy $y'(\nu) = 0$. Mind a négy esetben meg lehet mutatni, hogy

$$|y'(s)| \leq M_1 = \sqrt{\tfrac{B}{A}(e^{4AM} - 1)}$$

és a bizonyítás mind a négy esetben hasonló. A dolgozatban egy esetet fogok bizonyítani: $y'(s) > 0$ (μ, ν)-n és $y'(\nu) = 0$.



$|y(s)| \leq M$, a tételben szereplő (2) állítás és $\lambda > 1$ miatt

$$|y''(s)| = |f_\lambda(s, y(s), y'(s)| < A(y'(s))^2 + B$$

amiből azonnal következik

$$-y''(s) < A(y'(s))^2 + B$$

átrendezve

$$-\tfrac{y''(s)}{A(y'(s))^2 + B} \leq 1$$

Feltettem, hogy $y'(s) > 0$, ezért $-2Ay'(s) < 0$, ezért az egyenlőtlenséget megszorozva $-2Ay'(s)$-sel:

$$\frac{2Ay'(s)y''(s)}{A(y'(s))^2+B} \geq -2Ay'(s)$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$\int_s^\nu \frac{2Ay'(\sigma)y''(\sigma)}{A(y'(\sigma))^2+B} d\sigma \geq \int_s^\nu -2Ay'(\sigma)d\sigma$$

amit kiszámítva:

$$ln(A(y'(\sigma))^2+B\Big|_s^\nu \geq -2Ay(\sigma)\Big|_s^\nu$$

$y'(\nu)=0$ miatt

$$ln(B)-ln(A(y'(s)^2+B) \geq -2A(y(\nu)-y(s))$$

és így

$$ln(\frac{A(y'(s))^2+B}{B}) \leq 2A(y(\nu)-y(s)) \leq 4AM$$

mert $|y(s)| \leq M$-ből következik $y(\nu)-y(s)) \leq 2M$. Megoldva ezt az egyenlőtlenséget kapom meg M_1 értékét.

$$(y'(s))^2 \leq \frac{Be^{4AM}-B}{A}$$

átrendezve:

$$|y'(s)| \leq \sqrt{\frac{B}{A}(e^{4AM}-1)}$$

A bizonyítás utolsó, legkönnyebb része következik: szorítsuk meg az $f=f(s,u,p)$ függvényt a következő kompakt halmazra

$$0 \leq s \leq 1,\ -M_0 \leq u \leq M_0,\ -M_1 \leq p \leq M_1$$

Ekkor létezik $M_2>0$, amire $|f(s,u,p)|<M_2$. Felhasználva, hogy $|y(s)|<M_0$ és $|y'(s)|<M_1$ minden s-re:

$$|y''(s)| = |f_\lambda(s,y(s),y'(s))| < |f(s,y(s),y'(s))| < M_2$$

amivel beláttam, hogy teljesülnek a Leray-Schauder alternatíva tétel feltételei.

A Leray-Schauder alternatíva tételből (1.11 tétel) következik, hogy a T operátornak létezik fixpontja, amit azt jelenti, hogy a Dirichlet peremértékfeladat megoldható:

2.4. Tétel.

$$y'' = f(s, y, y')$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

ahol $f = f(s, u, p) : [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény, ami rendelkezik az alábbi két tulajdonsággal:*

1. *létezik* $M > 0$*, amire* $|u| > M$*-ből következik* $uf(s, u, 0) > 0$
2. *létezik* $A, B > 0$*, amire ha* $0 \leq s \leq 1$ *és* $|u| \leq M$*, akkor* $|f(s, u, p)| < Ap^2 + B$ *minden* p*-re.*

Dirichlet peremértékfeladatnak létezik megoldása.

Erre az eredményre építve már közelíthető a megoldás valamely numerikus módszerrel, és így az eredetileg kitűzött feladat, a hőegyensúlyi állapotot leíró függvény megkapható egy bizonyos pontossággal.

3. fejezet

Fokszám

Most rátérek a dolgozat második szakaszára. Ebben a fejezetben olyan eszközöket értelmezek, amelyek később, a bifurkációs módszerek ismertetésekor válnak szükségessé. Két fokszám fogalmát fogom bevezetni, az első egy véges dimenziós terek közt ható leképezés esetén érvényes, a második pedig tetszőleges Banach terek közt ható függvényre értelmezhető, ezért két szakaszra bontom a fejezetet. A véges dimenziós esetben definiált fokszámot csupán arra használom, hogy a végtelen dimenziós esetben a véges dimenziósra építkezve mondjam ki a definíciót. A definíciókat az algebrai topológiát felhasználva mondom ki. A későbbi fejezetekben csupán a fokszámok jóldefiniáltságát és bizonyos tulajdonságait használom ki, az algebrai topológia nem kerül tárgyalásra. A matematika ezen ága nagyban különbözik a dolgozat témájától, ezért a lehető legrövidebben vezetem be a feltétlenül szükséges fogalmakat, a téma részletes tárgyalása megtalálható az [1] és [2] forrásokban.

3.1. Brouwer fokszám

Jelölje E_0 az origót, E_j, $j = 1, ..., n$ pedig a j-edik egységvektort az n dimenziós térben.

3.1. Definíció (Standard q-szimplex).

$$\Delta_q = \{\sum_{j=0}^{q} t_j E_j : \sum_{j=0}^{q} t_j = 1, t_j \geq 0\}$$

3.2. Definíció.

$$\Delta_q^k = \{\sum_{j=0}^{q} t_j E_j : \sum_{j=0}^{q} t_j = 1, t_j \geq 0, t_k = 0\}$$

3.3. Definíció. $i^k : \Delta_{q-1} \to \Delta_q^k, i^k(E_j) = \begin{cases} E_j, & ha \;\; j < k \\ E_{j+1}, & ha \;\; j \geq k \end{cases}$

Majd terjesszük ki lineárisan a leképezést az egységvektorokról az egész térre. Ezzel kaptunk egy leképezést, amely az eggyel alacsonyabb dimenziós standard q-szimplexet, a (q + 1)-szimplex egy oldalára képezi.

3.4. Definíció. *Legyen X topologikus tér, $S_q(X)$ a q-adik szinguláris lánccsoport, amely az összes $\Delta_q \to X$ folytonos leképezést tartalmazza. $S_q(X)$ elemei $c = \sum_\alpha a_\alpha \sigma_\alpha$ alakú formális sorok, ahol a_α egész számok, és minden $S_q(X)$-beli elemre csak véges sok a_α nemnulla.*

3.5. Definíció. *Adott $\sigma_\alpha : \Delta_q \to X$ esetén legyen:*

-

$$\partial_q(\sigma_\alpha) = \sum_{k=0}^{q} (-1)^k (\sigma_\alpha^k i^k) \in S_{q-1}(X)$$

Felhasználva, hogy $\partial_{q+1}\partial_q = 0$ értelmezhető egy faktorcsoport:

3.6. Definíció. *X q-adik homológia csoportja:*

$$H_q(X) = \frac{Ker\partial_q}{Im\partial_{q+1}}$$

3.7. Definíció. *Legyen $f : X \to Y$ topologikus terek közti folytonos leképezés.*

$$c = \sum_\alpha a_\alpha \sigma_\alpha \in S_q(X)$$

. Ekkor legyen

$$f_\# c = \sum_\alpha a_\alpha (f\sigma_\alpha) \in S_q(Y)$$

Az $f_\#$ homomorfizmust felhasználva értelmezzünk egy $H_q(X)$ és $H_q(Y)$ ekvivalenciaosztályai között ható homomorfizmust:

3.8. Definíció. *Legyen $f_* : H_q(X) \to H_q(Y)$ az a leképezés, amely egy c elem ekvivalenciaosztályát $f_\# c$ ekvivalenciosztályához rendeli.*

Most még egy fontos definíció következik, amely homológia csoportok kiszámításához szükséges. Ezután bizonyítás nélkül kimondok tételeket, amelyek segítségével már definiálható a Brouwer fokszám.

3.9. Definíció. *(X, A) topologikus pár, ha X topologikus tér és $A \subseteq X$.*

Ekkor $S_q(A)$ részcsoportja $S_q(X)$-nek, ezért értelmezhető az $S_q(X,A)$ faktorcsoport. A ∂_q leképezés $S_q(X,A)$-t $S_{q-1}(X,A)$-ba viszi, így a következő definíció is értelmes:

3.10. Definíció ((X, A) q-adik homológia csoportja).

$$H_q(X,A) = \frac{Ker\partial_q : S_q(X,A) \to S_{q-1}(X,A)}{Im\partial_{q+1} : S_{q+1}(X,A) \to S_q(X,A)}$$

3.11. Megjegyzés. $A = \emptyset$ esetben $H_q(X, \emptyset)$ azonosítható $H_q(X)$-szel.

Topologikus párok közötti $f : (X,A) \to (Y,B)$ leképezéseket csak olyan esetben vizsgálunk, amikor $f(A) \subseteq B$. Ilyen párok esetén is értelmesek az előbb definiált fogalmak, végül ugyanúgy el lehet jutni egy jóldefiniált $f_* : H_q(X,A) \to H_q(Y,B)$ homomorfizmus értelmezéséhez.

3.12. Definíció. *$U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz egy A részhalmaza megengedett, ha A kompakt és $A \cap \partial U = \emptyset$*

3.13. Tétel. *Legyen (X, A) topologikus pár. Ekkor minden $q \geq 0$-ra létezik egy $\partial_q : H_q(X,A) \to H_{q-1}(A)$ homomorfizmus úgy, hogy*

$$... \to H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X,A) \xrightarrow{\partial_q} H_{q-1}(A) \to ... \to H_0(X,A) \to 0$$

egy homomorfizmusok és csoportok egzakt sorozata, azaz a fenti sorozatban minden homomorfizmus képe megegyezik a soron következő jobboldali homomorfizmus magjával.

3.14. Tétel (Kivágás). *(X,A) topologikus pár, $U \subseteq X, \overline{U} \subseteq int(A)$. Ekkor a beágyazás által indukált $H_q(X-U, A-U) \to H_q(X,A)$ homomorfizmus valójában izomorfizmus minden q-ra.*

3.15. Tétel. *$H_n(S^n) = \mathbb{Z}$ minden $n \in \mathbb{N}$*

3.16. Definíció (Brouwer fokszám). *A $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$ csoport végtelen ciklikus minden $n \in \mathbb{N}$-re. Válasszuk ki a csoportok egy-egy generátorát minden n esetén, jelölje ezt ν_n. Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ folytonos leképezés, $F = f^{-1}(0)$ megengedett és tekintsünk S^n-re mint $\mathbb{R}^n \cup \infty$-re. $(S^n, S^n - F)$ egzakt sorozatában létezik egy*

$$k_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n, S^n - F)$$

homomorfizmus.
A kivágás miatt

$$j : (U, U - F) \to (S^n, S^n - F)$$

izomorfizmus.

$H_n(S^n)$ végtelen ciklikus csoport izomorf $\mathbb{Z}$-vel. Válasszuk ki a csoport egyik generátorát és jelöljük μ_n-nel. Most már meghatározhatjuk $H_n(U, U - F)$ egy elemét:

$$\mu_n' = j_*^{-1} k_*(\mu_n)$$

Definíció szerint f az $U - F$ halmazt $\mathbb{R}^n - 0$-ba képezi, így létezik egy

$$f_* : H_n(U, U - F) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0).$$

homomorfizmus.

Jelölje deg(f, U) a Brouwer fokszámot, amely a következő egész szám:

$$f_*(\mu_n') = deg(f, U)\nu_n$$

ahol $\nu_n \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$ a korábban választott generátor.

Brouwer fokszám egyik legfontosabb tulajdonsága következik:

3.17. Tétel. *Ha $deg(f, U) \neq 0$, akkor létezik $x \in U$, amire $f(x) = 0$.*

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy $f(x) \neq 0$ minden $x \in U$. Ebből következik, hogy $F = \emptyset$, ezért $H_n(S^n, S^n - F) = 0$, így $\mu_n^{'} = 0$ és $f_*(\mu_n^{'}) = 0$.

3.2. Leray-Schauder fokszám

A következő lépés egy olyan fokszám értelmezése, amely tetszőleges X normált térre érvényes. A definíciót később $F : \overline{U} \to X$ alakú kompakt függvényre mondom ki, ahol U nyílt részhalmaza egy normált térnek. A Brouwer fokszám egy függvény zérushelyeiről nyújt információt, és a Leray-Schauder fokszámot a Brouwerre építve vezetem be. Itt $I - g$ alakú leképezéseket fogok vizsgálni fixpontok keresése érdekében.

3.18. Definíció. *Legyen C az $\overline{U}$ egy részhalmaza, ekkor $r(C) = inf\{||x - f(x))|| : x \in C\}$*

3.19. Lemma. *Ha $f : \overline{U} \to X$ kompakt leképezés és C zárt részhalmaza $\overline{U}$-nak, amire $f(x) \neq x$ minden $x \in C$, akkor $r(C) > 0$.*

3.20. Lemma. *Legyen X normált tér, K egy kompakt részhalmaza. Adott $\epsilon > 0$ esetén létezik egy véges dimenziós X_ϵ altere X-nek, amely a K halmaz véges ϵ-hálója által kifeszített tér és felhasználva a Schauder projekciós lemmát (1.9 tétel) egy $P_\epsilon : K \to X_\epsilon$ leképezés, amire $||P_\epsilon(x) - x|| < \epsilon$ minden $x \in K$.*

3.21. Lemma. *Tegyük fel, hogy $f(x) \neq x$ minden $x \in \partial U$. Ha $\epsilon < \frac{r}{2}$, akkor $||x - P_\epsilon f(x)|| \geq \frac{r}{2}$ minden $x \in \partial U$.*

Ezzel készen állok a fejezet legfontosabb fogalmának értelmezésére: a Leray-Schauder fokszámot fogom bevezetni. Ezt a fokszámot az előzőhöz hasonló kontextusban fogom definiálni, de ebben az esetben tetszőleges normált téren értelmezett lesz.

3.22. Definíció. *X normált tér, $U \subseteq X$ nyílt halmaz, $f : \overline{U} \to X$ kompakt leképezés, f-nek nincs fixpontja ∂U-n. Legyen $\epsilon > 0$ olyan kicsi, hogy az előző lemma teljesüljön és így $||x - P_\epsilon f(x)|| \geq \frac{r}{2}$. Jelöljön $I : X \to X$ és $I_\epsilon : X_\epsilon \to X_\epsilon$ identikus leképezéseket, $U_\epsilon = U \cap X_\epsilon$. A lemma miatt $||(I_\epsilon - f_\epsilon)(x) - 0|| \geq \frac{r}{2}$ minden $x \in \partial U_\epsilon$, amiből következik, hogy $(I_\epsilon - f_\epsilon)^{-1}(0)$ megengedett, ezzel minden feltétel adott a Brouwer-fokszám definíciójához. Jelölje $deg(I - f, U)$ a Leray-Schauder fokszámot, értéke legyen*

$$deg(I - f, U) = deg(I_\epsilon - f_\epsilon, U_\epsilon)$$

3.23. Tétel. *A Leray-Schauder fokszám definíciója független az ϵ, X_ϵ és $P_\epsilon : K \to X_\epsilon$ választásától, feltéve, hogy $\epsilon < \frac{r}{2}$.*

Felsorolom még a most definiált fokszám azon tulajdonságait, amelyeket kihasználok a bifurkációs tételek bizonyításában.

3.24. Tétel (Általános homotópia tulajdonság). *$T = [t_1, t_2]$ egy zárt intervalluma $\mathbb{R}$-nek. X normált tér, W egy nyílt részhalmaza $X \times T$-nek. Ha $H : \overline{W} \to X$ kompakt leképezés, amire $h_t(x) \neq x$ minden $x \in \partial W_t$-re és minden $t \in T$-re, akkor $deg(I - h_t, W_t)$ független $t \in T$ választásától.*

3.25. Tétel (Kivágás). *Legyen W az U egy nyílt részhalmaza, amely tartalmazza $f : \overline{U} \to X$ összes fixpontját. Akkor*

$$deg(I - f, U) = deg(I - f|\overline{W}, W)$$

3.26. Tétel (Additivitás). *Ha az $f : U \to X$ leképezésre definiált a $deg(I - f, U)$ és U_1, U_2 diszjunkt, nyílt részhalmazai U-nak, melyekre $f(x) \neq x$ minden $x \in U - (U_1 \cup U_2)$, akkor*

$$deg(I - f, U) = deg(I - f_1, U_1) + deg(I - f_2, U_2)$$

,

ahol f_j jelöli f megszorítását U_j-re.

Most rátérek a fejezet utolsó témakörére: a fokszám kiszámítására. A tétel precíz levezetése túllépne a dolgozat keretein, ezért csupán kimondom, hivatkozva egy forrásra ahol megtalálható a bizonyítás.

3.27. Definíció. *Legyen $T \in K(X)$ kompakt operátor. Jelölje N_n $(I-T)^n$ nullterét, ahol n természetes szám.*

3.28. Definíció. *$T \in K(X)$ esetén jelölje R_n a $Ran(I-T)^n$ operátor képterét.*

3.29. Lemma. *Tetszőleges T kompakt operátor esetén N_n altér véges dimenziós.*

3.30. Tétel. *Minden $T \in K(X)$ esetén létezik egy ρ egész szám, amire $R_n \neq R_{n+1}$ minden $n < \rho$-ra és $R_n = R_{n+1}$ minden $n \geq \rho$-ra.*

3.31. Definíció. *Adott $T \in K(X), \lambda$ nemnulla valós szám, legyen ρ az előző tételbeli természetes szám az $\frac{1}{\lambda}T$ operátorra alkalmazva. Ekkor $N_\rho(\lambda)$ jelölje $(I - \frac{1}{\lambda}T)^\rho$ nullterét.*

3.32. Definíció. *$\lambda \in \sigma(T)$ multiplicitása $N_\rho(\lambda)$ dimenziója.*

3.33. Definíció. *Legyen $\mu \in \mathbb{R}$ nemnulla, $\frac{1}{\mu} \in \sigma(T)$, ekkor legyen*

$$H(\mu) = \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda\mu > 0 \text{ és } |\lambda| > |\tfrac{1}{\mu}|\}.$$

Egy kompakt operátor spektruma kompakt halmaz és torlódási pontja csak a 0 lehet, amiből következik, hogy $H(\mu)$ véges, ezért értelmes a következő definíció:

3.34. Definíció. *$\beta(\mu)$ legyen $H(\mu)$ elemei multiplicitásainak összege.*

3.35. Tétel. *Legyen $T \in K(X)$, $\mu \neq 0$ valós szám, amire $\frac{1}{\mu} \notin \sigma(T)$. Ekkor minden $\eta > 0$-ra*

$$deg(I - \mu T, B_\eta) = (-1)^{\beta(\mu)}$$

Ezzel a tétellel elérkeztünk a fejezet utolsó és egyben egyik legfontosabb részéhez. Az eredmény birtokában kiszámítható egy $I - \mu T$ alakú kompakt operátor fokszáma a spektruma ismeretében egy gömbön, ami felhasználható differenciálegyenletek megoldhatóságának megmutatására.

4. fejezet

Krasnoselskii-Rabinowitz bifurkációs tétel

Ebben a fejezetben mutatom be a dolgozat legfontosabb elméleti eredményét. A bifurkációelmélet alapfogalmait fogom bevezetni, és a fejezet végén egy olyan tételt mondok ki, amely eszközként használható differenciálegyenlet családok megoldhatóságának vizsgálatához. Ehhez azonban új fogalmak értelmezésére van szükség, először a differenciálhatóság hagyományos fogalmát bővítem ki:

4.1. Definíció. *Legyen X egy Banach tér, $f : X \to X$ leképezés. f Frechet differenciálható 0-ban, ha létezik $T \in L(X)$, amire $\lim\limits_{||x||\to 0} \frac{||f(x)-Tx||}{||x||} = 0$.*

4.2. Megjegyzés. A definíció $\mathbb{R} = X$ esetén megegyezik a differenciálhatóság 0 pontbeli klasszikus definíciójával.

4.3. Tétel. *Ha $f : X \to X$ teljesen folytonos, amire $f(0) = 0$ és Frechet differenciálható 0-ban, akkor $T : X \to X$ kompakt lineáris operátor.*

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy $T \notin K(X)$ és belátjuk, hogy f nem teljesen folytonos. A feltevés szerint van egy korlátos B részhalmaz X-ben, amire $T(B)$ nem relatív kompakt. Ekkor létezik egy B-beli $\{x_i\}$ sorozat, amire $\{Tx_i\}$-nek nem létezik X-beli konvergens részsorozata. A sorozat konstanssal való szorzása nem befolyásolja a konvergenciát, így feltehetjük, hogy $||x_i|| \leq 1 \ \ \forall i$-re. X teljessége miatt $\{Tx_i\}$ nem lehet Cauchy, így létezik egy $\delta > 0$ amire $||\{Tx_i\} - \{Tx_j\}|| > \delta, i \neq j$ esetén véges sok kivételtől eltekintve, amely tagokat el is hagyhatjuk a sorozatból. A Frechet differenciálhatóság miatt $\frac{||f(x)-Tx||}{||x||}$ tetszőlegesen kicsi lehet, ha $||x||$ elég kicsi, így létezik egy olyan $\eta > 0$, amire ha $||x|| < \eta$, akkor $||f(x) - Tx|| \leq \frac{\delta}{3}||x||$. Most azt fogjuk megmutatni hogy $\{f(\eta x_i)\}$ nem Cauchy. Az $\{\eta x_i\}$ sorozat korlátos, pontosabban $||\eta x_i|| < \eta, \ i \neq j$ esetén:
$||f(\eta x_i) - f(\eta x_j)|| = ||(T\eta x_i - T\eta x_j) + (f(\eta x_i) - T\eta x_i)$

$$+ (-f(\eta x_j) + T\eta x_j)||$$
$$\geq ||T\eta x_i - T\eta x_j|| - ||f(\eta x_i) - T\eta x_i||$$
$$- ||f(\eta x_j) - T\eta x_j||$$
$$\geq \eta\delta - \frac{\delta}{3}||\eta x_i|| - \frac{\delta}{3}||\eta x_j|| \geq \eta\delta - 2\frac{\delta}{3}\eta = \frac{\eta\delta}{3}$$

Tehát $f(\eta x_i)$ nem Cauchy sorozat. □

A következő lemma és tétel bizonyítása megtalálható az [1] könyv 22. fejezetében, a rövidség kedvéért itt csak kimondom őket.

4.4. Lemma. *Ha X Banach tér, $T \in L(X)$ olyan folytonos operátor, amire $(I-T)$ reguláris, akkor létezik $a > 0$, amire:*

$$||x - Tx|| \geq a||x|| \quad \forall x \in X$$

4.5. Tétel. *Tegyük fel hogy $f : X \to X$ teljesen folytonos leképezés az X Banach téren, $f(0) = 0$ és f Frechet differenciálható 0-ban, Frechet deriváltja $T \in K(X)$. Ha $(I - T) \in L(X)$ reguláris, akkor létezik $\eta > 0$, amire*

$$deg(I - f, B_\eta) = deg(I - T, B_\eta).$$

A bifurkációelmélet tárgyalása során $G : \mathbb{R} \times X \to X$ alakú leképezésekkel fogunk találkozni, ahol X Banach tér. Az $\mathbb{R} \times X$ saját maga is Banach tér a

$$||(\lambda, x)|| = |\lambda| + ||x|| \qquad ((\lambda, x) \in \mathbb{R} \times X)$$

normával.

Most kiterjesztem a Frechet differenciálhatóság fogalmát olyan G függvényekre, melyekre $G(\lambda, 0) = 0$:

4.6. Definíció. *$G : \mathbb{R} \times X \to X$ Frechet-differenciálható 0-ban, ha létezik $T \in L(X)$, hogy adott $\epsilon > 0$-ra és $[\lambda_0, \lambda_1] \subseteq \mathbb{R}$-re létezik $\delta > 0$, hogy $||x|| < \delta$-ból következik*

$$\frac{||G(\lambda,x) - \lambda Tx||}{||x||} < \epsilon \ (\forall \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1])$$

4.7. Megjegyzés.

(i) Az előző definícióban egy T operátor közelíti G-t minden λ értékre. $T0 = 0$-ból következik, hogy G csak akkor lehet Frechet differenciálható 0-ban, ha $G(\lambda, 0) = 0$.

(ii) $f : X \to X \quad f(x) = G(1, x)$ esetén visszakapjuk a T operátort mint az f 0-beli deriváltjának fogalmát az előző definíció szerint.

(iii) Ha G teljesen folytonos, akkor $\mathbb{R} \times X$ egy korlátos részhalmazát X egy relatív kompakt részhalmazába képezi, ezért a T operátor kompakt.

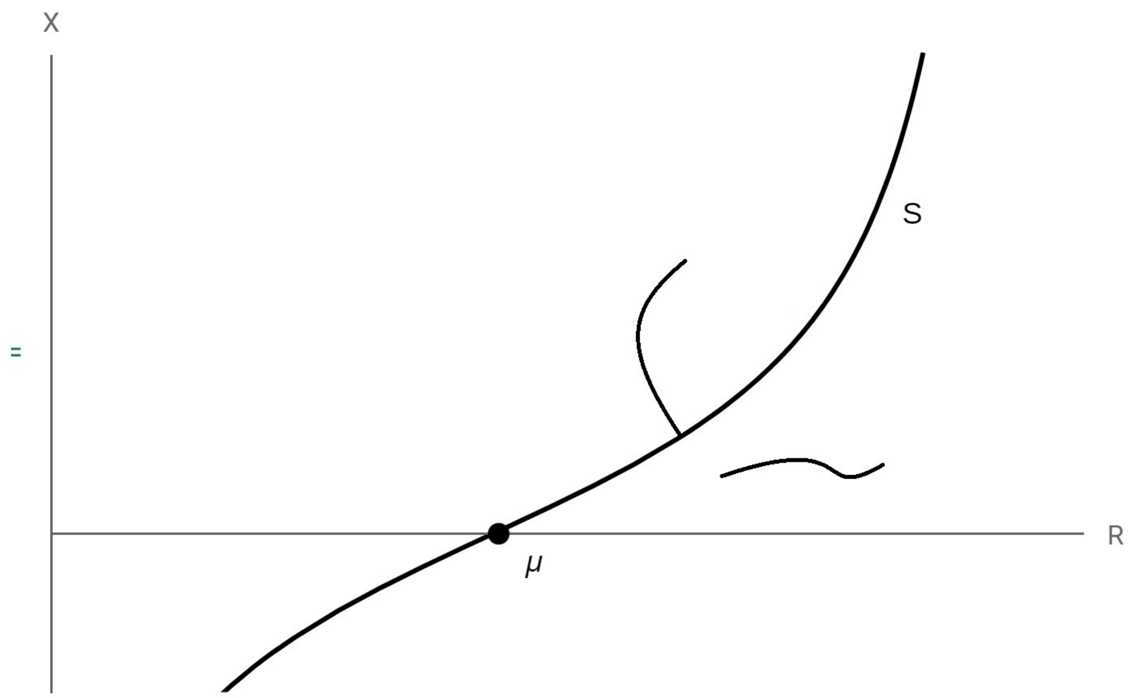
$G(\lambda, x) = x$ alakú egyenletek megoldásainak halmazát fogjuk vizsgálni. Végig feltesszük, hogy G Frechet differenciálható 0-ban, ebből azonnal következik, hogy $G(\lambda, 0) = 0$. A $\{(\lambda, 0)\}$ alakú megoldások a trivilás megoldásai az egyenletnek, a $(\lambda, x), x \neq 0$ alakú megoldások az érdekesek, és ilyeneket fogunk keresni. Legyen S a nemtriviális megoldások halmaza, azaz

$$S = \{(\lambda, x) : G(\lambda, x) = x, x \neq 0\}$$

4.8. Definíció. *$\mu \in \mathbb{R}$ bifurkációs pontja $G(\lambda, x) = x$ megoldásai halmazának, ha $(\mu, 0) \in \overline{S}$*

Most azt vizsgálom meg milyen valós számok lehetnek bifurkációs pontok.

4.9. Tétel. *Legyen $G : \mathbb{R} \times X \to X$ teljesen folytonos és Frechet differenciálható 0-ban, deriváltja λT. Ha $\frac{1}{\mu}$ nem sajátértéke a T kompakt operátornak, akkor létezik $\epsilon, \eta > 0$, amire $G(\lambda, x) \neq x$ minden (λ, x)-re, amire $|\lambda - \mu| < \epsilon$ és $0 < ||x|| < \eta$. Speciálisan, μ nem bifurkációs pontja a $G(\lambda, x) = x$-nek.*



Bizonyítás: $\frac{1}{\mu} \notin \sigma(T)$, ezért létezik a $(\frac{1}{\mu}I - T)^{-1}$ és $(I - \mu T)^{-1}$. Legyen

$$\epsilon = \frac{1}{3||(I-\mu T)^{-1}||||T||}$$

A definícióból adódik, hogy $\epsilon < |\mu|$. Válasszuk η-t olyan kicsinek, hogy teljesüljön

$$\frac{||G(\lambda,x)-\lambda Tx||}{||x||} \leq \frac{1}{3||(I-\mu T)^{-1}||}$$

minden (λ, x)-re, amire $|\lambda - \mu| < \epsilon$ és $||x|| < \eta$. Indirekt tegyük fel, hogy mégis létezik egy (λ, x), amire $|\lambda - \mu| < \epsilon$ és $||x|| < \eta$, de $G(\lambda, x) = x$. Ekkor:

$$\begin{aligned}||x|| &\leq ||(I-\mu T)^{-1}|| \cdot ||x - \mu Tx|| \\ &= ||(I-\mu T)^{-1}|| \cdot ||G(\lambda,x) - \mu Tx|| \\ &= ||(I-\mu T)^{-1}|| \cdot ||(G(\lambda,x) - \lambda Tx) + (\lambda - \mu)Tx|| \\ &\leq ||(I-\mu T)^{-1}|| \cdot ||G(\lambda,x) - \lambda Tx|| + ||(I-\mu T)^{-1}|| \cdot |\lambda - \mu| \cdot ||T|| \cdot ||x|| \\ &\leq \frac{||x||}{3} + ||(I-\mu T)^{-1}|| \cdot \epsilon \cdot ||T|| \cdot ||x|| = \frac{2}{3}||x||\end{aligned}$$

És így $x = 0$ $\square$

4.10. Következmény. Ha $G : \mathbb{R} \times X \to X$ teljesen folytonos és Frechet differenciálható 0-ban, akkor a bifurkációs pontok részhalmaza $\mathbb{R}$-ben diszkrét.

Bizonyítás: Jelölje λT G deriváltját. Ha $\mu \neq 0$ bifurkációs pont, akkor 4.9 tétel miatt $\frac{1}{\mu} \in \sigma(T)$. A kompakt operátorok főtétele miatt a T spektruma véges halmaz vagy pedig egy 0-hoz konvergáló korlátos sorozat.

4.11. Tétel. *Legyen X Banach tér és $G : \mathbb{R} \times X \to X$ teljesen folytonos és Frechet differenciálható 0-ban, deriváltja λT. Tegyük fel, hogy $\mu \neq 0$ valós szám, amire $\frac{1}{\mu} \in \sigma(T)$ páratlan multiplicitással. Akkor μ bifurkációs pontja a $G(\lambda, x) = x$ megoldásainak.*

4.12. Tétel. *Legyen $G : \mathbb{R} \times X \to X$ teljesen folytonos és Frechet differenciálható 0-ban, deriváltja λT, és legyen $\frac{1}{\mu} \in \sigma(T)$ olyan, amire μ bifurkációs pontja $(\lambda, x) = x$ megoldásainak. Tegyük fel, hogy nem létezik egy olyan zárt, összefüggő C részhalmaza $\overline{S}$-nek, amely tartalmazza $(\mu, 0)$-t és vagy (i) C nem korlátos $\mathbb{R} \times X$-ben vagy (ii) C tartalmaz egy $(\mu^*, 0)$ bifurkációs pontot, úgy hogy $\mu \neq \mu^*$. Ekkor létezik egy nyílt és korlátos O részhalmaza $\mathbb{R} \times X$-nek, ami tartalmazza $(\mu, 0)$-t és (a) $\partial O \cap S = \emptyset$, valamint (b) létezik egy $\epsilon > 0$, amire $(\lambda, 0) \in O$-ból következik $|\lambda - \mu| < \frac{\epsilon}{2}$ és μ az egyetlen bifurkációs pont $[\mu - \epsilon, \mu + \epsilon]$.*

4.13. Tétel. *Legyen $G : \mathbb{R} \times X \to X$ teljesen folytonos és Frechet differenciálható a 0-ban λT deriválttal és legyen $\frac{1}{\mu} \in \sigma(T)$ olyan valós szám, amire μ bifurkációs pontja $G(\lambda, x) = x$-nek. Tegyük fel, hogy nem létezik egy olyan zárt és összefüggő C részhalmaza $\overline{S}$-nek, amely tartalmazza $(\mu, 0)$-t úgy, hogy*

1. *C nem korlátos $\mathbb{R} \times X$-ben vagy*

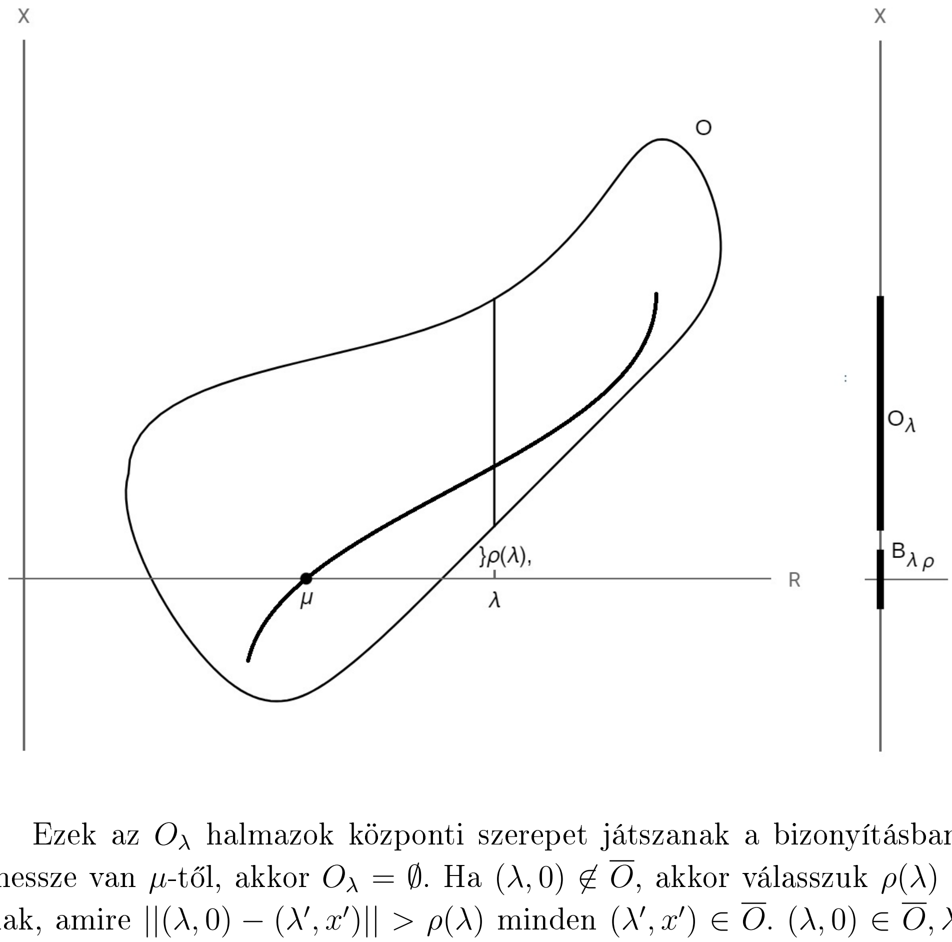
2. *C tartalmaz egy olyan (μ^*0) pontot, hogy $\mu^* \neq \mu$ bifurkációs pont.*

Akkor létezik O korlátos és nyílt részhalmaza $\mathbb{R}\times X$-nek, ami tartalmazza $(\mu,0)$-t és a) $\partial O\cap S=\emptyset$, valamint b) akkor létezik $\epsilon>0$, amire $(\lambda,0)\in O$-ból következik, hogy $|\lambda-\mu|<\frac{\epsilon}{2}$ és μ az egyetlen bifurkációs pont $[\mu-\epsilon,\mu+\epsilon]$-ban.

4.14. Tétel (Krasnoselskii-Rabinowitz). *Legyen X egy Banach tér és $G:\mathbb{R}\times X\to X$ teljesen folyotonos, 0-ban Frechet differenciálható λT deriválttal. Tegyük fel, hogy μ egy valós szám, amire $\frac{1}{\mu}\in\sigma(T)$ páratlan multiplicitással. Akkor létezik egy maximális zárt összefüggő részhalmaza $C_\mu\in\overline{S}$-nek, ami tartalmazza $(\mu,0)$-t és vagy C_μ nem korlátos $\mathbb{R}\times X$-ben vagy pedig C_μ tartalmaz egy olyan $(\mu^*,0)$ pontot, hogy $\mu^*\neq\mu$ bifurkációs pont.*

Bizonyítás: Indirekt felteszem, hogy nem létezik ilyen C_μ és megmutatom, hogy ez ellentmondáshoz vezet. A μ bifurkációs pont, ezért teljesülnek az előző tétel feltételei, így létezik egy olyan O korlátos és nyílt halmaz, amely μ-n kívül nem tartalmaz egy bifurkációs pontot sem és $\partial O\cap\overline{S}=\emptyset$. Minden $\lambda\in\mathbb{R}$ esetén legyen

$$O_\lambda=\{x\in X:(\lambda,x)\in O\}.$$



Ezek az O_λ halmazok központi szerepet játszanak a bizonyításban. Ha λ elég messze van μ-től, akkor $O_\lambda=\emptyset$. Ha $(\lambda,0)\notin\overline{O}$, akkor válasszuk $\rho(\lambda)>0$-t olyannak, amire $||(\lambda,0)-(\lambda',x')||>\rho(\lambda)$ minden $(\lambda',x')\in\overline{O}$. $(\lambda,0)\in\overline{O},\lambda\neq\mu$ esetén legyen $\rho(\lambda)$ olyan kicsi, hogy $||(\lambda,0)-(\lambda',x')||>\rho(\lambda)$ minden $(\lambda',x')\in\overline{S}$-re.

Legyen $G_\lambda : X \to X$, így $G(\lambda, x) = x$ akkor és csak akkor, ha $(I - G_\lambda)(x) = 0$. Tetszőleges $r > 0$ esetén legyen

$$\overline{B_r} = \{x \in X : ||x|| \leq r\}.$$

Minden $\lambda \neq \mu$ esetén G_λ megszorítása az $O_\lambda - \overline{B}_{\rho(\lambda)}$ halmazra kompakt leképezés. Továbbá $I - G_\lambda$-nak nincsenek nullhelyei $O_\lambda - \overline{B}_{\rho(\lambda)}$ határán, ezért a nullhelyei kompakt halmazt alkotnak $O_\lambda - \overline{B}_{\rho(\lambda)}$ belsejében. Minden feltétel teljesül a Leray-Schauder fokszám értelmezéséhez ezen a halmazon: $deg(I - G_\lambda, O_\lambda - \overline{B}_{\rho(\lambda)}$. Legyen $\rho(\lambda)$ olyan kicsi, hogy $\lambda \neq \mu, (\lambda, 0) \in O$ esetén

$$deg(I - G_\lambda, B_{\rho(\lambda)}) = deg(I - \lambda T, B_{\rho(\lambda)})$$

teljesüljön.

Most azt fogom belátni, hogy minden $\lambda \neq \mu$ esetén

$$deg(I - G_\lambda, O_\lambda - \overline{B}_{\rho(\lambda)}) = 0$$

Ha λ elég távol van μ-től, akkor a fokszám nyilvánvalóan 0, hiszen O_λ az üres halmaz. λ_1 és λ_2 legyen két valós szám, amikre $(\lambda_i, 0) \notin O$ és a két szám vagy egyszerre nagyobb mint μ vagy egyszerre kisebb. Jelölje Λ azt a zárt intervallumot melynek végpontjai $\lambda_i, i = 1, 2$. Ekkor a $W = O \cap (\Lambda \times X)$ nyílt $\Lambda \times X$-ben. $\lambda \in \Lambda$-ból következik, hogy $O_\lambda - \overline{B}_{\rho(\lambda)} = O_\lambda$, majd alkalmazva a 3.24 tételt kapjuk, hogy $deg(I - G_\lambda, O_\lambda - \overline{B}_{\rho(\lambda)})$ független $\lambda \in \Lambda$ választásától. Ezzel beláttam az állítást, abban az esetben, amikor $(\lambda, 0) \notin O$. Most olyan esetre látom be, amikor $(\lambda_1, 0) \in O$ és $(\lambda_2, 0) \notin O$, valamint μ nincs benne a Λ intervallumban. Ezen felül λ_2 legyen olyan közel μ-höz, hogy ne legyen bifurkációs pont Λ-ban. Ekkor létezik $\rho > 0$, amire kisebb mint $\rho(\lambda_1)$ és $\rho(\lambda_1)$, amire

$$(\Lambda \times \overline{B}_\rho) \cap \overline{S} = \emptyset$$

Újra alkalmazni fogom az fokszám általános homotópia tulajdonságát, vagyis a 3.24 tételt, ezúttal a

$$W = O \cap (\Lambda \times (X - \overline{B}_\rho))$$

halmazra.

Ebből következik, hogy $deg(I - G_{\lambda 1}, O_{\lambda 1} - \overline{B}_\rho) = 0$. Ugyanakkor $I - G_\lambda$-nak nem lehetnek zérushelyei $\overline{B}$-n, ezért a Leray-Schauder fokszám kivágás tulajdonsága miatt (3.25 tétel)

$$deg(I - G_\lambda, O_\lambda - \overline{B}_{\rho(\lambda)}) = 0$$

minden $\lambda \neq \mu$-re.

Most készen állok megmutatni, hogy az indirekt feltevés ellentmondáshoz vezet. Legyenek η és ξ olyan valós számok, melyekre $\eta < \mu$ és $\xi > \mu$ és $(\eta, 0), (\xi, 0)$ halmazok O-ban vannak. Újra a Leray-Schauder fokszám általános homotópia tulajdonságát fogom használni, ezúttal a $W = O \cap ([\eta, \xi] \times X)$ halmazra:

$$deg(I - G_\eta, O_\eta) = deg(I - G_\xi, O_\xi)$$

Most az additivitást felhasználva adódik:

$$deg(I - G_\eta, O_\eta) = deg(I - G_\eta, O_\eta - \overline{B}_{\rho(\eta)}) + deg(I - G_\eta, B_{\rho(\eta)})$$

$$= 0 + deg(I - G_\eta, B_{\rho(\eta)})$$

Hasonlóan:

$$deg(I - G_\xi, O_\xi) = deg(I - G_\xi, B_{\rho(\xi)})$$

A két előző egyenlőségből adódik

$$deg(I - G_\eta, B_{\rho(\eta)}) = deg(I - G_\xi, B_{\rho(\xi)})$$

Alkalmazva a 4.5 tételt:

$$deg(I - \eta T, B_{\rho(\eta)}) = deg(I - \xi T, B_{\rho(\xi)})$$

Most használom fel, hogy $\frac{1}{\mu}$ páratlan multiplicitású és hogy a $H(\eta)$, $H(\xi)$ halmazok közül pontosan az egyik tartalmazza. Alkalmazva a 3.35 tételt a fokszámszámításról:

$$deg(I - \eta T, B_{\rho(\eta)}) = (-1)^{\beta(\eta)} \neq (-1)^{\beta(\xi)} = deg(I - \xi T, B_{\rho(\xi)})$$

Ami ellentmondás, hiszen korábban azt tettem fel, hogy a fokszámok egyenlőek.

5. fejezet

Nemlineáris Sturm-Liouville elmélet

Most a Krasnoselskii-Rabinowitz bifurkációs tétel egy alkalmazását fogom bemutatni. Először az Euler-kihajlás fogalmát vezetem be, amely matematikai leírása egy differenciálegyenlettel adható meg, ami a nemlineáris Sturm-Liouville egyenletek családjához tartozik. A fejezet végén a bifurkációs tételt alkalmazom a nemlineáris Sturm-Liouville egyenletek általános alakjára, majd ezt az eredményt használom fel a következő, utolsó fejezetben a kihajlás egyenletének megoldására.

Az Euler kihajlás egy fizikai probléma leírása: egy függőleges oszlop tetejére valamilyen súlyt helyezünk, a súly erőt fejt ki az oszlopra, így az meghajlik. A függőleges oszlopot az x tengelyen fogjuk reprezentálni, a $[0, \pi]$ intervallumra szorítkozva. A modellben a 0 pont fixen marad és egy P erő hat a másik végpontra, $(\pi, 0)$-ra. Feltesszük, hogy a nyomás hatására a jobboldali végpont sem mozdul el, illetve a minden $[0, \pi]$-beli pont csak vertikális irányban mozoghat, a harmadik dimenzió irányába nincs mozgás. Minden $s \in [0, \pi]$ esetén jelölje $y(s)$ az s-beli pont vertikális elmozdulását. Feltesszük még, hogy az oszlop kihajlását leíró görbe sima, ami ebben az esetben azt jelenti, hogy minden pontban differenciálható. Jelölje $\phi(s)$ az y görbe s pontbeli meredekségét.

Fizikából tudjuk, hogy az Euler-Bernoulli törvény szerint

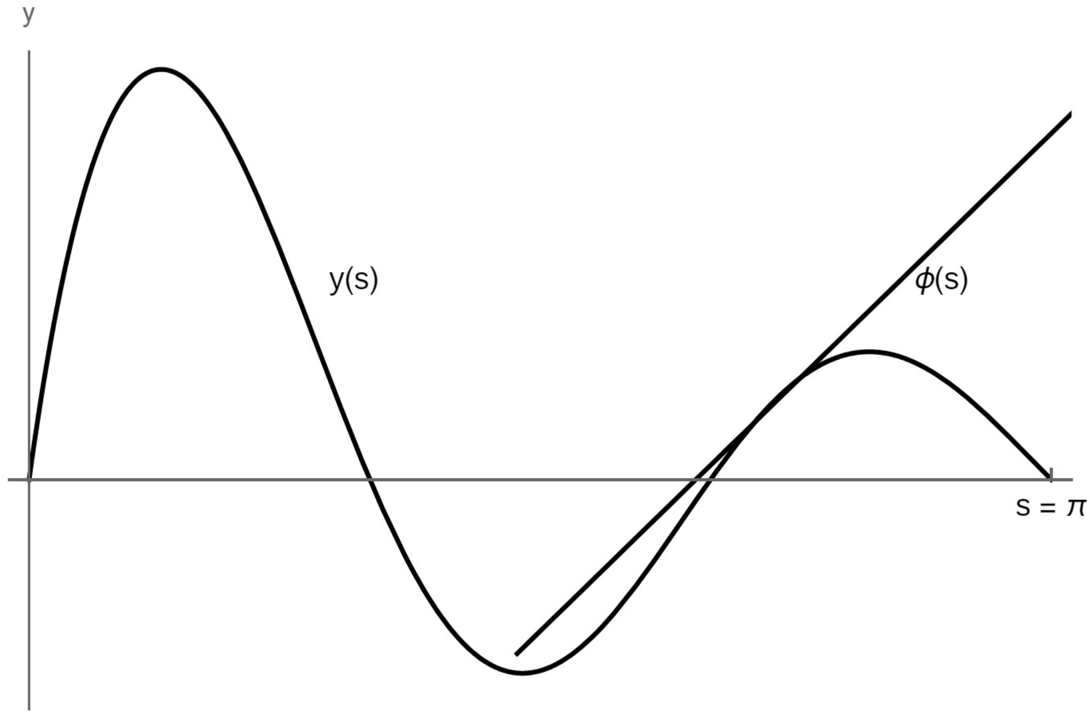
$$Py(s) = -\mathfrak{M}\phi'(s)$$

Ahol $\mathfrak{M}$ hajlítási merevség konstans, amelyet kísérletezéssel lehet megkapni egy adott oszlop esetén. P és $\mathfrak{M}$ is konstansok, így legyen

$$\lambda = \tfrac{P}{\mathfrak{M}}$$

A most bevezetett jelöléssel az Euler-Bernoulli törvény:

$$-\phi'(s) = \lambda y(s)$$



s kis megváltozása, Δs esetén $\frac{\Delta y(s)}{\Delta s}$ a $sin(\phi(s))$ függvényt közelíti, így a határérték $y'(s) = sin(\phi(s))$. Deriváljuk az Euler-Bernoulli törvényt és helyettesítsük be az előbbi eredményt:

$$-\phi'' = \lambda y' = \lambda sin\phi$$

Összefoglalva az eddigieket az Euler elhajlás ezzel a közönséges differenciálegyenlettel írható le:

Keressük azt a $\phi = \phi(s) : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ függvényt és λ számot, ami kielégíti:

$$-\phi'' = \lambda sin\phi$$
$$\phi'(0) = \phi'(\pi) = 0$$

A második feltétel a *Neumann peremfeltétel.* Az ilyen alakú differenciálegyenlet neve *sajátérték feladat*, hasonlóan a lineáris egyenlethez. Most definiálom az általános Sturm-Liouville egyenleteket:

Legyen $p, q : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, ahol p differenciálható és $p(s) > 0 \ \ \forall s \in [0, \pi]$. A függvények segítségével definiáljuk az $L : C^2[0, \pi] \to C[0, \pi]$ operátort :

$$Lu = -(pu')' + qu$$

Szükség van még az $F : [o, \pi] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ alakú függvények *Frechet differenciálhatóságának* fogalmára:

5.1. Definíció. *$F : [o, \pi] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ Frechet differenciálható ha létezik $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a(s) > 0$ leképezés, amire adott $\epsilon > 0$ és $[\lambda_0, \lambda_1]$ esetén létezik $\delta > 0$, amire $\sqrt{\xi^2 + \eta^2} < \delta$-ra:*

$$\frac{|F(s,\xi,\eta,\lambda - \lambda a(s)\xi|}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} < \epsilon$$

Minden $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$. A korábbi Frechet differenciálhatóság $G : \mathbb{R} \times X \to X$ alakú függvényekre volt érvényes, ahol X Banach tér. X Legyen $C^1[0, \pi]$ egy altere, és legyen $\Phi : \mathbb{R} \times X \to C[0, \pi]$

$$\Phi(\lambda, u)(s) = F(s, u(s), u'(s), \lambda).$$

Legyen $E : C[0, \pi] \to X$ beágyazás, így $G = E\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$. Ha $T \in L(X)$-et $Tu = Eau$-ként definiáljuk, akkor G a korábbi értelemben definiált Frechet differenciálhatóságát kapjuk vissza 0-ban, amikor is λT a deriváltja.

Most készen állunk a nemlineáris Sturm-Liouville sajátérték feladat értelmezéséhez. Adott $Lu = -(pu')' + qu$ operátor és egy F (nemlineáris) Frechet differenciálható függvény esetén találjunk egy teljesen folytonos $u : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ függvényt és egy λ valós számot, amely kielégíti az

$$\begin{gathered}
Lu = F(s, u, u', \lambda) \\
a_0 u(0) + b_0 u'(0) = 0 \\
a_1 u(\pi) + b_1 u'(\pi) = 0,
\end{gathered}$$

egyenletet, ahol a_0, a_1, b_0, b_1 valós számok, melyekre:

$$(a_0^2 + b_0^2)(a_1^2 + b_1^2) \neq 0.$$

Az általános Sturm-Liouville feladat peremfeltételét szeparált peremfeltételnek fogom nevezni és (szPF)-fel rövidítem. A konstans $p(s) = 1$ és $q(s) = 0$ esetben kapjuk az Euler kihajlás egyenletét. Az egyenlet most

$$F(s, u(s), u'(s), \lambda) = \lambda sin u(s).$$

alakú. Belátom, hogy F Frechet differenciálható. Legyen $[\lambda_0, \lambda_1]$ tetszőleges intervallum és legyen $\epsilon > 0$. Az 5.1 pontban kimondott definíciót fogom közvetlenül ellenőrizni.

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{sin\xi}{\xi} = 1$$

ezért létezik $\delta > 0$, amire

$$\frac{|\lambda sin\xi - \lambda\xi|}{|\xi|} = |\lambda| \cdot |\frac{sin\xi}{\xi} - 1| < \epsilon$$

minden $|\xi| < \delta$-ra és $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$. Definíció szerint az a függény $a(s) = 1$ minden s-re.
Jelölje $C_0^2[0,\pi]$ a $C^2[0,\pi]$ alterét, amelyben olyan $C^2[0,\pi]$-beli u függvények vannak, amelyekre $a_0u(0)+b_0u'(0) = 0$ és $a_1u(\pi)+b_1u'(\pi) = 0$ teljesül adott a_i és b_i értékekre.

Most tegyük fel, hogy az egyenlet peremfeltételei olyanok, melyekre $L : C_0^2[0,\pi] \to C[0,\pi]$-nek létezik inverze. Ezekkel a feltételekkel az $Lu = F(s,u,u',\lambda)$ egy megoldását megkapjatjuk $u = L^{-1}F(s,u,u',\lambda)$ egy fixpontjának megkeresésével. Legyen $\Phi : \mathbb{R} \times X \to C[0,\pi]$:

$$\Phi(\lambda, u)(s) = F(s, u(s), u'(s), \lambda).$$

Így az egyenlet $u = L^{-1}\Phi(\lambda, u)$ alakba írható. $Dom(\Phi) = \mathbb{R}\times X$, de $C_0^2[0,\pi]$ $X = C_0^1[0,\pi]$ altere, így létezik j beágyazás, amely $C_0^2[0,\pi]$-t X-be viszi. Definiáljuk $G : \mathbb{R} \times X \to X$-t függvények kompozíciójaként:

$$G : \mathbb{R} \times X \xrightarrow{\Phi} C[0,\pi] \xrightarrow{L^{-1}} C_0^2[0,\pi] \xrightarrow{j} C_0^1[0,\pi] = X$$

A $G(\lambda, u) = u$ egyenlet egy megoldásából megkaphatjuk a Sturm-Liouville egyenlet egy megoldását.

5.2. Tétel. *$G = jL^{-1}\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$ teljesen folytonos.*

Bizonyítás:

$$||(\lambda, u)|| = |\lambda| + ||u||_1 = |\lambda| + \sup_{0\leq s\leq\pi} |u(s)| + \sup_{0\leq s\leq\pi} |u'(s)|$$

Legyen $Z \subseteq \mathbb{R}\times X$ egy korlátos részhalmaz. Így létezik $M \in \mathbb{R}$, amire $||(\lambda, u)|| < M$ minden $(\lambda, u) \in Z$. Speciálisan, $(\lambda, u) \in Z$-re $\lambda \in [-M, M]$ és $|u(s)| < M$, $|u'(s)| < M$ minden $s \in [0,\pi]$. Tekintsük a következő kompakt halmazt:

$$Q = [0,\pi] \times [-M, M] \times [-M, M] \times [-M, M]$$

Jelölje ψ az F függvény maximumát ezen a Q-n. Ha $(\lambda, u) \in Z$, akkor $(s, u(s), u'(s), \lambda) \in Q$ és így

$$|\Phi(\lambda, u)(s)| = |F(s, u(s), u'(s), \lambda)| \leq \psi$$

minden $s \in [0,\pi]$-re, amiből következik, hogy $||F(\lambda,u)|| \leq \psi$, ezért $\Phi(Z)$ korlátos részhalmaza $C[0,\pi]$-nek. Ezzel beláttam, hogy Φ korlátos leképezés. L^{-1} szintén korlátos, mert ez egy folytonos lineáris operátor. Ebből már következik, hogy $L^{-1}\Phi(Z)$ is korlátos $C_0^2[0,\pi]$. A klasszikus módszerekről szóló fejezetben szerepelt egy tétel, amely szerint $C^2[0,\pi]$ beágyazása $C^1[0,\pi]$-be teljesen folytonos leképezés, így a leképezés megszorítása $j : C_0^2[0,\pi] \to C_0^1[0,\pi]$-re is teljesen folytonos. Ezzel beláttam, hogy tetszőleges Z korlátos $G(Z) = j(L^{-1}\Phi(Z))$ halmaz képe relatív kompakt részhalmaza X-nek. $\square$

A Krasnoselskii-Rabinowitz tétel alkalmazásához a $T = L^{-1}a$ spektrumát szükséges megvizsgálnunk. Ha $\mu \in \mathbb{R}$ sajátértéke a T operátornak, akkor $Tu = \mu u$, és így $L^{-1}au = \mu u$. Átírva $\nu = \frac{1}{\mu}$-vel: $Lu = \nu au$. Igy a feladat, egy u sajátvektor megkeresése az alábbi egyenletben:

$$-(pu')' + qu = \nu au$$
$$(szPF)$$

Ez a klasszikus Sturm-Liouville peremértékfeladat, a nemlineáris $Lu = F$ egyenlet linearizált alakja. Az egyenlet a következő differenciálegyenlettel írható le:

$$-pu'' - p'u' + (q - \nu a)u = 0 \text{ (DE)}$$

ahol $p, q, a : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ leképezések, ν konstants.
Így most egy közönséges másodrendű lineáris differenciálegyenletet kaptunk.

A (DE) egyenlet megoldásai

$$u = c_1u_1 + c_2u_2$$

alakúak, ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $u_1, u_2 : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ lineárisan függetlenek a következő értelemben:

A $W(u_1,u_2) : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ Wronski determináns

$$w(s) = W(u_1,u_2)(s) = u_1(s)u_2'(s) - u_2(s)u_1'(s)$$

$w(s) \neq 0$ minden $s \in [0,\pi]$

Ebből következik, hogy (DE) megoldásainak vektortere legfeljebb kétdimenziós.

Az eredeti egyenletünk $Lu - \nu au = 0$ alakba is írható, amelyet elosztva ν-vel kapjuk a $\mu Lu - au = 0$ alakot. L^{-1}-et alkalmazva erre: $(\mu I - T)u = 0$, amiből $(I - \frac{1}{\mu}T)u = 0$. Az előbbi tételből következik, hogy

$$dim\mathbf{N}_1(\mu) = dim(N(\mu I - T)) \leq 2.$$

5.3. Lemma. *Ha μ a $T = L^{-1}a$ egy sajátértéke, ahol L^{-1} az $Lu = -(pu')' + qu$ inverze, az (szPF) peremfeltétel mellett, akkor $dim(N(\mu I - T)) = 1$.*

Bizonyítás:

μ T egy sajátértéke, így $dim(N(\mu I - T)) \geq 1$. Belátom, hogy (szPF)-t feltéve $w(s) = W(u_1, u_2)(s)$ eltűnik $s = 0$-ban, és így $dim(N(\mu I - T)) < 2$. Ha $i = 1, 2$-re a differenciálegyenlet u_i megoldásai kielégítik (szPF)-t, akkor

$$a_0 u_i(0) + b_0 u_i'(0) = 0$$

Ha $a_0 = 0$, akkor nyilvánvaló, hogy $w(0) = 0$. Ha $a_0 \neq 0$, akkor

$$u_i(0) = \frac{b_0}{a_0} u_i'(0)$$

és így

$$w(0) = \frac{b_0}{a_0} u_1'(0) u_2'(0) - u_1'(0) \frac{b_0}{a_0} u_2'(0) = 0$$

5.4. Tétel. *$T = L^{-1}a$ minden μ sajátértéke egyszeres multiplicitású.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $N(\mu I - T)^2 \neq N(\mu I - T)$; akkor létezik

$$w \in N(\mu I - T)^2 - N(\mu I - T)$$

amire $(\mu I - T)w = x \in N(\mu I - T)$, $x \neq 0$. $\Lambda : C^2[0, \pi] \to C[0, \pi]$ legyen

$$\Lambda u = Lu - \nu au = -(pu')' + qu - \frac{1}{\mu} au$$

Most $\Lambda u = 0$ akkor és cask akkor 0, ha $u \in N(\mu I - T)$, így:

$$L(\mu I - T)w = Lx = \frac{1}{\mu} ax$$

amiből

$$\mu \Lambda w = \frac{1}{\mu} ax$$

$u, v \in C[0, \pi]$ skalárszorzata, (u, v) legyen:

$$(u, v) = \int_0^\pi u(s) v(s) ds$$

Most megmutatom, hogy

$$(\Lambda u, v) = (u, \Lambda v)$$

Minden $u, v \in C^2[0,\pi]$-re, amely kielégíti (szPF)-t.
$$\begin{aligned}(\Lambda u, v) - (u, \Lambda v) &= \int_0^\pi \Lambda u(s)v(s) - u(s)\Lambda v(s)ds\\ &= \int_0^\pi [-(p(s)u'(s))' + q(s)u(s) - va(s)u(s)]v(s)\\ &- u(s)[-p(s)v'(s))' + q(s)v(s) - va(s)v(s)]ds\\ &= -\int_0^\pi [p(s)u'(s))'v(s) - (p(s)v'(s))'u(s)]ds\end{aligned}$$
A kapott eredményt parciálisan integrálva:

$$\begin{aligned}(\Lambda u, v) - (u, \Lambda v) &= -(p(s)u'(s)v(s) - p(s)v'(s)u(s))\Big|_0^\pi\\ &\quad + \int_0^\pi [(p(s)u'(s))v'(s) - (p(s)v'(s))u'(s)]ds\\ &= -p(s)(u'(s)v(s) - v'(s)u(s))\Big|_0^\pi\\ &= -p(s)W(u,v)(s)\Big|_0^\pi\\ &= -p(\pi)W(u,v)(\pi) + p(0)W(u,v)(0) = 0\end{aligned}$$

5.5. Tétel. *Legyen*

$$Lu = F(s, u, u', \lambda)\ (szPF)$$

egy nemlineáris Sturm-Liouville sajátérték feladat, ahol $Lu = -(pu')' + qu$ *invertálható az (szPF) feltételeit kielégítve. Ha* λ *sajátértéke az egyenlet linearizált alakjának, azaz*

$$Lu = \lambda au\ (szPF)$$

akkor λ *egy bifurkációs pontja a nemlineáris egyenletnek és létezik egy zárt, összefüggő* C_λ *halmaza a megoldásoknak, amely tartalmazza* $(\lambda, 0)$*-t és vagy* C_λ *nem korlátos részhalmaza* $\mathbb{R} \times X$*-nek vagy* C_λ *tartalmaz egy* $(\lambda^*, 0)$ *pontot, úgy hogy* $\lambda^* \neq \lambda$ *bifurkációs pont.*

6. fejezet

Euler kihajlás

Az Euler kihajlást leíró egyenlet:

$$-u'' = \lambda sinu$$
$$u'(0) = u'(\pi) = 0$$

A Neumann peremfeltételt előírva az $Lu = -u'', L : C_0^2[0,\pi] \to C[0,\pi]$ operátornak nem létezik inverze. Ezért némileg változtatunk az egyenlet alakján: egy elég kis $\epsilon > 0$-t választva legyen $L_\epsilon : C_0^2[0,\pi] \to C[0,\pi]$

$$L_\epsilon u = -u'' - \epsilon u$$

Az így kapott L_ϵ operátornak már van inverze. Legyen $L_\epsilon^{-1} : C[0,\pi] \to C_0^2[0,\pi]$

$$L_\epsilon^{-1} v(t) = \int_0^\pi G_\epsilon(s,t)v(s)ds$$

Ahol G_ϵ a Green függvény:

$$G_\epsilon(s,t) = \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{\epsilon} sin(\sqrt{\epsilon}\pi)} cos(\sqrt{\epsilon}(t-\pi))cos(\sqrt{\epsilon}s), & ha \quad 0 \le s \le t \le \pi \\ \frac{-1}{\sqrt{\epsilon} sin(\sqrt{\epsilon}\pi)} cos(\sqrt{\epsilon}t)cos(\sqrt{\epsilon}(s-\pi)), & ha \quad 0 \le t \le s \le \pi \end{cases}$$

Így most $y = L_\epsilon^{-1} v$-t írhatjuk a következő alakban:

$$\begin{aligned} y(t) = \tfrac{1}{\sqrt{\epsilon}} sin(\sqrt{\epsilon}\pi)[cos(\sqrt{\epsilon})(t-\pi)) \textstyle\int_0^t cos(\sqrt{\epsilon}s)v(s)ds \\ +cos(\sqrt{\epsilon}t) \textstyle\int_t^\pi cos(\sqrt{\epsilon}(s-\pi))v(s)ds] \end{aligned}$$

Az előző állítás bizonyítása megtalálható a [3] könyvben.
Deriválva:

$$y'(t) = \frac{-1}{\sqrt{\epsilon} sin(\sqrt{\epsilon}\pi)}[sin(\sqrt{\epsilon}(t-\pi)) \int_0^t cos(\sqrt{\epsilon}s)v(s)ds$$
$$+sin(\sqrt{\epsilon}t) \int_t^\pi cos(\sqrt{\epsilon}(s-\pi))v(s)ds]$$

Az előző fejezet Krasnoselskii-Rabinowitz tételre építő eredményét most alkalmazhatjuk, hiszen $y'(0) = y'(\pi) = 0$ és $y''(t) = -\epsilon y(t) - v(t)$.

Így most a módosított Euler kihajlás egyenlete:

$$-u'' - \epsilon u = \lambda u$$
$$u'(0) = u'(\pi) = 0$$

Átrendezéssel kapjuk a következő differenciálegyenletet:

$$-u'' = (\lambda + \epsilon)u$$

A közönséges másodrendű differenciálegyenlet általános megoldása:

$$u(s) = c_1 sin(\sqrt{\lambda + \epsilon} s) + c_2 cos(\sqrt{\lambda + \epsilon} s).$$

Deriválva u-t:

$$u'(s) = c_1\sqrt{\lambda + \epsilon} cos(\sqrt{\lambda + \epsilon} s) - c_2\sqrt{\lambda + \epsilon} sin(\sqrt{\lambda + \epsilon} s)$$

A Neumann feltételek miatt $u'(0) = 0$-ból következik, hogy $c_1 = 0$ és $u'(\pi) = 0$ miatt nemnulla megoldás csak akkor létezik, ha $sin(\sqrt{\lambda + \epsilon}\pi) = 0$. Ebből következik, hogy teljesülnie kell a $\sqrt{\lambda + \epsilon}\pi = k\pi$ egyenlőségnek, melyet négyzetre emelve kapjuk a $\lambda + \epsilon = k^2$ alakot. Összefoglalva az eddigi eredményeket, az egyenlet összes sajátértéke $\lambda + \epsilon = k^2$, és az összes sajátfüggvény $u_k(s) = cos(ks)$ alakú minden $\epsilon > 0$-ra.

6.1. Megjegyzés.

(i) Az $u_k(s)$ sajátfüggvények zérushelyei a $[0, \pi]$ intervallumban vannak:

$$\tfrac{\pi}{2k}, \tfrac{3\pi}{2k}, \ldots, \tfrac{(2k-1)\pi}{2k}$$

és pontosan k darab zérushely van.

(ii) Még egy tényt érdemes rögzíteni:

$$u_k'(\frac{r\pi}{2k}) = -ksin(k\frac{r\pi}{2k}) = \pm k \neq 0$$

A Krasnoselskii-Rabinowitz tétel nemlineáris Sturm-Liouville egyenletre vonatkozó alakja szerint az $L_\epsilon = \lambda sinu$ differenciálegyenlet nemtriviális megoldásai a $\lambda_k^\epsilon = k$ bifurkációs pontokból ágaznak ki, és a tételből még azt is tudjuk, hogy vagy C_k^ϵ nem korlátos vagy pedig tartalmaz egy másik $\lambda_{k'}$ bifurkációs pontot. Megmutatom, hogy a második alternatíva nem fordulhat elő ebben az esetben, azaz C_k^ϵ nem köthet össze két bifurkációs pontot.

6.2. Definíció. *Egy u sajátfüggvény nullhelye egyszerű, ha u'-nak nem nullhelye.*

6.3. Tétel. *A lineáris Sturm-Liouville sajátértékfeladat*

$$-(pu')' + qu = \lambda au \ (szPF)$$

$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_k < ...$ *sajátértékeinek halmaza nem korlátos és minden k esetén a λ_k egy numnulla $u_k(s)$ sajátfüggvényének pontosan k nullhelye van a $(0, \pi)$ intervallumon és az összes nullhely egyszerű.*

6.4. Megjegyzés. A tétel pár következménye a közönséges differenciálegyenletek elméletéből adódik. Közismert eredmény, hogy egy kezdeti feltétellel rendelkező lineáris másodrendű egyenletnek létezik egyértelmű megoldása. Ha a

$$-(pu')' + qu = \lambda au$$

differenciálegyenletnek létezne egy nemegyszerű s_0 nullhelye, akkor u kielégítené az $u(s_0) = 0, u'(s_0) = 0$ kezdeti feltételt. A konstans 0 függvény megoldása a kezdeti érték feladatnak és a megoldás egyértelműségéből már következik, hogy $u = 0$. Ezért u_k össszes nullhelye egyszerű. Ha u_k-nak végtelen sok nullhelye lenne, akkor ezek egy $s_0 \in [0, \pi]$ nullhelyhez konvergálnának, ebben az esetben azonban $u_k'(s_0) = 0$ lenne, ezért ez egy nemegyszerű nullhely lenne, ami ellentmondás, vagyis a sajátfüggvényeknek véges sok nullhelyük van.

Most azt fogom belátni, hogy a nemlineáris Sturm-Liouville sajátértékfeladat megoldásai ugyanúgy viselkednek, mint a lineáris egyenletéi. Az $X = C_0^1[0, \pi]$-beli függvényeket vizsgálunk a C^1 normával:

6.5. Definíció. $||u||_1 = ||u|| + ||u'||$

6.6. Definíció. S_k = *$\{u \in X : u - nak \;\; k$ darab zérushelye van $(0, \pi)$-n, és az összes zérushely egyszerű$\}$*

Az S_k-beli függvényeknek lehet zérushelyük 0-ban vagy π-ben, de ezeken a helyeken is megköveteljük, hogy egyszerűek legyenek.

6.7. Lemma. *Az S_k halmaz nyílt X-ben.*

Bizonyítás: Legyen $\epsilon_1 = min\{|u'(s_j)|, u \in S_k\}$ Legyenek $J_j \subset [0, \pi]$ diszjunkt, nyílt halmazok, amelyekre igaz, hogy minden j-re és minden $s \in \overline{J}_j$ vagy $u'(s) \geq \frac{\epsilon_1}{2}$ és u monoton növő a halmazon vagy $u'(s) \leq \frac{-\epsilon_1}{2}$ és u monoton csökkenő. Töröljük ki a J_j halmazt a $[0, \pi]$-ből, így u nem tűnik el ezen a halmazon. Jelölje ϵ_2 $|u|$ minimumát ezen a halmazon. Legyen ϵ kisebb mint $\frac{\epsilon_1}{2}$ és kisebb mint $\frac{\epsilon_2}{2}$. Belátjuk, hogy ha $v \in X$, $||u - v||_1 < \epsilon$, akkor $v \in S_k$. $|u(s) - v(s)| < \epsilon$-ból következik, hogy $v(s)$-nek nem lehet nullhelye J_j-n kívül, valamint $u(s)$ és $v(s)$ egyszerre pozitív és negatív. $|u'(s) - v'(s)'| < \epsilon$ miatt $u(s)$ és $v(s)$ egyszerre pozitív vagy negatív. Továbbá $|u'(s) - v'(s)| < \epsilon$ miatt v és u egyszerre monoton növő vagy monoton csökkenő az intervallumon. Az u függvény minden $(0, \pi)$-beli zérushelyénél előjelet vált, amiből következik, hogy ugyanez igaz v-re is, ezért v-nek pontosan egy zérushelye van a megfelelő J_j halmazokon. Most belátom, hogy ha u-nak létezik zérushelye $s = 0$-ban, akkor v-nek is. $u \in S_k$-ból és $u(0) = 0$-ból következik, hogy $u'(0) \neq 0$, mert az összes zérushely egyszerű. $u \in X$ miatt

$$a_0 u(0) + b_0 u'(0) = 0$$

ahol $a_0^2 + b_0^2 \neq 0$. A peremfeltételek miatt $b_0 = 0$ és $a_0 \neq 0$. Ha $v(0) \neq 0$ fennállna, akkor

$$a_0 v(0) + b_0 v'(0) = a_0 v(0) \neq 0$$

is igaz lenne, ami ellentmond annak, hogy $v \in X$. Abban a J_j halmazban amelyik tartalmazza a 0 pontot nem lehet egy másik zérushely, mert v monoton 0 egy környezetében. Hasonlóan adódik, hogy $v(\pi) = 0$ akkor és csak akkor, ha $u(\pi) = 0$, ezért v-nek pontosan k zérushelye van $(0, \pi)$-n, így $v \in S_k$. □

6.8. Lemma. *Legyen $u \in X, u \in \partial S_k$. Ekkor u-nak létezik nemegyszerű nullhelye.*

6.9. Lemma. *Ha (λ, u) megoldása a nemlineáris Sturm-Liouville egyenletnek és u-nak létezik nemegyszerű zérushelye, akkor u a konstans 0 függvény.*

6.10. Lemma. *Legyen L invertálható a peremfeltételek mellett. Ekkor a $(\lambda_k, 0) \in \mathbb{R} \times X$ bifurkációs pontnak létezik egy N_k környezete, amelyre ha $(\lambda, u) \in S \cap N_k$ és $u \neq 0$ akkor $u \in S_k$.*

6.11. Tétel. *Legyen*

$$Lu = F(s, u, u', \lambda) \ \textit{(szPF)}$$

A nemlineáris Sturm-Liouville sajátértékfeladat, ahol $Lu = -(pu')' + qu$ invertálható, és eleget tesz a peremfeltételeknek. Jelölje $\{\lambda_k\}$ a linearizált feladat sajátértékeit

$$Lu = \lambda au \text{ (szPF)}$$

és a nemnulla sajtfüggvényeknek pontosan k nullhelye van $(0, \pi)$-ben. Ha C_k a nemlineáris egyenlet nemtriviális megoldásainak egy ága amely tartalmazza $(\lambda_k, 0)$-t, akkor $(\lambda, u) \in C_k$, $u \neq 0$-ból következik, hogy $u \in S_k$, azaz u-nak pontosan k zérushelye van $(0, \pi)$-in és az összes zérushely egyszerű és így C_k nem korlátos.

Bizonyítás: A 6.10 lemma miatt C_k és $\mathbb{R} \times S_k$ metszete nemüres. Indirekt felteszem, hogy nem minden nemnulla u van benne S_k-ban $(\lambda, u) \in C_k$ esetén. Az S_k halmaz nyílt X-ben és C_k kompaktsága miatt léteznie kell egy $(\lambda^*, u^*) \in C_k$ elemnek, ahol $u^* \in \partial S_k$. A 6.8 és 6.9 lemma miatt $u^* = 0$ és így szükségképpen λ^* bifurkációs pont. Ekkor viszont a 4.9 tétel miatt a bifurkációs pontoknak a linearizált egyenlet sajátértékeinek kell lenniük, ezért létezik egy m egész szám, amire $\lambda^* = \lambda_m$. A 6.10 lemmából következik, hogy a $(\lambda^*, 0)$-nak létezik egy N_m környezete, ahol az összes N_m-beli $(\lambda, u), u \neq 0$ megoldás esetén $u \in S_m$ benne van $\mathbb{R} \times S_m$-ben, ahol $m \neq k$. Ugyanakkor $(\lambda^*, u^*) \in \mathbb{R} \times \partial S_k$ miatt N_m-nek metszenie kellene $\mathbb{R} \times S_k$-t, ami ellentmondás. Ezzel beláttam, hogy $(\lambda, u) \in C_k$ és $u \neq 0$-ból következik, hogy $u \in S_k$. C_k nem köthet össze két bifurkációs pontot, hiszen u-nak nem lehet egyszerre k és $m \neq k$ zérushelye $(0, \pi)$. Végül a Krasnoselskii-Rabinowitz tétel miatt egyik C_k halmaz sem korlátos.

6.12. Tétel. *Minden $k = 1, 2, ...,$ egészre a k^2 bifurkációs pontja az Euler kihajlást leíró egyenletnek és a $(k^2, 0)$-t tartalmazó C_k nemtriviális megoldásokat tartalmazó ág nemkorlátos részhalmaza $\mathbb{R} \times X$-nek és ha $(\lambda, u) \in C_k$, $u \neq 0$, akkor $u \in S_k$.*

6.13. Lemma. *Ha $(\lambda, u) \in C_k$ minden $k \geq 1$, akkor*

$$||u||_1 \leq \pi(\pi + 1)\lambda.$$

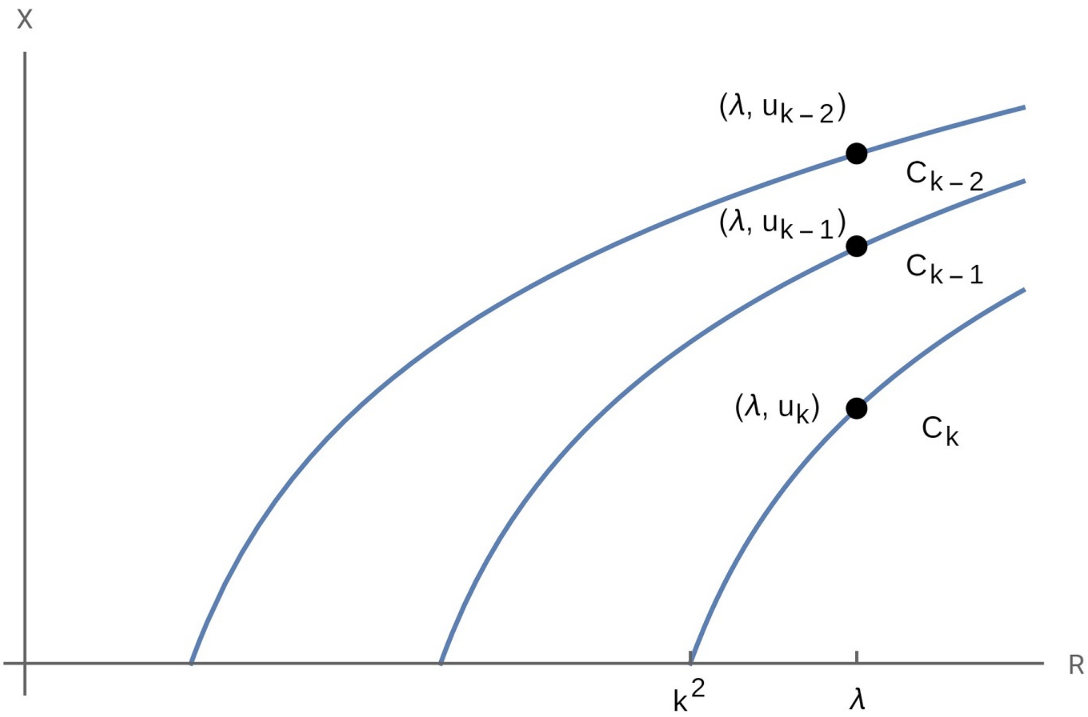
6.14. Tétel. *Ha $\lambda > k^2 \geq 1$, akkor minden $j \leq k$ esetén létezik egy (λ, u_j) megoldása az Euler kihajlásnak*

$$-u'' = \lambda sinu$$
$$u'(0) = u'(\pi) = 0$$

és erre a λ-ra u_j-nek pontosan j zérushelye van $(0, \pi)$-n, és az összes zérushely egyszerű.

Bizonyítás: Belátom, hogy minden C_k ág tartalmaz egy (λ, u) megoldást minden $\lambda > k^2$ esetén. A 6.12 tétel szerint u-nak pontosan k zérushelye van, így ebből már következik a tétel. Először belátom, hogy ha $(\lambda, u) \in C_k$ és u nem a konstans nulla függvény, akkor $\lambda > 0$. A differenciálegyenletből azonnal adódik, hogy $\lambda = 0$ esetén $u''(s) = 0$ minden s-re, így u' konstans függvény. Az $u'(0) = 0$ peremfeltétel miatt u-nak konstant függvénynek kell lennie, ami ellentmond a 6.12 tételnek. C_k összefüggő halmaz, ezért részhalmaza $(0, \infty) \times X$-nek, amiből következik, hogy $\lambda > 0$. Tegyük fel, hogy létezik $b > 0$, amire $(\lambda, u) \in C_k$-ból következik $\lambda \leq b$. A 6.13 lemma miatt $(\lambda, u) \in C_k$-ból következik $\lambda \in [0, b]$ és $||u|| \leq \pi(\pi + 1)b$, ami miatt C_k korlátos és ez ellentmond a 6.12 tételnek. $\square$

Ezzel az utolsó tétellel választ adtam az előző fejezetben részletesen bemutatott probléma megoldására $P > k^2\mathfrak{M}$ esetén: az oszlop k különböző módon hajolhat meg.



Irodalomjegyzék

[1] Robert F. Brown, *A Topological Introduction to Nonlinear Analysis*, Birkhauser (2014)

[2] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002)

[3] Tóth János, Simon L. Péter *Differenciálegyenletek, Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba* (2020)

[4] Paul Rabinowitz *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Funct. Anal. 7 (1971), 487-513

[5] P. Ritger, N. Rose *Differential Equations with Applications*, McGraw-Hill, 1968