NYILATKOZAT

Név: Stein Andor Benjámin

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: Z1ARZV

Szakdolgozat címe:
Preferencia alapú párosítási piacok elmélete

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2023.06.07.

Stein Andor Benjámin

a hallgató aláírása

Preferencia alapú párosítási piacok elmélete

Stein Andor Benjámin

Matematika BSc, alkalmazott matematika szak

Szakdolgozat

Témavezető:

Csáji Gergely Kál

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2023.

Köszönetnyílvánítás

Ezúton is szeretném megköszönni Csáji Gergely Kálnak, hogy elvállalta a témavezetést, illetve hogy a konzultációs alkalmakon és azokon túl, útmutatásai révén mélyebb betekintést nyerhettem ebbe az érdekes témába.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Szakdolgozatomban olyan problémákra adunk modellt, és megoldást, amelyekben különböző résztvevőket kell összepárosítani, vagy más módon kapcsolatba állítani úgy, hogy azoknak kielégítsük bizonyos igényeit. Ezek az igények főleg ahhoz kapcsolódnak, hogy a résztvevőknek preferenciái vannak egymáson, amiket szeretnénk figyelembe venni és stabil vagy igazságos megoldásokat találni. Számos probléma tartozik ide: A híres stabil házassági probléma [4], diák allokációs programok, szerverek és felhasználók párosítása, rezidensek beosztása kórházakba, szervdonorok újrakiosztása a betegek között, hogy csak párat említsünk [2].

Elsősorban páros gárfokban fogunk különféle speciális tulajdonságokkal rendelkező párosításokat keresni, de tenni fogunk egy kis kitekintést általános- és irányított gráfbeli feladatokra is. A csúcsok minden esetben úgynevezett preferencia-sorrendeket fognak felállítani, amely azt mutatja, hogy ki melyik párral mennyire lenne elégedett.

A fő célunk néhány szép polinomidejű algoritmus bemutatása, egyesek egzakt algorimusok, míg mások egy NP-nehéz probléma közelítő algoritmusai.

Először a legegyszerűbb esettel fogunk foglalkozni, amely a stabil párosítások problémaköre. Itt minden csúcsnak lesznek preferenciái, és az lesz a célunk, hogy ne legyenek olyan párosok, akik felborítanák az egyensúlyt azzal, hogy kölcsönösen jobban kedvelik egymást, mint azt, akivel a párosításban együtt vannak.

Ezután áttérünk a népszerű párosítások elméletére, ahol viszont azt fogjuk vizsgálni, hogy az egyes párosításokat kollektíven mennyire kedvelik a résztvevők.

Az egyoldali esetben csak az egyik pontosztálynak lesznek preferenciái. Ez megfeleltethető például annak, amikor személyeknek szeretnénk különböző tárgyakat kiosztani. A kétoldali esetben minden résztvevőre mint ügynökre tekintünk, vagyis mindenkinek van preferenciája. Továbbá bemutatjuk a népszerű és stabil párosítások között rejlő gyönyörű kapcsolatot azáltal, hogy a maximális méretű népszerű párosítás keresését visszavezetjük egy stabil párosítási feladatra.

Végül pedig bemutatunk egy igen hasznos alkalmazást. A vesecsereprogramban betegek szervdonorait szeretnénk újra kiosztani úgy, hogy azáltal minél többen jussanak jobb szervhez.

A dolgozatban szereplő összes rajzot saját kezűleg készítettem az Ipe szoftver segítségével. A párosításokat színekkel (piros, kék...) fogom jelölni, a preferenciákat pedig íves nyilakkal.

1. fejezet

Stabil párosítások

A dolgozat ezen fejezetében a híres stabil párosítási feladatot vezetjük be, illetve annak néhány általánosítását vizsgáljuk. Először vezessük be a legalapvetőbb fogalmakat.

1.0.1. Definíció. Egy $G(V, E)$ gráfban párosításnak nevezzük az élek egy olyan M részhalmazát, amelyben bármely két él független, azaz nincs közös csúcsuk. Egy $(v, w) \in M$ él esetén jelölje $M(v)$ w-t, azaz v párját.

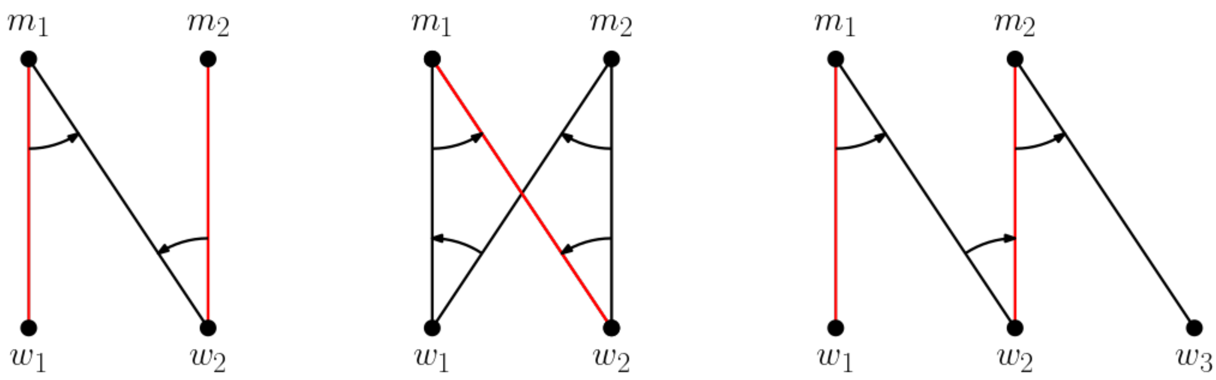
Ebben a fejezetben páros gráfokat fogunk vizsgálni. Legyen adott egy $G = (A, B, E)$ gráf, ahol $|A| = n_A$, $|B| = n_B$. Az 1. fejezetben az egyszerűség kedvéért A elemeit fiúknak, B elemeit lányoknak fogjuk hívni.

Jelölje $E(v)$ v szomszédjait G-ben, azaz azon csúcsok halmazát, amelyekbe vezet él v-ből. Minden csúcsra definiálunk egy szigorú rendezési relációt, úgynevezett preferenciát a szomszédjain, azaz hogy az adott csúcs melyik szomszédját kedveli jobban/kevésbé:

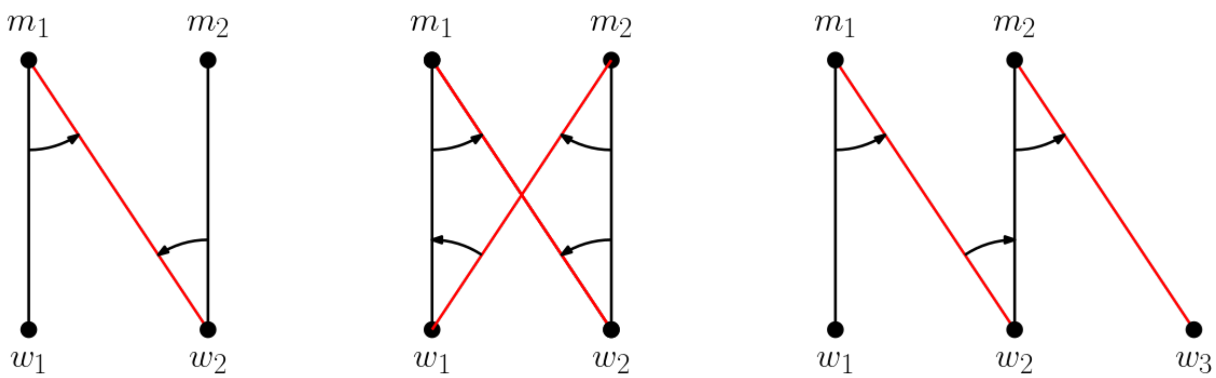
- $\forall m_i \in A$ fiú preferenciáját jelölje $>_{m_i}$: $w_{j_1} > w_{j_2} > ... > w_{j_l}$, ahol $\forall j : w_j \in E(m_i) \subseteq B, |E(m_i)| = l$, és hasonlóan
- $\forall w_j \in B$ lány preferenciáját jelölje $>_{w_j}$: $m_{i_1} > m_{i_2} > ... > m_{i_k}$, ahol $\forall i : m_i \in E(w_j) \subseteq A, |E(w_j)| = k$

1.0.2. Definíció. Adott $G = (A, B, E)$ gráf, és adott preferenciák esetén az $M \subseteq E$ párosítást stabilnak nevezzük, ha $\nexists (m, w) \in E$ él, amelyre m vagy izolált M-ben, vagy $w >_m M(m)$, és w vagy izolált M-ben, vagy $m >_w M(w)$ egyszerre teljesül. Egy ilyen (m, w) élt M-re nézve blokkoló/M-et blokkoló élnek nevezünk.

Más szóval, egy párosítás stabil, ha nincs blokkoló él.



1.1. ábra. Három példa nem stabil párosításra. A blokkoló élek rendre (m_1, w_2), (m_2, w_1) és (m_2, w_3).



1.2. ábra. Három példa stabil párosításra.

1.1. Gale-Shapley algoritmus

A célunk tehát, hogy egy adott $G = (A, B, E)$ gráfban hatékonyan keressünk stabil párosításokat. Erre megoldás a következő algoritmus [4].

1.1.1. Algoritmus (Gale-Shapley)**.** Az algoritmust mindaddig futtatjuk, amíg van nem párosított fiú nem üres preferenciával. Vegyünk egy ilyen $m \in A$ fiút, és próbáljuk meg hozzárendelni az ő preferenciájában az első helyet elfoglaló w lányt (m felkéri w-t).

- Ha w-nek még nincs párja, akkor m-et és w-t összepárosítjuk.
- Ha w-nek már létezik egy m' párja, akkor két eset áll fenn:
  (1) Ha $m >_w m'$, vagyis w jobban preferálja m-et, mint m'-t, akkor m'-t cseréljük le m-re (w kikosarazza m'-t). Ezzel m' ismét párosítatlan csúccsá válik.
  (2) Ha $m <_w m'$, akkor nincs csere.
- Végül m preferenciájából töröljük w-t, hogy mikor legközelebb keresünk m-nek párt, már a következő legkedveltebb csúccsal próbáljuk párosítani.

Megjegyzés. Az algoritmus gyorsítható, ha minden alkalommal, mikor egy w csúcs kap egy m párt, $\forall m' <_w m$ csúcs preferenciájából is töröljük w-t.

Futásidő. $O(|E|)$, hiszen bármely lépésben törlődik egy lány valamely fiú preferenciájából, amiből pedig minden fiúra összegezve pontosan élszámnyi van.

A bizonyítások során, ha azt állítjuk, hogy egy csúcs egy párosítában jobban/kevésbé kedvelt párral rendelkezik, mint egy másikban, azzal a szóhasználattal fogunk élni, hogy az adott csúcs jobban/rosszabul jár.

1.1.1. Tétel. *A Gale-Shapley algoritmus stabil párosítást ad.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy az algoritmus által adott M párosításra nézve, az (m, w) él blokkol, azaz m izolált, vagy egy $w' <_m w$ párja van, w pedig izolált, vagy egy $m' <_w m$ párja van M-ben. Az algoritmus során m valamikor felkérte w-t. De w elutasította m-et, vagy pedig a későbbiekben kidobta őt, ami csak úgy lehet, ha kapott egy m-nél jobb fiútól felkérést. Így végül w-nek nem lehet m-nél kevésbé kedvelt párja az M párosításban, így (m, w) nem lehet blokkoló, ami ellentmondás. □

Ebből következik, hogy mindig létezik stabil párosítás: a Gale-Shapley algoritmus mindig talál egy párosítást, és az stabil.

Az algoritmus ezen változatában a fiúk kérik fel a lányokat. Megmutatjuk hogy ez a fiúknak kedvez, azaz hogy olyan párosítást kapunk, amelyben a fiúk a lehető legjobb párt kapják [1] (4.41. tétel).

1.1.2. Tétel. *A lánykérő Gale Shapley algoritmus a fiúkra nézve optimális.*

Bizonyítás. Legyen az algoritmus által adott párosítás M. Tegyük fel, hogy létezik olyan N párosítás és m fiú, amelyre $N(m) >_m M(m)$. Az algoritmus sorát $N(m)$-nek egyszer ki kellett kosaraznia m-et, egy jobb m' kérő miatt. Legyen m az a fiú, akivel ez legelőször történik meg. Ekkor m' csak úgy kérhette fel $N(m)$-et, hogy korábban még nem próbálkozott $N(m')$-nél, azaz $N(m) >_{m'} N(m')$. Ekkor az $(m', N(m))$ él blokkolja N-t, ami ellentmondás. □

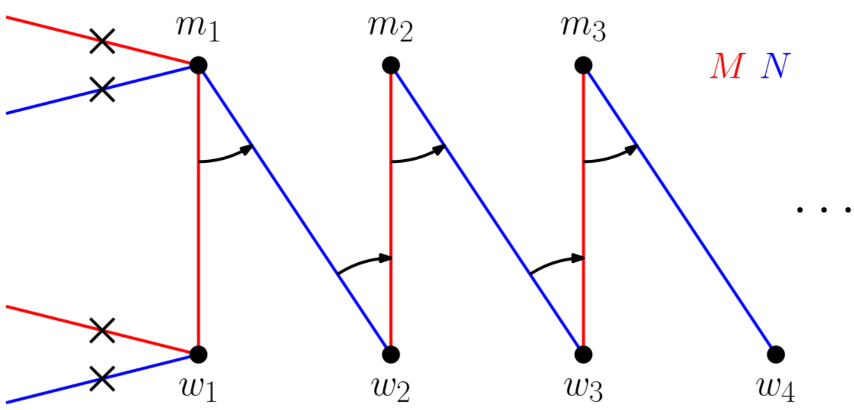
Megjegyzés. A szimmetria miatt az is igaz, hogy ha a lányok kérnék fel a fiúkat, akkor az a lányokra nézve lenne optimális.

1.2. Stabil párosítások mérete

Felmerülhet a kérdés, hogy létezhetnek-e különböző méretű stabil párosítások, és ha igen, akkor hogyan találhatjuk meg a tartalmazásra maximálisat, az alábbi részfejezetben azonban belátjuk, hogy bármely stabil párosítás ugyan akkora [1] (4.44. állítás).

1.2.1. Tétel. *Bármely két stabil párosítás pontosan ugyan azokat a csúcsokat fedi.*

Bizonyítás. Legyenek M én N tetszőleges stabil párosítások. Tegyük fel, hogy létezik w_1 csúcs, amely M-ben fedve van, de N-ben nem. Legyen $M(w_1) = m_1$. m_1-nek van párja N-ben, és olyan, akit jobban kedvel, mint w_1-et, különben az (m_1, w_1) él blokkolná M-et. Legyen ez w_2. w_2-nek van párja M-ben, és olyan, akit jobban kedvel, mint m_1-et, különben az (m_1, w_2) él blokkolná N-t. Legyen ez m_2. m_2-nek m_1-hez hasonlóan van egy w_3 párja N-ben. w_3-nak w_2-höz hasonlóan van egy m_3 párja M-ben. Ez az út nem érhet vissza w_1-be, mert azt feltevés szerint nem fedi N, és nem érhet vissza m_1-be vagy bármely korábbi csúcsba sem, mert azok már fedve vannak M és N által is. Tehát létezik egy végtelen út a véges gráfban, ami ellentmondás. □



1.3. ábra

1.2.2. Következmény. *Szigorú preferecnciák esetén bármely két stabil párosítás mérete megegyezik.*

1.3. Döntetlenek esete

A következőkben megengedjük, hogy a csúcsok egyenlő mértékben preferálják a szomszédjaikat. Ha w ugyan annyira kedveli m-et és m'-t, akkor azt jelölje $m \sim_w m'$.

A preferenciákat jelöljük az alábbi módon:

- $\gtrsim_{m_i}$: $w_{j_1} \gtrsim w_{j_2} \gtrsim ... \gtrsim w_{j_l}$
- $\gtrsim_{w_j}$: $m_{i_1} \gtrsim m_{i_2} \gtrsim ... \gtrsim m_{i_k}$

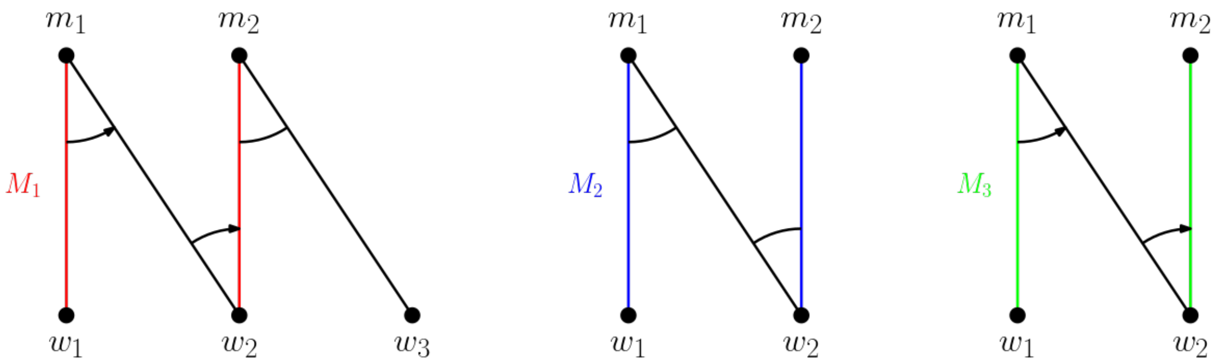
Itt $m \gtrsim m'$ azt jelöli, hogy $m \sim m'$ vagy $m > m'$.

A stabil párosítások és a blokkoló élek fogalmát pontosítanunk kell, illetve meg kell különböztetnünk többféle stabilitást.

1.3.1. Definíció. Egy M párosítás

- gyengén stabil, ha $\nexists(m,w) \in E$ él, amelyre $w >_m M(m)$ és $m >_w M(w)$ egyszerre teljesül.
- erősen stabil, ha $\nexists(m,w) \in E$ él, amelyre $w \gtrsim_m M(m)$ és $m >_w M(w)$, vagy $w >_m M(m)$ és $m \gtrsim_w M(w)$
- szuper stabil, ha $\nexists(m,w) \in E$ él, amelyre $w \gtrsim_m M(m)$ és $m \gtrsim_w M(w)$

Ha egy csúcsnak nincs párja, akkor azt úgy kezeljük, mintha egy olyan párja lenne, akinél mindenkit szigorúan jobban kedvel. Így blokkoló élnek számít az az eset is, amikor egy párosításban egy gráfbeli él mindkét végpontja izolált, vagy amikor az egyik izolált, a másik viszont jobban/legalább annyira kedveli az előbbi végpontot, mint a párosításbeli párját.



1.4. ábra. Példák erősen és super stabil párosításokra. M_1 gyengén stabil, de nem erősen, mert (m_1, w_2) blokkoló él. M_2 erősen stabil, de nem super, mert (m_1, w_2) blokkol. M_3 super stabil.

A cél itt is gyengén stabil párosítás keresése. A Gale-Shapley algoritmus segítségével ez is megoldható, ha feltörjük a döntetleneket, vagyis a preferenciákban bármely egyenlő mértékben kedvelt csúcs között a döntetlent mesterségesen szigorú relációra cseréljük, és az így kapott G' feladatra futattjuk az algoritmust.

1.3.1. Állítás. *A Gale-Shapley algoritmus gyengén stabil párosítást talál döntetlenek esetén is.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy (m,w) él blokkolja M-et. Ekkor $w >_m M(m)$, és $m >_w M(w)$. Ezek szigorú relációk, ezért ezek a G' feladatban is így állnak fenn. m az algoritmus során valamikor felkérte w-t, w pedig leváltotta m-re az addigi párját, ha volt. Ezt követően, ha w le is cserélte m-et, azt egy olyan fiúra tette, akit a G' feladatban szigorúan jobban, tehát a G feladatban legalább annyira kedvel, mint m-et, így végül w-nek nem lehet m-nél szigorúan kevésbé kedvelt párja az M párosításban, így (m,w) nem lehet blokkoló. □

1.4. Maximális méretű gyengén stabil párosítások

Döntetlenek esetén létezhet több különböző méretű stabil párosítás is. Triviális példa az az eset, amikor mindenki mindenkit ugyan annyira kedvel, akkor ugyanis, minden párosítás gyengén stabil, ha abban nincs mindkét pontosztályból izolált csúcs, azaz ha a párosítás tartalmazásra nézve maximális. Ezért itt az is egy vizsgálható kérdés, hogy hogyan találhatunk olyat, ami maximális számú élt tartalmaz. Erre a feladatra azonban nem ismert gyors algoritmus.

1.4.1. Tétel. *Döntetlenek esetén maximális méretű gyengén stabil párosítás keresése NP-nehéz probléma.*

Bizonyítás. Az alábbi NP-nehéz feldatot fogjuk visszavezetni a mi feladatunkra: Adott $G = (A, B, E)$ páros gráfban szeretnénk eldönteni, hogy létezik-e legfeljebb k méretű tartalmazásra maximális párosítás [6]. Feltehetjünk, hogy $|A| = |B| = n$.
A redukció a következő: G-ben adjunk bármely csúcsnak egy-egy fantom szomszédot, amivel csak őket kötjük össze, illetve definiáljunk preferenciákat: bármely $A \cup B$-beli csúcs bármely szomszédját egyenlő mértékben kedvelje, kivéve a fantom szomszédját, amelyet viszont szigorúan kevésbé, mint a többit. A fantom csúcsoknak nem kell preferenciát definiálnunk, mert nekik csak egy szomszédjuk van. Legyen ez a G' feladat.
Megmutatjuk, hogy G-ben létezik legfeljebb k méretű tartalmazásra maximális párosítás akkor, és csak akkor, ha G'-ben létezik legalább $2n - k$ méretű gyengén stabil.

1. Ha G-ben létezik legfeljebb k méretű tartalmazásra maximális M párosítás, akkor vegyük ennek az éleit G'-ben, a fedetlen $A \cup B$-beli csúcsokat pedig párosítsuk össze a fantom szomszédjukkal. Ennek a G'-beli M' párosításnak a mérete legalább $k + 2n - 2k = 2n - k$.
   Egy fantom csúcs nem lehet blokkoló él végpontja, mert vagy megkapta az egyetlen szomszédját párnak, vagy nem, az utóbbi esetben viszont a szomszédja szigorúan jobban jár.
   Tegyük fel, hogy létezik A és B között egy (m, w) blokkoló él. Ekkor m és w is rosszabbul jár M'-ben, ami csak úgy lehet, ha mindketten a fantom szomszédjukat kapták. Ekkor viszont az (m, w) él bevehető az M párosításba, ami ellentmondás, mert M maximális méretű.

2. Tegyük fel, hogy létezik G'-ben egy legalább $2n - k$ méretű gyengén stabil M' párosítás. Legyen ebben az A és B között futó élek száma l. Ekkor M'-ben az élek száma legfeljebb $l + 2(n - l) = 2n - l$.
   $2n - k \leq |M'| \leq 2n - l \Rightarrow k \geq l$.
   Tegyük fel, hogy M'-nek a G-be eső része, azaz M nem tartalmazásra maximális.

Ekkor M'-ben létezik olyan (m, w) él, hogy m és w is a fantom szomszédját kapta párnak, de ekkor (m, w) blokkolja M'-t, ami ellentmondás, mert M' stabil.

□

Tehát jelenleg nincs polinomiális idejű algoritmus, ha pedig lenne, abból következne, hogy $P = NP$. Létezik azonban egy hatékony $\frac{2}{3}$-approximáció [3] (3.2.6.2. algoritmus).

Az eddigiekben, mivel nem voltak párhuzamos élek, a Gale-Shapley algoritmus működésének szempontjából nem számított, hogy egy csúcs preferenciáját a szomszédos csúcsokon, vagy a belőle induló éleken állítottuk-e fel, most viszont egyszerűbb, ha az utóbbi módon teszünk.

1.4.1. Algoritmus. Definiáljunk a feladathoz egy G' segédgráfot, és új preferenciákat:

1. Ugyan azon a csúcshalmazon $\forall(m, w)$ él helyett három párhuzamos élt húzzunk be. Jelölje ezeket $x(m, w)$, $y(m, w)$, és $z(m, w)$.

2. A preferenciákat most csúcsok helyett éleken állítsuk fel. $\forall m \in A$ csúcs $\succsim_m$: $w_1 \succsim w_2 \succsim ... \succsim w_k$ preferenciája a következőképpen módosul:

   - Osszuk blokkokra a w-ket. Ha $w_i \sim w_j$, akkor egyazon blokkba kerüljenek, ha pedig $w_i > w_j$ vagy $w_i < w_j$, akkor külön blokkokba.
   - Bármely $\{w_i, w_{i+1}, ..., w_{i+l}\}$ blokkra először állítsuk tetszőleges sorrendbe az $x(m, w_i), x(m, w_{i+1}), ..., x(m, w_{i+l})$ éleket, majd utána az $y(m, w_i), y(m, w_{i+1})$, $..., y(m, w_{i+l})$ éleket.
   - Ezeket a sorrendeket illesszük össze olyan sorrendben, amilyen sorrendben a blokkok állnak.
   - Végül illesszük a sorrend végére sorban a $z(m, w_1), z(m, w_2), ..., z(m, w_k)$ éleket. Itt azok az élek, amelyeknek a végpontjaik ugyan abban a blokkban vannak, egymás közt lehetnek tetszőleges sorrendben.

Ezt az új sorrendet jelölje $>'_m$. Például:

$$\succsim_m\!: w_1 \sim w_2 > w_3 > w_4 \sim w_5$$
$$\Downarrow$$
$$>'_m\!: x(m, w_1) > x(m, w_2) > y(m, w_1) > y(m, w_2) > x(m, w_3) > y(m, w_3) >$$
$$> x(m, w_5) > x(m, w_4) > y(m, w_4) > y(m, w_5) >$$
$$> z(m, w_2) > z(m, w_1) > z(m, w_3) > z(m, w_4) > z(m, w_5)$$

3. Hasonlóan állítsuk fel $\forall w \in B$ csúcs $\gtrsim_w$: $m_1 \gtrsim m_2 \gtrsim ... \gtrsim m_k$ sorrendje alapján az új sorrendet, azzal a különbséggel, hogy az x típusú, és a z típusú élek szerepét fölcseréljük. Ezt az új sorrendet jelölje $>'_w$. Például:

$$\gtrsim_m: m_1 > m_2 \sim m_3$$
$$\Downarrow$$
$$>'_w: x(w,m_1) > y(w,m_1) > x(w,m_2) > x(w,m_3) > y(w,m_3) > y(w,m_2) >$$
$$> z(w,m_1) > z(w,m_2) > z(w,m_3)$$

Futtassuk le a Gale-Shapley algoritmust ezen a segédgráfon az új preferenciákkal. Tekintsünk el attól, hogy a kapott N' párosítás élei milyen típusúak (x, y vagy z), és csak azt nézzük, hogy mik a végpontjaik. Ezt az N párosítást tekintsük az eredeti G gráfban.

Futásidő. A G' segédgráf élszámban lineáris időben megkonstruálható, és a Gale-Shapley algoritmus is lineáris idejű, így a fenti algoritmus futásideje is $O(|E|)$.

1.4.2. Állítás. *A fenti algoritmus által adott N párosítás stabil.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy $(m,w) \in E(G)$ él blokkol N-re nézve, azaz $w >_m N(m)$, és $m >_w N(w)$. Azt fogjuk megmutatni, hogy függetlenül attól, hogy az $(m, N'(m))$ és $(w, N'(w)) \in G'$ élek milyen típusúak, az $y(m,w) \in G'$ él blokkolja N'-t.

1. Ha $(m, N'(m)) \sim z(m, N(m))$, akkor definíció szerint $y(m,w) >'_m (m, N'(m))$.

2. Ha $(m, N'(m)) \sim y(m, N(m))$ vagy $(m, N'(m)) \sim x(m, N(m))$, akkor $(m, N'(m))$ a $>'_m$ sorrendben valamely hátrábbi blokkban kell lennie $w >_m N(m)$ miatt, ezért $y(m,w) >'_m (m, N'(m))$.

3. Hasonlóan, függetlenül attól, hogy $(w, N'(w))$ az $(w, N(w))$ élnek az x, y vagy z másolata-e, $y(m,w) >'_w (w, N'(w))$.

Tehát $y(m,w)$ blokkolja N'-t, ami ellentmodás, hisz a Gale-Shapley algoritmus biztosan stabil párosítást ad. □

1.4.3. Állítás. *A fenti algoritmus $\frac{2}{3}$-közelítő.*

Bizonyítás. Legyen M egy maximális méretű gyengén stabil párosítás. Belátandó, hogy $|N| \geq \frac{2}{3}|M|$. Tekintsük a $N \triangle M$ gráfot. Azt fogjuk megmutatni, hogy ez legalább $\frac{2}{3}$-szor több N-beli élt tartalmaz, mint M-belit. Mivel N is és M is független élekből áll, tehát csak egyfokú csúcsokat tartalmaz, ezért $N \triangle M$ bármely csúcsa legfeljebb 2 fokú. Így $N \triangle M$ csak alternáló utakból és körökből állhat.

- Ha egy komponens kör vagy páros hosszú út, akkor abban ugyan annyi N-beli él van, mint M-beli. (Alternáló kör csak páros számú élt tartalmazhat.)

- Ha egy komponens 5-nél hosszabb páratlan hosszú út, akkor abban van legalább $\frac{2}{3}$-szor annyi N-beli él, mint M-beli, még akkor is, ha M-beli éllel kezdődik és M-beli éllel végződik.

- Az egy N-beli élből álló egy hosszú utak és a két N-beli és egy M-beli élből álló három hosszú utak nyilvánvalóan több N-beli élt tartalmaznak, mint M-belit.

- Egy darab M-beli (m, w) élből álló út nem lehet $N\triangle M$-ben, mert az azt jelentené, hogy N-ben az m és a w csúcs is izolált, tehát az (m, w) él blokkolná N-t, ami nem lehet, mert N stabil.

- Két M-beli és egy N-beli élből álló három hosszú $\{(m_1, w_1), (w_1, m_2), (m_2, w_2)\}$ út sem létezhet. Egy ilyen útban az (w_1, m_2) él N'-beli másolata nem lehet $x(w_1, m_2)$, mert akkor a $z(m_1, w_1)$ él blokkolná N'-t. Hasonlóan, az (w_1, m_2) él N'-beli másolata nem lehet $z(w_1, m_2)$, mert akkor az $x(m_2, w_2)$ él blokkolna. Tehát az (w_1, m_2) él N'-beli másolata $y(w_1, m_2)$.
  $m_2 >_{w_1} m_1$, mert $m_2 \gtrsim_{w_1} m_1$, ha pedig $m_2 \sim_{w_1} m_1$ lenne, akkor $z(m_1, w_1)$ blokkolna N'-ben. Hasonlóan, $w_1 >_{m_2} w_2$, mert $w_1 \gtrsim_{m_2} w_2$, ha pedig $w_1 \sim_{m_2} w_2$ lenne, akkor $x(m_2, w_2)$ blokkolna.
  Tehát (w_1, m_2) blokkolja M-et, ami ellentmondás.

Ezzel beláttuk, hogy $N\triangle M$ bármely komponensében legalább $\frac{2}{3}$-szor több N-beli él van, mint M-beli, így az egész $N\triangle M$ gráfban is. $\square$

2. fejezet

Egyoldali népszerű párosítások

Előfordul, hogy nem embereket szeretnénk egymáshoz párosítani, hanem embereket és tárgyakat/élettelen dolgokat. Például, amikor szeretnénk munkavállalókat egyes pozíciókba vagy műszakokba beosztani, esetleg embereket különböző szobákban elszállásolni.

Tehát a következőkben olyan feldatot nézünk, ahol csak az egyik pontosztálynak vannak preferenciái.

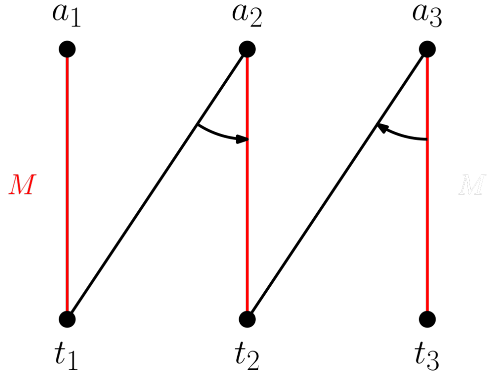
Adott egy $G = (A, B, E)$ $n_A + n_B$ csúcsú páros gráf. Ebben a fejezetben A elemeit embereknek/ügynököknek, B elemeit tárgyaknak fogjuk hívni. Most szigorú preferenciákat definiálunk, és csak az emberekre.

- $\forall a_i \in A$ ember preferenciáját jelölje $>_{a_i}$: $t_{j_1} > t_{j_2} > ... > t_{j_k}$, ahol $\forall j : t_j \in E(a_i), |E(a_i)| = k$

Ebben az esetben nem stabil párosításokat fogunk keresni, hiszen nem fordulhat elő kölcsönös preferencia. Helyette definiáljuk a párosítások egy új tulajdonságát.

2.0.1. Definíció. Adott G = (A, B, E) gráf és az emberek adott preferenciái esetén az $M \subseteq E$ párosítást népszerűnek nevezzük, ha nem létezik olyan párosítás, amelyben szigorúan több ember jár jobban, mint rosszabbul, azaz $\nexists M' \subseteq E : |\{a \in A : M'(a) >_a M(a)\}| > |\{a \in A : M(a) >_a M'(a)\}|$

Ha több olyan a csúcs van, amely az M párosításban jobban kedvelt tárgyat kap, mint M'-ben, akkor M népszerűbb, mint M', más szóval M dominálja M'-t.

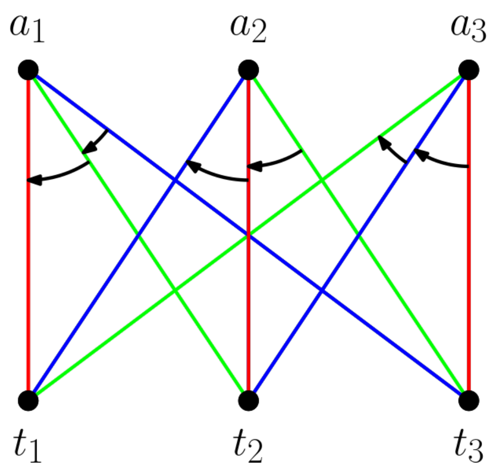


2.1. ábra. Példa egyoldali népszerű párosításra.

2.1. Létezés szükséges és elégséges feltételei

2.1.1. Állítás. *Nem mindig létezik népszerű párosítás.*

Bizonyítás. Egy egyszerű ellenpélda a következő:



$A = \{a_1, a_2, a_3\}$

$B = \{t_1, t_2, t_3\}$

$>_{a_1}, >_{a_2}, >_{a_3}$: $t_1 > t_2 > t_3$

2.2. ábra

Minden embernek ugyanaz a preferenciája. Bármely lehetséges párosításban pontosan egy ügynök fogja megkapni a legkedveltebb tárgyat, egy a második legkedveltebbet, és egy a harmadik legkedveltebbet. Legyen egy M párosítás $\{(a_i, t_1), (a_j, t_2), (a_k, t_3)\}$. Ez nem lehet népszerű, mert $\forall i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ páronként különbözö indexek esetén az $M' = \{(a_i, t_3), (a_j, t_1), (a_k, t_2)\}$ párosításban több ember jár jobban, mint ahány rosszabbul: a_j és a_k jobb tárgyat kap: $M'(a_j) >_{a_j} M(a_j), M'(a_k) >_{a_k} M(a_k)$; a_i pedig rosszabbat: $M'(a_i) <_{a_i} M(a_i)$. □

A célunk tehát elsősorban eldönteni, hogy létezik-e népszerű párosítás. Ehhez fogunk szükséges és elésgséges feltételeket megfogalmazni.

Először vezessünk be egy fogalmat/jelölést, hogy könnyebben tárgyalhassuk a témát.

2.1.1. Definíció. Legyen az $a \in A$ által legkedveltebb tárgy $f(a)$, és $l(a)$ az a által legkedveltebb olyan tárgy, ami egyik másik $b \in A$ embernek sem a legjobban kedvelt tárgya.

Annak érdekében, hogy bármely a emberre létezzen az $l(a)$ tárgy, berakunk B-be $|A|$ db fantom tárgyat, melyek mindegyike pontosan egy ember preferenciájában szerepel, méghozzá az utolsó helyen. Ez nem fogja befolyásolni az algoritmus működését. Amikor egy a ember párja egy párosításban $l(a)$, az csak annak felel meg, hogy nincs párja.

$f(a)$-t a első tárgyának, $l(a)$-t az utolsó tárgyának fogjuk hívni. Egy t tárgyat első tárgynak fogjuk hívni, ha létezik a, amire $t = f(a)$, és utolsó tárgynak, ha létezik a, amire $t = l(a)$.

Két szükséges feltételt is megfogalmazhatunk [3] (Lemma 7.1).

2.1.2. Állítás. *Ha egy M párosítás népszerű, akkor $\forall a \in A$ ember tárgya $f(a)$ vagy $l(a)$.*

Bizonyítás.

I. Tegyük fel, hogy az M népszerű párosításban az a ember párja a t tárgy, ahol $t <_a l(a)$.

- Ha $l(a)$-t nem kapta meg senki, akkor az

$$M' = (M \setminus \{(a,t)\}) \cup \{(a, l(a))\}$$

párosítás dominálja M-et, hisz a-nak jobb párja van M'-ben, bármely más csúcsnak meg ugyan az, mint M-ben.

- Ha $l(a)$ egy b csúcs párja az M-ben, és $f(b)$ nem párja senkinek, akkor az

$$M' = (M \setminus \{(a,t), (b, l(a))\}) \cup \{(a, l(a)), (b, f(b))\}$$

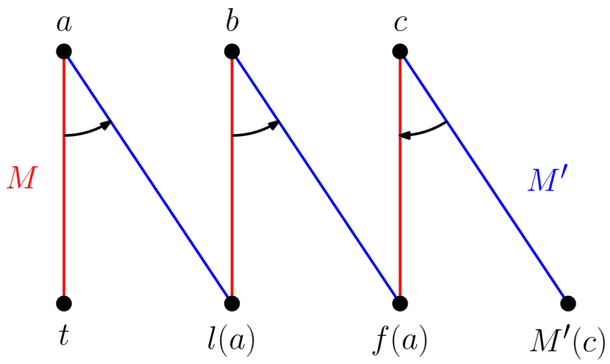
párosítás dominálja M-et, mert definíció szerint $f(b) >_b l(a)$, így a és b jobban jár M'-ben, a többi csúcs ugyan úgy, mint M-ben.

- Ha $f(b)$ egy c csúcs párja az M-ben, akkor az

$$M' = (M \setminus \{(a,t), (b, l(a)), (c, f(b))\}) \cup \{(a, l(a)), (b, f(b)), (c, M'(c))\}$$

párosítás dominálja M-et, mert hasonlóan, a és b jobban jár M'-ben, c legrosszabb esetben rosszabbul, a többi csúcs ugyan úgy, mint M-ben.

Minden esetben ellentmondásra jutunk, mert M feltevés szerint népszerű.



2.3. ábra

II. Tegyük fel, hogy az M népszerű párosításban az a ember párja a t tárgy, ahol $l(a) <_a t <_a f(a)$.

- Mivel a jobban kedveli t-t, mint $l(a)$-t, ezért definíció szerint $t = f(b)$ valamely b csúcsra. Ha $f(a)$-nak nincs párja, akkor az

$$M' = (M \setminus \{(a,t),(b,M(b))\}) \cup \{(a,f(a)),(b,t)\}$$

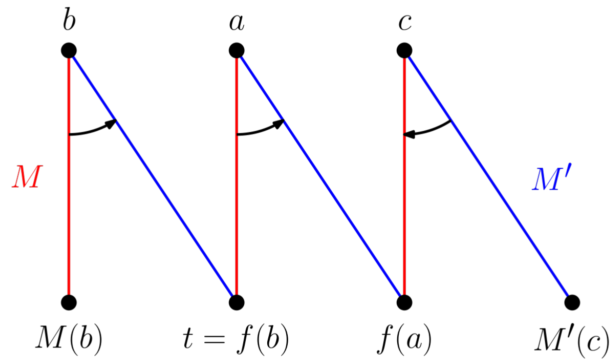
párosítás dominálja M-et, mert a és b jobban jár M'-ben, a többi csúcs ugyan úgy, mint M-ben.

- Ha $f(a)$ egy c csúcs párja M-ben, akkor az

$$M' = (M \setminus \{(a,t),(b,M(b)),(c,f(a)\}) \cup \{(a,f(a)),(b,t),(c,M'(c))\}$$

párosítás dominálja M-et, mert hasonlóan, a és b jobban jár M'-ben, c legrosszabb esetben rosszabbul, a többi csúcs meg ugyanúgy, mint M-ben.

Ezekben az esetekben is ellentmondásra jutottunk, mert M feltevés szerint népszerű.



2.4. ábra

□

2.1.3. Állítás. *Ha egy M párosítás népszerű, akkor $\forall t$ első tárgynak van párja, és olyan $a \in A$ ember, melyre $t = f(a)$.*

Bizonyítás.

I. Tegyük fel, hogy van olyan t tárgy, amely valamilyen a embernek az első tárgya, de nincs gazdája. Ekkor az

$$M' = M \setminus \{(a,M(a))\} \cup \{(a,t)\}$$

párosítás dominálja M-et.

II. Tegyük fel, hogy $f(a)$-nak van párja, de nem a az, hanem egy másik b ember.

- Ha $f(b)$-nek nincs párja, akkor az

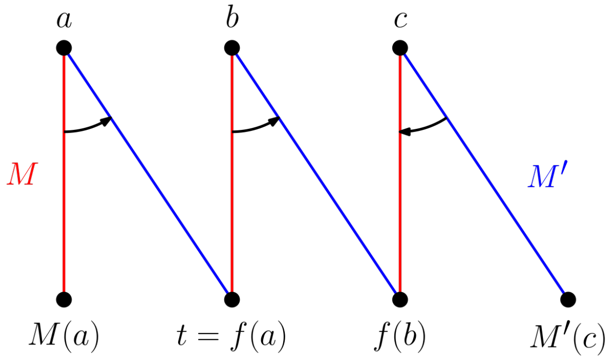
$$M' = (M \setminus \{(a, M(a)), (b, f(a))\}) \cup \{(a, f(a)), (b, f(b))\}$$

párosítás dominálja M-et, mert a és b jobban jár M'-ben.

- Ha $f(b)$-nek van egy c párja, akkor az

$$M' = (M \setminus \{(a, M(a)), (b, f(a)), (c, f(b))\}) \cup \{(a, f(a)), (b, f(b)), (c, M'(c)\}$$

párosítás dominálja M-et, mert a és b jobban jár M'-ben, c legrosszabb esetben rosszabbul, a többi ugyan úgy, mint M-ben.



2.5. ábra

$\square$

A következő állítás kimondja, hogy az imént megfogalmazott két szükséges feltétel együtt elégséges feltételt alkotnak [3] (Lemma 7.1).

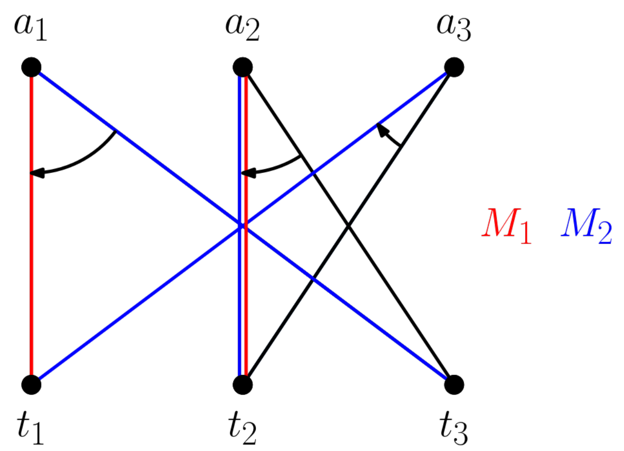
2.1.4. Állítás. *Ha létezik olyan M párosítás, amelyben $\forall a \in A$ ember párja az első vagy az utolsó tárgya, és $\forall t \in B$ első tárgynak van párja, és olyan $a \in A$ ember, akire $t = f(a)$, akkor M népszerű.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik egy a tételben jellemzett M párosítás. Megmutatjuk, hogy nem létezhet olyan M' párosítás, ami népszerűbb, mint M. Legfeljebb azok az a emberek járhatnak jobban M'-ben, akiknek $l(a)$ a párja M-ben. Definíció szerint egy ilyen a ember csak akkor kaphat jobb párt, ha megkapja egy olyan b ember párját, akinek addig $f(b)$ volt a párja, amit követően b biztosan rosszabb párt kap. Bármely az M'-ben jobban járó a emberre jut egy olyan b ember, aki rosszabbul jár M'-ben, így M' nem dominálhatja M-et. $\square$

2.2. Maximális méretű népszerű párosítás keresése

2.2.1. Állítás. *Létezhet több, különböző méretű népszerű párosítás.*

Bizonyítás. Tekintsük az alábbi példát:



$A = \{a_1, a_2, a_3\}$

$B = \{t_1, t_2, t_3\}$

$a_1 : t_1 > t_3$

$a_2 : t_2 > t_3$

$a_3 : t_1 > t_2$

$M_1 = \{(a_1, t_1), (a_2, t_2)\}$

$M_2 = \{(a_1, t_3), (a_2, t_2), (a_3, t_1)\}$

2.6. ábra

Ekkor $t_1 = f(a_1) = f(a_3), t_2 = f(a_2), t_3 = f(a_1) = f(a_2)$, és $l(3)$ fantom tárgy. Így M_1-re és M_2-re is teljesül a 2.1.4 állításban megfogalmazott feltétel, tehát M_1 és M_2 is népszerű. Ugyanakkor $|M_1| < |M_2|$. □

A következőkben pedig nézzünk meg egy algoritmust, amellyel található népszerű párosítás, méghozzá olyan, amely tartalmazásra is maxiális [3] (7.2.4. fejezet).

2.2.1. Algoritmus. A következőképpen konstruáljuk meg a G' gráfot:

1. Vegyük be a tárgyak halmazába a $d_1, d_2, ..., d_n$ fantom tárgyakat.

2. Töröljünk bármely olyan (a, t) élt, amelyre t nem első vagy utolsó tárgy.

3. Súlyozzuk meg az éleket a következő módon:

$$w(a,t) = \begin{cases} 1, & t \notin \{d_1, d_2, ..., d_n\} \\ 0, & t \in \{d_1, d_2, ..., d_n\} \end{cases}$$

4. Ebben a súlyozott páros gráfban keressünk olyan maximális súlyú párosítást, amely $\forall a \in A$ embert és bármely első tárgyat fed, például Egerváry algoritmusának segítségével. Ez legyen M'. Ebből vegyük ki azokat az (a, t) éleket, amelyekre t fantom tárgy. Ez legyen M.

Futásidő. A G' gráf élszámban lineáris méretű, ami felülbecsülhető $O(n^2)$-vel. Maximális súlyú párosítás keresése is csúcsszámban polinomiális, így az algoritmus futásideje $O(p(n))$.

Megjegyzés. Az alábbi súlyozás segítségével eldönthető, hogy egy minden embert fedő $\hat{M}$ párosításra $E(G) \cap \hat{M} = M$ népszerű-e:

$$w(a,t) = \begin{cases} K >> 0, & t = f(a) \\ 1, & t = l(a) \\ 0, & t \in \{d_1, d_2, ..., d_n\}, \end{cases}$$

ahol K egy nagy pozitív valós szám. Legyen l az első tárgyak száma. Ekkor $\hat{M}$ súlya $\leq lK \iff$ M népszerű.

Ha M népszerű, akkor M-ben bármely első tárgynak van párja, ezért $\hat{M}$ súlya legalább lK. Ha $\hat{M}$ súlya legalább lK, akkor az csak úgy lehet, ha bármely első tárgynak van párja, feltéve hogy K elég nagy.

2.2.2. Állítás (Az algoritmus helyessége)**.**

I. Ha az algoritmus talál megfelelő maximális súlyú M' párosítást, akkor az ad egy M népszerű párosítást az eredeti feladatban, és az maximális méretű.

II. Ha nincs ilyen M' párosítás, akkor nincs népszerű párosítás.

Megjegyzés. A két állítás együtt egy ekvivalenciát fogalmaz meg: G-ben $\exists M$ népszerű párosítás $\iff$ G'-ben $\exists M'$ minden szükséges csúcsot fedő párosítás.

Bizonyítás.

I. (a) Ha $\exists M'$, amelyben bármely ember le van fedve, akkor $\exists M$, amelyben bármely a ember $f(a)$-t vagy $l(a)$-t kapta, hiszen csak olyan (a,t) éleket hagytunk benne G'-ben, amelyekre $t = f(a)$ vagy $t = l(a)$.

(b) Ha $\exists M'$, amelyben bármely első tárgy le van fedve, akkor $\exists M$, amelyben ez szintén teljesül, és bármely első tárgy olyan párt kapott, akinek az az első tárgya, mert ha nem olyat kapott volna, akkor az annak az utolsó tárgya lenne, mert más tárgyból nem vezet hozzá él, ami viszont ellentmondás, mert egy utolsó tárgy nem lehet egyik ember első tárgya sem.

Ha M' maximális súlyú, akkor M maximális méretű, hiszen M' a lehető legtöbb olyan élt tartalmazza, ami nem ember és fantom tárgy között vezet, azaz amely az M-ben is szerepel.

II. G' megkonstruálásakor csak azokat az éleket hagytuk meg, amik egy népszerű párosításban benne lehetnek. Ha nem létezik M', az pontosan azt jelenti, hogy nincs olyan párosítás, amelyben bármely ember az első vagy az utolsó tárgyát kapta, bármely első tárgy kapott párt, és ezáltal bármely első tárgy olyan párt kapott, akinek az az első tárgya, a 2.1.3 tétel szerint.

□

3. fejezet

Kétoldali népszerű párosítások

A következőkben visszatérünk a fiúk és lányok esetéhez, vagyis mindkét pontosztálynak lesznek preferenciái, és úgy fogunk népszerű párosítást kereseni [3] (7.6. fejezet).

3.0.1. Definíció. Adott G = (A,B,E) gráf és adott preferenciák esetén az $M \subseteq E$ párosítást (kétoldali) népszerűnek nevezzük, ha $\nexists M' \subseteq E : |\{v \in V : M'(v) >_v M(v)\}| > |\{v \in V : M(v) >_v M'(v)\}|$

3.1. Létezés elégséges feltétle

A stabilitás fogalmának segítségével egy elégséges feltételt itt is megfogalmazhatunk. Ráadásul ez a feltétel nem csak páros, hanem tetszőleges gráfok esetén elégséges is. Továbbra is minden csúcs preferenciáját a szomszédai között állítjuk fel. Annyi a különbség, hogy egy csúcsnak bármely más csúcs lehet szomszédja.

3.1.1. Tétel. *Tetszőleges gráfban, ha egy M párosítás stabil, akkor népszerű.*

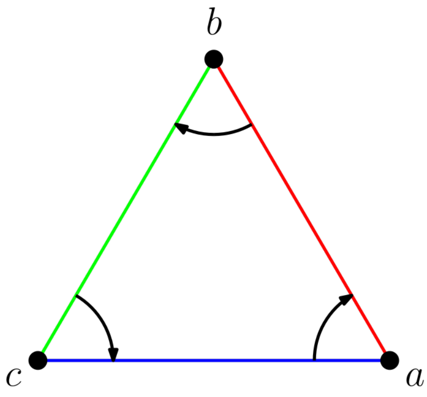
Bizonyítás. Belátjuk, hogy bármely M-től különböző N párosítás sem lehet népszerűbb, mint M, ha M stabil. Tekintsük azon h csúcsoknak a H halmazát, amelyek jobban járnak az N párosításban, mint M-ben. Ezek között a csúcsok között nem mehet N-beli él, mert akkor az egy M-et blokkoló él lenne. Ugyanakkor, mivel bármely H-beli csúcs jobban jár N-ben, azok mindegyikéből vezet egy él valamely H-n kívüli csúcsba, és mivel N párosítás, diszjunk csúcsokba. Ezen H(h) csúcsok mindegyike kevésbé kedveli h-t, mert a H(h) csúcsok is más párt kapnak N-ben, mint M-ben, a preferenciák pedig szigorúak. Így bármely N párosításban legalább annyi rosszabbul járó csúcs van, mint jobban járó, tehát N nem lehet népszerűbb, ami ellentmondás. □

Ebből azonnal következik, hogy páros gráfok esetén mindig létezik népszerű párosítás, speciel a Gale-Shapley algorimus is mindig azt ad.

Az is megmutatható, hogy a stabil párosítások éppen a minimális méretű népszerűek.

3.1.2. Tétel. *Tetszőleges gráfban nem mindig létezik népszerű párosítás.*

Bizonyítás. Tekintsük az alábbi példát:



$V = \{a, b, c\}$

$>_a: b > c$

$>_b: c > a$

$>_c: a > b$

3.1. ábra

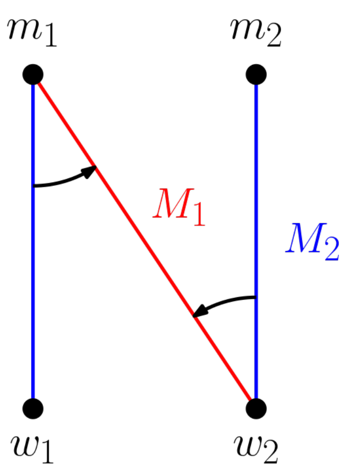
Összesen 3 darab párosítás létezik: {(a,b)},{(b,c)} és {(c,a)}, viszont {(b,c)} népszerűbb, mint {(a,b)}, {(c,a)} népszerűbb, mint {(b,c)}, és {(a,b)} népszerűbb, mint {(c,a)}. □

Megjegyzés. Bizonyítható, hogy annak eldöntése, hogy tetszőleges gráfban létezik-e népszerű párosítás NP-teljes. Ugyanakkor az már bizonyítottan eldönthető, hogy stabil párosítás létezik-e.

3.2. Maximális méretű kétoldali népszerű

3.2.1. Állítás. *Létezhet több, különböző méretű kétoldali népszerű párosítás, élszámban pedig akár kétszeres eltérés is lehet.*

Bizonyítás. Tekintsük az alábbi példát:



$A = \{m_1, m_2\}$

$B = \{w_1, w_2\}$

$>_{m_1}: w_2 > w_1$

$>_{w_2}: m_1 > m_2$

$M_1 = \{(m_1, w_2)\}$

$M_2 = \{(m_1, w_1), (m_2, w_2)\}$

3.2. ábra

Ekkor M_1 népszerű, mert m_1 és w_2 a lehető legjobb párt kapják, így bármely más párosításban legfeljebb kettő másik csúcs kaphat rosszabb párt. Hasonlóan M_2 is népszerű, mert w_1 és m_2 a lehető legjobb párt kapják. Ugyanakkor $|M_2| > |M_1|$, és $|M_2| = 2|M_1|$ $\square$

Itt is felmerülhet tehát az igény maximális méretű párosításra. Erre ad megoldást a következő algoritmus.

3.2.1. Algoritmus. Definiáljunk a feladathoz egy G' segédgráfot és új preferenciákat:

1. Ugyan azon a csúcshalmazon $\forall(m, w)$ él helyett két párhuzamos élt húzzunk be. Jelölje ezeket $x(m, w)$ és $y(m, w)$.

2. A preferencia-sorrendeket most csúcsok helyett éleken állítsuk fel. $\forall m \in A$ csúcs $>_m$: $w_1 > w_2 > ... > w_{m'}$ sorrendje a következőképpen módosul: először bármely i-re soroljuk fel az $x(m, w_i)$ éleket, majd bármely i-re az $y(m, w_i)$ éleket. Ezt az új sorrendet jelölje $>'_m$. Például:

$$>_m\colon w_1 > w_2 > w_3$$
$$\Downarrow$$
$$>'_m\colon x(m, w_1) > x(m, w_2) > x(m, w_3) > y(m, w_1) > y(m, w_2) > y(m, w_3)$$

3. Hasonlóan állítsuk fel $\forall w \in B$ csúcs $>_w$: $m_1 > m_2 > ... > m_{n'}$ sorrendje alapján az $>'_w$: $x(w, m_1) > x(w, m_2) > ... > x(w, m'_n) > y(w, m_1) > y(w, m_2) > ... > y(w, m_{n'})$ sorrendet. Ezt az új sorrendet jelölje $>'_w$. Például:

$$>_w\colon m_1 > m_2 > m_3$$
$$\Downarrow$$
$$>'_w\colon y(w, m_1) > y(w, m_2) > y(w, m_3) > x(w, m_1) > x(w, m_2) > x(w, m_3)$$

Futtassuk le a Gale-Shapley algoritmust ezen a segédgráfon az új preferenciákkal. Tekintsünk el attól, hogy a kapott M' párosítás élei milyen típusúak (x vagy y), és csak azt nézzük, hogy mik a végpontjaik. Ezt az M párosítást tekintsük az eredeti G gráfban.

Futásidő. A G' segédgráf most is élszámban lineáris időben megkonstruálható, és a Gale-Shapley algoritmus is lineáris idejű, így a fenti algoritmus futásideje is $O(|E|)$.

3.2.2. Állítás. *Az algoritmus által adott M párosítás népszerű.*

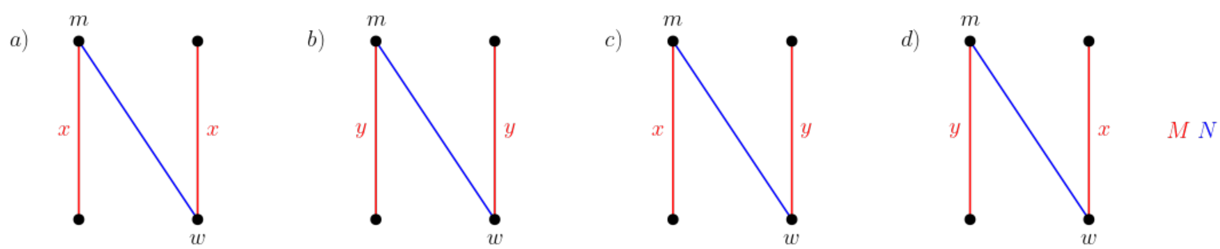
Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik egy N párosítás, ami népszerűbb, mint M. Tekintsük az $M \triangle N$ gráfot. Ez alternáló utakból és páros hosszú alternáló körökből áll. Meg fogjuk mutatni, hogy bármely komponensben legfeljebb a csúcsok fele jár jobban N-ben, mint M-ben.

(a) Ha egy $(m, w) \in N$ élre $(m, M'(m)) = x(m, E(m))$, és $(w, M'(w)) = x(w, E(w))$, akkor m és w közül legfeljebb az egyik járhat jobban N-ben, mint M-ben, mert ha m is és w is jobb párjai lennének egymásnak, akkor $x(m, w) >'_m x(m, E(m))$, és $x(m, w) >'_w x(w, E(w))$ teljesülne, így $x(m, w)$ blokkolná M'-t.

(b) Hasonlóan, ha egy $(m, w) \in N$ élre $(m, M'(m)) = y(m, E(m))$ és $(w, M'(w)) = y(w, M(w))$, akkor m és w közül legfeljebb az egyik járhat jobban N-ben, mint M-ben, különben $y(m, w)$ blokkolná M'-t.

(c) Ha egy $(m, w) \in N$ élre $(m, M'(m)) = x(m, M(m))$, és $(w, M'(w)) = y(w, M(w))$, akkor nem állíthatunk többet, mint hogy akár m is és w is, azaz két csúcs is jobban járhat N-ben, mint M-ben.

(d) Ha egy $(m, w) \in N$ élre $(m, M'(m)) = y(m, M(m))$, és $(w, M'(w)) = x(w, E(w))$, akkor m nem járhat jobban N-ben, mert ha $(m, w) >_m (m, M(m))$ teljesül, akkor $y(m, w) >'_m y(m, M(m))$, és mivel $y(m, w) >'_w (w, M(w))$, $y(m, w)$ blokkolná M'-t. Hasonlóan w sem járhat jobban N-ben, különben az $x(m, w)$ él blokkolná M'-t.



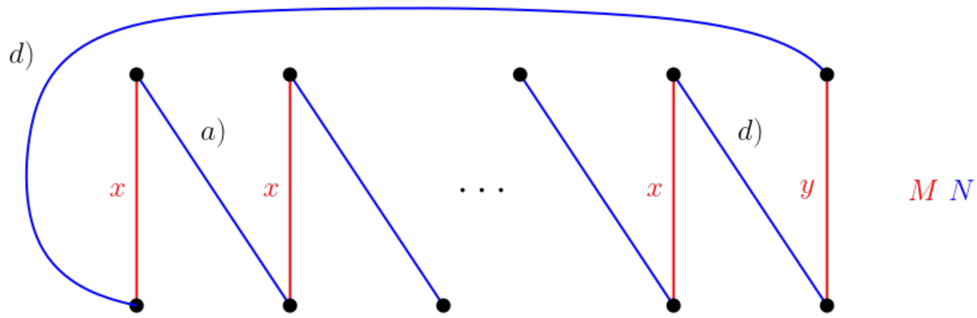
3.3. ábra

Most tekintsük a különféle komponenseket:

1. Kör:

    - Azon N-beli élek esetében, amikre az (a) vagy a (b) eset teljesül, a végpontok közül legfeljebb egy járhat jobban N-ben.
    - Azokból az N-beli élekből, amikre a (c) eset áll fenn, pontosan ugyan annyi van, mint azokból, amikre a (d) eset, így mindezen éleket tekintve, a végpontok legfeljebb fele járhat jobban N-ben.

    Tehát körben a csúcsok legfeljebb fele járhat jobban N-ben.

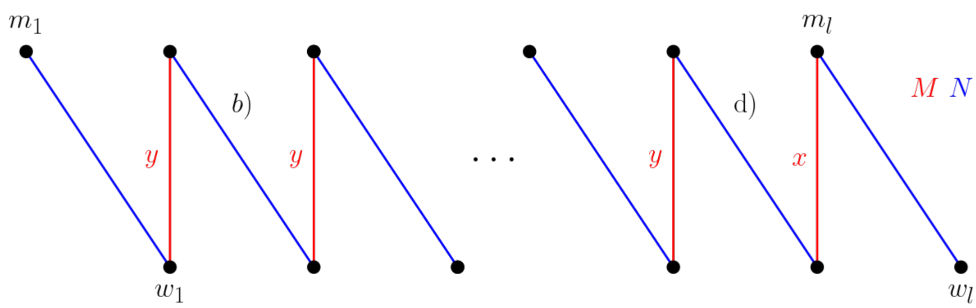


3.4. ábra

2. N-beli éllel kezdődő és végződő út:

   - Ha az út egy $(m_1, w_1) \in N$ éllel kezdődik, akkor $(w_1, M'(w_1)) = y(w_1, M(w_1))$, mert ha $x(w_1, M(w_1))$ lenne, akkor $y(m_1, w_1)$ blokkolná M'-t.
   - Hasonlóan, ha az út egy $(m_l, w_l) \in N$ éllel végződik, akkor $(m_l, M'(m_l)) = x(m_l, M(m_l))$.

   Az út két végén egy-egy olyan csúcs van, amely N-ben jár jobban, viszont az út belsejében pontosan eggyel több olyan N-beli él van, amire a (d) eset teljesül, mint olyan, amire a (c), tehát ilyen útban legfeljebb a csúcsok fele járhat jobban N-ben.



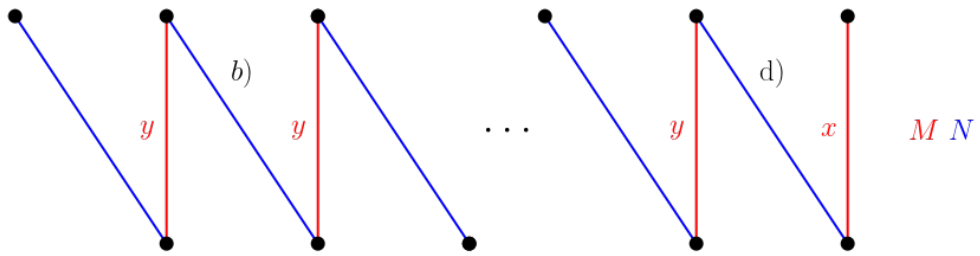
3.5. ábra

3. Az egyik végén N-beli, a másik végén M-beli éllel rendelkező út:

   - Ha az út N-beli éllel kezdődik, és M-belivel végződik, az út kezdőpontja biztosan N-ben jár jobban, mert M-ben izolált, a végpontja pedig biztosan M-ben, mert N-ben izolált.
     Az előző pontban láttuk, hogy az első élnek az y másolata került M'-be. Ugyanakkor attól függetlenül, hogy a út utolsó élének melyik másolata van M'-ben, legalább ugyan annyi, és legfeljebb eggyel több N-beli élnél fordulhat elő a (d) eset, mint a (c).

- Ha az út M-beli éllel kezdődik, és N-belivel végződik, az teljesen hasonló az előző esethez azzal a különbséggel, hogy felcserélődik az x és az y másolatok szerepe.

Tehát ilyen útban is legfeljebb a csúcsok fele kap jobb párt N-ben, mint M-ben.

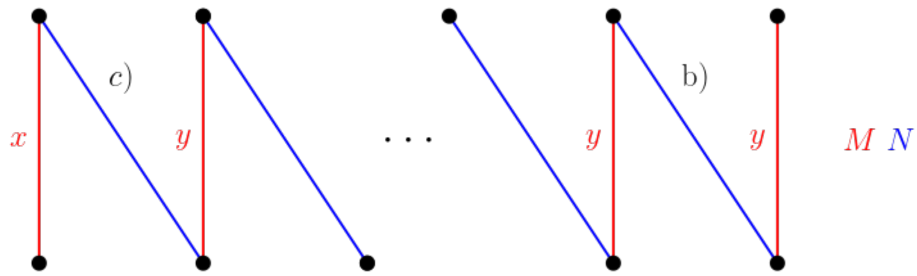


3.6. ábra

4. M-beli éllel kezdődő és végződő út:

   - A legkedvezőtlenebb esetben az első élnek az x másolata, az utolsónak pedig az y másolata van M'-ben, amikor is pontosan eggyel több N-beli élnél fordul elő a (c) eset, mint a (d), viszont az út két végpontja jobban jár M-ben, mert N-ben izoláltak.

   Ilyen útban is legfeljebb a csúcsok fele jár jobban N-ben.



3.7. ábra

Bármely komponensben legfeljebb a csúcsok fele kap jobb párt N-ben, mint M-ben, így az egész $M \triangle N$ gráfban és G-ben is, ezért N nem lehet népszerűbb, ami ellentmondás. $\square$

3.2.3. Állítás. *Az algoritmus által talált M párosítás maximális méretű a népszerűek között.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik egy szintén népszerű N párosítás, amely re $|N| > |M|$. Ekkor $M \triangle N$-ben létezik olyan komponens, amiben több N-beli él van, mint M-beli. Ez a komponens szükségszerűen egy N-beli éllel kezdődő és N-belivel végződő alternáló út. Legyen ez

$$\{(m_0, w_0), (w_0, m_1), (m_1, w_1), ..., (m_k, w_k), (w_k, m_{k+1}), (m_{k+1}, w_{k+1})\}.$$

A 3.2.2 állítás bizonyításában már láttuk, hogy egy ilyen útban a (w_0, m_1) élnek az y másolata, a (w_k, m_{k+1}) élnek pedig az x másolata szerepel M'-ben. Így a

$$\{(w_0, m_1), (m_1, w_1), ..., (m_k, w_k), (w_k, m_{k+1})\}$$

$2k$ csúcsú útban pontosan eggyel több olyan N-beli él van, amire a (d) eset áll fenn, mint olyan, amire a (c), így a $2k$ csúcsból legfejebb $k-1$ csúcs járhat jobban N-ben, mint M-ben.

Az is igaz, hogy $m_1 >_{w_0} m_0$, és $w_k >_{m_{k+1}} w_{k+1}$, különben $y(m_0, w_0)$ és $x(m_{k+1}, w_{k+1})$ blokkolnák M'-t. Ezért w_0 és m_{k+1} jobban járnak M-ben, mint N-ben.

m_0 és w_{k+1} jobban jár N-ben, mert M-ben izoláltak.

Tehát ebben a komponensben a $2k+4$ csúcsból legfeljebb $k-1+2 = k+1$ jár jobban N-ben, ami szigorúan kevesebb, mint $\frac{2k+4}{2} = k+2$, azaz a csúcsok össz száma.

$M \triangle N$ összes többi komponensében legalább annyi csúcs jár jobban M-ben, mint N-ben 3.2.2 bizonyítása alapján. Tehát az egész $M \triangle N$ gráfban is több csúcs jár jobban M-ben, mint N-ben, azaz M népszerűbb, mint N, ami ellentmondás, mert feltettük, hogy N szintén népszerű. Ez arra vezet, hogy nem igaz az sem, hogy létezik több N-beli, mint M-beli élt tartalmazó komponens, így az sem igaz, hogy $|N| > |M|$, ami ellentmondás. Tehát M maximális méretű népszerű párosítás. □

4. fejezet

Egy alkalmazás – Vesecsereprogram

Ez a fejezet Végh László, Király Tamás és Pap Júlia jegyzetének 4.4. fejezete [1] alapján készült.

A következőkben olyan betegeknek segítünk, akiknek veseátültetésre van szükségük. Feltehetően – ha szerencsés a helyzet –, az egyes betekegnek van már egy-egy donorjuk – családtag, ismerős –, akitől már biztosan kaphatnak vesét. Ugyanakkor az egyes donorok mindenkinek különböző mértékben felelhetnek meg, az is lehet, hogy egyáltalán nem.

Szeretnénk, hogy a páciensek minél jobb vesét kaphassanak. Tehetjük azt, hogy a betegekkel donorokat cseréltetünk, ezzel egymást, vagy legalább az egyiküket jobb szervhez juttatva. Nem csak párok cserélhetnek egymással, hanem egy többfős csoport tagjai is körbecserélgethetik egymás donorjait valamilyen kör mentén.

Modellezzük tehát a feladatot egy $\overrightarrow{G}(V, \overrightarrow{E})$ irányított gráffal, ahol a csúcsok reprezentálják a betegeket, a v csúcsból w-be pedig akkor megy él, ha v számára megfelel w donorja. Hurokéleket is megengedünk, hisz a betegeknek a saját donorjuk is lehet alkalmas. Továbbá jelölje $\overrightarrow{E}(v)$ v ki-szomszédjait, és minden v betegnek definiáljunk egy szigorú preferencia-sorrendet $\overrightarrow{E}(v)$-n, azaz a neki alkalmas donorok között.

- $\forall v_i \in V$ preferenciáját jelölje $\gtrsim_{v_i}$: $v_{i_1} \gtrsim v_{i_2} \gtrsim \ldots \gtrsim v_{i_k}$, ahol $\forall i : v_i \in \overrightarrow{E}(v_i) \subseteq V, |\overrightarrow{E}(v_i)| = k$

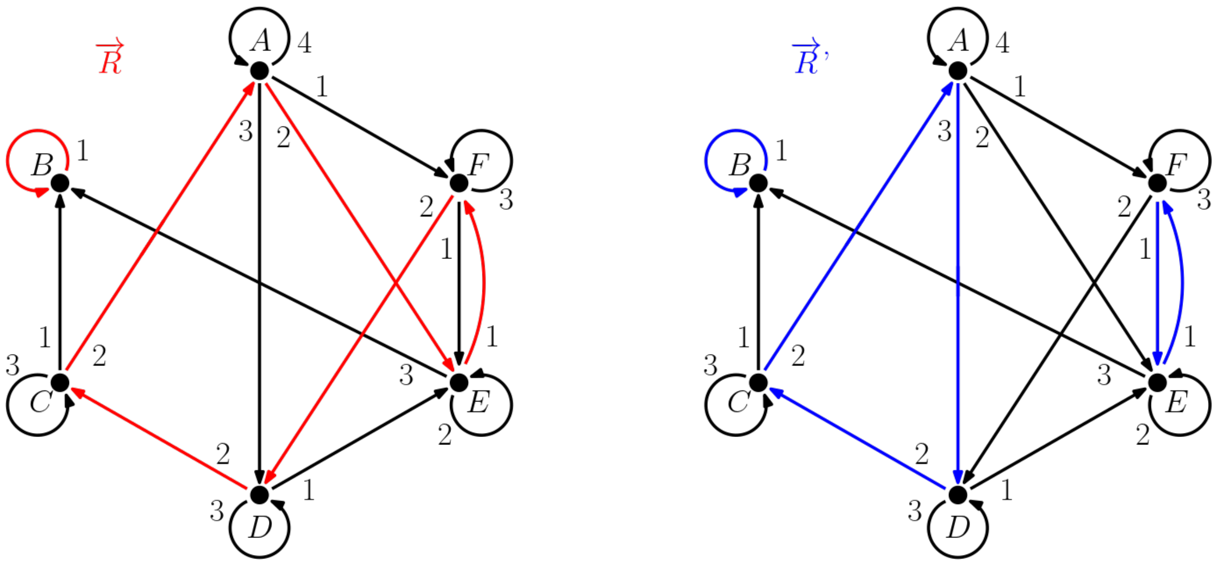
Amit keresünk, az a donoroknak egy olyan újraelosztása, ami bizonyos értelemben minenkinek jó, vagy legalábbis senkinek sem rosszabb. Az elosztásokat irányított élek olyan $\overrightarrow{R}$ halmazaival reprezentálhatjuk, ahol bármely csúcs kifoka és befoka 1 (ki kinek a donorját kapja meg/ki kinek ad donort). Ezek a halmazok diszjunkt irányított körökből fognak állni. Azt, hogy egy $\overrightarrow{R}$ elosztásban egy v beteg melyik beteg donorját kapja, jelölje $\overrightarrow{R}(v)$. $\overrightarrow{R}(v)$ lehet maga v is.

Tehát, lényegében most is az a célunk, hogy olyan élhalmazt keressünk, ami közkedvelt. Ezt a közkedveltséget jelen esetben is úgynevezett blokkoló csúcshalmazok/élhalmazok hiányával fogjuk definiálni.

4.0.1. Definíció. Adott egy $\overrightarrow{G}(V, \overrightarrow{E})$ irányított gráf és bármely $v \in V$ csúcsra egy preferencia $\overrightarrow{E}(v)$ elemein. A csúcsoknak egy $S \subseteq V$ halmaza blokkoló koalíció az $\overrightarrow{R} \subseteq \overrightarrow{E}$ elosztásra nézve, ha létezik olyan $\overrightarrow{R}'$ elosztás, hogy $\forall v \in S$ csúcsra $\overrightarrow{R}'(v) \in S$, és $\forall v \in S$ csúcsra $\overrightarrow{R}'(v) \gtrsim_v \overrightarrow{R}(v)$, és legalább egy $v \in S$ csúcsra $\overrightarrow{R}'(v) >_v \overrightarrow{R}(v)$.

Az, hogy a betegeknek egy halmaza blokkoló koalíció egy elosztásra, azt jelenti, hogy ha az kiválna, a tagjai egymás között meg tudnák cserélgetni a donorjaikat úgy, hogy legalább az egyikük szigorúan jobban járjon, mint az eredeti elosztásban, miközben senki sem jár rosszabbul.

4.0.2. Definíció. Egy elosztás közkedvelt, ha nem létezik rá nézve blokkoló koalíció.



4.1. ábra. Példa blokkoló koalícióra és közkedvelt elosztásra. A preferenciák az élekre írt számokkal vannak jelezve. $\overrightarrow{R}$ nem közkedvelt elosztás, mert $\{E, F\}$ blokkoló koalíció, hisz $\overrightarrow{R}'$-ben egymás között cserélnek, senki sem jár rosszabbul, de legalább F szigorúan jobb donort kap. $\overrightarrow{R}'$ közkedvelt elosztás.

A feladat egyrészt úgy kapcsolódik a stabil párosításokhoz, hogy itt is minden résztvevő preferenciáját figyelembe véve akarunk stabil megoldást keresni, csak itt körökkel, nem pedig élekkel fedve. Abban az esetben viszont, ha csak 2 hosszú körbeadásokat engedünk meg a vesecsereprogramban (sok országban ez a bevett), akkor a feladat könnyen visszavezethető egy stabil párosítás keresésére.

A következőben legyenek a betegeknek szigorú preferenciáik. Az alábbi algoritmussal találhatunk közkedvelt elosztást, azaz olyat, amire nem létezik blokkoló koalíció.

4.0.1. Algoritmus (Felső körcsere)**.**

- Legyen a $\overrightarrow{G_1}$ gráf G-nek azon változata, amiben csak akkor megy v-ból w-be él, ha v számára w donorja a legmegfelelőbb. Ez egy olyan gráf, amiben bármely csúcs kifoka egy, ezért biztosan létezik legalább egy irányított kör, ha pedig több van, akkor azok diszjunktak. A hurokélek is irányított köröknek számítanak. Ezen körök csúcsainak halmaza legyen V_1.
- A V_1-beli csúcsoknak adjuk oda a ki-szomszédjuk donorját. Ezzel elkezdünk összeállítani egy elosztást.

- Töröljük $\overrightarrow{G_1}$-ből a V_1-beli csúcsokat, és definiáljuk újra az éleket: Bármely $v \in V \setminus V_1$ csúcsból abba a $w \in V \setminus V_1$ csúcsba menjen él, amelynek a donorja v számára a legmegfelelőbb. Ez a gráf legyen $\overrightarrow{G_2}$.

- A j-edik lépésben töröljük G_{j-1}-ből a V_{j-1}-beli csúcsokat, és húzzuk újra az éleket a $V \setminus \bigcup_{l=1}^{j-1} V_l$-beli csúcsok között, ezzel definiálva G_j-t, és a V_j csúcshalmazt.

Ezzel megkapjuk $\overrightarrow{E}(\overrightarrow{G})$-nek egy diszjunk körökből álló részhalmazát. Ez lesz az $\overrightarrow{R}$ elosztásunk.

Futásidő. Az algoritmus során legfeljebb $|V|$ lépést teszünk, és minden lépésben legfeljebb $|V|$ új élt kell definiálnunk, ami csúcsonként igényel egy maximum keresést legfeljebb az összes csúcson, tehát a futásidőre egy felső becslés $O(|V|^3)$.

Be fogjuk látni, hogy az algoritmus által talált R elosztás közkedvelt, sőt, ez az egyetlen létező közkedvelt elosztás.

4.0.1. Tétel. *Pontosan egy olyan elosztás létezik, ami közkedvelt, az pedig az az elosztás, amelyet a felső körcsere algoritmus megtalál.*

Bizonyítás.

I. Közkedveltség

Tegyük fel, hogy az algoritmus által adott $\overrightarrow{R}$ elosztás nem közkedvelt, azaz hogy létezik $\overrightarrow{R}$-re nézve blokkoló koalíció. Legyen S a blokkoló koalíciók közül a legkisebb méretű, és legyen $\overrightarrow{R}'$ az az elosztás, ami miatt S blokkoló. Legyen j a legkisebb olyan index, amelyre $S \cap V_j \neq \emptyset$. Legyen $C \subseteq V_j$ egy olyan kör V_j-ben, amelyre $C \cap S \neq \emptyset$. Ha $C \setminus S \neq \emptyset$, akkor létezik $v \in C \cap S$ és $w \in C \setminus S$, hogy $\overrightarrow{(v,w)}$ egy él $\overrightarrow{G_j}$-ben. Ekkor $\overrightarrow{R}(v) >_v \overrightarrow{R}'(v)$, mert $\overrightarrow{R}(v) = w$ és $\forall w \in S$ esetén $w >_v w'$. Ebből következik, hogy $C \subseteq S$. Az is látható, hogy $\overrightarrow{R}(v) = \overrightarrow{R}'(v)$ $\forall v \in C$ esetén, vagyis $S \setminus C$ is blokkoló koalícó, ami ellentmondás, mert S feltevés szerint minimális. Tehát $\overrightarrow{R}$ közkedvelt.

II. Egyértelműség

Tegyük fel, hogy létezik egy R' elosztás, ami szintén közkedvelt. A V_1-beli betegek mind a legjobb donort kapták meg. Ha egy $v \in V_1$ beteg $\overrightarrow{R}'$-ben nem V_1-beli beteg donorját kapta, akkor egy $V \setminus V_1$-beliét, amely biztosan rosszabb, mint amelyet $\overrightarrow{R}$-ben kapott, ezért V_1 blokkoló koalíció $\overrightarrow{R}'$-re, ami ellentmondás, tehát a V_1-beli betegek donorjait $\overrightarrow{R}'$ szintén V_1 betegei között osztja el.

V_2-beli betegek mind a legjobb olyan donort kapták, ami nem V_1-beli betegé. Bármely $w \in V \setminus (V_1 \cup V_2)$ beteg donorja rosszabb bármely $v \in V_2$ betegnek. Az előzőhöz hasonló érveléssel látható, hogy $\overrightarrow{R}'$ V_2 betegeinek is mind V_2-beli betegek donorját osztja ki.

Ezt folytatva látható, hogy $\overrightarrow{R}$ megegyezik $\overrightarrow{R}'$-vel, ezért csak egyetlen közkedvelt elosztás létezhet.

$\square$

Ebből következik, hogy közkedvelt elosztás mindig létezik, és egyértelmű.

Irodalomjegyzék

[1] Végh László - Király Tamás - Pap Júlia: Játékelmélet jegyzet, 2023. május 25.
https://tkiraly.web.elte.hu/students/jatekelmelet_jegyzet.pdf

[2] Bahar Rastegari (University of Bristol): Stable Matchings: in Theory and in Practice, EASSS 2018
EASSS_Tutorial.Stable_Matchings.Web_.pdf

[3] David F. Manlove (University of Glasgow): ALGORITHMICS OF MATCHING UNDER PREFERENCES, 2013
ALGORITHMICS OF MATCHING UNDER PREFERENCES

[4] D. Gale and L. S. Shapley: College Admissions and the Stability of Marriage (The American Mathematical Monthly, Vol. 69, No. 1 (Jan., 1962), pp. 9-15)
https://www.eecs.harvard.edu/cs286r/courses/fall09/papers/galeshapley.pdf

[5] Ulle Endriss (ed.): Trends in Computational Social Choice, AI Access, 2017.- Chapter 6: Ágnes Cseh: Popular Matchings
Chapter 6: Ágnes Cseh: Popular Matchings

[6] J. D. Horton, K. Kilakos: Minimum Edge Dominating Sets
Minimum Edge Dominating Sets