NYILATKOZAT

Név: Szirmai Vilmos Andor

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: Z954HX

Szakdolgozat címe:
Nyeregpontok és keresési módszereik

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2023.06.05.

Szirmai Vilmos

a hallgató aláírása

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Analízis Tanszék

Nyeregpontok és keresési módszereik

Témavezető:
Sigray István
Analízis Tanszék

Szerző:
Szirmai Vilmos Andor
Matematika BSc

Budapest, 2023

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani a témavezetőmnek, Sigray Istvánnak, hogy a probléma felvetésével meghozta az érdeklődésemet, és hogy ötleteivel, meglátásaival segített a szakdolgozat megírása során.

Továbbá szeretném megköszönni családomnak és barátaimnak a támogatásukat, mellyel az elmúlt hónapokban fordultak felém.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

1.1. Bevezetés

Tegyük fel, hogy a következő szituációval állunk szemben: valakivel ütköztetni kell az érdekeinket, és nyilván mind a kettőnknek az lenne a célja, hogy a sajátja minél jobban érvényesüljön. Kérdés az, hogy van-e egyensúlyi állapot, amely akár egyfajta kompromisszumnak is tekinthető.

Ez vezet el minket szakdolgozatunk témájához, a nyeregpontokhoz. Kiindulási alapul a kétváltozós függvények fognak szolgálni, ezen belül is a legegyszerűbb nyereg, ami az $f(x, y) = x^2 - y^2$ függvény $(0, 0)$-beli kritikus pontja, erre még később kitérünk.
Fogalmazzuk is meg általánosan, hogy mik is azok a nyeregpontok. A definíciót n változóra mondjuk ki, de ennek a munkának a jelentős részében kétváltozós függvényekkel fogunk dolgozni. Ennek oka igen egyszerű: a kétváltozós függvényeket tudjuk ábrázolni, így szemléletesebbé tehetjük vizsgálódásainkat. Továbbá a kétváltozós függvények nyeregpontjainak (egy bizonyos fajtájának) játékelméleti jelentése is van, erre majd a második fejezetben ki is térünk. Most pedig mondjuk ki a nyeregpontok matematikai definícióját.

1.1.1. Definíció: Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ tartomány, vagyis nyílt, összefüggő halmaz. Egy $f : D \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x \in D$ pontban nyeregpontja van, ha
$(\nabla f)(x) = \underline{0}$ és $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \mathrm{y}_\varepsilon, z_\varepsilon \in B(x, \varepsilon)$: $f(y_\varepsilon) > f(x)$ és $f(z_\varepsilon) < f(x)$. (Ahol ∇f az f függvény gradiens vektorát jelöli)

A definíció tulajdonképpen annyit fejez ki, hogy a függvénynek az adott pontban kritikus pontja van, de nincs lokális szélsőértéke.

Megjegyezzük továbbá, hogy a dolgozat további részében D mindig $\mathbb{R}^n$-beli tartományt jelöl.

A következő kérdés az, hogy hogyan lehet ilyen pontokat találni. Ismertetjük a legalapvetőbb módszert nyeregpontok megtalálására a fent említett példa függvényen. Ehhez azonban be kell vezetnünk még egy fogalmat, ez pedig a Hesse-mátrix.

1.1.2. Definíció: Egy $f : D \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x \in D$ pontban a **Hesse-mátrixa** a következő alakú mátrix: $a_{ij} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$. Ez tulajdonképpen a függvény második deriváltjának felel meg.

1.1.3. Tétel: Legyen $f : D \to \mathbb{R}$. Ha $(\nabla f)(x) = \underline{0}$ és az $x \in D$ pontban kiszámított $H(x)$ Hesse-mátrix:

I.) pozitív definit (minden sajátértéke pozitív) $\Rightarrow$ az f függvénynek az x pontban szigorú lokális minimuma van.

II.) negatív definit (minden sajátértéke negatív) $\Rightarrow$ az f függvénynek az x pontban szigorú lokális maximuma van.

III.) indefinit (van pozitív és negatív sajátértéke is) $\Rightarrow$ az f függvénynek az x pontban nyeregpontja van.

Fontos megemlítenünk, hogy ezen szakdolgozatban kizárólag kellően sokszor (legalább kétszer, vagy akár végtelenszer) differenciálható függvényekkel fogunk dolgozni. Ez azért lesz fontos, hogy a megfelelő vizsgálatokat el tudjuk végezni: meg tudjuk nézni, hogy hol $\underline{0}$ a gradiense, azután tudjunk második derivált próbát csinálni. Ha ezek is nulla értéket vesznek fel az adott kritikus pontban, vagy ha a Hesse mátrix szemidefinit, akkor további vizsgálatokra van szükség. Viszont így mindegyik vizsgált függvényre igaz lesz a Young-tétel, tehát a Hesse-mátrixunk minden esetben szimmetrikus lesz.

Mutassuk meg a fent említett tétel egy alkalmazását a példa függvényen keresztül!

1.1.4. Példa: $f(x, y) = x^2 - y^2$. Oldjuk meg először a következő egyenletrendszert: $(\nabla f)(x, y) = \underline{0}$ (hiszen ez valójában két egyenlet, csupán rövidebb alakban írtuk). Ehhez nem kell mást tennünk, mint kiszámítanunk f elsőrendű parciális deriváltjait: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2y$.

Tehát az egyenletrendszerünk:

$$2x = 0$$
$$-2y = 0$$

Ezt ránézésre is könnyen meg tudjuk oldani, és azt kapjuk, hogy $(x, y) = (0, 0)$. Számítsuk ki a tiszta és vegyes másodrendű parciális deriváltakat is, hogy fel tudjuk írni a Hesse-mátrixot: $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\, \partial x} = 0$, $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} = -2$.
Így a mátrixunk: $H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Az előző tételt felhasználva soroljuk be ezt a mátrixot valamelyik kategóriába. Mivel diagonális, így sajátértékei a diagonál elemek. Ezek közül az egyik pozitív, a másik negatív, így a mátrix indefinit, tehát f-nek a $(0, 0)$-ban valóban nyeregpontja van, ahogyan azt a dolgozat elején is említettük.

Ezt a pontot hívjuk klasszikus (ló) nyeregnek (angolul: horse saddle). Szakdolgozatunk további részében még meg fogunk ismerkedni számos más nyereggel, melyeknek struktúrája ennél bonyolultabb. A továbbiakban majd ismertetünk néhány numerikus algoritmust ezek megtalálására több esetben is: amikor úgynevezett extremális nyeregről van szó (a fent látott példához hasonlóan), és amikor bonyolultabb a helyzet, a másodrendű deriváltak is nullák etc. Ezekhez az eljárásokhoz természetesen Matlab kódok is tartoznak, melyek a Matlab online felületén, a Mathworks-ben futottak le. Maguk a kódok a függelékben lesznek megtalálhatók.
A második fejezetben ismertetjük a nyeregpontok általános elméletét, és többek közt bizonyítjuk az **1.1.1.** tételt a Hesse-mátrixok definitségéről. Ezután osztályozzuk a nyergeket olyan szempontból, hogy milyen kritikus pontokból állnak az egyes irányok mentén, és ez arra is választ fog adni, hogy miylen módszerrel lehet megtalálni őket.
Majd megvizsgáljuk közelebbről az úgynevezett harmonikus függvényeket komplex analísbeli eszközökkel. Definiáljuk a nyergek multiplicitását, melyről fontos megjegyezni, hogy tulajdonképpen csak egy ebben a munkában szereplő fogalom, viszont ki fogunk mondani vele kapcsolatban egy tételt, így definiálása elengedhetetlen.
Ezen túlmenően megnézünk egy módosító eljárást annak érdekében, hogy a vizsgált nyergünk eleget tegyen azon feltételeknek, melyek mellett a második fejezetben ismertetendő algoritmus meg tudja találni.
Most pedig menjünk is tovább a nyeregpontok általános elméletére!

2. fejezet

2.1. A nyeregpontok általános elméletéről

A többváltozós függvények elméletében sok olyan jelenség van, amellyel analógokat az egyváltozós esetben is láttunk. Ilyen például a lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele. A nyeregpont megjelenése azonban olyan, amelyhez hasonlóval nem találkozhattunk egyváltozóban. A következőkben tehát azt fogjuk megvizsgálni, hogy ez miben tér el attól, mint amit egyváltozós esetben megfigyelhettünk. Jelen fejezetben gyakran fognak szerepelni parciális deriváltak, ezért egy egyszerűsítő jelölést fogunk rájuk alkalmazni: $\partial_i f$ fogja jelenteni az i-edik változó szerinti parciális deriváltat, és ezzel párhuzamosan $\partial_{ij} f = \partial_i \partial_j f$ a j-edik változó szerinti parciális derivált i-edik változó szerinti parciális deriváltját. Magasabb rendű parciális deriváltaknál a jelölés hasonló.

2.1.1. Nyeregpontok stabilitása

Többváltozós esetben háromféle egyensúlyi pontot tudunk megfigyelni: lokális minimumot, lokális maximumot és nyeregpontot. Az egyensúlyi pont azt jelenti, hogy az adott pontban a függvény grafikonjához húzott érintő sík párhuzamos az xy-síkkal. Ez persze analóg az egyváltozós esettel, csupán annyi a különbség, hogy ott érintő egyenesről beszélünk, és egyensúlyi (kritikus) pont esetén az érintő egyenes az x-tengellyel lesz párhuzamos. Ezek közül viszont csupán egy lesz az, ami stabil is, ez a lokális minimum. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy ha ezekre a pontokra odatennénk egy golyót, akkor ugyan mind a három esetben ott maradna, de ha lokális maximumra vagy nyeregpontra tennénk és egy kicsit elmozdítanánk, akkor a golyó nem térne oda vissza, míg lokális minimumnál visszatérne oda (határértékben, ezt nevezzük aszimptotikus stabilitásnak, és főleg a differenciálegyenletek témakörében találkozhatunk ezzel a fogalommal). Azonban perturbációra való érzékenység szempontjából a másik kettő is stabil. Most azonban először szemléltetni szeretnénk, hogy az egyváltozóban megfigyelt három kritikus ponttal szemben (lokális minimum, lokális maximum és inflexiós pont) miben lesz más az, amikor többváltozós függvényt vizsgálunk.

Legyen tehát $f(x)$ egy egyváltozós függvény, melynek az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban kritikus pontja van. Emellett legyen $g(x)$ olyan függvény, melyre $g'(x_0) = 0$ és $g''(x_0) \neq 0$. Nézzük a következő függvényt: $h(x) = f(x) + \varepsilon \cdot g(x)$, ahol $\varepsilon > 0$. Ekkor értelemszerűen $h'(x_0) = f'(x_0) + \varepsilon \cdot g'(x_0) = 0$, tehát x_0 h-nak is kritikus pontja. Az is könnyen meggondolható, hogy ha ε elég kicsi, és $f''(x_0) \neq 0$, akkor $sgn(h''(x_0)) = sgn(f''(x_0))$, így ha f-nek x_0-ban lokális minimuma/maximuma volt, akkor kellően kicsi ε választása mellett h-nak is azonos típusú szélsőértéke lesz. Azonban ha $f''(x_0) = 0$, és emellett $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, vagyis f-nek x_0-ban inflexiós pontja van, akkor semmilyen $\varepsilon > 0$ mellett nem lesz $h''(x_0) = 0$, tehát h-nak már nem lesz x_0-ban inflexiós pontja. Tehát az inflexiós pont nem lesz stabil a perturbációra nézve.

Most vizsgáljuk meg azt, hogy ugyanez hogy néz ki kétváltozós esetben. Legyen most tehát $f(x, y)$ kétváltozós függvény, melynek kritikus pontjai legyenek $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ rendre szigorú lokális minimum, maximum és nyeregpont. Emellett legyen $g(x, y)$ olyan, melynek kritikus pontjai ugyanezek a pontok. Írjuk fel az f függvény Hesse-mátrixát az (x_0, y_0) pontban:

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_x^2 f(x_0, y_0) & \partial_y \partial_x f(x_0, y_0) \\ \partial_x \partial_y f(x_0, y_0) & \partial_y^2 f(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Legyen ez pozitív definit, és tegyük fel, hogy innen tudjuk, hogy ez a kritikus pont szigorú lokális minimum. Ismét legyen $h(x, y) = f(x, y) + \varepsilon \cdot g(x, y)$. Itt is meggondolható, hogy kellően kicsi ε mellett $h(x_0, y_0)$ még mindig pozitív definit marad, és ez elmondható negatív definit esetre is. Viszont az érdemi különbség az egyváltozós esethez képest az, hogy kellően kicsi módosítással a Hesse-mátrix indefinitsége is megmarad, így az infelxiós ponttal szemben a nyeregpont már stabil a perturbációra.

Ezzel tehát megmutattuk, hogy miben rejlik a minőségi különbség az egy-, illetve a többváltozós kritikus pontok között. Most pedig térjünk át a bevezetőben bemutatott tétel bizonyításának előkészületeire.

2.1.2. A bevezetőben látott tétel bizonyítása

A tétel bizonyításához előbb bevezetünk néhány fogalmat és ismétlésképpen megjegyezzük, hogy D $\mathbb{R}^n$-beli tartományt jelöl.

2.1.1. Definíció: Legyen $f : D \to \mathbb{R}$, k-szor differenciálható.

Ekkor f **k-adrendű differenciálja** $\forall x \in D$-re egy adott $\alpha \in \mathbb{R}^n$ vektorhoz a következő: $\sum\limits_{i_1=1}^{n} \dots \sum\limits_{i_k=1}^{n} (\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f)(x) \cdot \alpha_{i_1} \cdot \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k}$. Jelölése: $(d^k f)(x)(\alpha)$.
Itt természetesen α alsóindexében szereplő számok α egyes koordinátáit jelentik. Ennek segítségével tudjuk könnyen definiálni a Taylor-polinom fogalmát, így ezt most tegyük is meg.

2.1.2. Definíció: Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ p-szer differenciálható az $a \in D$ egy környezetében. Ekkor a következő polinomot f a pont körüli p-edfokú **Taylor-polinomjának** nevezzük: $T_p(x) = f(a) + \sum\limits_{k=1}^{p} \frac{(d^k f)(a)(x-a)}{k!}$.

Most pedig következzen egy segédtétel, melyet még fel fogunk használni a tétel bizonyításánál:

2.1.3. Segédtétel: Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ p-szer differenciálható az $a \in D$ pont egy környezetében. Ekkor $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - T_p(x)}{||x-a||^p} = 0$.

Vegyük észre, hogy az a pontban felírt másodrendű differenciál pont az f függvény a pontbeli Hesse-mátrixa által definiált kvadratikus alak. Így ha a Hesse-mátrix definit vagy indefinit, akkor $(d^2 f)(a)$ is az. A tételt a következő alakban látjuk be:
I.) Ha f-nek az a kritikus pontban lokális minimuma/maximuma van, akkor a $(d^2 f)(a)$ kvadratikus alak pozitív/negatív szemidefinit.
II.) Ha a $(d^2 f)(a)$ kvadratikus alak pozitív/negatív definit, akkor f-nek az a kritikus pontban szigorú lokális minimuma/maximuma van.
Ezzel tehát pontosan azt fogjuk belátni, hogy ha az a kritikus pontban a $(d^2 f)(a)$ kvadratikus alak indefinit, akkor f-nek a-ban nyeregpontja van. Ebből persze az is látszik, hogy a Hesse-mátrix indefinitsége pusztán egy elégséges feltétel nyeregpont létrejöttéhez.

Bizonyítás. I.) Tegyük fel, hogy f-nek lokális minimuma van a-ban és van olyan x_0, amire $(d^2 f)(a)(x_0) < 0$. Mivel a kritikus pont, így $(\partial_i f)(a) = 0$ $\forall i = 1, 2, \dots, n$, tehát $(d^1 f)(a) = 0$, és $T_2(x) = f(a) + \frac{1}{2} \cdot (d^2 f)(a)(x-a)$ $\forall x$. A **2.1.3.** segédtétel alapján $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - T_2(x)}{||x-a||^2} = 0$, így ha $t \in \mathbb{R}$ elég kicsi, akkor

$$|f(a+tx_0) - T_2(a+tx_0)| < \tfrac{|(d^2f)(a)(x_0)|}{2} \cdot t^2.$$

Másrészről

$$T_2(a+tx_0) = f(a) + \tfrac{t^2}{2} \cdot (d^2f)(a)(x_0),$$

így a fenti egyenlőtlenséget átrendezve és ezt behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$f(a+tx_0) < T_2(a+tx_0) + \tfrac{t^2}{2} \cdot |(d^2f)(a)(x_0)| =$$
$$f(a) + \tfrac{t^2}{2} \cdot (d^2f)(a)(x_0) + \tfrac{t^2}{2} \cdot |(d^2f)(a)(x_0)| = f(a).$$

Ezzel beláttuk, hogy ha $(d^2f)(a)$ felvesz negatív értékeket is, akkor f az a pont minden környezetében felvesz $f(a)$-nál kisebb értékeket is, ami ellentmondás, hiszen feltettük, hogy a-ban f-nek lokális minimuma van. Az állítás lokális maximumra és negatív szemidefinitre teljesen hasonlóan megmutatható.

II.) Most térjünk át a definit esetekre. Itt is csak pozitív definitre fogjuk az állítást igazolni. Tegyük tehát fel, hogy az a kritikus pontban felírt $(d^2f)(a)$ kvadratikus alak pozitív definit. Ekkor $(d^2f)(a)$ pozitív és folytonos az $S(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\}$ halmazon. Mivel $S(0,1)$ korlátos és zárt, így Weierstrass-tétele miatt tudjuk, hogy $(d^2f)(a)$-nak létezik minimuma $S(0,1)$-en. Ha ez az érték m, akkor $m > 0$, és $(d^2f)(a)(x) \geq m$, $\forall x \in S(0,1)$. Ha $||x|| \neq 0$, akkor $\frac{x}{||x||} \in S(0,1)$, tehát

$$(d^2f)(a)(x) = (d^2f)(a)(\tfrac{x}{||x||}) \cdot ||x||^2 \geq m \cdot ||x||^2.$$

A **2.1.3.** segédtétel miatt tudjuk, hogy $\exists \delta > 0 : |f(x) - T_2(x)| < \frac{m}{2} \cdot ||x-a||^2$, $\forall 0 < ||x-a|| < \delta$-ra. Ezt átalakítva kapjuk, hogy:

$$f(x) > T_2(x) - \tfrac{m}{2} \cdot ||x-a||^2 \geq f(a) + \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot ||x-a||^2 - \tfrac{m}{2} \cdot ||x-a||^2 = f(a).$$

Ezzel beláttuk, hogy f-nek az a-ban szigorú lokális minimuma van.
Negatív definitre az érvelés teljesen analóg, csupán annyi a különbség, hogy $S(0,1)$-en a maximumot kell venni, ami negatív lesz, és a másodfokú Taylor-polinomot felülről kell becsülni. [1] $\square$

A következőkben osztályozzuk a nyeregpontokat abból a szempontból, hogy milyenfajta kritikus pontokból állnak az egyes irányok mentén.

2.2. Nyergek osztályozása

Ebben az alfejezetben a nyeregpontok három típusát fogjuk megvizsgálni: az extremális, az inflexiós és a vegyes nyergeket. Ez az osztályozás azért is lesz hasznos, mert így válaszolni tudni adni arra a kérdésre, hogy milyen numerikus algoritmusokkal tudjuk ezeket a kritikus pontokat megtalálni. Kezdjük is hát az első nagy típussal.

2.2.1. Az extremális nyergek

A bevezetőben látott klasszikus (ló) nyereg is ilyen típusú volt. Elnevezését onnan kapta, hogy szélsőérték helyek találkozásánál található. Természetesen mind a kétfajta szélsőérték elő kell, hogy forduljon, különben nem beszélhetnénk nyeregről. A példában szemléltetett $f(x, y) = x^2 - y^2$ függvénynek a $(x, 0)$ egyenesre való megszorítása mentén lokális minimuma, míg a $(0, y)$ egyenesen lokális maximuma van. Ám érezzük, hogy ez a definíció még nem elég precíz, így most mondjuk ki matematikailag is, hogy mit is értünk extremális nyereg alatt.

2.2.1. Definíció: Egy $f(x, y)$ kétváltozós függvénynek az a kritikus pontban extremális nyerge van, ha csak véges sok irány kivételével, melyek mentén lehet szintvonal vagy inflexiós pont a-ban, minden az a ponton áthaladó egyenes mentén az a pontban a függvény megszorításának szigorú lokális minimuma vagy maximuma van, és mindkét fajta előfordul.

Megjegyezzük, hogy az $f(x, y) = x^2 - y^2$ függvény mintájára tetszőlegesen sok extremális nyereg készíthető a következőképpen: $g(x, y) = \lambda x^2 - \mu y^2$, ahol $\lambda, \mu \in (0, \infty)$. Felmerülhet a kérdés, hogy hol találkozhatunk ilyen típusú nyergekkel. Nem csak azért érdekesek az extremális nyergek, mert azok a legklasszikusabbak olyan értelemben, hogy a nyeregpont mint fogalom róluk kapta a nevét, hanem azért is, mert játékelméleti jelentésük is van. A következőkben ezt fogjuk kifejteni.

Az extremális nyergek játékelméleti jelentése

Ahhoz, hogy beszélni tudjunk az extremális nyergek játékelméleti jelentéséről, előbb definiálnunk kell néhány fogalmat. Fontos kihangsúlyoznunk, hogy ezeket a fogalmakat diszkrét esetre fogjuk kimondani, de látni fogjuk, hogy minden akadály nélkül átültethetőek folytonos esetre is.

Elsőként beszéljünk a stratégiai játék fogalmáról. Vannak játékosaink, akik egymástól függetlenül választanak egy-egy stratégiát egy megadott stratégia halmazból. A játék kiértékelése úgy történik, hogy egy-egy játékos nyeresége (haszna) az összes játékos választásának függvénye, és így ez egy n-változós függvénynek is tekinthető. A stratégiák halmazát $S_1, S_2, \ldots, S_n$-nel jelöljük, az indexek értelemszerűen a játékosok sorszámára utalnak.

Az együttes stratégiahalmazt, melynek egyetlen elemét röviden csak stratégiának hívjuk, a következőképpen értelmezzük: $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$, egy darab stratégiát s-sel jelölünk. A kiértékelést leíró függvény az úgynevezett hasznossági függvény, melyet minden játékosra definiálhatunk a következőképpen: $u_i(s)$: az i-edik játékos haszna az $s \in S$ stratégia mellett. Egy további jelölés: $S_{-i} = S_1 \times \ldots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \ldots \times S_n$, vagyis ez az i-edik játékoson kívül esők stratégiának a halmaza. Így értelemszerűen $s = (s_i, s_{-i})$, tehát egy stratégia egyértelműen felbontható az i-edik és a többi játékos stratégiájára.

A most következő fogalom talán a legfontosabb, ez pedig nem más, mint a **Nash-egyensúly**.

2.2.2. Definíció: Egy $s \in S$ stratégia **Nash-egyensúly**, ha $\forall i$-re és $\forall s'_i \in S_i$-re $u_i(s) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$. Itt s'_i az úgynevezett **alternatív stratégiát** jelöli, azaz az i-edik játékos stratégiáját lecseréljük egy másikra az S_i halmazból.

A definíció szemléletes jelentése az, hogy ha az i-edik játékos s_i stratégiája helyett egy másikat választana, akkor a haszna legfeljebb akkora lehetne, mint az s stratégia mellett.

De mi köze van ennek a nyeregpontokhoz, tehetnénk fel a kérdést. Hogy közelebb jussunk a válaszhoz vizsgáljuk meg a kétszemélyes, nullaösszegű játékokat. Ezekben ugyebár két játékos lesz, a hasznossági függvények pedig a következő tulajdonsággal bírnak: $u_1(s) = -u_2(s)$, azaz az egyik játékos nyeresége egyenlő a másik veszteségével. Emellett még definiálhatjuk a hasznossági mátrixokat.

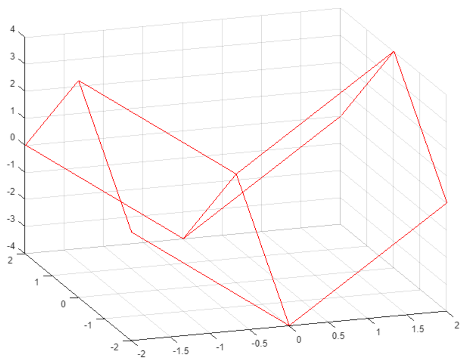
2.2.3. Definíció: legyen az első játékos stratégia halmaza $S_1 = \{1, 2, \ldots, n\}$, a másodiké hasonlóan $S_2 = \{1, 2, \ldots, m\}$. Ekkor az első játékos hasznossági mátrixa: $a_{ij} = u_1(i, j), i \in S_1, j \in S_2$. Nullaösszegű játék esetén a második játékos hasznossági mátrixa: $b_{ij} = -a_{ij}$.

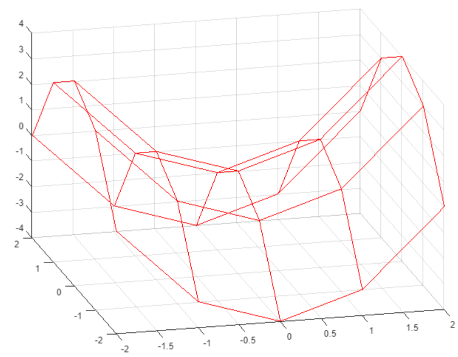
Hogy még egy lépéssel közelebb kerüljünk a nyeregpontokkal való kapcsolat feltárásához, nézzük meg a következő hasznossági mátrixokat: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, és $B = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Az A mátrix az első játékos, vagy ha úgy tetszik sorjátékos hasznossági mátrixa, a B pedig a második (oszlop) játékosé. Az A mátrixból úgy olvashatunk ki egy Nash-egyensúlyt, hogy keresünk egy olyan elemet, ami az oszlopában maximális, a sorában pedig minimális. Ez pedig az $a_{1,1}$ lesz. A B mátrix esetében ennek az ellenkezőjét kell tenni, vagyis az oszlopában minimális, és a sorában maximális elemet kell találni. Erre pedig éppen $b_{1,1} = -a_{1,1}$ adódik. Ha összevetjük ezt a Nash-egyensúly definíciójával, akkor is helyes eredményhez jutunk, hiszen ez a stratégia mindkét játékos számára nagyobb hasznot hoz, mintha a másik meghagyná a stratégiáját, ő pedig váltana. Sőt, jelen esetben szigorú Nash-egyensúlyról is beszélhetünk, hiszen mind a két esetben sorában illetve oszlopában szigorúan legnagyobb illetve legkisebb elemről van szó. Most mutatunk további hasznossági mátrixokat, egyre nagyobb mérettel, és végezetül elérkezünk a válaszhoz, hogy mi a kapcsolat a Nash-egyensúlyok és az extremális nyergek között.

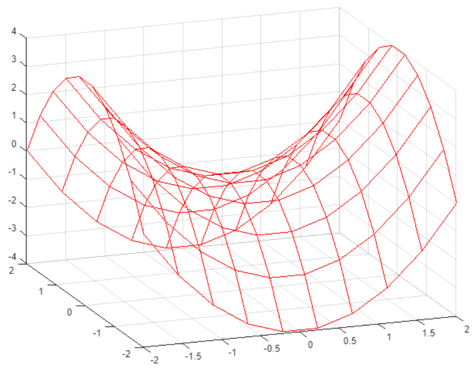
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 4 & \mathbf{0} & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

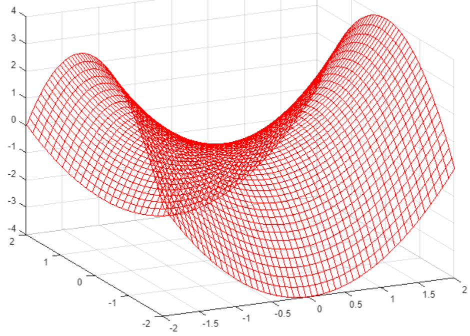
Mind a két esetben jeleztük megvastagítással a Nash-egyensúlyt. A mátrix elemeit most nem a szokásos módon indexeljük, hanem úgy, hogy a harmadik sor illetve oszlop felel meg a nulladik indexnek, és ettől jobbra illetve felfelé növekszenek, balra és lefelé pedig csökkennek az indexek, 2-ig illetve -2-ig. Hasonló indexelés érvényes az A_1 mátrixra is, csak ott az indexek kettesével nőnek illetve csökkennek 2-ig és -2-ig. A mátrix elemeit pedig úgy képezzük, hogy $a_{ij} = j^2 - i^2$.

Ez tulajdonképpen annak felel meg, mintha a sorokban szerepelnének az y-tengelyen felvehető lehetséges értékek, az oszlopokban pedig x lehetésges értékei, és ehhez rendeljük hozzá az egyes hasznosságokat. Mutatjuk az ábrán:









2.1. ábra. Az első hasznossági mátrix 3D-s ábrája

2.2. ábra. A második hasznossági mátrix 3D-s ábrája

2.3. ábra. A felület további finomítása

2.4. ábra. A valódi felület

Tehát az extremális nyergek és a Nash-egyensúlyok kapcsolata az, hogy ha egy nulla-összegű játékban a stratégiák halmaza a valós számhalmaz (vagy ennek egy nem diszkrét részhalmaza), akkor egy **Nash-egyensúly** egy extremális nyeregpontnak felel meg. [2]

A továbbiakban azt fogjuk tárgyalni, hogy ilyen típusú nyergeket hogyan lehet megtalálni. A bevezetőben látott második derivált próba akkor ütközhet akadályokba, ha az elsőrendű parciális deriváltak zérushelyeinek meghatásozása valamilyen oknál fogva bonyolult (sőt, tipikusan az). Ezért használjuk ki az előbbiekben bemutatott játékelméleti jelentést, és szimuláljuk a játékot. Az egyik játékos növelni akar, a másik pedig csökkenteni, és ha nyugvópontra érkezünk, akkor ott lesz extremális nyereg.

2.2.2. Algoritmus: Az eljárás paraméterként vár egy keresési tartományt mind az x-, mind az y-tengely mentén. Továbbá vár egy függvényt, egy kiindulási helyet és azt, hogy mekkora lépésközzel haladjon. Két fajtája van: ami az x-szerinti szekciófüggvényeken növel, és az y-szerintieken csökkent, és ami fordítva működik. Az algoritmus minden lépésben két dolgot vizsgál, és aszerint megy előre, hátra vagy marad: megnézi, hogy az adott x-szerinti szekciófüggvényen melyik irányba tud növelni/csökkenteni, és abba az irányba lép egyet a megadott lépésközzel. Itt megnézi, hogy ezen az y-szerinti szekciófüggvényen melyik irányba tud csökkenteni/növelni, és abba az irányba lép egyet a megadott lépésközzel. Ha már egyik szekciófüggvényen sem mozdul el, akkor az algoritmus leáll, ezt egy **break** beépítésével fogalmaztuk meg egy 1000 hosszú for ciklusban. Ezzel egyben azt is meggátoltuk, hogy az algoritmus túl sokáig fusson. Ekkor vagy kirajzolja a függvényt és rajta a talált pontot, amit természetesen meg is ad koordinátáival, vagy hibaüzenetet dob, hogy kilépett a keresési tartományból. Ha pedig a for ciklus ugyan véget ért, de még tudna javítani, azt is jelzi, és ekkor úgy értelmezzük, hogy nem talált nyeregpontot.

A tényleges Matlab kódok a függelékben lesznek megtalálhatóak, az eljárások nevei: **nyeregpont_xl_yu**, illetve **nyeregpont_xu_yl**, arra utalva, hogy melyik változó szerint növel, illetve csökkent.
Látni fogunk példákat olyan minmax nyergekre is a későbbiekben, amelyeknek mind az x, mind az y-szerinti szekciófüggvénye mentén minimuma illetve maxmimuma van, ezek megtalálására értelemszerűen az előbbiekben ismertetett algoritmus nem alkalmas, de ezekre majd a harmadik fejezetben térünk ki részletesebben. Menjünk is tovább a következő két nyeregtípusra, melyek struktúrája már valamivel bonyolultabb.

2.2.2. Inflexiós és vegyes nyergek

Egyváltozós esetben is két nagy csoportra szokás osztani a kritikus pontokat: szélsőértékekre és inflexiós pontokra. Ez kétváltozóban sem lesz másképp ebben az osztályozásban, itt csupán több irányban vizsgáljuk a dolgokat. Definiáljuk először az inflexiós, majd a vegyes nyereg fogalmát.

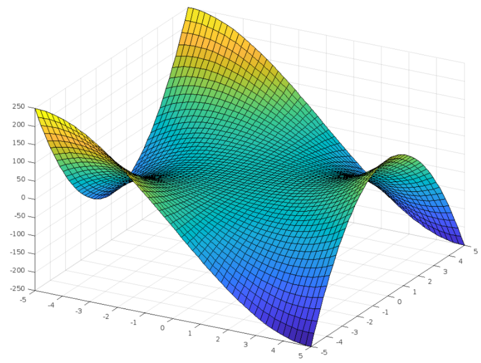
2.2.3. Definíció: Egy $f : D \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvénynek az a kritikus pontban inflexiós nyerge van, ha véges sok irány kivételével, melyek mentén lehetnek szintvonalai illetve lokális szélsőértékei, minden a ponton áthaladó egyenes mentén az a pontban a függvény megszorítrásának inflexiós pontja van.

Láthatjuk, hogy a definíció teljesen analóg az extremális nyergével, csupán inflexiós pontok létrejöttét követeli meg. Most pedig definiáljuk a vegyes nyergeket is, és lássunk mind a kettőre egy-egy példát.

2.2.4. Definíció: Egy $f : D \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvénynek az a kritikus pontban vegyes nyerge van, ha véges sok irány kivételével, **melyeken csak szintvonalak lehetnek**, minden irányban az a pontban a függvény megszorításának lokális szélsőértéke vagy inflexiós pontja van, és **mind a kettő legalább egy szögtérnyi**.

A szögtérnyi itt azt jelenti, hogy ha az a pont a szög csúcsa, akkor $\exists \alpha > 0$, hogy egy akkora szögtérben a függvény megszorításainak inflexiós pontja, illetve lokális szélsőértéke van a-ban.

Először nézzünk meg egy nevezetes példát inflexiós nyeregre, ez pedig a majom nyereg lesz. Ez az $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ függvény kritikus pontja az origóban. Mutatjuk az ábrán:



2.5. ábra. Majom nyereg

2.2.5. Állítás: A majom nyereg inflexiós nyereg.

Bizonyítás. Tekintsük az $f(x, ax) = x^3 - 3a^2x^3 = (1 - 3a^2)x^3$ alakú origón átmenő egyenesekre vett megszorításokat, ahol $a \in \mathbb{R}$. Vegyük észre, hogy készen is vagyunk, hiszen az x^3 függvényről tudjuk, hogy inflexiós pontja van az origóban, az
$(1 - 3a^2)$ pedig csak konstans szorzó, az ezt nem befolyásolja. Apró diszkusszió, hogy az $f(0, y)$ az azonosan nulla függvényt adja, továbbá ha $a = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$, ám ez pusztán két szintvonal, így ez nem sérti meg a majom nyereg inflexiós nyereg mivoltát. Ezzel az állítást beláttuk. $\square$

Most pedig lássunk egy példát vegyes nyergre is.

Ez az $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \cdot e^{-\frac{1}{(xy)^2}}, & \text{ha } xy > 0 \\ x^3 \cdot e^{-\frac{1}{(xy)^2}}, & \text{ha } xy < 0 \\ 0, & \text{ha } xy = 0 \end{cases}$

origóbeli nyeregpontja lesz.

Ez a függvény mindenhol végtelen sokszor differenciálható, így eleget tesz a dologzat elején tett ígéretünknek. Továbbá vegyes nyereg, hiszen ahol $xy > 0$, azokban az irányokban az origóban lokális minimum lesz, ahol $xy < 0$, azokban az irányokban inflexiós pont. Ezek után, ahol $xy = 0$, ott szintvonalak lesznek.

Ezzel a nyergek osztályozását magunk mögött is tudhatjuk, ám annak tisztázása, hogy ezt miért így tettük meg, még hátra van. Az ok egyszerű: azért így csoportosítottuk őket, mert az első nagy csoportnak, az extremális nyergeknek volt egyfajta játékelméleti jelentésük is, és ezt kihasználva tudtuk őket megtalálni numerikusan. Ám ezzel a tulajdonsággal az inflexiós és a vegyes nyergek már nem rendelkeznek, így itt más eszközökhöz kell folyamodnunk, ha meg szeretnénk őket találni. Ezt fogjuk bemutatni a második fejezet utolsó alfejezetében.

2.3. Az univerzális algoritmus

Mire törekszünk akkor, ha egy adott objektumot keresünk valamiféle módszerrel? Arra, hogy az adott objektum tulajdonságainak eleget tegyen az, amit találtunk, és hogy lehetőleg minél hatékonyabban találjuk ezt meg. Vegyük tehát számba ennek alapján, hogy egy nyeregpontnak miket kell teljesítenie. Első körben azt, hogy kritikus pont legyen, másrészt pedig, hogy ne legyen szélsőérték hely. Utóbbi már numerikusan nem is olyan nehezen leellenőrizhető, az igazi kérdés az, hogy az első tulajdonságnak eleget tevő pontot hogyan találunk.

Az algoritmus, amit most bemutatunk, működésében hasonlít a **2.2.** alfejezetben bemutatotthoz, ám mind a két tengely irányában csökkenteni fog. Az eljárást kétváltozós függvényekre mutatjuk be.

2.3.1. Algoritmus: Az eljárás paraméterként csupán egy függvényt és egy kiindulási pontot vár. Legyen tehát $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható kétváltozós függvény. Legyen $g(x,y) = ||\nabla(f)||_1 = |\partial_x f(x,y)| + |\partial_y f(x,y)|$ segédfüggvény, mely azt a célt szolgálja, hogy megtaláljuk f kritikus pontját (pontjait). Mivel ez egy vektor norma kizárólag akkor vehet fel 0-t, ha $\partial_x f(x,y)$ és $\partial_y f(x,y)$ is 0, így megspórolunk egy numerikusan igencsak drága műveletet, egy egyenletrendszer megoldását. Az algoritmus a kiindulási pontból kezdi útját úgy, hogy először az x-, majd az y-tengely mentén vizsgálja meg, hogy melyik irányba tud csökkenteni a g függvény értékén, és abba az irányba lép $0,001$-et. Ezt azért állítottuk be így, hogy minél pontosabban találja meg a minimumot. A **2.2**-es alfejezetben bemutatott eljáráshoz hasonlóan akkor áll le, ha már egyik szekciófüggvény mentén sem tud változtatni, jelen esetben csökkenteni, ekkor tehát talált egy minimumot a segédfüggvényen. Ezen a ponton meg kell nézni, hogy a talált minimum valóban 0-e (valójában 0,05-ig egy kis tűréshatárt megengedünk). Ha ez teljesül, akkor valóban kritikus pontról van szó, tehát le kell ellenőrizni, hogy nyeregpont-e. Ezt az algoritmus úgy teszi meg, hogy egy adott sugárban (0,1-es sugárban) körbejár egy teljes szög mentén fokonként, és megvizsgálja, hogy vannak-e a kritikus pontban felvett értéknél nagyobb, illetve kisebb értékek is. Ezt már értelemszerűen az eredeti f függvényen nézi meg. Ha igen, akkor kiírja a talált pontot, és az extremális nyerges algoritmushoz hasonlóan kirajzolja a függvényt és bejelöli rajta a nyeregpontot. Ha viszont minden irányban csak nagyobb vagy kisebb értékek fordulnak elő, akkor hibaüzenetet dob.

Összegezzük, hogy miket láttunk eddig: bemutattuk az alapvető nyereg típusokat, és kétféle eljárást is szolgáltattunk ezek megtalálására. Igen ám, de eddig mindig egy konkrét függvényt vizsgáltuk, hogy van-e nyeregpontja. Vajon létezik-e egy szélesebb, kényelmesebben, jobban vizsgálható, általánosabb függvényosztály, melyek kritikus pontjai mind nyeregpontok, így biztosan jó alanyként szolgálhatnak algoritmusaink teszteléséhez? Létezik, és erre adunk választ a harmadik fejezet első alfejezetében. Ezzel a második fejezetet le is zárjuk és evezzünk át ismét elméleti vizekre.

3. fejezet

3.1. A harmonikus függvények

Ebben az alfejezetben választ adunk arra a kérdésre, hogy milyen függvények szolgálhatnak még vizsgálati alapul a bemutatott algoritmusainkhoz. Mutatunk egy egész függvényosztályt, melyek kritikus pontjai mind nyeregpontok lesznek, és ezeket komplexfüggvénytani eszközökkel is megvizsgáljuk, mert ezek jelentősen egyszerűbbé teszik a bizonyítások nagy részét. Ám ehhez definiáljunk néhány fogalmat. Legelső körben a fejezet címadó függvényosztályát, a **harmonikus függvényeket** fogjuk definiálni.

3.1.1. Definíció: egy $f : D \to \mathbb{R}$ függvényt harmonikusnak nevezünk, ha teljesíti a következő egyenlőséget: $\sum\limits_{i=1}^{n} \partial_i^2 f(x) = 0 \ \forall x \in D$-re.

A tiszta másodrendű parciális deriváltak összegképzését **Laplace-operációnak** nevezzük, jelölése: Δf. Azt állítjuk, hogy az ilyen típusú függvényeknek minden kritikus pontja nyeregpont. Ezt mi sem bizonyítja jobban, mint a harmonikus függvények maximum és minimum elve, miszerint, egy harmonikus függvény egy K kompakt halmazon a maximumát, illetve minimumát csak ∂K-n veheti fel, ahol ∂K a K halmaz határát jelöli. Az állítást két változóra igazoljuk is, de ehhez előbb mondjunk ki egy segédtételt a harmonikus függvények középérték tulajdonságáról. A következőkben minden függvény D értelmezési tartományáról feltesszük, hogy $D \subset \mathbb{R}^2$.

3.1.2. Segédtétel: A D tartományban folytonos $u(z)$ függvény pontosan akkor harmonikus, ha $u(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(z + \rho e^{it}) dt$, minden z-től függően elég kicsi $\rho > 0$-ra.

3.1.3. Tétel (Maximum Elv): ha $u(z)$ olyan folytonos függvény D-ben, hogy $u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(z + \rho e^{it})dt$ minden z-től függően elég kicsi $\rho > 0$-ra, akkor $u(z)$ nem veszi fel a maximumát -ben, kivéve ha konstans, és $u(z) \leq \limsup\limits_{\xi \to \partial D} u(\xi)$.
Az ilyen függvényeket egyébként **szubharmonikusnak** nevezzük.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $\exists z_0 \in D$, lokális maximum hely. Legyen ez a maximum érték M. Írjuk fel erre az egyenlőtlenséget:

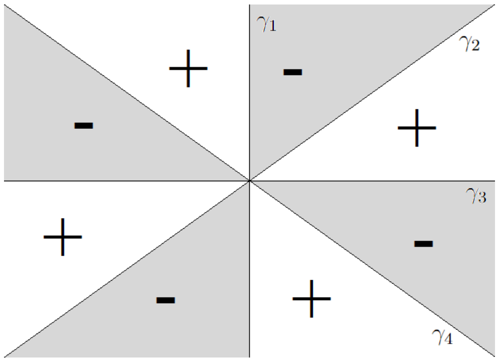
$$M = u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(z + \rho e^{it})dt.$$

Ezt átalakítva: $\int\limits_0^{2\pi} [M - u(z_0 + \rho e^{it})]dt \leq 0$. És mivel az integrandus nemnegatív, hiszen M a maximum, így ez csak úgy lehetséges, ha $M - u(z_0 + \rho e^{it}) \equiv 0$. Itt természetesen mind a két esetben hallgatólagosan megjegyeztük, hogy $\rho < \rho_0$. Tehát $u(z) = M$, ha $|z - z_0| < \rho_0$. Így aztán D-t felbonthatjuk a két diszjunkt halmazra a következőképpen: $D = \{z : u(z) = M\} \cup \{z : u(z) < M\}$. Feltettük, hogy az első halmaz nem üres, továbbá nyílt is, a második pedig a folytonosság miatt lesz az. Így az első halmaz kiteszi egész D-t, ezzel pedig az állítást beláttuk. Szubharmonikus függvények ellentettje kielégíti a **Minimum Elvet**, azokat a függvényeket **szuperharmonikusnak** hívjuk, és mivel egy harmonikus függvény szub- és szuperharmonikus egyszerre, így kielégíti mind a maximum, mind a minimum elvet, amivel a kezdeti állításunkat láttuk be. [3] □

Emlékezzünk vissza egy pillanatra az előző fejezetben bemutatott $f(x, y) = x^2 - y^2$ és $g(x, y) = x^3 - 3xy^2$ függvényekre. Ezek a klasszikus extremális nyereg, illetve a majom nyereg voltak. Ha azt is felidézzük, hogy grafikonjaik hogy néztek ki, akkor felfedezhetjük azt a különbséget, hogy az $f(x, y)$ grafikonján két növekvő-csökkenő szögtartomány pár (későbbiekben csak síktartomány pár), míg a majom nyeregén három ilyen pár volt megfigyelhető. Ez vezet el minket a következő fogalomhoz, amely a nyeregpontok multiplicitása lesz. A definíciót két változóra mondjuk ki, és kizárólag arra is fogjuk használni. Továbbá a definíciót csak úgynevezett **ideális** esetekre mondjuk ki, melybe azt értjük bele, hogy a függvénynek vannak különálló szintvonalai, melyek elhatárolják egymástól a növekvő és a csökkenő szögtartományokat.
3.1.2. Definíció: tegyük fel, hogy az $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ pontban nyeregpontja van. Ekkor ha $\exists \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ szintvonalak, melyeken $f(\gamma_1) = f(\gamma_2) = \ldots = f(\gamma_n) = f(x_0)$, ahol $f(\gamma_i) = \{f(x, y) : (x, y) \in \gamma_i\}$, továbbá

a szintvonalak egyetlen metszéspontja lokálisan x_0, akkor az n értéket a nyeregpont multiplicitásának nevezzük.

Nézzük meg ennek egy ekvivalens, ám kevésbé precíz átfogalmazását egy ábrán keresztül:



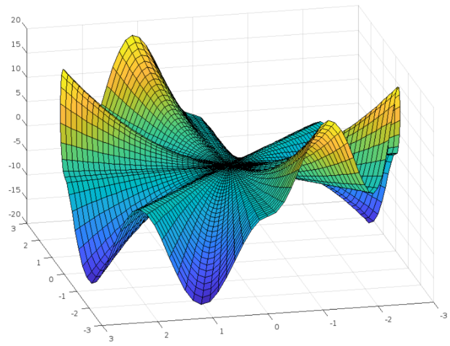
3.1. ábra. A szintvonalak felbontják a síkot csökkenő és növekvő részekre, ideális esetben felváltva

Ahogyan a képaláírás is jelzi, amennyiben léteznek a szintvonalak, akkor felbontják a síkot pontosan kétszer annyi részre, mint ahányan vannak, és ezekben a síkrészekben a függvény nagyobb, illetve kisebb értékeket vesz fel a nyeregpontban felvettnél. Így egy nyereg multiplicitása a növekvő, illetve csökkenő síkrész párok számával is megfogalmazható.

Azonban felmerülhet a kérdés, hogy biztos, hogy ezek a tartományok felváltva követik egymást? A válasz az, hogy nem, és mutatunk is erre példaként egy függvényt hengerkoordinátákkal és az ábráját is szemléltetjük.

$$h(\varrho, \vartheta) = \begin{cases} \varrho^2 \cdot (1 - \cos(8\vartheta)), \text{ha } \vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}) \\ \varrho^2 \cdot (\cos(8\vartheta) - 1), \text{ha } \vartheta \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi) \end{cases}$$

Itt természetesen beleértjük, hogy $\varrho \in [0, \infty)$ és $\vartheta \in [0, 2\pi)$.



3.2. ábra. A például szolgáló függvény grafikonja, ahol $\varrho \in [0,3]$

Most térjünk vissza a klasszikus esetre néhány rövid számolás erejéig három példafüggvényen. Az $f(x,y) = x^2 - y^2$ origóban felvett értéke 0. $x^2 - y^2$ akkor lesz 0, ha $x = y$ vagy $x = -y$. Ez két szintvonal, így a definíció alapján az $f(x,y)$ függvénynek az origóban kétszeres nyerge van. A majom nyereg szintén nullát vesz fel az origóban, és a szintvonalai a következők: $\gamma_1 \equiv y = \frac{x}{\sqrt{3}}, \gamma_2 \equiv y = -\frac{x}{\sqrt{3}}, \gamma_3 \equiv \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$. Ez három szintvonal, így a majom nyereg multiplicitása három. Nézzünk meg egy rövid példát arra is, amikor a multiplicitás 1. Ez a példa nem lesz más, mint a $h(x,y) = x^2 - y^3$ függvény origóbeli nyeregpontja lesz. Ennek egyetlen szintvonala a $\gamma_1 \equiv y = \sqrt[3]{x^2}$ lesz.

Felmerülhet az a kérdés is, hogy a szintvonalak mindig ilyen "szépek"-e, és hogy mindig megfogalmazható-e a multiplicitás ezek segítségével, vagy van-e olyan eset, amikor nincs értelme multiplicitásról beszélni. A válasz az, hogy van olyan eset, amikor ez nem fogalmazható meg ilyen egyszerűen, sőt a definíció nem is lesz mindig értelmes, erre pedig a következő függvény szolgál például: $f(x,y) = x^7(y - \sin(\frac{1}{x}))$. Ennek a függvénynek az origóban nyeregpontja lesz, ám ha közelebbről megvizsgáljuk, akkor a szintvonalai az $y = \sin(\frac{1}{x})$ függvény grafikonja mentén lesznek. Ez viszont olyan, hogy az origó bármilyen kis környezetében végtelen sokszor megtesz egy periódust, így gyakorlatilag végtelen sok növekvő és csökkenő síkrész található ott. Tehát ennél a függvénynél például nincs értelme multiplicitásról beszélni. Jó hír viszont, hogy a következőkben vizsgált függvényeknél ennek mindig lesz értelme, sőt, még magát a multiplicitást is egyszerűen meg lehet határozni.

Miért érdemes a harmonikus függvényeket illetve a nyeregpontok multiplicitását komplexfüggvénytani eszközökkel vizsgálni? A válasz egyszerű: mert a komplexfüggvénytanból ismeretes összefüggések jelentősen leegyszerűsítik ezek tárgyalását. Sőt, szinte csak ezek teszik lehetővé, mert ezek nélkül majdhogy nem lehetetlen lenne ezekről a fogalmakról precízen beszélni. Így hát most nézzük is meg, hogy mit kínál nekünk a komplexfüggvénytan e téren.

Először idézzük fel röviden, hogy hogyan tudjuk kétváltozós függvényekkel megfogalmazni a komplex értékű függvényeket. Legyen $z = x + yi$ komplex szám, és legyenek $u(x, y), v(x, y) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvények. Ekkor az $f(z)$ komplex értékű függvény felírható a következő alakban: $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$. Egy komplex függvényt holomorfnak nevezünk, ha az egész értelmezési tartományán differenciálható, továbbá egy holomorf függvény értelmezési tartománya minden belső pontja körül hatványsorba fejthető. Ez egy fontos fogalom illetve tény lesz a továbbiakban, ám a lényegi állítás most jön, miszerint egy holomorf függvény valós illetve képzetes része harmonikus, így a fentebb említett állítás miatt minden kritikus pontja nyeregpont lesz. Most, hogy ezeket áttekintettük, mondjunk ki a harmonikus függvények nyeregpontjainak multiplicitásáról egy tételt.

3.1.3. Tétel: Legyen $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, $z_0 \in D$ körüli hatványsora: $f(z) = f(z_0) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Legyen továbbá $m = \min\{n : a_n \neq 0\}$. Ekkor a következő két alternatíva közül pontosan az egyik áll fenn:
I.) Ha $m > 1$, akkor az $u(x, y) = Re(f)$ függvény z_0, mint (x_0, y_0) pontpárbeli nyeregpontjának multiplicitása m.
II.) Ha $m = 1$, akkor $u(x, y)$-nak nem lesz nyeregpontja az (x_0, y_0) pontban.

Bizonyítás. I.) Tegyük tehát fel, hogy $m > 1$. Írjuk fel a hatványsort a következő alakban: $f(z) = f(z_0) + a_m(z - z_0)^m + o(z - z_0)^m$, ahol a $o(z - z_0)^m$ a következőt jelenti: $\alpha(z) = o(z - z_0)^m \Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} \frac{\alpha(z)}{(z - z_0)^m} = 0$. Alakítsuk át a hatványsorban szereplő kifejezéseket exponenciális alakúvá: $z - z_0 = re^{i\varphi}, a_m = \varrho e^{i\vartheta}$. Ez alapján írjuk át a hatványsort:

$$f(z) = f(z_0) + \varrho e^{i\vartheta} \cdot r^m e^{im\varphi} + o(r^m) = f(z_0) + \varrho r^m e^{i(m\varphi+\vartheta)} + o(r^m) =$$
$$f(z_0) + \varrho r^m(\cos(m\varphi + \vartheta) + i \cdot \sin(m\varphi + \vartheta)) + o(r^m).$$

Most, hogy a hatványsor elnyerte trigonometrikus alakját, legyen $u = Re(f)$, így vegyük a kifejezés valós részét: $u(z) - u(z_0) = \varrho r^m \cdot \cos(m\varphi + \vartheta) + o(r^m)$, majd osszuk el r^m-nel:

$$\frac{u(z)-u(z_0)}{r^m} = \varrho \cos(m\varphi + \vartheta) + o(1).$$

Itt a $o(1)$ már azt fogja jelenteni, hogy ha $\lim_{r\to 0}\frac{o(1)}{r}=0$. Így ha r elég kicsi, akkor $o(1)$ abszolútértéke annál kisebb lesz, tehát a kifejezés előjelét $\cos(m\varphi+\vartheta)$ fogja meghatározni. Ennek pedig a $[0,2\pi)$ intervallumban $2m$ zérushelye lesz, amik meghatároznak m darab növekvő és m darab csökkenő síkrészt. Ezzel az $m>1$ esetet be is láttuk, a nyereg multiplicitása valóban m.
II.) Az $m=1$ esethez csupán annyit kell meggondolni, hogy ha deriváljuk a hatványsort, amit tagonként megtehetünk, akkor $Re(f'(z_0))=u'(z_0)\neq \underline{0}$, így z_0 nem lesz kritikus pont. Ezzel az állítást be is láttuk. $\square$

Megjegyezzük, hogy ez a bizonyítás egyben a kétváltozós harmonikus függvények maximumelvének egyfajta bizonyításának is tekinthető.
Holomorf függvénynek legegyszerűbb esetben polinomokat szoktunk tekinteni, hogy ezek valós részének kiszámításával egy harmonikus függvényhez jussunk, mely kiváló vizsgálati alanyt jelent. Ám a valós részek kiszámítása magas fokszám esetén fáradságos munka lehet, viszont a szakdolgozat keretében született ennek leegyszerűsítésére is egy program, melynek neve **holomorfbol_harmonikus**. Működése rendkívül egyszerű: bemenetként pusztán egy vektort vár, melyben felsoroljuk a polinom együtthatóit fokszám szerint csökkenő sorrendben, és az eljárás kiadja, hogy mi lesz ennek a valós része, így nekünk nem kell sorozatban egymás után a binomiális tételt alkalmazni és ügyelni arra, hogy melyik tagban szerepel páros kitevőn a képzetes egység.
Emellett egy nyereg multiplicitását meghatározó program is készült. Ehhez értelemszerűen a két kereső program valamelyikét előbb le kell futtatni a függvényen, és ha ez megtalálta a nyeregpontot, akkor a **multiplicitas** nevű eljárás meghatározza a nyereg multiplicitását. Ehhez paraméterként csak a függvényt és a nyeregpont koordinátáit várja. Körbejár egy teljes szög mentén és megszámolja a növekvő és a csökkenő tartományokat, majd ezt a számot osztja kettővel.

Semmi kétség nem fér ahhoz, hogy a két bemutatott kereső algoritmus közül az első az egyszerűbb, ami csak extremális nyergeket keres. Azonban gondoljuk végig a következő problémát: vegyük a $f(z)=z^4$ függvény valós részét. Ez nem lesz más, mint az $u(x,y)=x^4-6x^2y^2+y^4$. Szinte számolni sem kell, leolvasható, hogy az $u(x,0)=x^4$, illetve az $u(0,y)=y^4$ megszorítások mentén lokális minimumai vannak. Igen ám, de az extemális nyergeket kereső algoritmus futtathatóságának egyik alapfeltétele az volt, hogy a lokális minimum illetve lokális maximum az x- illetve az y-tengely mentén legyen, itt ez viszont nem teljesül. Vajon létezik-e mód arra, hogy olyanná alakítsuk ezt a függvényt, hogy az egyszerűbb algoritmus futtatható legyen rajta? A válasz bíztató: létezik, és ezt fogjuk bemutatni a következő és egyben utolsó alfejezetben.

3.2. Módosítás mátrixszal

Ebben az alfejezetben azt fogjuk bemutatni, hogy ügyes átalakításokkal egy extremális nyereg olyan alakra hozható, hogy a **2.2.** alfejezetben bemutatott algoritmus meg tudja találni. Mi lehet annak az oka, hogy ez nem teljesül? Például az, amelyet az előző alfejezet végén említettünk, hogy mind az $x-$ mind az y-tengely mentén ugyanolyan típusú szélsőértéke van. Az ötlet a következő: az egyik tengelyt akár nem is kell elmozgatni, hiszen azzal nincs gond. Viszont azt szeretnénk, hogy a másik tengelyre a másik típusú szélsőérték kerüljön. Hogy hogyan tudjuk ezt elérni? Egy lineáris transzformáció alkalmazásával, melyet egy mátrix ír le, így el is jutottunk az alfejezetünk címéhez. Fontos, hogy a mátrix determinánsa nem lehet 0, hiszen az komoly problémákhoz vezethet, erre később még kitérünk. Példaként használjuk az $f(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ függvényt. Ebben az esetben azonnal el is áruljuk, hogy mi lesz egy jó módosító mátrix, és ennek okát a későbbiekben ki is fejtjük. A módosító mátrixunk a következő lesz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Tehát a függvényünket a következő alakba írhatjuk át:

$$g(x, y) = f(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = f(x + 2y, 3x + 4y).$$

Ha ezen a $g(x, y)$ függvényen futtatjuk az extremális nyergeket kereső algoritmust, akkor már meg fogja találni. Viszont mivel nem biztos, hogy az origóban lesz a nyeregpont, mint ennél a függvénynél, így nevezzük a segédfüggvényen talált pont koordinátáit $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ -nak és írjuk fel a nyeregpont egyenletet a következő alakban:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

Így az eredeti függvényen a keresett nyeregpont koordinátái:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

Mint oly sok minden másra, erre a problémára is íródott két program a szakdolgozat keretei között, melyek nevei **nyeregpont_xl_yu_matrix**, és **nyeregpont_xu_yl_matrix** ismét arra utalva, hogy melyik változó szerint csökkent illetve növel.

Most térjünk vissza arra a kérdéskörre, hogy hogyan válasszuk meg a módosító mátrixot. A válasz egyszerű, ám messze nem kézenfekvő:

3.2.1. Állítás: egy módosító mátrix pontosan akkor jó (pontosan akkor lesz vele eredményes a kereső algoritmus), ha az oszlopai által vett megszorítások mentén különböző szélsőértékei vannak az eredeti függvénynek.

Itt az oszopok által vett megszorítás alatt azt értjük, hogy ha a mátrixunk a következő alakú: $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, akkor az oszopok által vett megszorítások a következők: $f(x, \frac{a_3}{a_1}x)$ és $f(x, \frac{a_4}{a_2}x)$, hiszen az x-tengelyt az első, az y-tengelyt a második megszorításba viszi át a transzformáció. Ez természetesen azt is maga után vonja, hogy az első sorban nem lehetnek nullelemek. Nézzük is meg az állítás rövid bizonyítását.

Bizonyítás. I.) Először nézzük meg azt az irányt, hogy ha a mátrixunk ilyen alakú, akkor megfelelő módosító mátrix. Ezt egyszerű belátni, mert ha felírjuk az x-, illetve y-tengelyre eső megszorításokat, akkor a következőket kapjuk: $f(a_1x, a_3x)$ és $f(a_2y, a_4y)$. Mivel a mátrixról feltettük, hogy az oszlopai által vett megszorítások mentén különböző szélsőértékei vannak az eredeti függvénynek, így most pontosan azt kaptuk, hogy ha az x-tengely mentén lokális minimuma/maximuma van, akkor az y-tengelyen lokális maximuma/minimuma.

II.) A másik irány pontosan ugyanez a gondolatmenet, csupán visszafelé, hogy ha felírjuk a megszorításokat, továbbá tudjuk, hogy ezek mentén eltérő szélsőértékek vannak, és mivel ezeket a mátrix oszlopai jelölték ki, így valóban olyan alakúnak kell lennie a mátrixnak, mint amit be szerettünk volna látni. □

Megjegyezzük, hogy általánosabb esetben úgy fogalmazható meg az állítás, hogy ha a nyeregpont az (a, b) pontban van, akkor a mátrix akkor lesz megfelelő, ha az $x = a$ és az $y = b$ egyenesek metén különböző szélsőértékeket hoz létre. Igen ám, csak így az lesz a probléma a megfogalmazott kirtériummal, hogy akkor használható hatékonyan, ha rendelkezünk valamiféle előzetes ismerettel a nyeregpont legalább hozzávetőleges elhelyezkedését illetően. Ha ez az információ nem áll a rendelkezésünkre, akkor sajnos egyelőre nem tudunk egy általános feltételt mondani egy módosító mátrix "jóságára". Viszont néhány kézenfekvő tényt ne felejtsünk ki, mint például, ha egy módosító mátrix megfelelő, akkor annak bármilyen nemnulla skalárszorosa is, vagy az is, ha az oszlopokat külön-külön szorozzuk valamilyen nemnulla skalárral. Ezen felül az is megfelelő, ha az oszlopokat felcseréljük.

Lezárásként pedig nézzük meg, hogy milyen problémákat okozhat az, ha a mátrix determinánsa 0. A válasz egyszerű. Ha a determináns 0, akkor a leképezés nem injektív, és így a kapott pontnak nem tudjuk egyértelműen kiszámítani az ősképét. Erre jó példa a következő: legyen $f(x,y) = x^3 + y^3$. És emellett legyen a módosító mátrixunk a következő:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ekkor $f(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = f(x,0) = x^3$. Ennek a módosított függvénynek az egész y-tengely mentén nyeregpontjai lesznek, holott az eredetinek pusztán csak az origóban volt.

Függelék

```
function [p1, p2, lepesszam] = nyeregpont_xl_yu(f, lx, ux, ly, uy, p_01, p_02, r) % Parameterek: egy fuggvenyfogantyu, x es y also es felso hatara, kezdopont, lepeskoz

for n=1:1000

    x_pre=p_01;
    y_pre=p_02;

    if f(p_01-r, p_02) < f(p_01,p_02) %Itt az x-szerinti parcialis fuggvenyeket vizsgaljuk

        p_01 = p_01 - r;

    elseif f(p_01+r, p_02) < f(p_01,p_02)

            p_01 = p_01+r;
    end

    if p_01<lx || p_01>ux || p_02<ly || p_02>uy

       error('Kileptunk a tartomanybol!')

    end


    if f(p_01, p_02-r) > f(p_01,p_02)  %Itt az y-szerinti parcialis fuggvenyeket nezzuk

        p_02 = p_02-r;

    elseif f(p_01, p_02+r) > f(p_01,p_02)

        p_02 = p_02+r;
    end
```

```

    x_cur = p_01;
    y_cur = p_02;

    if (x_cur == x_pre) && (y_cur == y_pre)
        lepesszam = n-1;
        break
    end

end

%Logikai allitasok, melyek azt fogalmazzak meg, hogy valamelyik szekcio fuggveny
    menten meg lehet javitani
F = f(p_01+r, p_02) < f(p_01,p_02);
B = f(p_01-r, p_02) < f(p_01,p_02);
FF = f(p_01, p_02+r) > f(p_01,p_02);
BB = f(p_01, p_02-r) > f(p_01,p_02);

if F || B || FF || BB

    error('Nem talaltunk nyeregpontot!')

end

p1 = p_01;
p2 = p_02;

X = linspace(p1-5, p1+5, 51);
Y = linspace(p2-5, p2+5, 51);
[XX, YY] = meshgrid(X,Y);

surf(XX, YY, f(XX,YY))
hold on
plot3(p1,p2,f(p1,p2), 'ro', 'MarkerSize', 15, 'MarkerFaceColor', 'r');

end
```

3.1. forráskód. A nyeregpont_xl_yu eljárás kódja

```
function [p1, p2] = nyeregpont(f, p_01, p_02)

syms x y
G(x,y) = abs(diff(f,x)) + abs(diff(f,y));
g = matlabFunction(G);
j = 0;

while (g(p_01, p_02) - g(p_01+0.001, p_02) > 0 || g(p_01, p_02) - g(p_01-0.001, p_02) > 0 || g(p_01, p_02) - g(p_01, p_02+0.001) > 0 || g(p_01, p_02) - g(p_01, p_02-0.001) > 0) && j < 10^6

    F = g(p_01, p_02) - g(p_01+0.001, p_02); %Az x-szerinti parcialis fuggveny elore iranyba vett elojeles valtozasa
    B = g(p_01, p_02) - g(p_01-0.001, p_02); %Hatra iranyba vett valtozas

    if F > 0 || B > 0

        if F >= B
            p_01 = p_01+0.001;
        else
            p_01 = p_01-0.001;
        end
    end

    FF = g(p_01, p_02) - g(p_01, p_02+0.001); %Ugyanez az y-szerinti parcialis fuggvenyeken
    BB = g(p_01, p_02) - g(p_01, p_02-0.001);

    if FF > 0 || BB > 0

        if FF >= BB
            p_02 = p_02+0.001;
        else
            p_02 = p_02-0.001;
        end
    end

    j = j+1;

end

p1 = p_01;
p2 = p_02;
```

```
if j >= 10^6 || g(p1, p2) >= 0.05
    error('Nem talaltunk kritikus pontot!');
end


pos = 0;
neg = 0;
n = 0;

while (pos<1 || neg<1) && n<360

    if f(p1+0.1*cos(n*pi/180), p2+0.1*sin(n*pi/180)) - f(p1,p2) > 0
        pos = pos+1;
    else
        neg = neg+1;
    end

    n = n+1;

end

if pos<1 || neg<1
    error('A talalt kritikus pont nem nyeregpont!');
end

X = linspace(p1-5, p1+5, 100);
Y = linspace(p2-5, p2+5, 100);
[XX, YY] = meshgrid(X,Y);

surf(XX, YY, f(XX,YY));
hold on
plot3(p1, p2, f(p1, p2), 'ro', 'MarkerSize', 15, 'MarkerFaceColor', 'r');

end
```

3.2. forráskód. Az univerzális algoritmus kódja

```
function [p1, p2, lepesszam]= nyeregpont_xl_yu_matrix(f, p_01, p_02, r, A)

if det(A) == 0
    error('A matrix determinansa 0!');
end

g = @(x,y) f(A(1,1)*x+A(1,2)*y, A(2,1)*x+A(2,2)*y);
j = 0;

while (g(p_01,p_02)-g(p_01+r,p_02) > 0 || g(p_01,p_02)-g(p_01-r,p_02) > 0 || g(p_01,p_02+r)-g(p_01,p_02) > 0 || g(p_01,p_02-r)-g(p_01,p_02) > 0) && j < 10^6

    F = g(p_01,p_02)-g(p_01+r,p_02);
    B = g(p_01,p_02)-g(p_01-r,p_02);

    if F >= 0 || B >= 0
        if F >= B
            p_01 = p_01+r;
        else
            p_01 = p_01-r;
        end
    end

    FF = g(p_01,p_02+r)-g(p_01,p_02);
    BB = g(p_01,p_02-r)-g(p_01,p_02);

    if FF >= 0 || BB >= 0
        if FF >= BB
            p_02 = p_02+r;
        else
            p_02 = p_02-r;
        end
    end

    j = j+1;
end

if j >= 10^6
    error('Nem talaltunk nyeregpontot!');
end

b = A\[p_01; p_02];
p1 = b(1);
```

```
p2 = b(2);
lepesszam = j;

X = linspace(p1-5, p1+5, 51);
Y = linspace(p2-5, p2+5, 51);
[XX, YY] = meshgrid(X,Y);
surf(XX, YY, f(XX,YY))
hold on
plot3(p1,p2,f(p1,p2), 'ro', 'MarkerSize', 15, 'MarkerFaceColor', 'r');

end
```

3.3. forráskód. A mátrixszal módosító eljárás kódja

```
function mult = multiplicitas(f, p1, p2)

m = 1;

for n=1:24

       cur = f(p1, p2) - f(p1+0.1*cos(n*pi/12), p2+0.1*sin(n*pi/12));
       next = f(p1, p2) - f(p1+0.1*cos((n+1)*pi/12), p2+0.1*sin((n+1)*pi/12));

       if (sign(cur) == -1 && sign(next) == 1) || (sign(cur) == 1 && sign(next) == -1)

           m = m+1;
       end

end

if m == 1

    error('Nem nyeregpontban vagyunk!');

else

    mult = floor(m/2);

end

end
```

3.4. forráskód. A multiplicitást meghatározó eljárás kódja

Irodalomjegyzék

[1] Laczkovich Miklós-T.Sós Vera. *Valós analízis II.* Typotex, 2013, 72–76. old.

[2] Jüttner Alpár. *Egyetemi jegyzet.* 2020.

[3] Halász Gábor. *Bevezető komplex függvénytan: Komplex függvénytani füzetek III.* Typotex, 1998, 73–74. old.

Ábrák jegyzéke

Forráskódjegyzék