Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Analízis Tanszék

Frank Ramsey matematikai modelljei a közgazdaságtanban

Témavezető:
Dr. Tóth Árpád
egyetemi docens

Szerző:
Horváth Boldizsár
alkalmazott matematikus BSc

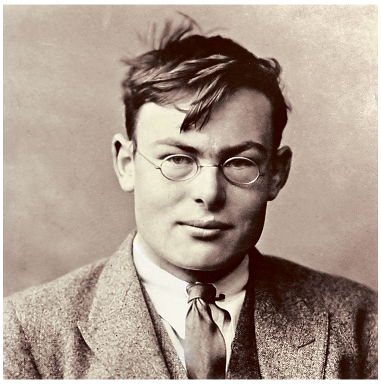
Budapest, 2023

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Frank Plumpton Ramsey (1903, *Cambridge* - 1930, *London*) angol matematikus, közgazdász és filozófus volt, aki jelentős eredményeket ért el mindhárom tudományterületen. Apja, Arthur a Magdalene College igazgatója szintén matematikus volt, míg édesanyja a nők választójogáért és más társadalmi ügyekért kampányolt. Egy fiú és két lánytestvére közül ő volt a legidősebb. Az öccse, Michael Ramsey is ismert, ő Canterbury érseke lett. Tanulmányait Ramsey Cambridgben végezte, itt a híres közgazdász John Maynard Keynes is tanította. 1923-ban szerzett matematikából diplomát, majd tanítani is kezdett Cambridge-ben. [2]



1.1. ábra. Frank Ramsey [1]

Mintegy 15 filozófiai szemléletű esszét írt különböző témákról, amelyek mindegyike Ramsey pragmatikus elemzési módszerét követi, a legfontosabbak talán a *Universals* (1925) és a *Facts and Propositions* (1927), melyekben a nyelv logikus felépítésével és matematikai filozófiával is foglalkozik. Egyik legfontosabb hozzájárulása a filozófiához a hitelmélet. Ramsey a *Facts and Propositions* című írásában a teljes hit fogalmával, valamint az *Truth and Probability* című cikkében a hit fokozataival foglalkozik. Az *On Truth* című, posztumusz megjelent kéziratában pedig a hiedelmeket elemzi. Ramsey közeli kapcsolatban állt Ludwig Wittgenstein-nal, aki a kor elismert filozófusának számított. Gondolataikat, elméleteiket sokszor megosztották egymással. Wittgenstein *Tractatus Logico-Philosophicus* című művét ő fordította le angol nyelvre.

Matematikai munkásságának legjelentősebb területe a kombinatorika és a logika. Ramsey 1928-ban megjelent, *On a Problem of Formal Logic* című munkájában bizonyított egyik tétele (Ramsey csak lemmaként tekintett erre egy másik tétel bizonyításához) ma már az ő nevét viseli : Ramsey-tétel. Ez a teljes gráfok színezésekor kapott monokromatikus klikkekről szól. Ennek kapcsán nevezték el a Ramsey-számokat is. Mára a kombinatorika egy teljes ága (Ramsey-elmélet) foglalkozik hasonló kérdésekkel, hogy mekkorának kell lennie egy adott struktúrának ahhoz, hogy egy tulajdonság érvényesülését biztosan garantáljuk, vagyis az alstruktúrákban valamiféle rend megjelenésével.

A logikában a típuselmélet egyszerűsítésére tett javaslatot, ezt ma egyszerű típuselméletnek nevezzük, ami az elsőrendű logika természetes kiterjesztése.

Keynes buzdítására kezdett közgazdaságtannal is foglalkozni, itt tudta a gyakorlatban kiválóan alkalmazni matematikai ismereteit. Három fontos közgazdasági cikket írt, amelyek jelentőségét csupán évekkel később ismerték fel.

Az 1921-ben írt, de csal posztumusz megjelent *Truth and Probability* című cikkben Keynes egy korábbi megközelítése ellen érvelt. Itt valószínűségszámítási problémák is előkerülnek, Ramsey egy alternatív szubjektív valószínűségi megközelítést terjesztett elő. Annak ellenére, hogy Ramsey valószínűségekkel kapcsolatos munkája nagy jelentőségű volt, senki sem fordított rá figyelmet egészen Neumann János és Oskar Morgenstern *Theory of Games and Economic Behavior* című könyvének megjelenéséig.

1927-es *A Contribution to the Theory of Taxation* cikkében [3] az optimális adóztatás témáját járja körül. Ramsey kimutatta, hogy a hatékony adózáshoz az adók teljes körének bevezetésére van szükség - nem csak egyetlen adóra. A gondosan kialakított, kis torzítások nagy száma jobb, mint egyetlen nagy torzítás. Azt is pontosan megmutatta, hogy ezek a piaci beavatkozások hogyan néznének ki, még árképzési modelleket is leírt.

A Mathematical Theory of Saving (1928) című cikkében [4] a megtakarítások optimalizálásával foglalkozik, a boldogságszint elérése érdekében. Keynes úgy jellemezte a cikket, mint *"a matematikai közgazdaságtanhoz valaha tett egyik legjelentősebb hozzájárulást"*. A későbbiekben ezzel a modellel fogunk részletesen foglalkozni. Ez a két utóbbi dolgozat felelős azért, hogy Ramsey a matematikai közgazdaságtan úttörőjeként vált ismertté, és jellemzően úgy tekintik, hogy ezek a munkák megelőzték korukat. [5]

A krónikus májproblémákkal küzdő Ramsey egy hasi műtét után sárgaságot kapott és 1930-ban mindössze 26 évesen halt meg, korai halála megfosztotta őt attól a lehetőségtől, hogy továbbfejlessze elképzeléseit. Noha keveset tett azért, hogy hirdesse elképzeléseinek fontosságát, és szerénysége sem segített ezen, mégis élete során sok ismert matematikusra, filozófusra és közgazdászra volt komoly hatással, munkássága pedig a mai napig meghatározó. Emléke előtt tisztelegve több kitüntetést, medált, érmet is elneveztek róla. [6]

2. fejezet

Problémafelvetés

2.1. Alapkérdés

A fő probléma, amellyel Ramsey foglalkozik, a következő kérdésből indul ki: a jövedelmének mekkora részét érdemes egy nemzetnek vagy egyénnek megtakarítania? Ennek megválaszolásához egy egyszerű szabályt kapunk, amely meglepően általános feltételek mellett is érvényes.

A szabály, amlyet később még jobban meg fogunk magyarázni, a következőképpen hangzik: A megtakarítási ráta szorozva a tőke marginális hatékonyságával ($\frac{dk}{dt}$) mindig egyenlő kell, hogy legyen azzal az összeggel, amellyel a teljes nettó hatékonysági ráta tér el a maximálisan lehetséges boldogsági aránytól. Tulajdonképpen ez Ramsey cikkének fő eredménye.

2.2. Kezdeti feltevések

A fenti szabály igazolásához természetesen szükség van arra, hogy különböző egyszerűsítő feltevéseket tegyünk: fel kell tételeznünk, hogy a modell során vizsgált közösség örökké fennmarad - vagyis nem véges időben szeretnénk elérni a boldogságszintet - anélkül, hogy a létszáma, a boldogsághoz szükséges elvárások és a munkához való viszony változna. Tegyük fel továbbá azt is, hogy az élvezetek és az ezért hozott gazdasági áldozatok a megfelelő időpontokban számértékekkel jól kifejezhetők és összeadhatók. Azzal a feltevéssel is éljünk, hogy alapvetően nem vezetnek be új találmányokat vagy fejlesztéseket (kivéve esetleg olyanokat, amelyek tekinthetők kizárólag a vagyon felhalmozásának függvényeiként, így ezek megfelelő változtatásokkal beépíthetők a modellbe), hiszen ezek nagymértékben befolyásolhatják a gazdasági szerkezetet. [1]

Egy pontot Ramsey még jobban kiemel, feltételezzük, hogy az időben később bekövetkező boldogságot nem vetjük el a korábban elérthez képest, ami persze nem valósághű, azonban ahhoz szükséges, hogy később egy diszkontrátát is be tudjunk vonni a számításokba. Az egyének közötti elosztási megfontolásokat is teljesen figyelmen kívül hagyja a modell, feltételezve, hogy a fogyasztás és a munkaerő a közösség tagjai között kizárólag a teljes mennyiségüktől függ, így a teljes boldogság is csak ezeknek az összmennyiségeknek a függvénye. Ezen kívül elhanyagoljuk a különbségeket az eltérő javak és a különféle munkafajták között, és feltesszük, hogy rögzített normák szerint fejezzük ki ezeket, így egyszerűen a tőke, a fogyasztás és a munka mennyiségéről beszélhetünk anélkül, hogy azok sajátos formáiról említést kellene tennünk.

Nem kell kizárni a modellből a külkereskedelmet, a hitelfelvételt és a hitelezést sem, feltéve, hogy a külföldi nemzetek stabil gazdasági állapotban vannak, így a velük való üzletelés, kereskedés lehetőségei a következőkben szerepelhetnek, mint a termelés állandó feltételei. A külföldiekkel szembeni fokozatos eladósodás lehetőségét azonban nem engedjük meg.

Végül, azt kell még feltételeznünk, hogy a közösséget a felhalmozás, megtakarítás tekintetében mindig ugyanazok a motívumok vezérlik, hogy ne legyen esélye annak, hogy korábbi megtakarításainkat önző módon fogyasztja el egy következő generáció; és hogy nem történik olyan katasztrófa vagy szerencsétlenség, amely az eddig felhalmozott vagyont a jövő bármely pontján megsemmisítené.

2.3. Kiinduló összefüggések

A termelési folyamat eredménye, a megszerzett jövedelem vagy elfogyasztható vagy befektethető a tőkeállomány növelésére. Mivel Ramsey zárt, kormányzat nélküli gazdaságot vizsgál, az első egyenlet, amelyet bevezet, a nemzeti számlák azonosságára vonatkozik, amely a kiadások összértékét a fogyasztás és a beruházás összegével teszi egyenlővé, ebből az utóbbi a meglévő tőkeállomány növelésére szolgál.

[1] Ezen feltételek a modernebb modellekben nem mind szükségesek, lásd: 5. fejezet és [7]

2.3.1. Cobb-Douglas típusú modellek

Ramsey nem részletezi az $F(L,K)$ jövedelmi függvény pontos alakját, de ezt írja le a Cobb-Douglas szorzatfüggvény, amely a teljes jövedelmet a munka és a tőke megfelelő hatványainak szorzataként adja meg: $F(L,K) = A \cdot L^{\beta} \cdot K^{1-\beta}$, ahol $\beta \approx 0.741$, A pedig egy hatékonysági paraméter. [8]

Fontos, hogy F homogén legyen, vagyis $F(K,L) = L \cdot F(K/L, 1) = L \cdot f(k)$, tehát $k = \frac{K}{L}$. Ezzel tudjuk kifejezni az egy főre jutó jövedelmet. Itt szokásos feltevés f-ről, hogy konkáv.

2.3.2. Jövedelem

Jelöljük tehát $x(t)$-vel és $L(t)$-vel a közösség teljes fogyasztási- illetve munkaarányát; $K(t)$-vel pedig a tőkét a t időpontban. A jövedelmet tekintsük a munka és a tőke mennyiségének függvényeként, és ezt jelöljük $F(L,K)$-val. Ennek meghatározását a Cobb-Douglas féle termelési függvénnyel végezhetjük. (lásd: 2.3.1) Standard feltevés, hogy $F(l,k)$ legyen homogén 1 fokban, hiszen a munka és a tőke mennyisége is pénzértékben (ME, monetáris egység) van kifejezve, így szükséges, hogy $F(l,k)$ is monetáris egységet jelentsen. Valamint hogy kétszeres munkához és kétszeres tőkéhez kétszeres jövedelem tartozzon. Az (1) összefüggés tehát abból következik, hogy a megtakarításoknak és a fogyasztásnak (amibe az eszközök értékcsökkenését is beleszámítjuk) egyenlőnek kell lennie a jövedelemmel:

$$\frac{dK}{dt} = F(L,K) - \delta K - x. \tag{1}$$

- $x(t)$ - összfogyasztás
- $L(t)$ - összmunka
- $K(t)$ - össztőke
- $F(L,K)$ - jövedelem
- δ - értékcsökkenési ráta

A fenti, t időbeli jelöléseket használjuk, mert habár ezek a mennyiségek diszkrétek, de jól közelíthetők sima függvénnyel. (átlagolás után)

Például a 2.1 ábra egy részvény (mangán és vasérc kitermelő vállalat [9]) értékének alakulása, ami diszkrét, a zöld színű sima függvény az átlagolt értékeket mutatja:

2.1. ábra. Részvény árfolyam alakulása és közelítése sima függvénnyel [9]

2.3.3. Hatékonyság

Legyen $U(x)$ az x fogyasztási arány teljes hatékonysági rátája, $V(L)$ pedig legyen az L munka teljes veszteségi rátája. A továbbiakban az adott függvények deriváltjait marginális függvényeknek fogjuk nevezni. Jelöljük a fogyasztás hatékonysági-, illetve a munka veszteség-függvényének marginálisát $u(x)$-szel és $v(L)$-lel.

- $u(x) = \frac{dU(x)}{dx}$; $U(x)$ - a fogyasztás hatékonysági függvénye
- $v(L) = \frac{dV(L)}{dl}$; $V(l)$ - a munka veszteségfüggvénye

Ezekről azt tesszük fel, hogy $u(x)$ soha nem nő, konvex; és $v(L)$ soha nem csökken, konkáv.

Ezek után Ramsey bevezet egy fogalmat, amely a későbbiekben központi jelentőségű lesz. Tegyük fel, hogy van egy adott K tőkénk, és azt sem növelni, sem csökkenteni nem fogjuk. Ekkor $U(x) \quad V(L)$ jelöli az időegységre jutó nettó élvezetet, ennek a maximumát tekintjük, azzal a feltétellel, hogy az x fogyasztás megegyezik azzal, amit L munkával és K tőkével meg tudunk termelni.

Az így kapott $U(x) \quad V(L)$ élvezeti arány a rendelkezésre álló K tőke függvénye lesz és egy bizonyos pontig növekedni fog, ahogyan K növekszik, mivel több tőkével több élvezetet tudunk szerezni. Az élvezetek mértékének a növekedése a tőke mennyiségének növekedésével azonban két okból is megállhat:

- Lehetséges, hogy a tőke további növekedése már nem tenné lehetővé sem a jövedelem, sem a szabadidő növelését; vagy lehet, hogy elérte az elképzelhető maximális élvezeti arányt, és így nincs szükség több jövedelemre vagy szabadidőre. Mindkét esetben egy bizonyos véges tőke a gazdaságilag elérhető legnagyobb mértékű élvezetet nyújtaná, függetlenül attól, hogy ez az elképzelhető legnagyobb arány-e.

- Másrészt előfordulhat az is, hogy az élvezetek mértékének növekedése soha nem áll meg a tőke növekedésével. Ekkor két lehetőség van: vagy az élvezetek mértéke a végtelenségig növekszik (ezt a modellben kizárjuk, mert a gazdasági okok önmagukban soha nem adhatnak többet, mint egy bizonyos véges élvezeti arányt); vagy aszimptotikusan közelít egy bizonyos véges értékhez, amely lehet, hogy megegyezik a maximális élvezeti értékkel, de elképzelhető, hogy nem. Ezt a határt nevezzük a maximálisan elérhető élvezeti aránynak, bár szigorúan véve ez soha nem érhető el, hanem csak végtelenül megközelíthető.

Vagyis azt feltételezzük, hogy egy ilyen függvény felülről korlátos, és a felső határ - amelyet Ramsey B boldogságszintként (*Bliss*) jelöl - vagy véges tőkeszint mellett, vagy aszimptotikusan, a tőke végtelenre növekedésével érhető el.

A munka és a fogyasztás közötti kompromisszumot figyelembe véve kapjuk a marginális veszteségfüggvény és a munka hatékonysága közötti (2) összefüggést: a munka marginális vesztesége a jövedelem munka szerinti marginális hatékonyságának és a fogyasztás marginális hatékonyságának a szorzatával egyezik meg.

$$v(L) = \frac{\partial F}{\partial L} u(x) \tag{2}$$

2.3.4. Diszkontálás

A diszkontálással foglalkozó 4.2.4 részben, azt szeretnénk meghatározni, hogy mekkora a diszkontált haszon, vagyis hogy egy jelenlegi P_0 haszon mennyit fog érni t idő múlva (P_t), ha r adott kamatláb. Ha egy időegység alatt n-szer diszkontálunk:

$$P_t = P_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{tn}$$

Ha n sűrű, akkor ez közelítőleg:

$$P_0 = P_t \quad e^{\quad rt}$$

Ezt alkalmazva, kapjuk:

$$U(k) = \int_{k_0}^{1} e^{\quad rt} \quad u(k)dk$$

ahol $U(k)$ a hatékonysági függvény, k_0 a kezdeti tőke.

2.3.5. A feladat matematikai megfogalmazása

Ha $c = \frac{x}{L}$ az egy személyre jutó fogyasztás, akkor a feladat matematikai alakban megfogalmazva:

$$\max_{x} \int_{0}^{1} e^{\quad rt} \quad u(c)\,\mathrm{d}t$$

azzal a mellékfeltétellel, hogy

$$c = f(k) \quad k$$

Ez pedig egy variációszámítási feladat, ezért most a megoldás lehetőségeivel fogunk foglalkozni.

3. fejezet

Euler-Lagrange egyenlet

3.1. Variációszámítás

A variációszámításban funkcionálok szélsőértékének a meghatározása a cél, ez pedig az Euler-Lagrange egyenlettel tehető meg. Ilyen problémák már régóta foglalkoztatják az emberiséget, de csak Newton és Bernoulli idején kezdtek el részletesen foglalkozni vele. Majd Euler és Lagrange fektették le a variációszámítás alapjait.

Mivel a differenciálható függvények deriváltja zérus a lokális szélsőértékeknél, így az egyenlet szükséges feltételt ad a szélsőérték létezésére, ezért használható optimalizációs problémák megoldásakor. Például, ha adott egy funkcionál, és a feladat az, hogy megtaláljuk azt a függvényt, amely minimalizálja vagy maximalizálja azt. A probléma megoldása során Ramsey is arra jut, hogy az Euler-Lagrange egyenlet adja majd meg a keresett függvényt. Ezért variációszámítási eszközökkel határozható meg az adott feltételek melletti optimális hatékonyságú megtakarítás.

3.2. Állítás

Abból indulunk ki, hogy adott $F(t, x, y)$ függvény mellett azt az $x(t)$ függvényt keressük, melyre $\int F dt$ minimális. A szélsőérték ott lesz, ahol az összes megengedett η perturbációra, az η irányban vett derivált 0, azaz

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \int F(t, x(t) + \varepsilon\eta(t), x^{0}(t) + \varepsilon\eta^{0}(t))dt = 0$$

teljesül.

Tegyük fel, hogy $x_0(t)$ a fentieknek megfelelő függvény, legyen ekkor $x(t) = x_0(t) +$

$\varepsilon \quad \eta(t)$, ahol ε 2 $\mathbb{R}$, $\eta(t)$ pedig legalább kétszer folytonosan differenciálható függvény és peremfeltételként tegyük fel, hogy $\eta(a) = \eta(b) = 0$.
Ekkor legyen

$$F_\varepsilon = F(t, x_0(t) + \varepsilon \quad \eta(t), x_0^0(t) + \varepsilon \quad \eta^0(t)).$$

Az ε szerinti deriváltat kiszámolva kapjuk az Euler-Lagrange egyenletet [10] ami a szélsőérték szükséges feltétele. Ennek általános alakja:

$$\partial_2 F(t, x(t), x^0(t) \qquad \frac{d}{dt}\partial_3 F(t, x(t), x^0(t)) = 0.$$

Ez egy (általában nem lineáris) közönséges differenciálegyenlet az optimális trajektóriára.

3.3. Levezetés

A fentiek igazolására legyen η legalább kétszer folytonosan differenciálható függvény. Vizsgáljuk a $J(\varepsilon) = \int_a^b F(t, x_0(t) + \varepsilon \quad \eta(t), x_0^0(t) + \varepsilon \quad \eta^0(t))dt$ egyváltozós függvényt. Ha x_0-ban minimum/maximum van, akkor $J^0(0) = 0$ kell legyen. (Feltéve hogy létezik.)

Szeretnénk $\frac{dJ_\varepsilon}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b F_\varepsilon = \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon}F_\varepsilon$ -t kiszámolni.

$$\frac{dF_\varepsilon}{d\varepsilon} = \frac{dt}{d\varepsilon}\partial_1 F_\varepsilon + \frac{dx}{d\varepsilon}\partial_2 F_\varepsilon + \frac{dx^0}{d\varepsilon}\partial_3 F_\varepsilon = \frac{dx}{d\varepsilon}\partial_2 F_\varepsilon + \frac{dx^0}{d\varepsilon}\partial_3 F_\varepsilon = \eta(t)\partial_2 F_\varepsilon + \eta^0(t)\partial_3 F_\varepsilon$$

Mivel t nem függ ε-tól, ezért $\frac{dt}{d\varepsilon} = 0$ és így az első tag kiesik.

$$\frac{dJ_\varepsilon}{d\varepsilon} = \int_a^b \eta(t)\partial_2 F_\varepsilon + \eta^0(t)\partial_3 F_\varepsilon dt$$

$\varepsilon = 0$ esetén számítjuk a keresett szélsőértéket, mivel ekkor lesz $x(t) = x_0(t)$, illetve $F_\varepsilon = F(t, x(t), x^0(t))$.

$$\left.\frac{dJ_\varepsilon}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \eta(t)\partial_2 F + \eta^0(t)\partial_3 F dt = \int_a^b \eta(t)\partial_2 F dt + \int_a^b \eta^0(t)\partial_3 F dt$$

A második tagot parciálisan integrálhatjuk:

$$\int_a^b \eta^0(t)\partial_3 F dt = [\eta(t)\partial_3 F]_a^b \qquad \int_a^b \eta(t)\frac{d}{dt}\partial_3 F dt$$

A $\eta(a) = \eta(b) = 0$ peremfeltétel alapján $[\eta(t)\partial_3 F]_a^b = 0$.

$$\left.\frac{dJ_\varepsilon}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \eta(t)\partial_2 F dt \quad \eta(t)\frac{d}{dt}\partial_3 F = \int_a^b \eta(t) \quad \left(\partial_2 F \quad \frac{d}{dt}\partial_3 F\right) dt = 0$$

Mivel ennek minden, a feltételnek megfelelő $\eta(t)$ függvényre teljesülnie kell, ezért:

$$\partial_2 F \quad \frac{d}{dt}\partial_3 F = 0$$

3.4. Példa

- Legrövidebb görbe $P(a_1, a_2)$ és $P(b_1, b_2)$ pontok között

Az $y(x)$ görbe ívhosszát $\int_{a_1}^{b_1} \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$ integrállal számíthatjuk ki. Ekkor $F(x, y(x), y'(x)) = \sqrt{1 + (y'(x))^2}$

Most alkalmazzuk az Euler-Lagrange egyenletet, hogy megkeressük F szélsőértékét:

$$\partial_2 F \quad \frac{d}{dx}\partial_3 F = 0$$

Az első tag független $y(x)$-től, ezért minden $y(x)$-re nulla, így:

$$\frac{d}{dx}\partial_3 F = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\quad \frac{1}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}\right) = 0$$

$$\frac{y''(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}^3} = 0$$

Mivel a nevező sehol sem 0, ezért $y''(x) = 0$. Egy közönséges differenciálegyenletet kaptunk az optimális görbére. Ennek megoldása pedig $y(x) = C_1 x + C_2$. A kezdeti feltételekből a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} C_1 a_1 + C_2 = a_2 \\ C_1 b_1 + C_2 = b_2 \end{cases}$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\left(\frac{a_2 \quad b_2}{a_1 \quad b_1} + \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_1 \quad b_1}\right)$$

$$y(x) = \frac{a_2 \quad b_2}{a_1 \quad b_1} x + \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_1 \quad b_1}$$

Ami egy egyenes egyenlete.

3.5. Peremfeltétel mellett

- Láncgörbe

Ilyen peremfeltételes feladat például az, amikor egy végeinél rögzített, hajlékony, de nyújthatatlan kötél vagy lánc egyensúlyi alakját akarjuk meghatározni. A hétköznapi életben is sok helyen találkozhatunk ezzel, például távközlési vagy vasúti felsővezetékek, hidak esetében. A saját súlya alatt behajló (és a rögzítési pontok távolságánál nyilván hosszabb) kötél egyensúlyi alakját az jellemzi, hogy a kötél helyzeti energiájának minimálisnak kell lennie. [11] Legyenek x_A és x_B a kötél végpontjai, ekkor F funkcionál minimumát szeretnénk meghatározni:

$$F = \int_{x_A}^{x_B} G(x, y(x), y^0(x))dx = \int_{x_A}^{x_B} y \quad \sqrt{1 + (y^0(x))^2} dx$$

A peremfeltétel pedig az lesz, hogy a kötél hossza legyen állandó l hosszúságú:

$$l = \int_{x_A}^{x_B} H(x, y(x), y^0(x))dx = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (y^0(x))^2} dx$$

A Lagrange-féle multiplikátor módszert alkalmazva azt kapjuk, hogy $L \quad \lambda G$ -re kell az Euler-Lagrange egyenletnek teljesülnie:

$$\partial_2(L \quad \lambda G) \quad \frac{d}{dx} \partial_3(L \quad \lambda G) = 0$$

ahol a feladatnak megfelelően

$$L \quad \lambda G = y \quad \sqrt{1 + (y^0(x))^2} \quad \lambda \quad \sqrt{1 + (y^0(x))^2}$$

Ez viszont hiányos, nem függ x-től, ezért:

$$y^0(x) \quad \partial_3(L \quad \lambda G) \quad (L \quad \lambda G) = \frac{y(x) \quad \lambda}{\sqrt{1 + (y^0(x))^2}} = a$$

$$(y(x) \quad \lambda)^0 = \sqrt{\left(\frac{y(x) \quad \lambda}{a}\right)^2 \quad 1}$$

$$a \quad \mathrm{arch}\left(\frac{y(x) \quad \lambda}{a}\right) = x \quad b$$

$$y(x) = \lambda + a \quad \mathrm{ch}\left(\frac{x \quad b}{a}\right)$$

A kötél vagy lánc alakját tehát egy „láncgörbe” (*catenary*) adja meg, melynek a, b és λ paramétereit a végpontok koordinátái és a kötél hossza egyértelműen meghatározza.

4. fejezet

A probléma megoldása

4.1. Alapfeladat

A számítások a Ramsey-Cass-Koopmans modellen alapszanak [7]. Legyen $c = \frac{x}{L}$ az egy főre jutó fogyasztás, valamint $k = \frac{K}{L}$ az egy főre jutó tőke. Feltéve, hogy $L = L_0 \cdot e^{nt}$.

$$\dot{k} = \frac{\dot{K} L - K \dot{L}}{L^2} = \frac{(F(K,L) - \delta \cdot K - L \cdot c) \cdot L - n \cdot K \cdot L}{L^2},$$

ahol $F(K,L) = L \cdot f(k)$ és felhasználtuk, hogy $\dot{L} = n \cdot L$. Ezért, ismét csak a $k = \frac{K}{L}$-t használva

$$\dot{k} = \frac{L^2 \cdot f(k) - \delta \cdot k \cdot L^2 - L^2 \cdot c - n \cdot k \cdot L^2}{L^2} = f(k) - (\delta + n) \cdot k - c$$

ha $n = 0$, hiszen Ramsey időben állandó munkaerővel számol

$$c(t) = f(k(t)) - \delta \cdot k(t) - \dot{k}$$

Ramsey-nél a boldogság függvény $B - (U(x) - V(L))$ alakú, mert nem csak a fogyasztás hatékonyságát, hanem a munka veszteségét is beleszámítja, illetve összfogyasztással és összmunkával számol, és a boldogságszinttől való eltérést minimalizálja. Itt most tekintsük csak $u(c)$-t, így $F(t, k(t), \dot{k}(t)) = e^{-\varrho t} \cdot u(f(k) - \delta \cdot k - \dot{k})$ lesz.

Ha $\delta = 0$, $\varrho = 0$, vagyis az értékcsökkenéstől, és a diszkontálástól is eltekintünk, akkor

$$F(t, k(t), \dot{k}(t)) = u(f(k) - \dot{k})$$

$$\partial_2 F = u'(f(k) - \dot{k}) \cdot f'(k) = u'(c) \cdot f'(k)$$

$$\partial_3 F = -u'(f(k) - \dot{k})$$

Az Euler-Lagrange egyenlet:

$$u'(c) \cdot f'(k) = -\frac{d}{dt} u'(c) = -\frac{du'(c)}{dc}\frac{dc}{dt} = -u''(c) \cdot \dot{c}$$

Átrendezve $\dot{c}$-ra

$$\dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)} \cdot f'(k) = \sigma(c) \cdot f'(k) \cdot c$$

ahol $\sigma(c) = -\frac{u'(c)}{c\, u''(c)}$.

$\sigma(c)$-nek érdekes értelmezése az ú.n. rugalmasság (elaszticitás). Ez azt méri, hogy hány százalékkal változik meg egy függvény értéke a változó értékének megváltozása esetén.

$$\left(-\frac{\ln u'(c)}{\ln c}\right)' = -\frac{\frac{1}{u'(c)} \cdot u''(c) \cdot \dot{c}}{\frac{1}{c} \cdot \dot{c}} = -\frac{c(t) \cdot u''(c)}{u'(c)} = \frac{1}{\sigma(c)}$$

Így

$$\sigma(c) = -\frac{u'(c)}{c \cdot u''(c)} = \left(-\frac{\ln c}{\ln u'(c)}\right)'$$

Ha $c(t)$ Δr %-kal változik Δt alatt:

$$\frac{\ln(c(t + \Delta t) - \ln c(t)}{\Delta t} = \frac{\ln(1 + \Delta r)}{\Delta t} \approx r'(t)$$

4.1.1. Stabil megoldás

Ha figyelembe vesszük n, δ, ϱ paramétereket is, akkor

$$u'(c) \cdot (f'(k) - \delta - \varrho) = -u''(c) \cdot \dot{c}$$

Ezért az optimális fogyasztás-tőkefelhalmozás az alábbi csatolt differenciál-egyenletrendszerre vezet

$$\begin{cases} \dot{c} = \sigma(c) \quad (f'(k) \quad \delta \quad \varrho) \quad c \\ \dot{k} = f(k) \quad (\delta + n) \quad k \quad c \end{cases}$$

Ekkor $\dot{c} = 0$ és $\dot{k} = 0$ esetén lesz egyensúlyi pont. Ennek több megoldása van, $(0; 0)$ a feladat értelmezése szempontjából nyilván nem érdekes. Az egyik megoldása

$$f'(k\ ) = \delta + \varrho$$

$$c\ = f(k\ ) \quad (n + \delta) \quad k$$

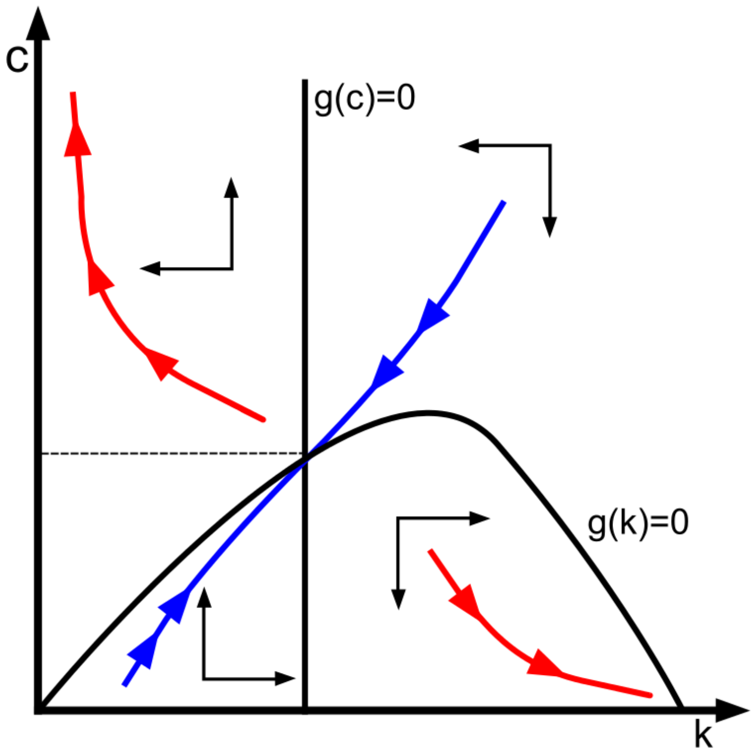
A Jacobi-mátrix:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{k}}{\partial k} & \frac{\partial \dot{k}}{\partial c} \\ \frac{\partial \dot{c}}{\partial k} & \frac{\partial \dot{c}}{\partial c} \end{bmatrix}$$

A Jacobi-mátrix a stabilitási pontban:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \varrho \quad n & 1 \\ \frac{1}{\sigma} f''(k) \quad c & 0 \end{bmatrix}$$

$\frac{\partial \dot{c}}{\partial c} = 0$, mert $\sigma(c) \neq 0$ és $c \neq 0$, viszont $f'(k\ ) \quad \delta \quad \varrho = \delta + \varrho \quad \delta \quad \varrho = 0$.
$\det \mathbf{J} = \frac{1}{\sigma} f''(k) \quad c\ < 0$, mivel $c\ > 0$, a feltevéseink szerint $\sigma(c)$ pozitív, $f''(k) < 0$, mert f konkáv. Ezért a sajátértékek ellentétes előjelűek lesznek, λ_1 pozitív és λ_2 negatív. Ezek alapján tehát a rendszernek nyeregpontja lesz.



4.1. ábra. A differenciálegyenlet fázisképe [12]

4.1.2. Értelmezés

$$\frac{d}{dt}u(x(t)) = \quad \frac{\partial f}{\partial k}u(x(t)) \tag{3}$$

Ez a (3) egyenlet, amelyet Ramsey figyelembe vesz, az Euler-Lagrange egyenlet, ez garantálja, hogy a megtakarítási választás minden t időre optimális lesz. Az egyenletből az is megfigyelhető, hogy $u(x)$, a fogyasztás marginális hatékonysága, a kamattal arányos mértékben csökken. Következésképp x folyamatosan nő, amíg $\frac{\partial F}{\partial K}$ vagy $u(x)$ el nem tűnik. Könnyen látható, hogy ekkor a B boldogságszintet elértük.

Az (1), (2) és (3) egyenletek elegendőek a feladat megoldásához, feltéve, hogy ismerjük K_0-t, azt az adott tőkét, amellyel a nemzet kezdetben, $t = 0$-kor indul, a másik kezdeti feltételt pedig a függvény viselkedésére vonatkozó megfontolások adják, ahogy t ! 1 .

Az egyenletek megoldásakor megfigyelhetjük, hogy x, L és K mind egy változó, az idő függvényei. Így az alábbiakat kapjuk:

$$\frac{d}{dx}(u(x) \quad F(L,K)) = \frac{d}{dx}F(L,K) + u(x)\partial_1 F\frac{dL}{dx} + u(x)\partial_2 F\frac{dK}{dt}\frac{dt}{dx} =$$

$$= \frac{d}{dx}F(L,K) + v(L)\frac{dL}{dx} \quad \frac{du(x)}{dt}(F(L,K) \quad x)\frac{dt}{dx} = x\frac{du}{dx} + v(L)\frac{dL}{dx}$$

Majd parciális integrálással:

$u(x) \quad F(L,K) = x \quad u(x) \quad U(x) + V(L) + C$, ahol C konstans.

Ezt átrendezve kapjuk (4) egyenletet:

$$\frac{dK}{dt} = F(L,K) \quad x = \frac{C \quad (U(x) \quad V(L))}{u(x)} \tag{4}$$

Szavakkal megfogalmazva: A megtakarítási ráta és a fogyasztás marginális hasznosságának szorzata mindig megegyezik a boldogságszint mínusz az élvezhető hatékonyság tényleges aránya.

Ugyanis itt C-t annak a B boldogságszintnek kell tekintenünk, amelyet el szeretnénk érni. Ramsey megváltoztatja a változót, az idő helyett a tőkét használja releváns állapotváltozóként, annak kimutatására, hogy az integrációs állandó, amelyet az Euler-Lagrange egyenlet által adott differenciálegyenlet megoldásához ki kell számítani, egyenlő a B boldogságszinttel.

$\int_0^{1} B \quad U(x) + V(L)dt$ jelenti azt a mennyiséget, amellyel az élvezet elmarad a boldogságtól, az idő szerint integrálva. Ez véges (vagy végessé tehető), és az a cél, hogy ezt minimalizáljuk.

Ha K-t tekintjük független változónak, akkor a kifejezés nagymértékben leegyszerűsödik. Az integrál a következő lesz:

$$\int_{K_0}^{1} \frac{B \quad U(x) + V(L)}{\frac{dK}{dt}} dK$$

Az (1) összefüggés felhasználásával pedig adódik:

$$\int_{K_0}^{1} \frac{B \quad U(x) + V(L)}{F(L,K) \quad x} dK$$

Ekkor x és L tetszőleges függvényei K-nak, és az integrál minimalizálásához egyszerűen csak az integrandust kell minimalizálni, azáltal, hogy a parciális deriváltjait nullával egyenlővé tesszük. Az x-re vonatkozó parciális deriváltat (∂_2) véve:

$$\partial_2 \left(\frac{B \quad U(x) + V(L)}{F(L,K) \quad x} \right) = \frac{u(x)}{F(L,K) \quad x} + \frac{B \quad U(x) + V(L)}{(F(L,K) \quad x)^2} = 0$$

$$\frac{dK}{dt} = F(L,K) \quad x = \frac{B \quad U(x) + V(L)}{u(x)} \tag{5}$$

Vagyis a megtakarítási ráta és a fogyasztás marginális hatékonyságának szorzata meg kell, hogy egyezzen a boldogságszint mínusz a tényleges hatékonysági ráta.

Ramsey Keynes ötlete alapján azzal példálózik, hogy ha egy évben £1-tal kevesebbet teszünk félre, akkor £z fontot csak $1 + \frac{1}{z}$ év alatt kell megtakarítanunk, nem 1 év alatt, mint eredetileg. Ezért $1 + \frac{1}{z}$ év után fogunk ott tartani, ahol 1 év után kellene. Vagyis a boldogságot elhalasztjuk $\frac{1}{z}$ évvel, a jelenlegi élvezet növelése érdekében. Az áldozat, tehát:

$$\frac{1}{z}(B \quad (U(x) + V(L)))$$

Ha ezt $u(x)$-el egyenlővé tesszük és z-t $\frac{dK}{dt}$-vel, a határértékével helyettesítjük, akkor ismét az (5) egyenletre jutunk. Ám ez az egyszerű érvelés nem alkalmazható, ha figyelembe vesszük az időbeli diszkontálást, ezért érdemesebb az (1)-(4) egyenletekkel számolni, amelyek viszont könnyen kiterjeszthetők bonyolultabb, összetettebb problémákra is.

Ramsey szerint a szabály legfigyelemreméltóbb jellemzője, hogy teljes mértékben független az $F(L,K)$ jövedelem függvénytől, kivéve annyiban, hogy ez határozza meg a boldogságszintet. Az az összeg, amelyet egy adott jövedelemből meg kell takarítanunk teljesen független a jelenlegi kamatlábtól (kivéve, ha ez a kamatláb azonosan nulla).

4.2. A modell kiterjesztése

4.2.1. Szükséges feltételezések

Ramsey abból a feltevésből indul ki, hogy a tényezőárak, azaz a bérszínvonal és a kamatláb konstansok és egymástól függetlenek. Vagyis a jövedelem a következőképpen áll elő:

$$F(L, K) = p \quad L + r \quad K$$

- p - a munkabérek arányossági tényezője
- r - kamat tényező (kamatláb)

Ezek a feltételezések lehetővé teszik:

I. grafikus elemzés készítését (4.2.2)

II. véges élethosszt a modellben (4.2.3)

III. diszkontált haszon és veszteség vizsgálatát (4.2.4)

Az új feltételek szerint a közösség jövedelme két világosan meghatározott részre, $p \quad L$-re és $r \quad K$-ra oszlik, amelyeket célszerű kereseti (munkából származó) és nem kereseti (befektetésből származó) jövedelemnek nevezni.

4.2.2. Grafikus elemzés

(2) egyenletet most a következőképp írhatjuk:

$$v(L) = p \quad u(x)$$

Ez az alak pedig csak x függvényeként határozza meg L-et, ezért vezessük be y-t a következőre:
$y = x \quad p \quad L$ = fogyasztás bevétel

$$w(y) = u(x) = \frac{v(L)}{p}$$

$$W(y) = \int w(y)dy = \int (u(x)dx \quad v(L)dL) = U(x) \quad V(L)$$

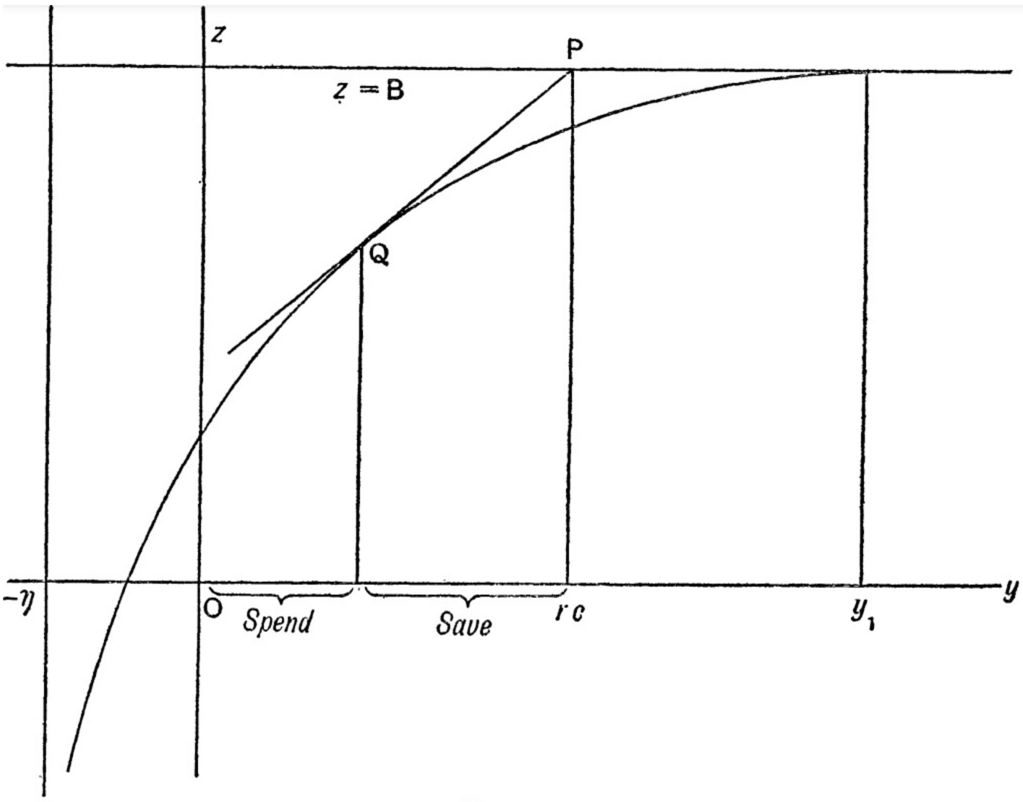
- $W(y)$ - befektetésből származó jövedelem hatékonysága
- $w(y)$ - befektetésből származó jövedelem marginális hatékonysága

(5) egyenletből ekkor azt kapjuk, hogy:

$$rK \quad y = F(L, K) \quad x = \frac{B \quad W(y)}{w(y)} \tag{6}$$

$$B \quad W(y) = \frac{dW}{dy}(r \quad K \quad y)$$

Amiből már látható, hogy $(rK; B)$ pont a $z = W(y)$ görbe y-beli érintőjén helyezkedik el. (Ramsey a K helyett az ábráján a c jelölést használja) A 2.1 ábra a $z = W(y)$ görbét mutatja, amely vagy eléri a B értéket egy véges y_i értéknél (az ábrán látható eset) vagy pedig aszimptotikusan közelít hozzá, ahogy y ! 1 .



4.2. ábra. A megtakarítandó összeg grafikus meghatározása [4]

Annak meghatározása érdekében, hogy egy adott nem kereseti $r \quad K$ jövedelemből mennyit kell megtakarítani, tekintsük a $z = B$ egyenes $P = (rK; B)$ pontját, majd ebből húzzunk egy érintőt a görbéhez (nem $z = B$ -t, ami mindig az egyik érintő lesz, hanem a másikat). Ha a Q érintési pont abszcisszája y, akkor a nem kereseti jövedelemből y részt kell elfogyasztani (4.2-en: *Spend*) és a maradékot, $rK \quad y$-t kell megtakarítani (4.2-en: *Save*). Természetesen y lehet negatív is, ami azt jelentené, hogy nem csak a teljes nem kereseti jövedelem kerülne megtakarításra, hanem a kereseti jövedelem egy része is.

Könnyű belátni, hogy mindig léteznie kell egy ilyen érintőnek, mert a $z = W(y)$ görbének vagy lesz egy érintője vagy $y = \quad \eta$ aszimptotája , ahol $\quad \eta$ a jövedelemnek a fogyasztást meghaladó legnagyobb többlete.

Ezzel meghatároztuk, hogy egy adott jövedelemből mennyit kell elköltenünk, de azt nem, hogy adott idő elteltével mennyi lesz a jövedelem. Ezt a (3) egyenletből kapjuk meg, amely most:

$$\frac{d}{dt}w(y) = \quad r \quad w(y)$$

Ennek a differenciálegyenletnek a megoldása:

$$w(y) = w(y_0) \quad e^{\quad rt} \tag{7}$$

ahol y_0 az y $t = 0$ időpontbeli kezdeti értéke, amit Q abszcisszája határoz meg. ($P_0 = (rK_0; B)$) Meg szeretnénk találni a K tőke felhalmozásához szükséges időt egy K_0 kezdeti tőkéből. P-nek vegyük az $(rK; B)$ pontot, P_0-nak pedig az $(rK_0; B)$ pontot. $w(y)$ ekkor a P-ből húzott érintő meredeksége, $w(y_0)$ pedig a P_0-ból húzott érintő meredeksége, tehát a kérdéses időt a következőképpen kapjuk:

$$\frac{1}{r} \quad \ln\frac{w(y_0)}{w(y)} = \frac{1}{r} \quad \ln\frac{P_0\text{-beli érintő meredeksége}}{P\text{-beli érintő meredeksége}}$$

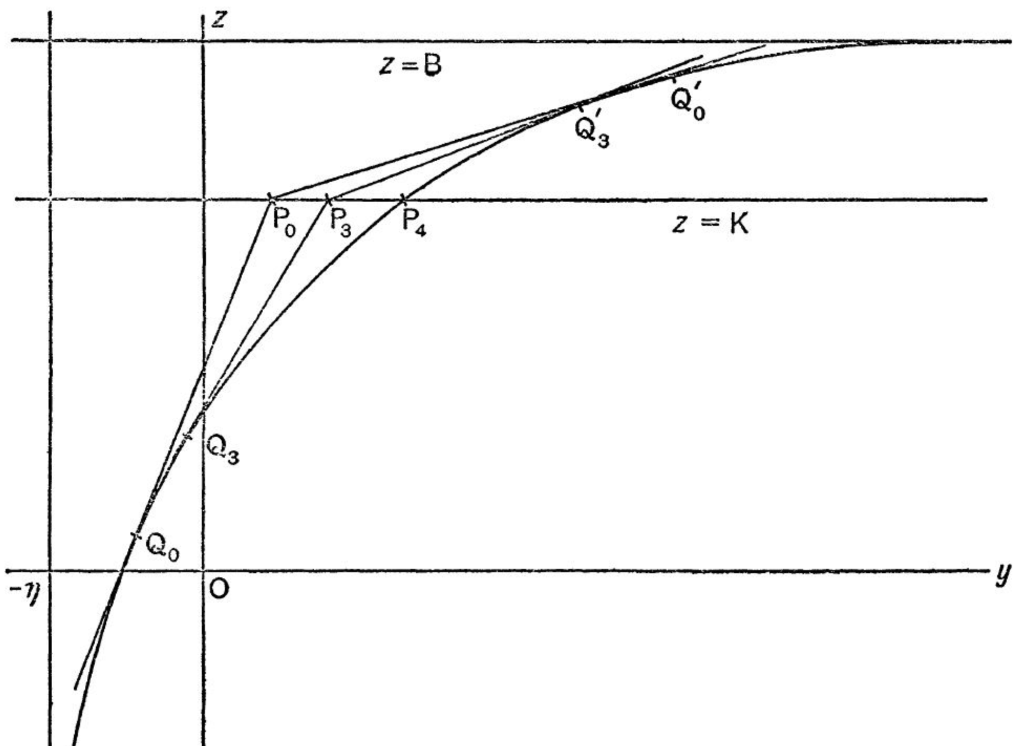
4.2.3. Véges élethossz

A modell kiterjesztésekor a véges élettartam esetére Ramsey a fentebb kidolgozott grafikus elemzést használja. Tegyük fel most, hogy a modellben egy egyénről van szó, aki csak egy meghatározott ideig, T évig él, ahelyett, hogy egy közösséget tekintenénk, amely örökké fennáll. A (4) egyenletbe helyettesítve:

$$rK \quad y = \frac{C \quad W(y)}{w(y)} \tag{8}$$

Ramsey cikkében megmutatja, hogy míg az optimális megtakarítás képlete hasonló a végtelen élettartamú esethez, a tőke (és így a megtakarítás) optimális szintje más. Az optimális pálya ugyanis egy olyan szinthez konvergál, amely alacsonyabb, mint ami lehetővé tenné a B boldogságszint elérését. Vagyis itt C, amit meg kell határozni már nem egyenlő B boldogságszinttel. A hatékonysági korlát levezetése során a modell paramétereként figyelembe veszi azt a hagyatékot is, amelyet a reprezentatív fogyasztó az örököseire akar hagyni; nevezzük ezt K_3-nak.

A (8) egyenlet, hasonlóan mint korábban, azt jelenti, hogy y megkapható úgy, mint a $P = (rK; C)$ pontból a görbéhez húzott érintő Q érintési pontjának abszcisszája. P_0, P_3, P_4 pont mindig a $z = K$ egyenesen helyezkedik el, és abszcisszája kezdetben rK_0, végül rK_3. C-t vehetjük kisebbnek, mint B, mivel egy véges ideig élő ember kevesebbet takarít meg, mint az, aki végtelen ideig él, és minél nagyobb C annál nagyobb lesz a megtakarítás mértéke. Következésképpen $z = C$ (az eredeti ábrán $z = K$-val jelölt) egyenes metszi a görbét, nevezzük ezt a metszéspontot Ramsey ábrájának (4.3) megfelelően P_4-nek.



4.3. ábra. Szükséges megtakarítás véges élethossz esetén [4]

Mind a P_0-ból, mind a P_3-ból a görbének két érintője lesz, amelyek közül mind a felső, mind az alsó lehet y_0 és y_3 meghatározója. Ha azonban $K_3 > K_0$, mint a fenti esetben az ábrán, akkor csak az alsó érintőt vehetjük a P_0-ból, mivel a felső érintő nagyobb értéket ad y_0-nak, mint y_3 bármelyik értéke, ami nem lehetséges, mivel y folyamatosan nő. Vegyük, tehát Q_0-t a P_0-ból kiinduló érintő alsó érintési pontjaként. Ekkor két lehetséges eset van, aszerint, hogy minek vesszük az y_3 értéket: vagy Q_3, az alsó, vagy Q_3^0, a felső érték.

Ha a Q_3-at vesszük, akkor P_0 egyenesen P_3-ba megy, és mindig csak megtakarítás történik; ez akkor következik be, ha T kicsi. De ha T nagy, akkor Q_0 egyenesen Q_3^0 felé halad, és P_0 először P_4-ig megy, majd vissza P_3-ig, vagyis kezdetben van a megtakarítás, majd a költekezés. Hasonlóképpen, ha $K_0 > K_3$, akkor is két lehetséges eset van, ekkor a P_3 alsó érintője az, amit kizárhatunk.

Annak érdekében, hogy meghatározzuk C értékét és hogy ehhez mely érintővonalakat kell venni, a (7) egyenletből levezetett feltételt használjuk:

$$\frac{P_0\text{-beli érintő meredeksége}}{P_3\text{-beli érintő meredeksége}} = \frac{w(y_0)}{w(y_3)} = e^{rT}$$

Ez, valamint az a tény, hogy P_0 és P_3 abszcisszái K_0, illetve K_3, és hogy ugyanaz a C ordinátájuk, elégséges ahhoz, hogy C szintet és a szükséges érintőket meghatározzuk.

4.2.4. Diszkontálás

Ramsey a diszkontálás kérdésével is foglalkozik, felismerve, hogy a jövőbeli hasznosságot a befektetési döntések némileg diszkontálhatják. Tehát azt vizsgáljuk, hogyan kell módosítani az eddigi eredményeket, ha a jövőbeni hasznosságokkal és veszteségekkel nem úgy számolunk, hogy azok megegyeznek a jelenlegiekkel, hanem geometriai diszkontálást feltételezünk ϱ állandó rátával. [1]

A jövőbeli hasznok diszkontálása nem feltétlenül egyezik meg a tőke kamatozásának r mértékével, mivel a pénz marginális hasznossága változhat, ha az egyén az idő előrehaladtával növeli vagy csökkenti a kiadásait. Tegyük fel, hogy a ϱ hatékonysági diszkontráta kisebb, mint az r kamatláb.

Ekkor az (1) és (2) egyenletek változatlanok, de a (3) egyenlet a következő lesz, mivel feltételezzük, hogy $\frac{\partial F}{\partial K}$ állandó és egyenlő r-rel:

$$\frac{d}{dt}u(x) = \quad u(x)\left(\frac{\partial F}{\partial K} \quad \varrho\right) = \quad u(x)\ (r \quad \varrho) \tag{9}$$

$$w(y) = u(x) = w(y_0) \quad e^{\ (r \quad \varrho)t}$$

[1] A diszkontráta állandónak feltételezése alatt nem azt kell érteni, hogy az minden egyén számára azonos, mivel jelenleg csak egy egyénnel vagy közösséggel foglalkozunk, hanem azt, hogy az élvezet jelenlegi értékét bármely jövőbeli időpontban a ϱ rátával történő diszkontálással kapjuk meg.

$$r \quad K \quad y = \frac{dK}{dt} = \frac{dK}{dw} \quad \frac{dw}{dt} = \quad (r \quad \varrho) \quad w \quad \frac{dK}{dw}$$

$$\frac{dK}{dw} + \frac{r \quad K}{(r \quad \varrho) \quad w} = \frac{y}{(r \quad \varrho) \quad w^{0}}$$

$$K \quad w^{\frac{r}{r \quad \varrho}} = \int \frac{y \quad w^{\frac{\varrho}{r \quad \varrho}}}{r \quad \varrho} \quad dw + \frac{K}{r} = \frac{1}{r} \quad y \quad w^{\frac{r}{r \quad \varrho}} \quad \int_{b}^{y} w^{\frac{r}{r \quad \varrho}}(y)dy + \frac{K}{r}$$

$$\frac{dK}{dt} = r \quad K \quad y = \frac{K \quad \int_b^y w^{\frac{r}{r \quad \varrho}}(y)dy}{w^{\frac{r}{r \quad \varrho}}(y)} \tag{10}$$

Tehát ebben az esetben is hasonló eredményre jutunk, mint az alap problémánál, csak a marginális hatékonyságot itt az $\frac{r}{r \quad \varrho}$ hatványra kell emelnünk. Ezt pedig kizárólag ϱ és r aránya határozza meg, így ha $\varrho = 0$, akkor ez független r értékétől, feltéve, hogy $r \neq 0$. Az időben állandó, nem diszkontált értékeket feltételező rész fő következtetése így megerősítést nyer.

A cikk utolsó szakaszában Ramsey az egyensúlyi kamatláb meghatározásával foglalkozik. Először azt az állandósult állapotot vizsgálja, amelyben a tőkeállomány optimális szintjét már elértük, így technológiai fejlődés vagy népességnövekedés hiányában a tőke és a fogyasztás állandó, következésképpen a megtakarítás nulla. Mivel $\frac{dx}{dt} = \frac{dK}{dt} = 0$, a x, L és K egyensúlyi szintjét meghatározó három egyenlet a következő:

$$x = F(L, K)$$

$$v(L) = \frac{\partial F}{\partial L} u(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \varrho$$

Itt a harmadik egyenlet egyértelműen meghatározza a tőkeállomány állandósult szintjét, a kamatláb pedig egyenlő a diszkontfaktorral. Ramsey ezután kitér arra a tényre, hogy egy ilyen hosszú távú egyensúlyt esetleg soha nem, vagy csak nagyon hosszú távon érhetnénk el, ezért ezután az egyensúly meghatározását tárgyalja véges élethossz esetén, amikor az egyének nem törődnek az örököseikkel. Ez különösen figyelemre méltó, mivel Ramsey egyrészt az életciklusmodell egy kifinomult változatát használja, másrészt leírja azt az átfedő generációs modellt, amely sok évvel később, Paul Samuelson (1958) és Peter Diamond (1965) hozzájárulásával a modern makroökonómia és államháztartás fontos eszköze lett.

Végül a záró alfejezetben kitér a diszkontfaktorok heterogenitására és ír arról a lehetőségről, hogy az ízlésbeli különbségek hosszú távon nagy egyenlőtlenségeket generálhatnak a vagyonban és a fogyasztásban. Arra jut, hogy a népesség két csoportra oszlik, egy magas és egy alacsony diszkontrátával rendelkező csoportra. Majd azt is megmutatja, hogy egy ilyen gazdaságban növekvő egyenlőtlenség lesz a vagyonban és a fogyasztásban, és egy felülről korlátos hatékonysági függvény és a fogyasztás létminimumszintje mellett hosszú távon a társadalom *"két osztályra fog oszlani, a takarékosokra, akik a boldogságot élvezik, és a létminimum szintjén élő rászorulókra"*. [4]

5. fejezet

Összegzés

Még akik hallottak Frank Ramsey munkásságáról, azok közül is kevesen vannak, akik ismerik milyen sokszínű és szerteágazó tudományterületeken fejtette ki hatását. Érdemes elmélyedni írásaiban, részletesen tanulmányozni életrajzát, megismerni logikus gondolatmeneteit, mert ezáltal napjainkban is hasznos interdiszciplináris ismeretekkel gazdagodhatunk.

Ramsey eredményei áttörő jelentőségűek voltak a korabeli közgazdaságtudományban. Főleg pár évtizeddel később kezdtek többen is foglalkozni a Ramsey-modell kiterjesztésével, újragondolásával. Az 1950-es és 1960-as években újra megvizsgálták az optimális növekedés kérdését, ekkor egymástól függetlenül, egyidejűleg keletkeztek David Cass *Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation* (1965) és Tjalling C. Koopmans *On the concept of optimal economic growth* (1965) eredményei. Az ezek alapján módosított Ramsey-modellbe már beépítették a népesség egyenletes ütemű növekedésének és a Harrod-semleges technikai fejlődés szintén egyenletes ütemű dinamikus jellemzőit, így született meg a Ramsey-Cass-Koopmans-modellnek nevezett modell, amelyben a cél immár a háztartások hasznossági függvényének maximalizálása.

A The Economic Journal 125. jubileumi kiadása kapcsán 2015-ben Ramsey eredeti 1928-as cikkéről készült egy összegzés is. Ebben a szerző, Orazio P. Attanasio a következőképpen vélekedik: "*nem tudom nem megemlíteni azt a modernitást és eredetiséget, amelyet Ramsey írásaiban érzékel az ember, ha végigolvassa az eredeti szövegeket. Dolgozatai és hozzászólásai megdöbbentően megelőzik korukat.*" [13] Valóban, hiszen például az egyéni fogyasztási és megtakarítási döntések kezelése nagyon modern gondolatnak számíthatott az 1920-as években.

A mai, gazdasági nehézségekkel teli időkben pedig különösen fontos Ramsey optimális megtakarítást célzó gondolatmenete, hiszen sokak számára létfontosságú lehet a megélhetést biztosító megfelelő megtakarítás.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, dr. Tóth Árpád tanár úrnak, aki mindig kitartóan és lelkesen támogatta munkámat. Neki köszönhetem ezen érdekes téma felvetését is.

Irodalomjegyzék

[1] The Wall Street Journal. *Frank Ramsey Review - The most Genial Genius*. url: https://www.wsj.com/articles/frank-ramsey-review-the-most-genial-genius-11585322801.

[2] Stanford Encyclopedia of Philosophy. *Frank Ramsey*. url: https://plato.stanford.edu/entries/ramsey/.

[3] Ramsey F. P. „A Contribution to the Theory of Taxation". *The Economic Journal* 37.145 (1927. márc.), 47–61. old. issn: 0013-013. url: https://www.jstor.org/stable/2222721.

[4] F. P. Ramsey. „A Mathematical Theory of Saving". *The Economic Journal* 38.152 (1928. dec.), 543–559. old. issn: 0013-0133. url: http://piketty.pse.ens.fr/files/Ramsey1928.pdf.

[5] Pedro G. Duarte. „Frank Ramsey's place in the history of mathematical economics: not what you think". *Cambridge Journal of Economics* 46 (1 2022. jan.), 41–56. old. issn: 0309-166X. url: https://doi.org/10.1093/cje/beab056.

[6] Wikipedia. *Frank Ramsey (mathematician)*. url: https://en.wikipedia.org/wiki/Frank_Ramsey_(mathematician).

[7] Wikipedia. *Ramsey-Cass-Koopmans model*. url: https://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey%E2%80%93Cass%E2%80%93Koopmans_model.

[8] Wikipedia. *Cobb-Douglas production function*. url: https://en.wikipedia.org/wiki/Cobb%E2%80%93Douglas_production_function#:~:text=In%20economics%20and%20econometrics%2C%20the,that%20can%20be%20produced%20by.

[9] *Charts of Orissa Mineral Development Company Ltd. with key moving averages*. url: https://www.topstockresearch.com/rt/TechStrength/ORISSAMINE/MA/Daily.

[10] Wikipedia. *Euler-Lagrange equation.* url: https://en.wikipedia.org/wiki/Euler-Lagrange_equation.

[11] Jánossy Lajos Tasnádi Péter Gnädig Péter. *Vektorszámítás III.* Akadémiai Kiadó, 2016. Variációs feladatok - mellékfeltételekkel fej. isbn: 978 963 05 9847 7. url: https://mersz.hu/hivatkozas/m105v3_s10.5/#m105v3_s10.5.

[12] Wikipedia. *Phase space graph.* url: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Ramseypic.svg.

[13] Attanasio O. P. „Frank Ramsey's A Mathematical Theory of Saving". *The Economic Journal* 125.583 (2015. márc.), 269–294. old. issn: 0013-0133. doi: 10.1111/ecoj.12229. url: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1111/ecoj.12229.

Ábrák jegyzéke