NYILATKOZAT

Név: Mazug Péter

ELTE Természettudományi Kar, szak: matematika BSc

NEPTUN azonosító: RRC712

Szakdolgozat címe:
Karakterisztikus osztályok

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2023.06.07

Mazug Péter

a hallgató aláírása

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Mazug Péter

Karakterisztikus osztályok

Szakdolgozat
Matematika BSc

Témavezető:

Terpai Tamás

Budapest, 2023

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

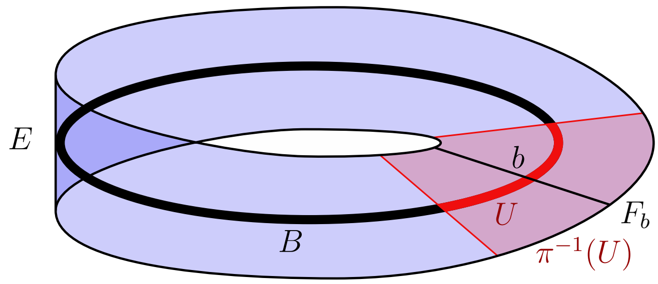
Köszönettel tartozom a témavezetőmnek, Terpai Tamásnak, aki végig segített e szakdolgozat anyagának feldolgozása, valamint annak megírása során. Mindig készséggel adta át intuícióit és érveléseit, amik sokat segítettek, hogy bennem is kialakuljon egy kép a témáról. Lekötelez az alapossága amit a dolgozatom iránt, és a türelme amit felém tanúsított. Szeretném még megköszönni a családomnak, hogy egy biztos pontot nyújtottak, és minden tőlük telhető segítséget megadtak, a stresszesebb napokban is. Végül, de nem utolsósorban a barátaimnak szeretném megköszönni a rengeteg támogatást és tanácsadást, és hogy hittek bennem, ha nekem magamban nehéz is volt.

Enélkül a sok csodás ember nélkül nem születhetett volna meg e szakdolgozat.

1. fejezet

Vektornyalábok

A *vektornyalábok* az érintőterek, a normálnyalábok és más olyan tereket általánosítanak, melyek egy irányban vektortér struktúrájúak. Az érintőtér által motiválva a pontos definícióban majd lesz egy *bázis*unk, amelynek minden pontjához tartozik egy vektortér. Ilyen szempontból a direkt szorzatra hasonlít a konstrukció, meg is fogjuk követelni, hogy lokálisan direkt szorzatot lássunk. (Pont mint ahogy ez az érintőterek esetén is történik.) Viszont globálisan tipikusan nem direkt szorzatokról lesz szó; a vektortérben nem tudunk kanonikusan koordinátázni. Tegyük precízzé ezt a képet:



1.1. ábra. Egy Vektornyaláb, specifikusan egy (nyílt) Möbius-szalag.

1.1. Definíció. Egy ξ (valós) *vektornyaláb* a B topologikus tér *bázis* felett egy

- $E(\xi)$ topologikus tér, a *totális tér*. Ha egyértelmű csak E-vel jelöljük.
- $\pi\colon E \to B$ (folytonos) leképezés, a *vetítés* vagy *projekció*.
- Minden $\pi^{-1}(b), b \in B$ *fibrum*on egy (valós) vektortérstruktúra. A fibrumokat gyakran jelöljük $F_b(\xi)$-vel vagy F_b-vel.

Gyakran használatos a $\pi\colon E \to B$ jelölés az egész nyalábra.

Ezek mellett megköveteljük még a *lokális trivialitás* feltételét: $\forall b \in B$ -hez $\exists U \subseteq B$ környzete b-nek, ahol megadható egy trivializáció, egy

$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ B \end{array}$$

$$h\colon U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$$

homeomorfizmus, mely minden fibrumra megszorítva egy izomorfizmus az $\mathbb{R}^n$ vektortérrel. Ekkor (U, h)-t egy *lokális koordinátarendszer*nek hívjuk. Ha $U = B$-re létezik ilyen leképezés, akkor azt mondjuk ξ egy *triviális nyaláb*. Egy ilyen vektornyaláb izomorf $B \times \mathbb{R}^n$-nel. (Az izomorfizmus definícióját nemsokára látni fogjuk: 1.4 Definiíció)

n az F_b fibrum dimenzója. Ha ez konstans, ξ-t n-sík nyalábnak, $\mathbb{R}^n$-nyalábnak, n rangú nyalábnak, vagy csak simán n-nyalábnak hívjuk. $n = 1$ esetén vonalnyalábnak. A lokális trivialitás következtében n lokálisan konstans, így összefüggő bázis felett mindig konstans lesz. Így az egész vektornyalábnak lesz egy jól definiált rangja. A továbbiakban feltesszük, hogy összefüggő bázisú nyalábban dolgozunk, elkerülvén az összefüggési komponensek okozta diszkussziót.

Analóg módon definiálhatunk *sima* vektornyalábokat, melyekre B és E sima sokaságok kell legyenek, π egy sima leképezés és minden lokális koordinátarendszerhez tartozó h egy diffeomorfizmus.

1.1. Példa. Tetszőleges B topologikus tér felett a $B \times \mathbb{R}^n$ egy triviális nyaláb. A vetítés kanonikusan megy: $\pi(b, x) = b$. Bármely $b \in B$-re B egy trivializáló környezet az identikus lokális koordinátarendszerrel.

1.2. Példa. A (nyílt) μ *Möbius-szalag* vonalnyaláb. (1.1. ábra.) Definiáljuk, mint

$$E(\mu) = M = \frac{\{(x, y)\colon 0 \leq x \leq \pi, -1 < y < 1\}}{(0, y) \sim (\pi, -y)}$$

a bázisa a közepén fekvő S^1-gyel homeomorf:

$$B(\mu) = \frac{\{(x, 0)\colon 0 \leq x \leq \pi\}}{(0, 0) \sim (\pi, 0)}$$

A bázis egy b pontja felett keresztben $\{(b, y)\colon -1 < y < 1\} \approx \mathbb{R}^1$ nyílt intervallumok a fibrumok. Trivializáló környezeteket az alábbi módon kereshetünk:

- Ha $b \in \{(x, 0)\colon 0 < x < \pi\}$ akkor tetszőleges $U \subseteq \{(x, 0)\colon 0 < x < \pi\}$ környezete b-nek a direkt szorzatból örökölt koordinátázással jó lesz.

- $b = [(0,0)]$ esetén pedig jó lokális koordináta rendszer lesz az alábbi környezet és leképezés, mivel a faktorizálásnál y-t $-y$-nal azonosítjuk:

$$U = \frac{\{(x,0)\colon 0 \leq x \leq \pi, x \neq \frac{\pi}{2}\}}{(0,0) \sim (\pi,0)}$$
$$h\colon U \times (0,1) \to \pi^{-1}(U)$$
$$h(u,x) = \begin{cases} (u,x), & \text{ha } u < \frac{\pi}{2} \\ (u,-x), & \text{ha } u > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1.3. Példa. Egy sima M sokaság feletti τ_M *érintőnyaláb*, TM totális térrel egy vektornyaláb, ráadásul sima is. $M = \mathbb{R}^n$ (és bármely $\mathbb{R}^n$-be simán beágyázható n-sokaság) érintőnyalábja természetesen triviális lesz, hisz megegyezik $M \times \mathbb{R}^n$-nel az érintőtér beágyazást használó definíciója alapján. Tetszőleges sima M-re egy $x \in M$ körüli lokális koordinátarendszert megad egy x körüli térkép, hiszen az kiterjeszthető a fibrumokra is, és így ad egy azonosítást $\mathbb{R}^n$ triviális nyalábjával.

Ez a példa betekintést ad abba, hogyan segíthetnek vektornyalábok vizsgálatára kialakított technikák tetszőleges sokaságok jellemzésében. Hiszen ha az érintőteréről megtudunk dolgokat, az a bázis tulajdonságairól is informál minket. Sehol sem eltűnő vektormezők létezése, a *parallelizálhatóság*, például ekvivalens az érintőnyaláb trivializálhatóságával. Egy jól ismert eredmény ebben a témában az alábbi tétel:

1.1. Tétel. *Sündisznótétel*: Páros n-ekre nem létezik S^n-nek el nem tűnő folytonos érintő vektormezője. [**SAT**]

1.4. Példa. A ν_M *normálnyalábja* egy $M \subseteq \mathbb{R}^n$ k-sokaságnak az $E \subseteq M \times \mathbb{R}^n$ halmaz mely azon (b,x) párokból áll, melyekre $\langle x,y\rangle = 0$ $\forall y \in T_bM$. Ez egy $n-k$ nyaláb lesz. A vetítést és a műveletet a természetes módon definiáljuk:

$$\pi(b,x) = x \quad \text{és} \quad a_1(b,x_1) + a_2(b,x_2) = (b, a_1x_1 + a_2x_2)$$

A lokális trivialitást később fogjuk látni. (3.4 Következmény)

1.5. Példa. $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, az n dimenziós (valós) projektív tér $\mathbb{R}^{n+1}$ lineáris egyeneseinek tere. $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ felett a *kanonikus vonalnyaláb*, γ_n^1, fibrumaira mint $\mathbb{R}^n$ diszjunktizált egyeneseire fogunk gondolni:

$$E(\gamma_n^1) = \{(e,x) \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \colon x \in e\}$$
$$B = \mathbb{R}\mathrm{P}^n$$
$$\pi(e,x) = e$$

A fibrumokon a vektortérstruktúrát örököljük $\mathbb{R}^n$-ből. Lokális koordinátarendszer kereséshez tekintsük D^n-t mint az egységfélgömb $\mathbb{R}^{n+1}$-ben, és $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$-t, mint:

$$\frac{D^n}{x \sim -x, \text{ ha } x \in \partial D^n}$$

Ekkor $U = \mathrm{int}(D^n)$ egy jó környzete lesz minden pontjának. Ha $i_e(x) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ azon lineáris beágyazása e-nek, melyre $i_e(1) \in U$, akkor

$$h \colon U \times \mathbb{R} \to \pi^{-1}(U)$$
$$h(u,x) = (u, i_e(x))$$

jó lokális leképezés lesz. U-n kívüli pontok körül lokális koordináta rendszer kereséséhez bevihetjük az adott pontot U-ba $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ egy automorfizmusával.

A vektornyalábok több struktúrával rendelkeznek hétköznapi topologikus tereknél. A vizsgálatukra így olyan fogalmakat kell bevezetnünk, amik ezt a struktúrát nem hagyják figyelmen kívül. Leképezésektől például a folytonosságon kívül a fibrumokban a vektortérstruktúra megőrzése is fontos:

1.2. Definíció. Egy *nyaláb leképezés* ξ és η vektornyalábok között egy

$$f \colon E(\xi) \to E(\eta)$$

folytonos leképezés, mely fibrumokat fibrumba képez lineárisan.

B-t az F_b fibrumok origójaként realizálva megszoríthatjuk a nyaláb leképezést B-re. Egy a bázisok közti folytonos leképezést kapunk, ezt jellemzően $\bar{f}$-sal jelöljük.

1.3. Definíció. Egy nyaláb leképezést, mely minden fibrumban izomorfizmus a vektorterek közt *fibrumonkénti izomorfizmusnak* hívunk.

1.4. Definíció. Egy fibrumonkénti izomorfizmust, mely bijektív és inverze is folytonos *izomorfizmus*nak, vagy ha ez a kontextusban félreértést okozhat *nyaláb izomorfizmus*nak hívunk.

Ha ξ és η között van izomorfizmus azt mondjuk izomorfak: $\xi \approx \eta$.

1.6. Példa. Egy adott B bázis feletti triviális nyalábok izomorfak lesznek $\varepsilon^n = B \times \mathbb{R}^n$-nel, az izomorfizmust egy B-t környzetnek választó trivializáló leképezés ad meg.

1.7. Példa. γ_1^1 izomorf az M Möbius-szalaggal. Ha γ_1^1 konstrukciójában $\mathbb{R}^2$-re az (r, ϕ) polárkoordinátázással tekintünk, akkor az alábbi módon konstruálhatunk egy izomorfizmust:

$$f\colon M \to E(\gamma_n^1)$$
$$f(a,b) = (\{(x,a)\colon x \in \mathbb{R}\}, (\tan(b), a))$$

egy izomorfizmus lesz. Csak a $(0, b)$ és az $(1, b)$ képére kell külön figyelni, de ott a Möbius-szalag faktorizálása pont meg fog egyezni a 0 és a π irányszögű egyenesek azonosításával.

Vektornyalábok jellemzésénél az egyik célunk azt megfogni, mennyire tér el a nyaláb a triviálistól, mennyire „csavarodik". Már láttunk egy példát, amiről biztos tudjuk nem triviális: A Möbius-szalagról közismert, hogy nem azonos egy nem csavart szalaggal, az $S^1 \times \mathbb{R}$ triviális nyalábbal. Ezt igazolja például, ha megfigyeljük, hogy a totális térből $B \times \{0\}$-t kivonva a szokványos szalag szétesik két összefüggőségi komponensre, de a Möbius nem. A Möbius-szalag azért viselkedik így, mert „meg lett csavarva". Egy fibrumban egy bázispont feletti pontot körbevíve azt tapasztaljuk, hogy alul jön vissza. Ezt a csavartságot akarjuk jobban megfogni az alábbi fogalommal. Rögtön kapni fogjuk már nem csak γ_1^1 nem-trivialitását, hanem minden γ_n^1-ét.

1.5. Definíció. Egy π projekciójú ξ vektornyaláb egy *szelés*e egy $s\colon B(\xi) \to E(\xi)$ folytonos függvény, melyre $\pi \circ s = id_B$. Ez pontosan azt fogja jelenteni, hogy folytonos módon minden fibrumban kiválasztunk egy pontot.

Ha ez a pont egy adott fibrumban az origo, azt mondjuk a szelés ott *eltűnik*. Gyakran keresünk *sehol sem eltűnő szelés*eket.

1.2. Megjegyzés. Minden vektornyalábban van legalább egy — a triviális — szelés, a mindenhol eltűnő.

1.3. Megjegyzés. Triviális n-nyalábnak mindig van sehol sem eltűnő szelése: Egy tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$-ra $s\colon b \mapsto (b, x)$ jó lesz.

1.4. Tétel. A γ_n^1 vektornyaláb nem triviális.

Bizonyítás. Az 1.3 megjegyzés alapján elég belátni, hogy nincs sehol sem eltűnő szelés.

Legyen $s\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^n \to E(\gamma_n^1)$ egy tetszőleges szelés. $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$-re gondoljunk, mint S^n faktora, és vegyük a $p\colon S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 2-rétű fedést. Képezzük az $f = s \circ p$ kompozíciót. Ez egy $x \in S^n$ pontot egy $(\pm x, t(x)x)$ pontba viszi, t folytonos, hisz s második koordináta-függvényéből és a távolságból megkapható. Mivel $p(x) = p(-x)$ ezért $f(x) = f(-x)$ továbbá $t(x) = t(-x)$.

Rögzítsünk egy tetszőleges $x \in S^n$-et. Ha itt $t(x) = 0$ akkor $s(x) = (\pm x, 0)$, azaz s itt eltűnik és kész vagyunk.

Ha $t(x) \neq 0$, akkor $t(x)$ és $t(-x)$ ellenkező előjelű. Vegyünk egy $\delta\colon [0,1] \to S^n$ folytonos görbét melyre $\delta(0) = x$ és $\delta(1) = -x$. Ekkor $t \circ \delta$ folytonossága miatt lesz egy $y_0 \in [0,1]$, melyre $t \circ \delta(y_0) = 0$, azaz $y = \delta(y_0)$-ra $t(y) = 0$. Ekkor viszont $\pm y \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$-ra $s(y) = (\pm y, 0)$. Tehát s valahol biztos eltűnik. □

1.6. Definíció. A sehol sem eltűnő szelést általánosítják a *független* szelések. Egy π projekciójú ξ vektornyaláb s_1, s_2, …, s_k szelései függetlenek, ha $\forall b \in B(\xi)$-re $s_1(b)$, $s_2(b)$, …, $s_k(b)$ lineárisan függetlenek.

1.5. Megjegyzés. Egy n-nyalábnak legfeljebb n független szelése lehet, hiszen már csak egy fibrumban is csak n független vektor van.

1.6. Megjegyzés. Triviális n-nyalábnak mindig van akár n független szelése is: Egy tetszőleges $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ független vektor n-esre $s_i\colon b \mapsto (b, x_i)$ jó lesz.

Sőt, ennél több is igaz!

1.7. Állítás. A ξ n-nyaláb triviális $\iff$ Léteznek $s_1, s_2, \ldots, s_n$ független szeléseik.

Bizonyítás. ($\Longrightarrow$) : Ezt az irányt láttuk az 1.6 megjegyzésben.

($\Longleftarrow$) : ξ legyen $\pi\colon E \to B$. Az alábbi módon konstruált izomorfizmus jó lesz:

$$f\colon B \times \mathbb{R}^n \to E$$
$$f(b, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i s_i(b)$$

Ez tetszőleges $b \in B$-re a $\pi^{-1}(b)$ fibrum és képe közt izomorfizmus lesz, hiszen $s_1(b)$, $s_2(b)$, …, $s_k(b)$ bázist alkotnak. Az s_i-k folytonossága miatt h is az lesz, így az alábbi lemma segítségével vagyunk: □

1.8. Lemma. Egy olyan f fibrumonkénti izomorfizmus, mely ξ-ből a vele azonos B bázis feletti η vektornyalábba megy, és minden $b \in B$ felett a fibrumokat izomorf módon képzi egymásba, egy izomorfizmus.

Bizonyítás. A bijektivitás azonnal adódik, f^{-1} folytonossága kell még. Mivel ez egy lokális tulajdonság, elég egy U ξ-t és η-t is trivializáló környezetre ellenőrizni. Ha U-n a ξ-t és η-t trivializáló leképezések rendre h_1 és h_2, akkor képezzük a $g = h_2 \circ f \circ h_1^{-1}$ leképezést. g így $g(b, x) = (b, A_b(x))$ alakú lesz, ahol $A_b \in GL_n(\mathbb{R})$ és folytonosan függ b-től. A_b^{-1} is folytonosan fog függeni b-től. (Például mert A_b-re mátrixként tekintve annak elemei is folytonosan fognak b-től függeni, és A_b mátrixának elemeivel A_b^{-1} mátrixa folytonosan kifejezhető.) Ebből adódik g^{-1} folytonossága, ezennel viszont kész vagyunk a lemmával, hiszen $f^{-1} = h_1^{-1} \circ g^{-1} \circ h_2$. $\square$

1.9. Következmény. *Gömbök parallelizálhatósága*

S^1 érintőterében van egy sehol sem eltűnő szelés, $(x_1, x_2) \in S^1$-re:

$$(x_1, x_2) \mapsto (-x_2, x_1)$$

Így τ_{S^1} triviális lesz, S^1 parallelizálható.

S^2 nem parallelizálható, hiszen a Sündisznótétel értelmében τ_{S^2}-nek nincs sehol sem eltűnő szelése. Így τ_{S^2} nem lesz triviális.

S^3 esetén megint találunk szeléseket:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-x_3, x_4, x_1, -x_2)$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-x_4, -x_3, x_2, x_1)$$

Ezekről ellenőrízhető, hogy merőlegesek, így függetlenek lesznek. Így a 3 független szelésnek hála τ_{S^3} triviális és S^3 parallelizálható.

Vegyük észre, hogy ha azonosítjuk $\mathbb{R}^2$-t $\mathbb{C}$-vel a fentebbi szelésünk pont $z \mapsto i \cdot z$ lesz. Ez a gondolat továbbvihető. $\mathbb{R}^4$-et $\mathbb{H}$-val azonosítva $z \mapsto i \cdot z, z \mapsto j \cdot z, z \mapsto k \cdot z$ lesz a 3 szelésünk. Ezek adnak egy mély okot arra, miért működik, amit csinálunk. $\mathbb{R}$ felett 2 illetve 4 dimenzióban léteznek nullosztómentes algebrák, ahol szorzás teljesíti, hogy $\|zw\| = \|z\|\|w\|$. Így az ortonormált bázist alkotó egységekkel való szorzás meg fogja nekünk adni ezeket a konstrukciókat.

S^7 parallelizálhatóságát is tanusíthatjuk egy hasonló konstrukcióval, ez alkalommal a 8 dimenziós oktoniókat használva.

2. fejezet

Új Nyalábok Készítése

Lássunk most néhány alapvető konstrukciót, ahogy már ismert vektornyalábokból újakat készíthetünk!

2.1. Definíció. Egy vektornyalábnak képezhetjük egy *résznyaláb*ját fibrumonkénti szűkítéssel. ξ résznalábja η-nak, ha mindketten B feletti nyalábok, $E(\xi) \subseteq E(\eta)$ az altértopológiával, és ξ minden fibruma az η megfelelő fibrumának részvektortere.

2.2. Definíció. Egy vektornyalábot *megszorít*hatunk a bázis egy részére. Legyen ξ a $\pi\colon E \to B$ projekciójú vektornyaláb és $B' \subseteq B$. Ekkor $E' = \pi^{-1}(B')$ totális térrel és $\pi' = \pi|_{E'}$ projekcióval kapunk egy új $\xi|_{B'}$ vektornyalábot. Minden $F_b(\xi|_{B'})$ fibrum megegyezik az $F_b(\xi)$ fibrummal, és ugyanazt a vektortérstruktúrát kapja. A trivializáló környzeteknek a régi trivialzáló környezet B'-vel való metszete megfelelő lesz, ha a trivializáló leképezést is megszorítjuk.

2.3. Definíció. Egy általánosabb konstrukció egy leképezés által *indukált nyaláb*. Legyen ξ a $\pi\colon E \to B$ projekciójú vektornyaláb. f egy $A \to B$ folytonos leképezés. Az indukált nyaláb, $f^*\xi$, bázisa A lesz. A totális tere:

$$E' = \{(a, x) \in A \times E\colon f(a) = \pi(x)\}$$

A projekció π' az első koordinátára való vetítés lesz. $F_a(f^*\xi)$ azon x-ekből fog állni akikre $\pi(x) = f(a) = b$, tehát ha ξ rangja b felett n volt, akkor $f^*(\xi)$-nek is n lesz a felett.

A lokális trivialitást az következő módon láthatjuk: ξ-n vett (U, h) lokális koordinátarendszerből képezzük $U' = f^{-1}(U)$-t és az alábbi leképezést:

$$h' \colon U' \times \mathbb{R}^n \to \pi'(U')$$
$$h'(a, x) = (a, h(f(a), x))$$

Ez homeomorfizmus lesz és a fibrumokon lineáris, mivel h is az volt.

f kiterjed egy $f' \colon E' \to E$ fibrumonkénti izomorfizmussá, úgy hogy $\bar{f}' = f$, mint $f'(a, x) = x$.

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\pi'"] & E \arrow[d, "\pi"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

A jobboldali diagramm kommutatív lesz ezen definíció alapján, hiszen $\pi(f'(a, x)) = \pi(x) = f(a) = f(\pi'(a, x))$

Egy $B' \subseteq B$ halmaz esetén az $i \colon B' \hookrightarrow B$ beágyazás által indukált vektornyaláb kanonikusan izomorf a B'-re való megszorítással kapottal.

2.1. Megjegyzés. Ha ξ egy sima nyaláb és f egy sima leképezés meg lehet mutatni, hogy E' egy sima részsokasága $A \times E$-nek, és így $f^*\xi$ egy sima vektornyaláb lesz. Ekkor f' is egy sima leképezés lesz.

2.2. Állítás. Ha $f \colon E(\xi) \to E(\eta)$ egy fibrumonkénti izomorfizmus, akkor $\bar{f}^*\eta \approx \xi$

Bizonyítás. Legyen ξ projekciója π és η-é ρ. Az alábbi izomorfizmusról fogjuk látni, hogy jó lesz:

$$g \colon E(\xi) \to E(\bar{f}^*\eta)$$
$$g(x) = (\pi(x), f(x))$$

Kell először is, hogy g tényleg $E(\bar{f}^*\eta)$-be képez, azaz $\bar{f}(\pi(x)) = \rho(f(x))$. Tudjuk, hogy f fibrumot izomorf módon fibrumba visz. B-t a fibrumok origójaként realizálva — mint $\bar{f}$ definíciójában — már láthatjuk, hogy ugyanazt kapjuk ha először átmegyünk egy másik fibrumba majd annak az origójába, mintha először mennénk az origóba, amit aztán f a másik fibrum origójába visz.

Mindkét vektornyaláb bázisa $B(\eta)$. Emelett $F_b(f^*(\xi))$-be g izomorf módon képzi F_b-t, mivel f egy fibrumonkénti izomorfizmus. Ez biztosítja az izomorfizmust a második koordinátában. Ezek ismeretében az 1.8 Lemma segítségével kész vagyunk. $\square$

Hogy folytathassuk az indukált nyalábok tulajdonságainak vizsgálatát, néhány patológikus teret ki kell zárjunk a lehetséges bázisok közül. Ebben fog segíteni az alábbi definíció.

2.4. Definíció. Egy X topologikus teret *parakompakt*nak hívunk, ha Hausdorff és minden $\{U_\alpha\}$ nyílt fedésének létezik egy lokálisan véges finomítása, azaz egy $\{V_\beta\}$ nyílt fedés, melyre minden V_β része valamely U_α-nak, és minden $x \in X$-nek van olyan környezete, mely csak véges sok V_β-t metsz.

Általában az alábbi ekvivalens tulajdonságot fogjuk használni:

2.3. Állítás. Egy X Hausdorff topologikus tér pontosan akkor parakompakt, ha minden $\{U_\alpha\}$ nyílt fedéshez létezik:

- Egy $\{V_n\}$ megszámlálható nyílt fedés, melyre minden $\{V_n\}$ néhány $\{U_\alpha\}$ diszjunkt uniójaként áll elő.
- Egy $\{V_n\}$-nek alárendelt, lokálisan véges egységosztás, azaz $\psi_n \colon X \to [0,1]$ függvények egy családja, melyre minden ψ_n tartója része V_n-nek, x-nek van egy olyan környezete, melyen csak véges sok ψ_n nem 0, valamint minden $x \in X$-re $\sum_n \psi_n(x) = 1$.

[5, Lemma 1.21.]

Az algebrai topológiában felmerülő terek szinte mindig parakompaktak, mint ahogy azt az alábbi állítások is mutatják:

2.4. Tétel. Minden metrikus tér parakompakt. [1]

2.5. Tétel. Minden CW-komplexus parakompakt. [5, Proposition 1.20.]

2.6. Tétel. Ha egy reguláris topologikus tér megszámlálható uniója kompakt részhalmazainak, akkor parakompakt. [5, Proposition 1.19.]

Térjünk ezennel vissza az indukált nyalábokhoz!

2.7. Tétel. Legyen ξ az E totális terű és B bázisú vektornyaláb, és A egy parakompakt tér. Ekkor homotóp $f, g \colon A \to B$ folytonos leképezésekre $f^*(\xi) \approx g^*(\xi)$.

Bizonyítás. Legyen $H \colon A \times I \to B$ egy homotópia f és g között, $H_0 = f$ és $H_1 = g$. Ez indukál egy $H^*(\xi)$ nyalábot $A \times I$ felett, a projekciója legyen π. Ekkor $f^*(\xi)$ és $g^*(\xi)$ megjelennek, mint $H^*(\xi)$ megszorítva rendre $A \times \{0\}$-ra illetve $A \times \{1\}$-re. Ezekről a megszorított nyalábokról fogjuk belátni, hogy izmorfak.

$A \times I$-hez találhatóak trivializáló környezetek. Szeretnénk A-n találni $\{U_\alpha\}$ környezetek egy családját, melyekre az $U_\alpha \times I$ környezeteken triviális a nyaláb. Egy rögzített $a \in A$-ra, egy $t \in I$-re létezik (a, t)-nek egy trivializáló környzete. Mivel

$A \times I$-n a szorzattopológia van, ez válaszható $U_{a,t} \times [t_0, t_1]$ alakban, ahol $t_0, t_1 \in I$ és $U_{a,t} \subseteq A$ egy környezete a-nak. I kompaktsága miatt ezek alapján kiválasztható véges sok $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, és hozzájuk $\{U_{a,i}\}$, melyekre a nyaláb triviális $U_{a,i} \times [t_{i-1}, t_i]$-n. Ekkor $U_a = U_{a,1} \cap \ldots \cap U_{a,n}$-re a nyaláb triviális lesz $U_a \times [t_{i-1}, t_i]$-n minden i-re.

Mutassuk meg, hogy ekkor a nyaláb triviális $U_a \times I$-n is. Elég csak egy osztópontra megcsinálni, utána indukcióval kész vagyunk. Legyen tehát $0 < t < 1$ és a nyalábunk triviális $U_a \times [0, t]$-n és $U_a \times [t, 1]$-en. Ezt tanusítsa $h_0 \colon U_a \times [0, t] \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U_a \times [0, t])$ és $h_1 \colon U_a \times [t, 1] \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U_a \times [t, 1])$. Nézzük, hogyan különbözik t-ben a két leképezés, azaz tekintsük az alábbi leképezést:

$$\delta \colon U_a \times \{t\} \times \mathbb{R}^n \to U_a \times \{t\} \times \mathbb{R}^n$$
$$\delta = h_1^{-1}|_{U_a \times \{t\} \times \mathbb{R}^n} \circ h_0|_{U_a \times \{t\} \times \mathbb{R}^n}$$

Mivel h_0 és h_1 homeomorfizmusok és a nyalábokban izomorfizmusok voltak, ezért ezekkel a tulajdonságokkal δ is rendelkezni fog. Így $h_1 \circ \delta$ is egy trivializáló leképezés $U_a \times [t, 1]$-en. Viszont

$$(h_1 \circ \delta)|_{U_a \times \{t\} \times \mathbb{R}^n} = h_0|_{U_a \times \{t\} \times \mathbb{R}^n}$$

Így $h_1 \circ \delta$ és h_0 már összeragadnak egy h leképezéssé, mely az egész $U_a \times I$-t trivializája.

Tehát megtaláltuk $\{U_\alpha\}$ környezeteknek egy családját, melyekre az $U_\alpha \times I$ környezeteken triviális a nyaláb. A parakompakt, így az 2.3 Állítás alapján vehetünk ezek diszjunkt uniójaként előálló $\{V_n\}$ halmazokat, melyek egy nyílt fedés alkotnak. A $\{V_n\}$-ek I-vel vett direkt szorzatán is triviális lesz a nyaláb. Az 2.3 Állítás alapján létezik még egy $\{\psi_n\}$ lokálisan véges egységosztást, mely a $\{V_n\}$-nek alárendelt.

$A \times I$ a tér ahol az $A \to I$ függvények grafikonjai fekszenek. Legyen A_0 a konstans 0 grafikonja, $A \times \{0\}$. A konstans 1-é pedig A_e. A cél $\pi^{-1}(A_0)$-ból eljutni $\pi^{-1}(A_e)$-be izomorfizmusokon át. Legyen $\phi_n = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k$, és legyen $\phi_0 \equiv 0$. Így fent áll, hogy $\phi_n + \psi_n = \phi_{n+1}$. Legyen ϕ_n grafikonja A_n. Megkonstruálunk egy h_n izomorfizmust $\pi^{-1}(A_n)$ és $\pi^{-1}(A_{n+1})$ között. A_n és A_{n+1} között adódik egy homeomorfizmus az I mentén:

$$\bar{h}_n \colon A_n \to A_{n+1}$$
$$\bar{h}_n(a, \phi_n(a)) = (a, \phi_{n+1}(a))$$

Ez ψ_n tartóján kívül identikus, ez a tartó $\{V_n\}$ része. $\{V_n\} \times I$-n viszont a nyaláb triviális, tehát egy lokális koordinátarendszert véve $\bar{h}_n$ felemelhető $\pi^{-1}(A_n \cap (V_n \times I))$-re, a második koordinátában identikusan. A $\bar{h}_n$ leképezés $V_n \times I$-n kívül is, ahol a $\bar{h}_n$ identikus, felemelhető a fibrumokba, mint az identitás. Ezzel megkapjuk a teljes h_n izomorfizmust. Egy pont egy környezetében csak véges sok ψ_n nem 0, így itt csak véges sok h_n nem az identitás. Definiálhatunk tehát egy h nyaláb leképezést, mint a $h = \ldots h_3 \circ h_2 \circ h_1$ végtelen kompozíció, ami ezek szerint jól definiált. Mivel $\sum_n \psi_n(a) = 1$, ezért $\bar{h}(a, 0) = \bar{h}(a, 1)$, így $\bar{h}$ tényleg bijektív a bázisok közt. h-t egy fibrumban vizsgálva fibrumonkénti izomorfizmusok egy véges kompozícióját látjuk, szóval tényleg egy fibruménkénti izomorfizmust kapunk. Ezzel adódik az egész h bijektivitása. A folytonosságot és az inverz folytonosságot elég lokálisan ellenőrizni, de lokálisan megint csak véges sok izomorfizmus kompozícióját látjuk, ami szintén izomorfizmus, azaz folytonos és inverz folytonos is. Ezzel beláttuk, hogy h izomorfizmus $\pi^{-1}(A_0)$ és $\pi^{-1}(A_e)$, avagy $f^*(\xi)$ és $g^*(\xi)$ között.

□

2.5. Definíció. Legyenek ξ_1 és ξ_2 rendre a $\pi_1 \colon E_1 \to B_1$ és $\pi_2 \colon E_2 \to B_2$ projekciójú vektornyalábok. ξ_1 és ξ_2 *direkt szorzat*a vagy *Descartes-szorzat*a, $\xi_1 \times \xi_2$, a

$$\pi_1 \times \pi_2 \colon E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2$$

projekciójú vektornyaláb. Az új fibrumok a régiek vektortérstruktúráinak a direkt szorzatát kapják. Lokális koordinátarendszereket szintén tudunk direkt szorzat alakban keresni.

Egy ismert példa például az alábbi:

2.8. Állítás. Ha M_1 és M_2 sima sokaságok és $M = M_1 \times M_2$, akkor $\tau_M \approx \tau_{M_1} \times \tau_{M_2}$ [2, Problem 1-A.]

2.6. Definíció. Legyenek ξ_1 és ξ_2 rendre a $\pi_1 \colon E_1 \to B$ és $\pi_2 \colon E_2 \to B$ projekciójú vektornyalábok. $\xi_1 \oplus \xi_2$, a *direkt összeg*e vagy *Whitney-összeg*e ξ_1-nek és ξ_2-nek, egy új vektornyaláb lesz, melyre úgy gondolunk, mintha a bázis minden pontja felett vennénk a fibrumok direkt összegét. Ezt ezen a ponton mint $\Delta^*(\xi_1 \times \xi_2)$ konstruálhatjuk meg a leggyorsabban. Itt Δ a diagonális beágyazás:

$$\Delta \colon B \to B \times B$$

$$\Delta(b) = (b, b)$$

A totális tér itt tehát az alábbi lesz:

$$E' = \{(b, e_1, e_2) \in B \times E_1 \times E_2 \colon \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2) = b\}$$

2.9. Állítás. Legyen ξ_1 és ξ_2 az η vektornyaláb egy-egy résznyalábja, a közös bázis B. Ha minden $b \in B$-re $F_b(\eta) = F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$, akkor $\eta \approx \xi_1 \oplus \xi_2$

Bizonyítás. Az alábbi izomorfizmus jó lesz:

$$f \colon E(\xi_1 \oplus \xi_1) \to E(\eta)$$
$$f(b, e_1, e_2) = e_1 + e_2$$

Mivel a vektorterek direkt összege egyértelmű, ez fibrumonként izomorfizmus. $E(\xi_1)$ és $E(\xi_2)$ altér mivolta biztosít minket a folytonosságról, amivel az 1.8 Lemma segítségével kész vagyunk. □

Felmerül a kérdés, hogy egy η vektornyaláb egy adott ξ résznyalábjához tudunk-e keresni egy „kiegészítő nyalábot”, melyre a ξ-vel vett direkt összegként visszakapjuk η-t. Látni fogjuk, hogy ez parakompakt bázis felett megtehető. (3.2 Definíció)

3. fejezet

Euklideszi Vektornyalábok

Akárcsak vektorterekben, vektornyalábok is sok új dolgot megtudhatunk, ha egy *euklideszi struktúrá*t — skaláris szorzást és normát — teszünk a terünkre. Ez többek közt segíteni fog ortogonális kiegésztők konstruálásában.

3.1. Definíció. Egy *euklideszi vektornyaláb* egy ξ valós vektornyaláb ellátva egy

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon E(\xi) \oplus E(\xi) \to \mathbb{R}$$

folytonos függvénnyel, mely minden fibrumra megszorítva egy szimmetrikus, bilineáris, pozitív definit skaláris szorzás. Ez ad egy

$$\mu(x) = \langle x, x \rangle$$

vagy $|x|^2$, pozitív definit kvadratikus alakot. Ezt az *euklideszi metriká*nak hívjuk a nyalábon.

Ha a vektonyalábunk egy τ_M érintőnyaláb, μ-t *Riemann metriká*nak hívjuk. Ekkor M-et μ-vel együtt *Riemann sokaság*nak hívjuk.

Ha trivialitást tanúsító szelések keresésénél az ortogonalitásra is ügyelünk, azt hihetnénk, kapunk egy erősebb trivialitási definíciót. Az alábbi lemma viszont mutatja, hogy mindig menni fog ez az erősebb konstrukció is.

3.1. Állítás. Legyen ξ egy euklideszi vektornyaláb, amely triviális. Ekkor léteznek s_1, s_2, …, s_n ortonormált szelések, azaz minden $b \in B(\xi)$-re

$$\langle s_i(b), s_j(b) \rangle = \delta_{ij}$$

Bizonyítás. Legyenek r_1, r_2, ..., r_n szelések, melyek igazolják ξ trivialitását. $r_1(b)$, $r_2(b)$, ..., $r_n(b)$-t Gram-Schmidt ortogonalizálva kapunk egy $s_1(b)$, $s_2(b)$, ..., $s_n(b)$ ortonormált rendszert. Mivel a Gram-Schmidt ortogonalizáció eredménye folytonosan a kiinduló vektoroktól, így utána is folytonos függvényeket kapunk. Tehát s_1, s_2, ..., s_n is szelések lesznek, és teljesítik a lemma követlményeit. □

3.1. Példa. Az ε^n triviális nyalábon mindig adható euklideszi struktúra:

$$\mu(b,x) = x_1^2 + \dots x_n^2$$

Mivel $\mathbb{R}^n$ érintőnyalábja triviális így $\mathbb{R}^n$ egy Riemann sokaság lesz. Egy $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sima sokaságra $TM \subseteq T\mathbb{R}^n$, így μ-t a második koordinátában az $i\colon TM \hookrightarrow T\mathbb{R}^n$ beágyazással komponálva egy Riemann metrikát kapunk M-en.

Hasznos lenne általánosabb feltétel arra, hogy egy vektornyaláb ellátható euklideszi struktúrával. A parakompaktság itt is elégséges lesz.

3.2. Tétel. Legyen ξ a $\pi\colon E \to B$ projekciójú vektornyaláb, B parakompakt. Ekkor létezik egy

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon E(\xi) \oplus E(\xi) \to \mathbb{R}$$

skalárszorzás, mellyel ellátva ξ egy euklideszi nyaláb, azaz amely szimmetrikus, bilineáris és pozitív definit.

Bizonyítás. Vegyünk trivializáló környezeteknek egy B-t fedő $\{U_\alpha\}$ családját. Egy adott $\{U_\alpha\}$-n meg tudunk adni egy $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ skaláris szorzást az előző példa alapján, hiszen itt a nyaláb triviális. B parakompaktsága szerint létezik egy $\{\psi_\beta\}$ lokálisan véges egységosztás, amely $\{U_\alpha\}$-nak alárendelt. Minden β-hoz rögzítsünk egy $\alpha(\beta)$-t, melyre $supp(\psi_\beta) \subseteq U_{\alpha(\beta)}$. Az alábbi skalárszorzás jó lesz:

$$\langle x, y \rangle = \sum_\beta \psi_\beta(\pi(x)) \langle x, y \rangle_{\alpha(\beta)}$$

Ez jól definiált, hiszen egy $\pi(x) = b \in B$ pontban csak véges sok ψ_β nem nulla, és viszont ahol $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ nincs értelmezve, ott ψ_β nulla. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ minden fibrumban szimmetrikus, bilineáris és pozitív definit lesz, mivel egy fibrumban $\langle \cdot, \cdot \rangle$ véges sok skalárszorzás konvex kombinációja, és ez megtartja mind a szimmetriát, a bilinearitást és a pozitív definitséget. □

Ezek után ha valamit euklideszi nyalábban meg tudunk csinálni, azt tetszőleges parakompakt bázísú nyalábban is képesek leszünk. Ezzel felvértezve a következő konstrukció megválaszolja az 2.9 Állítás után felvetett kérdést.

3.2. Definíció. Egy B bázis feletti η euklideszi nyaláb ξ résznyalábjának *ortogonális kiegészítő*je egy $\xi^{\perp}$ résznyalábja η-nak, melyet az alábbi konstrukció ad:

$b \in B$-ra legyen $F_b(\xi^{\perp}) = \{x \in F_b(\eta) \colon \langle x, y\rangle = 0 \quad \forall y \in F_b(\xi)\}$ Ekkor $E(\xi^{\perp})$-t, mint ezen fibrumok uniója kapjuk meg.

3.3. Állítás. $\xi^{\perp}$ a fentebb definiált $E(\xi^{\perp})$ totális térrel és az örökölt projekcióval η-nak egy résznyalábja. Emellett $\eta \approx \xi \oplus \xi^{\perp}$.

Bizonyítás. $\xi^{\perp}$ fibrumai örökölnek egy vektotérstruktúrát ξ-ből, hiszen egy F_b-ben egy kiegészítő alteret kapunk, ami zárt a vektortérműveletekre. Abból, hogy fibrumonként a vektortér direkt komponensekre esik szét az is következik, hogy az

$$f : E(\xi) \times \xi^{\perp} \to E(\eta)$$
$$f(x, y) = x + y$$

egy izomorfizmus lesz. Tehát a lokális trivialitást kell még ellenőrizni.

Keressünk egy $b_0 \in B$ pontnak környezetet, ahol a $\xi^{\perp}$ triviális. Tudjuk egy olyan U környezetét venni, ahol ξ és η már triviális. Ezt tanúsítván vegyünk fel U-n r_1, r_2, $\dots$, r_n és s_1, s_2, $\dots$, s_k ortonormált szeléseket, ahol n az η nyaláb rangja k pedig ξ-é, és az s_i-k $E(\xi)$-ben futnak. F_{b_0}-ban $s_1(b_0)$, $s_2(b_0)$, $\dots$, $s_k(b_0)$ kiegészíthető egy $s_1(b_0)$, $s_2(b_0)$, $\dots$, $s_k(b_0)$, $s'_{k+1}(b_0)$, $\dots$, $s'_n(b_0)$ bázissá. Ezeket a vektorokat az $r_1(b_0)$, $r_2(b_0)$, $\dots$, $r_n(b_0)$ bázisban koordinátázza az alábbi mátrixnak:

$$\begin{bmatrix} \langle s_1(b_0), r_1(b_0)\rangle & \dots & \langle s_k(b_0), r_1(b_0)\rangle & \langle s'_{k+1}(b_0), r_1(b_0)\rangle & \dots & \langle s'_n(b_0), r_1(b_0)\rangle \\ \langle s_1(b_0), r_2(b_0)\rangle & \dots & \langle s_k(b_0), r_2(b_0)\rangle & \langle s'_{k+1}(b_0), r_2(b_0)\rangle & \dots & \langle s'_n(b_0), r_2(b_0)\rangle \\ & \vdots & & & \vdots & \\ \langle s_1(b_0), r_n(b_0)\rangle & \dots & \langle s_k(b_0), r_n(b_0)\rangle & \langle s'_{k+1}(b_0), r_n(b_0)\rangle & \dots & \langle s'_n(b_0), r_n(b_0)\rangle \end{bmatrix}$$

Aminek tehát a rangja így maximális. Az első k oszlopban kezdjük el cseréljük ki a rögzített b_0-t egy b változóra, mely b_0 környezetében mozog, b_0-ban a mátrix megegyezik az eredetivel.

$$\begin{bmatrix} \langle s_1(b), r_1(b)\rangle & \dots & \langle s_k(b), r_1(b)\rangle & \langle s'_{k+1}(b_0), r_1(b_0)\rangle & \dots & \langle s'_n(b_0), r_1(b_0)\rangle \\ \langle s_1(b), r_2(b)\rangle & \dots & \langle s_k(b), r_2(b)\rangle & \langle s'_{k+1}(b_0), r_2(b_0)\rangle & \dots & \langle s'_n(b_0), r_2(b_0)\rangle \\ & \vdots & & & \vdots & \\ \langle s_1(b), r_n(b)\rangle & \dots & \langle s_k(b), r_n(b)\rangle & \langle s'_{k+1}(b_0), r_n(b_0)\rangle & \dots & \langle s'_n(b_0), r_n(b_0)\rangle \end{bmatrix}$$

Ennek a mátrixnak maximális lesz a rangja b_0 egy $V \subseteq U$ környzetében, a determináns folytonossága miatt. Itt ezek szerint az

$$s_1(b), s_2(b), \dots, s_k(b), \sum_{i=1}^{n} \langle s'_{k+1}(b_0), r_i(b_0)\rangle r_i(b), \dots, \sum_{i=1}^{n} \langle s'_n(b_0), r_i(b_0)\rangle r_i(b)$$

vektorok bázist fognak alkotni, így az $s'_{k+j}(b) = \sum_{i=1}^{n} \langle s'_{k+j}(b_0), r_i(b_0)\rangle r_i(b)$ szelésekkel az s_1, s_2, $\dots$, s_k, s'_{k+1}, $\dots$, s'_n független szelések egy rendszere lesz V-n. Ezeket Gram-Schmidt ortognalizálva kapjuk s_1, s_2, $\dots$, s_k, s_{k+1}, $\dots$, s_n ortonormált szeléseket. Mivel s_1, s_2, $\dots$, s_k mindig $E(\xi)$-be esik, így s_{k+1}, s_{k+2}, $\dots$, s_n csakis $E(\xi)^\perp = E(\xi^\perp)$-be eshet, aminek így egy bázisa lesz. Ezzel talátunk $E(\xi^\perp)$-ben $n-k$ darab, azaz nyalábrangnyi független szelést, ami tanusítja a lokális trivialitást. $\square$

3.4. Következmény. Most már látjuk, hogy az 1.4 Példában definiált normálnyaláb tényleg vektornyaláb. Egy $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sima sokaságra $TM \subseteq M \times \mathbb{R}^n$. Itt τ_M kiegészítő nyalábja pont ν_M lesz, amely így tényleg vektornyaláb, és $\tau_M \oplus \nu_M = \varepsilon^n_M$

4. fejezet

Fibrált Nyalábok

Bár a karakterisztikus osztályokról itt jellemzően vektornyalábokban fogunk beszélni, ahol minden fibrum egy vektortér, hasznunkra fog válni definiálni egy általánosabb struktúrát, ahol akármilyen teret megengedünk a fibrumoknak.

4.1. Definíció. Egy λ *fibrált nyaláb* a B topologikus tér *bázis* felett F fibrummal, más néven egy F*-nyaláb*, egy

- $E(\lambda)$ topologikus tér, a *totális tér*.
- $\pi\colon E \to B$ (folytonos) leképezés, a *vetítés* vagy *projekció*.
- Minden $\pi^{-1}(b), b \in B$ homemorf F-el.

A vektornyalábokhoz hasonlóan megköveteljük még a *lokális trivialitás* feltételét: $\forall b \in B$ -hez $\exists U \subseteq B$ környzete b-nek, ahol megadható egy trivializáció, egy

$$h\colon U \times F \to \pi^{-1}(U)$$

homeomorfizmus, mely fibrumot fibrumba visza, azaz az alábbi diagramm kommutál. (p_1 az első koordinátára való vetítés.)

$$\begin{tikzcd} U \times F \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p_1"] & \pi^{-1}(U) \arrow[dl, "\pi"] \\ U & \end{tikzcd}$$

Egy fibrált nyalábot gyakran jelölnek analóg módon egy rövid egzakt sorozattal az alábbi módon:

$$F \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$$

Definiálhatunk *sima* fibrált nyalábokat, melyekre B, E és F sima sokaságok kell legyenek, és minden leképezés sima.

A Vektornyalábok elméletéből ismert konstrukciók többsége fibrált nyalábokkal is értelmes lesz. Beszélünk szelésekről, résznyalábokról, nyalábok megszorításáról, direkt szorzatáról. Nyaláb-leképezésektől csak azt várjuk el, hogy a fibrum fibrumba menjen, tehát hogy kommutáljon az alábbi diagramm:

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ B_1 \arrow[r, "\bar{f}"] & B_2 \end{tikzcd}$$

Beszélhetünk továbbá indukált nyalábokról is. Itt figyelemre méltó, hogy a 2.7 Tétel bizonyítása szóról szóra itt is applikálható.

Vektornyalábokból sokféleképpen készíthetünk fibrált nyalábokat:

- Ha egy ξ euklideszi n-nyalábról beszélünk, minden fibrumban véve az 1 normájú vektorokat egy S^{n-1}-nyalábot kapunk, $S(\xi)$-t. Ezt akár euklideszi metrika nélkül is definiálhatjuk, ha azonosítunk minden nem-nulla vektort a pozitív skalárszorosaival.
- Hasonlóan az egynél kisebb normájú vektorok egy D^n-nyalábot alkotnak, $D(\xi)$-t. Ezt az euklideszi struktúra nélkül, mint a $S(\xi)$ projekciójának leképezés-hengere kaphatjuk meg.
- A projektív terek képzéséhez hasonlóan egy fibrumban a vektorokat a skalárszorosaival azonosítva kapunk egy $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$-nyalábot, $P(\xi)$-t.

Még fogunk látni hasonló konstrukciókat, különböző megszorításokkal és azonosításokkal. De lássunk most néhány konkréta példát fibrált nyalábokra.

4.1. Példa. Minden fedés egy fibrált nyaláb, diszkrét F fibrumokkal.

4.2. Példa. A κ *Klein-kancsó* egy S^1nyaláb. (1.1. ábra.) Definiáljuk, mint

$$E(\kappa) = K^2 = \frac{[0,1] \times S^1}{(0,y) \sim (1,-y)}$$

a bázisa a közepén fekvő S^1-gyel homeomorf, és az alábbi módon kapjuk a projekciót:

$$B(\kappa) = \frac{[0,1]}{0 \sim 1} \approx S^1$$
$$\pi(x,y) = x$$

Trivializáló környzeteket az alábbi módon kereshetünk:

- Ha $0 < b < 1$ akkor tetszőleges $U \subseteq \{x \in [0,1] \colon 0 < x < 1\}$ környezete b-nek a direkt szorzatból örökölt koordinátázással jó lesz.
- $b = \dfrac{\{0,1\}}{0 \sim 1}$ esetén pedig jó lokális koordináta rendszer lesz az alábbi környezet és leképezés, mivel a faktorizálásnál y-t $-y$-nal azonosítjuk:

$$U = \frac{[0,1] \setminus \frac{1}{2}}{0 \sim 1}$$
$$h \colon U \times S^1 \to \pi^{-1}(U)$$
$$h(u,y) = \begin{cases} (u,y), & \text{ha } u < \frac{1}{2} \\ (u,-y), & \text{ha } u > \frac{1}{2} \end{cases}$$

A fibrált nyalábok fontosságát a következő alapvető tétel is mutatja:

4.1. Tétel. A fibrált nyalábok rendelkeznek a *homotópia felemelési tulajdonság*gal CW-komplexusokra. Ez azt jelenti, hogyha λ egy $\pi \colon E \to B$ projekciójú F-nyaláb, és X egy CW-komplexus, akkor egy $f_t \colon X \to B$ homotópiához és $\tilde{f}_0 \colon X \to E$ felemeléséhez f_0-nak (azaz $\pi \circ \tilde{f}_0 = f_0$) létezik egy $\tilde{f}_t$ felemelése f_t-nek, (azaz olyan $\tilde{f}_t$, hogy $\pi \circ \tilde{f}_t = f_t$), mely $t = 0$-ra $\tilde{f}_0$.

A *relatív homotópia felemelési tulajdonság* is teljesülni fog. Ha (X,A) egy CW-pár, és egy $f_t \colon X \to B$ egy homotópia relatív A-hoz (azaz A pontjaiban t-ben konstans), akkor egy $\tilde{f}_0 \colon X \to E$ felemeléséhez f_0-nak, létezik egy $\tilde{f}_t$ felemelése f_t-nek, amely egy homotópia relatív A-hoz, és $t = 0$-ra $\tilde{f}_0$.

A fibrált nyalábokra teljesül a *párra vontakozó homotópia felemelési tulajdonság* is. Eszerint ha (X,A) egy CW-pár, és egy $f_t \colon X \to B$ egy homotópia, $\tilde{f}_0 \colon X \to E$ felemeléséhez f_0-nak, és $\tilde{f}|_A \colon A \to E$ egy felemelése $f|_A$-nak, akkor létezik egy $\tilde{f}_t$ felemelése f_t-nek, amely kiterjestzi $\tilde{f}|_A$-t és, $t = 0$-ra $\tilde{f}_0$.

Bizonyítás. Elég a párra vonatkozó homotópia felemelési tulajdonságot belátni, hiszen az egy A-n konstans homotópiára és a konstans felemelésre visszaadja a relatív esetet, és üres A-ra visszaadja az egyszerű esetet.

Elég a (D^n, D^{n-1}) párra (ahol a D^{n-1} a peremnek a fele) belátni. Ezzel már akármilyen (X, A) CW-párra megleszünk a cellákon rekurzívan végigmenve. Egy cella a határának azon részével ahol már adott a felemelés egy (D^n, D^{n-1}) párral homeomorf, így itt is fel tudjuk emelni a homotópiát. Így az egész CW-komplexusra kész leszünk.

(D^n, D^{n-1}) homeomorf az (I^n, I^{n-1}) párral, ahol $I = [0, 1]$, és I^{n-1}-re, $I^{n-1} \times \{0\}$-ként gondolunk. Erre a párra fogjuk belátni a homotópia felemelési tulajdonságot. Legyen $H\colon I^n \times I \to B$ a homotópia, amit fel akarunk emelni, $f_t(x) = H(x, t)$. Adott $\tilde{f}_0$ és $\tilde{f}|_{I^{n-1}}$, tehát H már fel van emelve a $I^{n-1} \times \{0\} \times I$-n és $I^n \times \{0\}$-n.

Vegyünk trivializáló környezeteknek egy B-t fedő $\{U_\alpha\}$ családját. $I^n \times I$ kompakt, így feloszthatjuk I^n-t véges sok kis n dimenziós téglára és I-t véges sok $[i_k, i_{k+1}]$ intervallumra úgy, hogy minden T kockára és k-ra van egy α, hogy $T \times [i_k, i_{k+1}]$ teljesen U_α-ba esik. I^{n-1}-be eső téglák esetén már H fel van emelve $T \times [i_k, i_k + 1]$-n, így most nézzünk ezen kívüli téglákat. Egy n dimenziós tégla határa szétesik $n-1$ dimenziós téglákra, és így tovább. A felemelést rekurzívan fogjuk definiálni a téglák dimenziója szerint. Egy adott tégla esetén k szerint rekurzívan fogjuk definiálni a felemelést $T \times [i_k, i_k + 1]$-n. Ha egy tégla 0 dimenziós, azaz csak egy x pont, $\{x\} \times [i_k, i_k + 1]$-n kell felemelni H-t úgy, hogy (x, i_k)-n már adott a felemelés. Mivel itt a nyaláb triviális, tekinthetjük $U_\alpha \times F$ szorzat alakúnak. t-ben konstans második koordináta-függvénnyel fel tudjuk emelni H-t. n dimenziós téglák esetén se lesz nehezebb dolgunk. A felemelés már adott $T \times \{i_k\}$-n és $\partial T \times I$-n. Az itt vizsgált $(T, T \times \{i_k\} \cup \partial T \times I)$ pár homemorf a $(T, T \times \{i_k\})$ párral. Ez utóbbi alakban már könnyű felemelni H-t, ha a nyalábra megintcsak $U_\alpha \times F$-alakban gondolunk, t-ben konstans második koordinátáfüggvénnyel lesz egy felemelésünk. $\square$

5. fejezet

Grassmann-Sokaságok és az Univerzális Nyaláb

Mint azt már korábban láttuk az indukált nyalábokнál, fimbronkénti izomorfizmusok homotópia osztályai alkalmasak nyalábok jellemzésére. Ennek alaposabb vizsgálata lesz a célunk. Ehhez először néhány új teret és vektornyalábot kell konstruáljunk.

5.1. Definíció. $\mathbb{R}^\infty$. Az n dimenziós valós terek kanonikusan tartalmazzák egymást, az $\mathbb{R}^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \subseteq \dots$ felszálló rendszert alkotva. Vehetjük a felszálló uniójukat, ez lesz $\mathbb{R}^\infty$. A gyenge topológiával topologizálunk: egy halmazt $\mathbb{R}^\infty$-ben akkor fogunk nyíltnak tekinteni, ha minden $\mathbb{R}^n$-nel vett metszete nyílt.

5.2. Definíció. Az előbbi konstrukciót általánosabb keretek közt is elvégezhetjük. Ezt *direkt limesz*nek fogjuk hívni. $X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \dots$ topologikus terek direkt limesze az $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ felszálló unió lesz, a gyenge topológiával topologizálva: egy halmazt X-ben akkor tekintünk nyíltnak, ha minden X_n-nel vett metszete nyílt. (A direkt limesz valójában egy lényegesen általánosabb konstrukció, de mi most csak részhalmaz relációkra vezetjük be.)

Az alábbi két állításra fogunk hivatkozni direkt limeszekről:

5.1. Állítás. Kompakt Hausdorff terek direkt limesze parakompakt.

Bizonyítás. Ez a direkt következménye a 2.6 Tételnek. Azonnal adódik, hogy a direkt limesz kompakt terek uniója, csak az kell, hogy reguláris.

Legyenek $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$ a kompakt tereink, X a direkt limeszük. Az X_n-ek kompaktak és Hausdorffak, így normálisak is. Lássuk be, hogy X is az. Ehhez elég zárt, diszjunkt $A, B \subseteq X$-ekre konstruálni egy függvényt, melyre $f|_A \equiv 0$ és $f|_b \equiv 1$, ezt rekurzívan fogjuk felépíteni. X_1-ben $A \cap X_1$ és $B \cap X_1$ is zártak, így X_1

normálissága ad rajta egy ilyen f_1-et. Az X_n-ről X_{n+1} való kiterjesztésnél a függvény már definiálva van $A \cap X_{n+1}$-en, $B \cap X_{n+1}$-en és X_n-en. Ezek mind zártak X_{n+1}-ben, szóval az uniójukról kiterjeszthető a függvény egy f_{n+1}-é a Tietze kiterjesztési tétele szerint. Az így kapott függvények uniója teljesíti a kivánt feltételünket, és folytonos lesz X-en, mivel a gyenge topológiát vettük rajta. $\square$

A következő direkt limeszek szorzatát leíró állításra is hivatkozni fogunk:

5.2. Állítás. Ha az $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ lokálisan kompakt terek direkt limesze A, és a $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \ldots$ lokálisan kompakt terek direkt limesze B, akkor az $A \times B$ topologikus tér egybeesik a $A_n \times B_n$ terek direkt limeszével. [2, Lemma 5.5.]

5.3. Definíció. Az $\mathbb{R}^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \subseteq \ldots$ tartalmazások indukálnak $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \subseteq \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \subseteq \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \subseteq \ldots$ beágyazásokat. Ez alapján az $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$-ek direkt limeszeként definiálhatjuk $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$-t.

$\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$-re úgy is tekinthetünk, mint $\mathbb{R}^\infty$ lineáris egyeneseinek tere, hiszen $\mathbb{R}^\infty$ minden lineáris egyenes valamilyen $\mathbb{R}^n$-ből jött, aminek pedig megfelel egy pont $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$-ben, ami $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ része.

5.4. Definíció. Ez alapján elkészíthetünk, úgy mint a véges dimenziós projektív terek felett, $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ felett is egy *kanonikus vonalnyalábot*, γ^1-et.

$$E(\gamma^1) = \{(e, x) \in \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty \times \mathbb{R}^\infty : x \in e\}$$
$$B = \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$$
$$\pi(e, x) = e$$

A lokális trivialitást egy általánosabb kontextusban fogjuk látni. (5.3 Következmény)

A projektív terekhez hasonlóan konstruálni fogunk Grassmann-sokaságokat, melynek a pontjai egy n-nél magasabb dimenziós tér n dimenziós lineáris alterei lesznek. Grassmann-sokaságok felett is lesz természetes módon kanonikus vektornyaláb. Az egy adott n paraméterű Grassmann-sokaságok direkt limeszeként megkaphatjuk majd az $\mathbb{R}^\infty$-nek az n dimenziós altereiből álló végtelen Grassmann-sokaság. Itt szintén lesz egy kanonikus vonalnyaláb, univerzális tulajdonságokkal. A Grassmann-sokaságok definíciója első lépéseként topologizáljuk az n dimenziós altereket kifeszíteni képes ortonormált rendszereket!

5.5. Definíció. $n \leq k$-ra a $\mathrm{V}_n(\mathbb{R}^k)$ *Stiefel-sokaság* $\mathbb{R}^k$ ortonormált vektor n-eseinek tere. Topologizáljuk mint az n tagú szorzat, $\mathbb{R}^k \times \ldots \times \mathbb{R}^k$ altere. Mivel 1 normájú vektorokat keresünk, S^{k-1}-ek szorzatának is része, ráadásul egy zárt altér lesz, mivel az ortogonalitást lehet azzal tanusítani, hogy egy folytonos függvény értéke 0 rajtuk. Így következik, hogy $\mathrm{V}_n(\mathbb{R}^k)$ kompakt lesz.

5.6. Definíció. $n \leq k$-ra a $\mathrm{G}_n(\mathbb{R}^k)$ *Grassmann-sokaság* $\mathbb{R}^k$ lineáris altereinek tere. $\mathbb{R}^k$-ban bármely ortonormált vektor n-es kifeszít egy n dimenziós alteret. Ez ad egy szűrjektív

$$q \colon \mathrm{V}_n(\mathbb{R}^k) \to \mathrm{G}_n(\mathbb{R}^k)$$

leképezést. Topologizáljuk mint $\mathrm{G}_n(\mathbb{R}^k)$, mint $\mathrm{V}_n(\mathbb{R}^k)$-nak a q szerinti faktora. Így $\mathrm{G}_n(\mathbb{R}^k)$ is kompakt lesz.

5.7. Definíció. Az $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \subseteq \ldots$ tartalmazások indukálnak $\mathrm{V}_n(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathrm{V}_n(\mathbb{R}^{n+1}) \subseteq \mathrm{V}_n(\mathbb{R}^{n+2}) \subseteq \ldots$ beágyazásokat. Ezek alapján a $\mathrm{G}_n(\mathbb{R}^k)$-ek direkt limeszeként definiálhatjuk $\mathrm{G}_n(\mathbb{R}^\infty)$-t, vagy röviden csak G_n-t. Ez $\mathbb{R}^\infty$-nek az n dimenziós altereinek lesz a tere, hiszen egy ilyen altért már valamelyik $\mathbb{R}^k$-nak is altere lesz, így benne lesz egy $\mathrm{G}_n(\mathbb{R}^k)$-ban.

5.8. Definíció. γ_n^1-hez hasonlóan $\mathrm{G}_n(\mathbb{R}^k)$ felett is definiálhatjuk a γ_k^n *kanonikus nyaláb*ot, fibrumaira mint $\mathbb{R}^k$ diszjunktizált lineaáris altereire fogunk gondolni:

$$E(\gamma_k^n) = \{(l, x) \in \mathrm{G}_n(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k \colon x \in l\}$$
$$B = \mathrm{G}_n(\mathbb{R}^k)$$
$$\pi_n(l, x) = l$$

A fibrumokon a vektortérstruktúrát örököljük $\mathbb{R}^n$-ből. G_n felett is kapunk egy kanonikus vektornyalábot, az *univerzális nyalábot*, a γ_k^n-ek direkt limeszeként. Erre gondolhatunk, mint $\mathrm{G}_n(\mathbb{R}^\infty)$ lineáris n dimenziós altereire,

$$E(\gamma^n) = \{(l, x) \in \mathrm{G}_n \times \mathbb{R}^\infty \colon x \in l\}$$

totális térrel, hiszen az $E(\gamma_k^n)$-ek direkt limesze $\{(e, x) \in \mathrm{G}_n \times \mathbb{R}^\infty \colon x \in e\}$ lesz az 5.2 Állítás szerint, mivel ez $\mathrm{G}_n(\mathbb{R}^k)$ és $\mathbb{R}^k$ direkt limeszeinek direkt szorzatának a megfelelő részhalmaza. Lássuk most γ_k^n lokális trivialiását. Ezzel γ^1-nek az 5.4 Definícióban hiányzó lokális trivialitása is meg lesz.

5.3. Állítás. γ_k^n és γ^n kielégítik a lokális trivialitás feltételét.

Bizonyítás. Kezdjük γ_k^n-nel. Legyen $l \in \mathrm{G}_n(\mathbb{R}^k)$ és $p_l \colon \mathbb{R}^k \to l$ az ortgonális projekció l-re. Legyen

$$U_l = \{l' \in \mathrm{G}^n(\mathbb{R}^k)\colon\ \mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(p_l(l'))) = n\}$$

és legyen

$$h_L \colon \pi_n^{-1}(U_l) = U_l \times l \approx U_l \times \mathbb{R}^n$$
$$h_l(l', x) = (l', p_l(x))$$

U_l és h_l egy jó lokális koordinátarendszer lesz. Először is U_l nyílt lesz. Ehhez elég ha $q^{-1}(U_l)$ nyílt. Itt az kell, hogy a vektor n-es p_l szerinti képének a rangja n legyen, tehát a determináns nem 0. Ez p_l és a determináns folytonossága szerint tényleg egy nyílt halmazon fog teljesülni. h_l tényleg egy bijekció: a második koorinátában egy izomorfizmus, az elsőben pedig konstans. p_l folytonossága rögtön implikálja h_l-ét is a koordináta-függvények folytonossága lévén. Kell még h_l^{-1} folytonossága. h_l^{-1} kifejezését akadályozza az, hogy p_l nem invertálható. Viszont minden $l' \in U_l$-hez létezik egy egyértelmű $A_{l'} \in GL_n(\mathbb{R})$ leképezés, mely l'-re megszorítva megegyezik p_l-lel, és $l^\perp = \mathrm{Ker}(p)$-n az identitás. $A_{l'}$ egy l'-beli v_1, v_2, $\ldots$, v_n ortonormált bázist egy l-beli bázisba visz, hiszen p_l megszorítva l'-re maximális rangú. p_l folytonos, így $A_{l'}(v_1)$, $A_{l'}(v_2)$, $\ldots$, $A_{l'}(v_n)$ folytonosan függ v_1, v_2, $\ldots$, v_n-től. Emiatt A_l is folytonosan függ v_1, v_2, $\ldots$, v_n-től. q folytonos, így $A_{l'}$ folytonosan fogg függeni l'-től is. Invertálható lineáris leképezésekről már tudjuk, hogy $A_{l'}^{-1}$ is folytonosan függ l'-től. (Például mert $A_{l'}$-re mátrixként tekintve annak elemei is folytonosan fognak l'-től függeni, és $A_{l'}$ mátrixának elemeivel $A_{l'}^{-1}$ mátrixa folytonosan kifejezhető.) Ekkor viszont h^{-1} felírható

$$h_l^{-1}(l', x) = (l', A_{l'}^{-1}(x))$$

alakban. Ezzel a koordináta-függvények folytonossága lévén h_l^{-1} folytonosságával is megvagyunk, befejezve a véges esetet.

γ^n-re tekintsünk, mint a γ_k^n-ek direkt limesze. Ahogyan k-t növeljük, a fentebb konstruált U_l-ek egyre bővölő halmazok, tehát vehetjük a felszálló uniójukat. Ezt fogjuk trivializáló környezetnek választani γ^n-ben. A h_l függvények sorra terjesztik ki egymást, így ezek itt összeillenek egy leképezéssé, ami homemorfizmus lesz, mivel $E(\gamma^n)$-en a gyenge topológiát vesszük. □

5.4. Tétel. Legyen B parakompakt, és ξ egy $\pi\colon E \to B$ projekciójú n-nyaláb. Ekkor Létezik egy $f\colon E \to E(\gamma^n)$ fibrumonkénti izomorfizmus, amely homotópia erejéig egyértelmű. A 2.2 Tétel miatt $f^*(\gamma^n) \approx \xi$. Tehát a γ^n nyalábról minden n-nyaláb egyértelműen visszahúzható, ezért *univerzális nyaláb*nak is hívjuk, vagy az n-nyalábok klasszifikáló terének.

Bizonyítás. Ha már adott egy ilyen f az az alábbi diagrammot adja nekünk. (p_2 a vetítés a második koordinátára. Emlékezzünk, hogy $E(\gamma^n)$-t, mint a $\mathrm{G}_n \times \mathbb{R}^\infty$ szorzattér egy altere képezzük.)

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, dotted, "\approx"] \arrow[dr, "\pi"'] & E(f^*(\gamma^n)) \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "\pi_n'"] & E(\gamma^n) \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "\pi_n"] & \mathbb{R}^\infty \\ & B \arrow[r, "f"] & \mathrm{G}_n & \end{tikzcd}$$

A felső soron kapunk egy $\hat{f}\colon E \to R^\infty$ leképezést, mely minden fibrumot izomorfan képez R^∞-be:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rrr, bend left, "\hat{f}"] \arrow[r, dotted, "\approx"] \arrow[dr, "\pi"'] & E(f^*(\gamma^n)) \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "\pi_n'"] & E(\gamma^n) \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "\pi_n"] & \mathbb{R}^\infty \\ & B \arrow[r, "f"] & \mathrm{G}_n & \end{tikzcd}$$

Ha még f nem adott, de egy ilyen $\hat{f}$ igen, az meghatározza f-et. Egy $b \in B$ pontra $\pi^{-1}(b)$ egy fibruma ξ-nak, tehát $\hat{f}(\pi^{-1}(b))$ egy n rangú altér $\mathbb{R}^\infty$-ben, azaz egy pontja G_n-nek. Így $f = \hat{f} \circ \pi^{-1}$-el kapunk egy az előző alakú diagrammot. Ezek szerint f kereséséhez elég egy ilyen $\hat{f}$-et konstruáljunk.

B parakompakt. Az 2.3 Állítás alapján $\{V_n\}$ környzeteket, melyek trivializáló környezetek diszjunkt uniói — tehát maguk is trivializáló környezetek lesznek — és egy nyílt fedés alkotnak. Létezik még egy $\{\psi_n\}$ lokálisan véges egységosztást, mely a $\{V_n\}$-nek alárendelt. Legyen $\hat{f}_n\colon V_n \to \mathbb{R}^n$ a V_n-t trivializáló leképezés $\mathbb{R}^n$-be menő koordináta-függvény ez minden fibrumot izomorf módon fog leképezni. Definiáljuk $\hat{f}$-et az alábbi módon:

$$\hat{f}\colon E \to (\mathbb{R}^n)^\infty \approx \mathbb{R}^\infty$$
$$\hat{f}(x) = (\psi_n(\pi(x)) \cdot \hat{f}_n(x))$$

Ez jól definiált, mivel $\hat{f}_n$ értelmezési tartományán kívül 0 együtthatóval szerepel, és mert csak véges sok együttható nem 0 egyadott x-re. Egy fibrumban az együtthatók meg fognak egyezni, így lineáris lesz, és legalább az egyik nem lesz 0, így injektív lesz. Tehát $\hat{f}$ egy fibrumot izomorf módon képez a képére, és ezt szerettük volna.

Az egyértelműség bizonyításához $f_0, f_1\colon E \to E(\gamma^n)$ leképezésekről kell belátni, hogy ha $f_0 1^*(\gamma^n) \approx f_1^*(\gamma^n)$ akkor f_0 és f_1 homotópak. Mivel $\hat{f}$-ből a bizonyítás elején látott konstrukcióval visszakapjuk f-et, elég $\hat{f}_0$ és $\hat{f}_1$ között konstrulni egy homotópiát, amely mindig izomorf módon képzi le a fibrumokat. Ha semmilyen x-re se lesz $\hat{f}_0(x) = -\hat{f}_1(x)$ akkor a

$$H_t = (1-t) \cdot \hat{f}_0 + t \cdot \hat{f}_1$$

leképezés sose lesz 0, így egy jó homotópia lesz. Az általános esethez kellenek az $\mathbb{R}^\infty$-nek az alábbi lineáris homotópiái:

$$K_t(x_1, x_2, \ldots) = (1-t) \cdot (x_1, x_2, \ldots) + t \cdot (0, x_1, 0, x_2, \ldots)$$
$$L_t(x_1, x_2, \ldots) = t \cdot (x_1, x_2, \ldots) + (1-t) \cdot (x_1, 0, x_2, 0, \ldots)$$

$K_1 \circ \hat{f}_0$ és $L_0 \circ \hat{f}_1$ között már a fentebbi módszer lévén homotópak, és $\hat{f}_0 = K_0 \circ \hat{f}_0$ valamint $\hat{f}_1 = L_1 \circ \hat{f}_1$ homotópak rendre $K_1 \circ \hat{f}_0$-lal és $L_0 \circ \hat{f}_1$-el a $K_t \circ \hat{f}_0$-lal és $L_t \circ \hat{f}_1$ homotópiák szerint. Ezeket a homotópiákat egymás után téve kész vagyunk. □

A Grassmann-sokaságok jobb megértéséhez hasznos lenne jobban megérteni a topolgiájukat. Konstruáljunk rajtuk egy cella struktúrát!

5.9. Definíció. $\mathbb{R}^k$ egy adott n dimenziós l alterére vizsgáljuk az $l \cap \mathbb{R}^1$, $l \cap \mathbb{R}^2$, …, $l \cap \mathbb{R}^k$ bővülő altereket, ahol az új $\mathbb{R}$-ek egy előre rögzített sorrendben jönnek $\mathbb{R}^k$ egy bázisa szerint. A vizsgált alterek dimenziója monoton nőnek:

$$0 \leq \mathrm{Dim}(l \cap \mathbb{R}^1) \leq \mathrm{Dim}(l \cap \mathbb{R}^2) \leq \ldots \leq \mathrm{Dim}(l \cap \mathbb{R}^k) = n$$

Két szomszédos érték itt legfeljebb 1-gyel különbözhet, tehát pontosan n helyen fogunk „ugrást” látni. Legyenek ezek $1 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \ldots \leq \sigma_n \leq k$. A l sík *Schubert szimbólum*ának ezt a $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ szám n-est hívjuk.

Egy $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$-re, mely kielégíti $1 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \ldots \leq \sigma_n \leq k$-t, legyen σ Schubert-szimbólumú alterek halmaza $e(\sigma) \subseteq \mathrm{G}_n(\mathbb{R}^k)$. Minden $l \in \mathrm{G}_n(\mathbb{R}^k)$ pontosan egy $e(\sigma)$-ba fog esni.

Egy n dimenziós altérnék egy bázisvektorait beírhatjuk egy $n \times k$-as mátrix soraiba. Ezt Gauss-eliminálhatjuk, hogy egy ilyen redukált lépcsős alakra hozzuk:

$$\begin{bmatrix} * & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * & 0 & 0 & * & * & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ha itt tekintjük az $l \cap \mathbb{R}^i$ metszeteket az az utolsó i oszlopra való megszorítást fogja jelenti. Látjuk, hogy a rang pontosan a vezér 1-eseket tartalmazó oszlopoknál nő, tehát ezen oszlopok számai fogják alkotni az altér Schubert-szimbólumát. Így a vezér 1-esek helyei meghatározzák a Schubert-szimbólumot. Mivel a Schubert-szimbólum egyértelmű, így a vezér 1-esek helyei is jól meghatározottak lesznek. Egy ilyen redukált lépcsős alak csak egy altérhez tartozik, ahogy sorban bevesszük a bázisvektorokat, ha a $*$ tetszőleges taghoz külöböző érték tartozik más lesz a kifeszített tér. Tehát $e(\sigma)$-t σ tartozó redukált lépcsős alakú tetszőleges tagjai parametrizálják. Ilyenekből az i-ik sorban $\sigma_i - i$ db van, összesen $(\sigma_1 - 1) + \ldots + (\sigma_n - n)$. Így $e(\sigma)$ homeomorf az ennyi dimenziós euklideszi térrel, másképpen egy nyílt cellával.

5.5. Állítás. Ezek az $e(\sigma)$ cellák egy CW-struktúra cellái $\mathrm{G}_n(\mathbb{R}^k)$-n.

Bizonyítás. Az elsődleges célunk a cellákhoz karakterisztikus leképezésket keresni. Ehhez csinálunk egy különböző lépcsős alakot. A vezér 1-esek, most lehetnek tetszőleges pozitív számok, és alattuk a 0-sok lehetnek teljesen tetszőlegesek, viszont megköveteljük, hogy a sorok ortonormáltak legyenek. Ez megintcsak egyértelmú lesz, mivel az új bázisvektorok bevételekor az ortonormáltság leszűkít a választásokat 2-re, ami után a pozitivitás feltétellel már egyértelmű lesz a választás.

A redukált alak i.-ik sora egy H_i félgömbjéhez tartozik az $S^{\sigma_i - 1} \subseteq \mathbb{R}^{\sigma_i} \subseteq \mathbb{R}^k$-kban, ahol a σ_i-ik koordináta nem-negatív. Legyen $\mathrm{V}_n(\mathbb{R}^k)$-ban $E(\sigma)$ azon $(v_1, \ldots, v_n)$ ortonormált n-esek halmaza, melyre $v_i \in H_i$ minden i-re. $E(\sigma)$ homeomorf egy zárt gömbbel. Ennek belátáshoz megmutatjuk, hogy $\pi(v_1, \ldots, v_n) = v_1$-re a keletkező $\pi\colon E = (\sigma) \to H_1$ projekciójú fibrált nyaláb triviális. Ez ekvivalens azzal, hogy keresünk egy $p\colon E(\sigma) \to \pi^{-1}(v_0)$ projekciót, ami a fibrumokban homeomorfizmus, ahol $v_0 = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}_1^\sigma \subseteq \mathbb{R}^k$. Ez elég lesz, mivel a $\pi \times p\colon E(\sigma) \to H_1 \times \pi^{-1}(v_0)$ egy homeomorfizmus lesz. (Mivel folytonos bijekció kompakt Hausdorff terek között.) A $p\colon \pi^{-1}(v) \to \pi^{-1}(v_0)$ leképezést megkapjuk, ha elvégezzük $\mathbb{R}^k$-nak a v-t v_0-ba vivő azon ρ_v forgatását, mely v-re és v_0-ra ortogonális alteret fixen hagyja. Ez a forgatás H_i-t önmagába viszi $i > 1$-re, mivel csak az első σ_1 koordinátáját változtatja $\mathbb{R}^k$-nak. Így ha p-t ebből a forgatásból kapjuk, $\pi^{-1}(v)$-t tényleg $\pi^{-1}(v_0)$-ra képzi.

A $\pi^{-1}(v_0)$ fibrumot azonosítani lehet $E(\sigma')$-vel, ahol $\sigma' = (\sigma_2 - 1, \ldots, \sigma_n - 1)$. n-en való indukcióval $E(\sigma')$ homeomorf egy $(\sigma_2 - 2) + \ldots + (\sigma_n - n)$ dimenziós zárt gömbbel, így $E(\sigma)$ tényleg egy $(\sigma_1 - 1) + \ldots + (\sigma_n - n)$ dimenziós zárt gömb. A határa az olyan pontjaiból áll, melyekre $v_i \in \partial H_i$, legalább egy i-re: Ez is következik indukcióval, mivel a ρ_v forgatás ∂H-t önmagába viszi $i > 1$-re.

A $q\colon E(\sigma) \to \mathrm{G}_n(\mathbb{R}^k)$ természetes faktorleképezés, $E(\sigma)$ belsejét $e(\sigma)$-ba képzi bijektíven. Mivel $\mathrm{G}_n(\mathbb{R}^k)$-en a faktortopológia van, ez itt egy homeomorfizmus. $E(\sigma)$ határa olyan $e(\sigma')$ cellákba képződik, ahol σ'-t σ-ból úgy kapjuk, hogy néhány σ_i-t lecsökkentünk, azaz az $e(\sigma')$ cella dimenziója kisebb, mint $e(\sigma)$-é. Most lássuk be, hogy a $q\colon E(\sigma) \to \mathrm{G}_n(\mathbb{R}^k)$ leképezések karakterisztikus leképezései az $e(\sigma)$ celláknak egy CW-struktúrához $\mathrm{G}_n(\mathbb{R}^k)$-n. Legyen G_i a legfeljebb i dimenziós $e(\sigma)$ cellák uniója. Indukcióval feltehetjük, hogy G_i már egy CW-komplexus ezekkel a cellákkal. A $e\sigma$ $(i+1)$-cellák a $\partial E(\sigma) \to G_i$ leképezés szerinti beragasztásával kapunk egy Y CW-komplexust, és egy természetesen folytonos $Y \to G_{i+1}$ leképezést. Mivel Y egy véges CW-komplexus, így kompakt, és mert G_{i+1}, mint $\mathrm{G}_n(\mathbb{R}^k)$ altere Hausdorff, az $Y \to G_{i+1}$ leképezés egy homeomorfizmus, és G_{i+1} egy CW-komplexus, befejezve az indukciót. Így lett egy CW-komplexunk $\mathrm{G}_n(\mathbb{R}^k)$-n

Mivel a $\mathrm{G}_n(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathrm{G}_n(\mathbb{R}^{k+1})$ tartalmazások részkomplexusok, így $\mathrm{G}_n(\mathbb{R}^\infty)$-n is lesz egy CW-komplexusunk, hiszen $\mathrm{G}_n(\mathbb{R}^\infty)$-n a gyenge topoloógia van. $\square$

5.6. Megjegyzés. $\mathrm{G}_n(\mathbb{R}^k)$-nak, és $\mathrm{G}_n(\mathbb{R}^\infty)$ is, annyi r-cellája van, ahány féleképpen fel lehet osztani r-et legfeljebb n szám összegére.

Bizonyítás. $\mathrm{G}_n(\mathbb{R}^k)$-nak annyi r-cellája van, ahány $1 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \ldots \leq \sigma_n \leq k$ Schubert-szimbólum van. Ebből legyárthatjuk a $(\sigma_1 - 1)$, …, $(\sigma_n - n)$ számokat, amikből a 0-kat kitörölve egy felosztást kapunk. Ez visszafele is egyértemű, ha először 0-kat teszünk hozzá, majd rendezünk. $\square$

6. fejezet

A Stiefel-Whitney Osztályok Bevezetése és Egyértelműsége

A *karakterisztikus osztály*ok vektornyalábokhoz rendelt különböző kohomológia osztályai a bázisnak. $H_k(B;G)$ fogja jelölni az i-dik szinguláris homológia csoportot G-beli együtthatókkal, míg $H^k(B;G)$ a kohomológia csoportot. A relatív esetet $H_k(B,A;G)$, illetve $H^k(B,A;G)$ fogja jelölni. Általában Z_2-beli együtthatókkal fogunk dolgozni, ilyenkor ha egyértelmű ki se írjuk a együttható-csoportot. A homológia- és kohomológiaelméletnek egy részletes bevezetése [4], ezeket az alapokat itt nem fogjuk tárgyalni.

A *Stiefel-Whitney osztály*ok karakterisztikus osztályok, melyek a 1.4 Tétel gondolatmenetét fogják általánosítani. Először axiómákkal fogjuk őket definiálni, a létezésük és egyértelmüségükkel csak ezután fogunk foglalkozni. Ezt egyelőre feltételezzük.

6.1. Definíció. Egy ξ vektornyaláb, mely n rangú, a Stiefel-Whitney osztályai kohomológia osztályok $w_k \in H^k(B(\xi))$ sorozata, melyek teljesítik az alábbi 4 axiómát:

1. $w_k(\xi) = 0$, ha $i > n$. $w_0(\xi) = 1$, ahol 1 az egysége $H^0(B(\xi))$-nek.
2. *Természetesség.* Ha η is egy vektornyaláb, és $f\colon E(\eta) \to E(\xi)$ fibrumonkénti izomorfizmus, akkor

   $$w_k(\eta) = \bar{f}^*(w_k(\xi))$$

   Ezt felírhatjuk visszahúzott nyalábokra is. Egy $f\colon A \to B(\xi)$ leképezésre:

   $$w_k(f^*(\xi)) = f^*(w_k(\xi))$$

3. *Whitney szorzat tétel.* Ha η is egy vektornyaláb és $B(\xi) = B(\eta)$, akkor

$$w_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^{k} w_i(\xi) \smile w_{k-i}(\eta)$$

4. *Nem-trivialitás.* $w_1(\gamma_1^1)$ nem 0. Ez a feltétel biztosítja, hogy a ne elégítsék ki az axiómáinkat az $1, 0, 0, \ldots$ kohomológia osztályok.

A Whitney szorzat tételt felírhatjuk a $H^*(B)$ kohomológia gyűrűben is. $H^*(B)$ additívan $\bigoplus_{i=0}^{\infty} H^i(B)$, és multiplikatívan a cup szorzatot terjesszük ki.

$$\begin{gathered}(a_0 + a_1 + a_2 \ldots)(b_0 + b_1 + b_2 \ldots) = \\ = (a_0 \smile b_0) + (a_1 \smile b_0 + a_0 \smile b_1) + (a_2 \smile b_0 + a_1 \smile b_1 + a_0 \smile b_2) + \ldots\end{gathered}$$

Ez asszociatív, és mivel Z_2 felett vagyunk kommutatív is lesz. $H^*(B)$ elemeit, mint formális sorok írjuk fel, tehát egy

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots \in H^*(B)$$

elemnél $a_0 \in H^0(B)$, $a_1 \in H^1(B)$, $a_2 \in H^2(B)$, stb.
$H^*(B)$-ben a *totális Stiefel-Whitney osztály*a egy ξ vektornyalábnak

$$w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + w_2(\xi) + \ldots + w_n(\xi) + 0 + \ldots$$

A Whitney szorzat tétel így a következő egyszerűbb alakba írható át:

$$w(\xi \oplus \eta) = w(\xi) \smile w(\eta)$$

Tekintsük az axiomák néhány azonnali következményét:

6.1. Állítás. Izomorf ξ és η vektornyalábokra $w(\xi) = w(\eta)$.

Bizonyítás. A 2 axiómat alkalmazzuk oda-vissza az izomorfizmusra. □

6.2. Állítás. Az ε triviális vektornyalábra $w(\varepsilon) = 1$

Bizonyítás. Triviális nyalábról van fibrumonkénti izomorfizmus az egy pont feletti vektornyalábba, ahol más kohomológia osztályokat nem is választhatnánk. Erre a leképezésre alkalmazzuk a 2 axiómat. $\square$

6.3. Állítás. Tetszőleges ξ vektornyalábra és ε triviális nyalábra. $w(\xi \oplus \varepsilon) = w(\xi)$

Bizonyítás. Az előző 6.2 Állítást kombinálva a Whitney szorzat tétellel azonnal következik. $\square$

6.4. Állítás. Ha ξ euklideszi n-nyaláb egy $s\colon B(\xi) \to E(\xi)$ sehol sem eltűnő szeléssel, akkor $w_n(\xi) = 0$. Ha létezik k független szelés, akkor

$$w_{n-k+1}(\xi) = \ldots = w_n(\xi) = 0$$

Bizonyítás. A független szekciók meghatároznak egy ε triviális k rangú résznyalábot. A 3.3 Állítás szerint ekkor $\xi = \varepsilon \oplus \varepsilon^{\perp}$, ahol $\varepsilon^{\perp}$ rangja $n-k$. Így az előző 6.3 Állítással és az 1 axiómával kész vagyunk. $\square$

Az elkövetkezőkben lássunk még néhány alapvető állítást a Stiefel-Whitney osztályokról, és számoljuk ki néhány egyszerű vektornyaláb Stiefel-Whitney osztályait. Kezdjünk az $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ feletti kanonikus vonalnyalábbal, γ_n^1-nel. Ehhez szükségünk lesz a bázis kohomológia gyűrűjének az alábbi jellemzésére:

6.5. Lemma. Z_2 együtthatókkal $k \leq n$-re $H^k(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \cong Z_2$, és 0 magasabb k-ra. Ez adódik, ha a $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$-re a standard módon CW-komplexusként gondolva számol az ember celluláris kohomológiát. Az is következik ebből, hogy $H^k(\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty) \cong Z_2$ minden k-ra.

Továbbá ha a a $H^1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$ csoport generátora, akkor a k-szoros cup szorzata, a^k, lesz a $H^k(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$ csoportnak a generátora.

Tehát $H^*(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$ jellemezhető, mint a Z_2 feletti egységelemes algebra, melynek egy generátor van a, és egy reláció teljesül benne, $a^{n+1} = 0$. $H^*(\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty)$ pedig a Z_2 feletti egységelemes algebra, melynek egy generátor van, és egy reláció sincs benne. [4, Example 3.40.]

6.6. Állítás. Az $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ feletti kanonikus vonalnyaláb teljes Stiefel-Whitney osztálya:

$$w(\gamma_n^1) = 1 + a$$

Bizonyítás. A standard $f\colon \mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}P^n$ beágyazás indukál egy $f'\colon E(\gamma_1^1) \to (\gamma_n^1)$ fibrumonkénti izomorfizmust. A természetesség szerint

$$f^* w_1(\gamma_n^1) = w_1(\gamma_1^1) \neq 0$$

Így $w_1(\gamma_n^1)$ se lehet 0, hiszen $f^*0 = 0$. A magasabb osztályokról az 1 axiómából tudjuk, hogy 0-k. Ez a bizonyítás $\mathbb{R}P^\infty$-re is működik. □

Térjünk az érintőnyalábok vizsgáltára. Egy M sokaság érintőnyalábjának Stiefel-Whitney osztályaira gyakran referálunk úgy, mint M Stiefel-Whitney osztályai: $w(M) = w(\tau_M)$. Ezek vizsgálatánál hasznunkra lesz, hogy ha beágyázuk M-et $\mathbb{R}^n$-be, akkor a normálnyalábja az érintőnyalábjának az ortogonális kiegészítője lesz, azaz $\tau_M \oplus \nu_M = \varepsilon_M$. Ezt például alkalmazhatjuk a gömbre:

6.7. Állítás. S^n totális Stiefel-Whitney osztálya 1 lesz: $w(S^n) = 1$ Tehát τ_{S^n}-et a Stiefel-Whitney osztályok nem különböztetik meg az S^n feletti ε_{S^n} triviális nyalábtól.

Bizonyítás. Vegyük a standard $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ beágyazást. $\tau_{S^n} \oplus \nu_{S^n} = \varepsilon_{S^n}$. Viszont tudjuk, hogy ν_{S^n} triviális $\mathbb{R}^{n+1}$-ben. Így a 6.3 Állítás szerint kész vagyunk. □

A $w(\tau_M) \smile w(\nu_M) = 1$ azonosság alapján még sok helyen alkalmas a Stiefel-Whitney osztályok számolására. Az ilyen egyenletek megoldását jellemzi a következő lemma:

6.8. Lemma. Tetszőleges B-re az 1-gyel kezdődő elemei $H^*(B)$-nek , azaz a

$$w = 1 + w_1 + w_2 + w_3 \dots$$

alakú tagok csoportot alkotnak a szorzásra. (Ezek lesznek az egységek $H^*(B)$-ben)

Bizonyítás.

$$w = 1 + w_1 + w_2 + w_3 \dots$$

inverzét keressük. Ezt jelöljük az alábbi módon:

$$\bar{w} = 1 + \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \bar{w}_3 \dots$$

Ekkor az inverznek teljesítenie kell, hogy $w \smile \bar{w} = 1$, azaz

$$1 + (w_1 + \bar{w}_1) + (w_2 + w_1 \smile \bar{w}_1 + \bar{w}_2) + (w_3 + w_2 \smile \bar{w}_1 + w_1 \smile \bar{w}_2 + \bar{w}_3) \ldots = 1$$

Az n. tagot $\bar{w}_n$-re rendezve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\bar{w}_1 &= w_1 \\
\bar{w}_2 &= w_2 + w_1 \smile \bar{w}_1 \\
\bar{w}_3 &= w_3 + w_2 \smile \bar{w}_1 + w_1 \smile \bar{w}_2 \\
&\vdots \\
\bar{w}_n &= w_n + w_{n-1} \smile \bar{w}_1 + \ldots + w_2 \smile \bar{w}_{n-2} + w_1 \smile \bar{w}_{n-1} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Így rekurzívan ki tudjuk számolni a $\bar{w}_n$-eket, tehát meg tudunk konstruálni egy inverzt. □

6.9. Következmény. Ha két azonos bázis feletti vektornyaláb direkt összege triviális, $\xi \oplus \eta = \varepsilon$, akkor így könnyen megkaphatjuk az egyik Stiefel-Whitney osztályai alapján a másikét:

$$\begin{aligned}
w(\xi) \smile w(\eta) &= 1 \\
w(\xi) &= \bar{w}(\eta)
\end{aligned}$$

Speciálisan megkaptuk a *Whitney dualitás tétel*t.

6.10. Tétel. *Whitney dualitás tétel.* Ha τ_M az M euklideszi térbe ágyazott sokaság érintőnyalábja és ν_M a nyormálnyalábja, akkor

$$w(\nu_M) = \bar{w}(\tau_M)$$

6.11. Következmény. Bár a normálnyaláb függ a dimenziójától a térnek melybe beágyaztunk, a Stiefel-Whitney osztályai ettől függetlenül meghatározottak.

6.1. Példa. γ_n^1 a definíciója szerint egy résznyalábja a $\varepsilon_{\mathbb{RP}^n}^{n+1}$ triviális $n+1$-nyalábnak. Legyen itt γ_n^1 ortogonális kiegészítője $\gamma_n^{1\perp}$. Ekkor a 6.9 Következmény alapján $w(\gamma_n^{1\perp}) = w(\gamma_n^1)$. Ezt kiszámolva azt kapjunk, hogy

$$w(\gamma_n^{1\perp}) = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n$$

6.12. Következmény. Egy n-nyalábnak mind az n Stiefel-Whitney osztálya lehet nem-nulla.

Az érintőnyalábjuk jellemzésével nagyon sokat megtudhatunk terekről, és ennek kapcsán fogjuk még látni következményeit a Stiefel-Whitney osztályoknak. (8 fejezet.) Viszont mielőtt további alkalmazásokra térnénk, rá először értsük meg jobban a Stiefel-Whitney osztályokat. Többek közt még mindig nem tudjuk, hogy léteznek, illetve egyértelműek. Elsőnek az utóbbi a célünk. Szükségünk lesz ehhez a végtelen Grassmann-sokaságok G_n kohomológiájának és Stiefel-Whitney osztályainak jellemzésére is.

6.13. Tétel. A $H^*(\mathrm{G}_n)$ kohomológia gyűrű a $w_1(\gamma^n)$, $w_2(\gamma^n)$, ..., $w_n(\gamma^n)$-ek által Z_2 felett szabadon generált polinom gyűrű lesz, $Z_2[w_1(\gamma^n), \dots, w_n(\gamma^n)]$. Itt γ^n az G_n feletti kanonikus n-nyaláb, az univerzális nyaláb.

Bizonyítás. Első lépésként lássuk azt be, hogy tényleg semmilyen reláció nem áll fent $w_1(\gamma^n)$, $w_2(\gamma^n)$, ... és $w_n(\gamma^n)$ között. Tegyük fel, hogy teljesül valami reláció:

$$p(w_1(\gamma^n), w_2(\gamma^n), \dots, w_n(\gamma^n)) = 0$$

Ezt a relációt a Stiefel-Whitney osztályok természetességge lévén vissza tudjuk húzni egy $f\colon E(\xi) \to E(\gamma^n)$ fibrumonkénti izomorfizmus szerint $B(\xi)$-be:

$$p(w_1(\xi), \dots, w_n(\xi)) = p(\bar{f}^* w_1(\gamma^n), \dots, \bar{f}^* w_n(\gamma^n)) = \bar{f}^* p(w_1(\gamma^n), \dots, w_n(\gamma^n)) = 0$$

Az 5.4 Tétel szerint γ^n az univerzális n-nyaláb, bármely más (parakompakt bázisú) n-nyalábról van fibrumonkénti izomorfizmus γ^n-be. Tehát elég egy nyalábot találni, ahol nincsenek relációk $w_1(\xi)$, $w_1(\xi)$, ..., $w_n(\xi)$ között, és megvagyunk. Tekintsük a γ^1 kanonikus vonalnyalábot $\mathbb{RP}^\infty$ felett. A 6.5 Lemma szerint $H^*(\mathbb{RP}^\infty)$-t egy a elem generálja szabadon, a 6.6 Állítás pedig kimondja, hogy $w_1(\gamma^1) = 1 + a$. Legyen n db $\mathbb{RP}^\infty$ direkt szorzata $X = \mathbb{RP}^\infty \times \dots \times \mathbb{RP}^\infty$. Mivel $H^*(\mathbb{RP}^\infty)$ véges dimenziós X kohomólógiagyűrűjét a Künneth-formulából kiszámolhatjuk, mint az n-szeres tenzorszorzat $H^*(X) = H^*(\mathbb{RP}^\infty) \times \dots \times H^*(\mathbb{RP}^\infty)$. Mivel ezek mind 1 elem által szabadon generáltak, $H^*(X)$ az a_1, a_2, ..., a_n által szabadon generált polinom gyűrű lesz, ahol $a_i = p_i^*(a)$, ahol $p_i\colon X \to \mathbb{RP}^\infty$ a i-adik tényezőre vett projekció. Legyen X felett a ξ vektornyaláb n db γ^1 direkt szorzata:

$$\xi = \gamma^1 \times \dots \times \gamma^1 = (p_1^* \gamma^1) \oplus \dots \oplus (p_n^* \gamma^1)$$

ξ rangja n lesz. ξ totális Stiefel-Whitney osztályát megadja a Whitney szorzat tétel:

$$w(\xi) = w(\gamma^1) \smile \ldots \smile w(\gamma^1) = (1 + a_1) \smile (1 + a_2) \smile \ldots \smile (1 + a_n)$$

Ezt kibontva a Stiefel-Whitney osztályok:

$$\begin{aligned}
w_1(\xi) &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\
w_2(\xi) &= a_1 \smile a_2 + a_1 \smile a_3 + \ldots + a_1 \smile a_n + \ldots + a_{n-1} \smile a_n \\
&\vdots \\
w_n(\xi) &= a_1 \smile a_2 \smile \ldots \smile a_n
\end{aligned}$$

Ezek a_1, a_2, …, a_n elemi szimmetrikus polinomjai, amik között tudjuk, hogy semmilyen reláció nem áll fent. Így sikerült konstruáljunk egy (parakompakt bázis felleti) n-nyalábot, melynek Stiefel-Whitney osztályai közt nem áll fent semmilyen reláció. Ezzel beláttuk, hogy semmilyen reláció nem áll fent $w_1(\gamma^n)$, $w2(\gamma^n)$, … és $w_n(\gamma^n)$ között.

Már tudjuk, hogy $H^*(\mathrm{G}_n)$ tartalmazza $Z_2[w_1(\gamma^n), \ldots, w_n(\gamma^n)]$-t. Azt, hogy ez a részalgebra egybe is esik $H^*(\mathrm{G}_n)$-nel, egy leszámolással fogjuk bizonyítani, a H^*-re, mint celluláris kohomológia gondolva. Az 5.6 megjegyzésből tudjuk, hogy G_n-nek, mint CW-komplexus, r-cellája annyi darab van, ahányféleképpen fel lehet osztani r-et legfeljebb n szám összegére. Így $H^k(\mathrm{G}_n)$ rangja legfeljebb az ilyen felosztások száma. Másrészt, a

$$w_1(\gamma^n)^{r_1} \smile w_2(\gamma^n)^{r_2} \smile \ldots \smile w_n(\gamma^n)^{r_n}$$

monomok, ahol $r_1 + 2r_2 + \ldots nr_n$, mind lineárisan függetlenek Z_2 felett, így az ő számuk alulról becsüli $H^k(\mathrm{G}_n)$ rangját. De egy r_1, r_2, …, r_n szám n-esnek megfeleltethetjük r azon partícióját, melyet $r_n, r_n + r_{n-1}, \ldots, r_n + r_{n-1} \ldots + r_1$-ből kapunk a 0-k kitörlésével. 0-k hozzáadásával ez a megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű.

Ezzel $H^k(\mathrm{G}_n)$ rangjára az alsó és a felső becslésünk egybeesik, tehát annyi lesz ahány partíciója van r-nek legfeljebb n számra, és a bázisát pontosan a

$$w_1(\gamma^n)^{r_1} \smile w_2(\gamma^n)^{r_2} \smile \ldots \smile w_n(\gamma^n)^{r_n}$$

alakú monomok alkotják. $H^*(\mathrm{G}_n)$ tényleg nem tartalmaz a $Z_2[w_1(\gamma^n),\ldots,w_n(\gamma^n)]$-en kívüli elemeket. □

6.14. Tétel. *A Stiefel-Whitney osztályok egyértelműsége*: Legfeljebb egy a vektornyalábokhoz a bázis komologóia osztályit rendelő $\xi \mapsto w(\xi)$ megfeleltetés létezik, ami minden parakompakt bázis feletti vektornyalábhoz kohomológia-osztályokat rendel hozzá, úgy hogy azok teljesítik a Stiefel-Whitney osztályok 4 axiómáját.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy adott két $\xi \mapsto w(\xi)$, $\xi \mapsto w'(\xi)$ ilyen megfeleltetés. Ezekről fogjuk belátni, hogy megegyeznek.

Az 1 és a 4 axiómak következtében, az $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ feletti γ_1^1 kanonikus vonalnyalábra

$$w(\gamma_1^1) = w'(\gamma_1^1) = 1 + a$$

γ_1^1-et beágyazva az $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ feletti γ^1 kanonikus vonalnyalábba a 2 és az 1 axiómát használva azt kapjuk, hogy

$$w(\gamma^1) = w'(\gamma^1) = 1 + a$$

Ezután az n-szeres direkt szorzatot vizsgálva

$$\xi = \gamma^1 \times \ldots \times \gamma^1 = (p_1^*\gamma^1) \oplus \ldots \oplus (p_n^*\gamma^1)$$

A 2 és 3 axiómak szerint

$$w(\xi) = w'(\xi) = (1 + a_1) \smile (1 + a_2) \smile \ldots \smile (1 + a_n)$$

Most vehetünk egy $f\colon E(\xi) \to E(\gamma^n)$ fibrumonkénti izomorfizmust. Az előbbi 6.13 Tétel szerint A $H^*(\mathrm{G}_n) = Z_2[w_1(\gamma^n),\ldots,w_n(\gamma^n)]$. Azt is láttuk, hogy f^* a $w_1(\gamma^n)$, $w_2(\gamma^n)$, …, $w_n(\gamma^n)$ generátorokat az elemi szimmetrikus polinomokba viszi. Így f^* a szimmetrikus polinom alaptétele szerint $H^*(\mathrm{G}_n)$-t pontosan a szimmetrikus polinomokba fogja képezni, ráadásul egyértelmű módon, azaz f^* injektív. Így viszont mivel a 2 axióma lévén

$$f^*w(\gamma^n) = w(\xi) = w'(\xi) = f^*w'(\gamma^n)$$

f^* injektivitásával már következik, hogy $w(\gamma^n) = w'(\gamma^n)$

Most már bármely η vektornyalábra véve egy $g\colon E(\eta) \to E(\gamma^n)$ fibrumonkénti izomorfizmust azonnal adódik, hogy $w(\eta) = g^*w(\gamma^n) = g^*w'(\gamma^n) = w'(\eta)$. □

7. fejezet

A Stiefel-Whitney Osztályok Jellemzése és Létezése

7.1. Definíció. A ξ vektornyaláb *irányítható*, ha minden fibrumának ki tudjuk választani egy irányítását — azaz egy *irányítás* egy függvény, ami minden fibrumhoz egy irányítását rendeli — úgy, hogy a bázis minden pontjának van egy U trivializáló környezete, ahol van egy

$$h\colon U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$$

trivializáló leképezés, mely $\mathbb{R}^n$-et a standard irányításával irányítástartóan képzi a fibrumokba. Ez ekvivalens azzal U tudunk venni n db független szelést, melyek minden fibrumban egy az adott irányítású bázist adnak.

7.1. Állítás. Az ε triviális nyaláb irányítható lesz, mivel izomorf $B \times \mathbb{R}^n$-nel és a második koordinátában válaszhatjuk mindig ugyanazt az irányítást.

7.2. Állítás. Legyen ξ egy $\pi\colon E \to B$ projekciójú vektornyaláb, B egy CW-komplexus. ξ pontosan akkor irányítható, ha a B_1 1-váz feletti megszorítása az. Egy vektornyaláb egy 1 dimenziós CW komplexus felett pontosan akkor irányítható, ha triviális.

Bizonyítás. Amennyiben ξ irányítható, akkor ezt az irányítást megszorítva B_1-re $\xi|_{B_1}$ egy irányítását kapjuk. Nézzük a fordított irányt. Legyen ξ egy $\pi\colon E \to B$ projekciójú vektornyaláb, B egy CW-komplexus. Tegyük fel, hogy már B_1 felett van egy irányításunk. Dimenzió szerint rekurzívan ki fogjuk terjeszteni az irányítást minden magasabb cella felé. Egy e^n_α tetszőleges n-cella homeomorf D^n-nel, így a nyaláb rá megszorítva csak triviális lehet. A cella határa felett már adott egy irányítás, amit ki akarunk terjeszteni e_α^n felé. ∂e_α^n-n is triviális kell legyen a nyaláb, aminek pontosan kétféle lehetséges irányítása van, ezek megfelelnek $\xi|_{e_\alpha^n}$ lehetséges irányításainak megszorításának. $\xi|_{e_\alpha^n}$ megfelelő irányítása tehát kiterjeszti az irányításunkat e_α^n-ra.

A másik állítás egyik iránya csak az előző 7.1 Állítás. A másik irányhoz definiálnunk kell egy

$$f\colon B \times \mathbb{R}^n \to E$$

izomorfizmust. Válasszuk ki ξ egy irányítását, és ezt tanúsító trivializáló környzeteket. Ez utóbbiak leszűkítésével minden e_α^1 1-cellának kapjuk egy $0 = i_0^\alpha < i_1^\alpha < \ldots < i_{k_\alpha}^\alpha = 1$ felbontását, úgy hogy minden $[i_j^\alpha, i_{j+1}^\alpha]$-hez tartozik $h_j^\alpha\colon [i_j^\alpha, i_{j+1}^\alpha] \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}([i_j^\alpha, i_{j+1}^\alpha])$ fibrumonként irányítástartó trivializáló leképezés. Ezek után f konstruáljuk egy tetszőleges 0-cellából indulva, ott f-nek egy tetszőleges irányítástartó képet választva. Ezek az $[i_j^\alpha, i_{j+1}^\alpha]$-re akarjuk rekurzívan kiterjeszteni f-et. Egy $[i_j^\alpha, i_{j+1}^\alpha]$, mint h_j^α szeretnénk, ebben meggátol minket, ha egy végpontban már definiálva van f, és

$$f(\{i_j^\alpha\} \times \mathbb{R}^n) \not\equiv h_j^\alpha(\{i_j^\alpha\} \times \mathbb{R}^n)$$

Ekkor viszont f a standard bázison felvett értékét h_j^α valahol felveszi. Ez utóbbi vektorokat a standard bázisba vihetjük egy $A \in SL_n(\mathbb{R})$ lineáris leképezéssel. h_j^α a második koordinátban megkomponálva A-val jó lesz már.

Ez nem működik, ha mindkét végpontba definiálva van már f, és i_{j+1}^α-ben egy A' leképezést kapjunk. Ekkor viszont, mivel $SL_n(\mathbb{R})$ útösszefüggő, létezik egy

$$A_t\colon [i_j^\alpha, i_{j+1}^\alpha] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

minden $t \in [i_j^\alpha, i_{j+1}^\alpha]$-re $SL_n(\mathbb{R})$-beli, és $A_0 = A$ és $A_1 = A'$. A_t-vel kombinálva h_j^α-t már kompatibilis lesz f-el. Így már ki tudjuk terjeszteni f-et. Így f kiterjed az egész B-re. $\square$

7.3. Következmény. A γ_1^1 kanonikus vonalnyaláb nem irányítható.

Emlékezzünk, hogy $w_1(\gamma_1^1) \neq 0$ erről majd belátjuk, hogy kapcsolatban van γ_1^1 irányíthatatlanságával.

Most már tudjuk, hogy ahhoz, hogy egy B CW-komplexus feletti, $\pi\colon E \to B$ projekciójú, n rangú, ξ vektornyalábon keressünk egy irányítást, elég B_1 felett találni egyet. Ez B_1-en pedig azt jelenti, hogy keresnünk kell $s_1, \dots, s_n\colon B \to E$ sehol sem eltűnő szeléseket az előző 7.2 Állítás második része az 1.7 Állítás szerint. A Gram-Schmidt ortognoalizáció miatt az általánosság csorbítása nélkül kereshetünk ortonormált szeléseket. (ξ-re tehetünk Euklideszi struktúrát a 2.5 Tétel és a 3.2 Tétel miatt.) B_0-on mindig tudunk ilyen $s_1, \dots, s_n$-et definiálni, választunk minden 0-cella felett egy ortonormált bázist. Az 1-cellák felett triviális és irányítható a nyaláb, így, ha megpróbáljuk egy e^1_α 1-cellára $s_1, \dots, s_n$-t kiterjeszteni, akkor ez pontosan akkor fog menni, ha a két végpontban megegyezik az bázisok irányítása, (e^1_α egy irányítása szerint) más szóval, ha a két bázis $O_n(\mathbb{R})$ ugyanazon komponensébe vannak. Ez alapján rendeljünk 0-t e^1_α-hoz, ha kiterjed-e rá $s_1, \dots, s_n$ és 1-et ha nem, gondolhatunk erre úgy is, hogy $\pi_0(O_n(\mathbb{R}))$ a két végpontbeli bázis által meghatározott elemét rendeljük e^1_α-hoz. Így kapunk egy

$$\omega\colon C_1 \to Z_2 \quad \text{avagy egy} \quad \omega\colon C_1 \to \pi_0(O_n(\mathbb{R}))$$

leképezést, ahol C_1 az 1-cellák által generált szabad modulus, azaz ω egy celluláris kolánc lesz. Kociklus is lesz, mert a kohatára 0: Egy 2-cella határán ω el fog tűnni, hiszen 2-cellák felett triviális és irányítható a nyaláb, így eszerint tudjuk vizsgálni a határ mentén, mely 1-cellák végpontjai közt vált előjelet a bázis irányítása, és mivel végül ugyanoda érünk vissza, páros sok ilyen váltás kell legyen, ami Z_2 felett 0. Ha egy 0-cellán egy különböző irányítású bázist választunk, ω pontosan az ide ragadó 1-cellákon változik meg. Így ez azonos azzal, mintha az ezen a 0-cellán 1-et, és a többin 0-t felvevő kolánc kohatárát adnánk ω-hoz. $s_1, \dots, s_n$-t változtatva tehet ω a kohomológia osztályán belül mozog, így kaptunk egy jól definiált, csak ξ-tól függő kohomológia osztályt:

$$[\omega](\xi) \in H^1(B; Z_2) = H^1(B; \pi_0(O_n(\mathbb{R})))$$

$[\omega](\xi)$ leírja ξ irányítható-e. Ha ξ irányítható $[\omega](\xi) = 0$, hiszen tudunk jó szeléseket választani. Ha pedig $[\omega](\xi) = 0$ akkor véletlenszerűen választva a 0-cellákon irányításokat kapunk egy ω kohatárt, amit néhány 0-cella átállításával 0-ba lehet vinni, ekkor pedig kapunk egy irányítást ξ-n.

7.4. Tétel. Legyen ξ egy $\pi\colon E \to B$ projekciójú vektornyaláb, B egy CW-komplexus. Ekkor $w_1(\xi) = [\omega](\xi)$. Tehát $w_1(\xi) = 0$ pontosan akkor, ha ξ irányítható.

w_1-re ez alapján úgy is hivatkozhatunk, mint az irányíthatóság elsődleges obstrukciója: amikor megpróbáljuk ξ-t valahogy irányítani $w_1(\xi)$ azt írja le ez hol is fog elakadni.

Először szükségünk lesz a következő lemmára:

7.5. Lemma. A $[\omega](\xi)$ kohomológia osztály természetes. Azaz, egy $f\colon A \to B$ leképezésre

$$[\omega](f^*(\xi)) = f^*([\omega](\xi))$$

Bizonyítás. (A 7.5 Lemmára) f-et válaszhatjuk egy celluláris leképezésnek, hisz egy homotópiával azzá lehet tenni, és ilyenkor izomorf $f^*(\xi)$-t kapunk. Az $s_1, \ldots, s_n\colon B \to E$ szeléseket f visszahúzza $s_1', \ldots, s_n'\colon A \to E$ leképezésekké, melyekre $f(a) = \pi(s_i'(a))$. Ez pont azt jelenti $E(f^*(\xi))$ definíciója szerint, hogy a szeléseket egészen visszahúzhatjuk $f^*(s_1), \ldots, f^*(s_n)\colon A \to E(f^*(\xi))$ szelésekké.

Legyenek $s_1, \ldots, s_n$ a B 0-celláin definiáltak és az ω_ξ kociklust indukálják. $f^*(\xi)$-ben ekkor az $f^*(s_1), \ldots, f^*(s_n)$ szelések A 0-celláin lesznek adva. Egy e^1_α 1-cellájára A-nak a határának két pontjában ekkor az $f^*(s_1), \ldots, f^*(s_n)$-nek ugyanúgy fognak állni egymáshoz képest, mint $f(e^1_\alpha)$ határának két pontjában $s_1, \ldots, s_n$, az $f^*(s_1), \ldots, f^*(s_n)$ képzési módja miatt. Ez azt jelenti, hogy $\omega_{f^*(\xi)}(e^1_\alpha) = \omega_\xi(f(e^1_\alpha))$. De $\omega_\xi(f(e^1_\alpha)) = f^*(\omega_\xi(e^1_\alpha))$. Ezzel megkaptuk, hogy $[\omega](f^*(\xi)) = f^*([\omega](\xi))$. □

Bizonyítás. (A 7.4 Tételre) Mivel ω természetes, elég az univerzális nyalábra belátni, hiszen egy tetszőleges ξ nyalábhoz vehetünk egy $f\colon E(\xi) \to E(\gamma^n)$ nyalábonkénti izomorfizmust. (Létezik ilyen az 2.5 Tétel és a 5.4 Tétel miatt.)) Ezzel megkapjuk, hogy:

$$w_1(\xi) = f^* w_1(\gamma^n) = f^* \omega(\gamma^n) = \omega(\xi)$$

Tudjuk, hogy $H^*(\mathrm{G}_n) = Z_2[w_1(\gamma^n), \ldots, w_n(\gamma^n)]$. Így $H^1(\mathrm{G}_n) = \{0, w_1(\gamma^n)\}$, minden egyéb polinom magasabb csoportba kerül. $\omega(\gamma^n) \in H^1(\mathrm{G}_n)$ tehát vagy 0 vagy $w_1(\gamma^n)$. A természetesség miatt elég találjunk egy η vektornyalábot, melyre $\omega(\eta)$ nem 0, hiszen akkor véve egy $g\colon E(\eta) \to E(\gamma^n)$ fibrumonkénti izomorfizmust:

$$0 \neq \omega(\eta) = g^* \omega(\gamma^n) \implies \omega(\gamma^n) \neq 0 \implies \omega(\gamma^n) = w_1(\gamma^n)$$

És mivel $0 \neq \omega(\eta)$ pont az jelenti, hogy η nem irányítható ilyen vektornyaláb van, mint azt a 7.3 Következményben láttuk, γ^1_1 például nem ilyen. □

A további Stiefel-Whitney osztályoknak is szeretnénk egy hasonló jellemzését adni. Független szelések kereséséről láttuk, megegyezik ortonormált szelések keresésével. Ha egy ξ vektornyaláb, vehetünk egy fibrált nyalábot, a $V_k(\xi)$ Stiefel nyalábot. A totális terének pontjai ortnormált vektor k-asok lesznek ξ fibrumaiból, $V_k(\xi)$-t elkészíthetjük a k-szoros direkt összeg $S(\xi) \times \ldots \times S(\xi)$ résznyalábjaként, ahol $S(\xi)$ az S^{n-1}-nyaláb a ξ-beli egységgömbökből. $V_k(\xi)$ fibruma a $\mathrm{V}_k(\mathbb{R}^n)$ Stiefel-sokaság lesz. Így vissza tudjuk vezetni k független szekció keresését egy vektornyalábban, csak 1 darab szekció keresésére egy fibrált nyalábban. Hasznos lesz tehát kiépítsünk valamennyi a fibrált nyalábok szeléseinek kiterjeszthetőségének vizsgálatára használt obstrukcióelméletet. Ehhez fektessük le néhány kezdeti feltételt.

Legyen λ egy $\pi\colon E \to B$ projekciójú F-nyaláb, B CW-komplexus, $A \subseteq B$ egy részkomplexusa. $s\colon A \to E$ egy szelés, amit ki akarunk terjeszteni az egész B-re. Az alábbi feltételezésekkel fogunk élni:

1. Az F fibrum útösszefüggő, és $\pi_1(F)$ hatása minden $\pi_n(F)$-en triviális. Ezt azért tesszük fel, hogy a bázisponttal ne kelljen foglalkozzunk, hiszen így különböző bázispontokra kanonikusan izomorf csoportokat kapunk.

2. $\pi_n(F)$ elemének egy $\phi\colon S^n \to F$ reprezentására a $\pi \circ \phi$ leképezés a bázis egy pontjába képez. Ennek $\pi_1(B)$ elemének egy $\gamma\colon S^n \to F$ reprenentása egy homotópiája. A homotópia felemelési tulajdonsággal ezt felemelve a homotópia végén kapunk egy egyazon F-be képző $\phi'\colon S^n \to F$ leképezést. A relatív homotópia felemelési tulajdonsággal applikálásával láthatjuk, hogy ez egy jól definiált — a reprezentáns választásától független — csoporthatás lesz. Ez a hatás is legyen triviális. Ezt azért tesszük fel, mert így adódik egy minden F_b fibrumra kanonikus megfeleltetés $\pi_n(F_b)$ és $\pi_n(F)$ között.

s-et rekurzívan tervezzük kiterjeszteni B vázaira. B_0-ra megint csak menni fog. Tegyük fel, hogy B_n-re már kiterjesztettük s-et, és B_{n+1}-re szeretnénk most. Tekintsük egy e_α^{n+1} $n+1$-cellát, amire ki szeretnénk terjeszteni s-et, s adott már e_α^{n+1} határán. e_α^{n+1} egy D^{n+1} a határánál beragasztva, a határa egy S^n. A ragasztást komponálva s-sel kapunk egy $s_0\colon S^n \to E$ leképezést. $\pi \circ s_0$ a határon az identitás lesz. $\pi \circ s_0$ nullhomotóp, koncentrikus gömbökön át a középpontba húzható. Emeljük fel ezt a nullhomotópiát az s_0 kezdettel, a végén egy $s_1\colon S^n \to F$ leképezést kapunk. Két különböző s_t, s_t' felemelés homotóp $s_1\colon S^n \to F$ leképezéseket ad. Ezt látjuk, ha alkalmazzuk a relatív homotópia felemelési tulajdonságot a konstans homotópiára $\pi \circ s_t$ és $\pi \circ s_t'$ között úgy, hogy kezdeti felemelésnek megadjuk s_0-t, s_t-t és s_t'-t, és

s_1, s_1' értelmezési tartományában várunk el relativitást, az ad egy homotópiát s_1 és s_1' között. Van tehát egy jól definiált

$$\omega_s \colon C_{n+1} \to \pi_n(F)$$

celluláris koláncunk. (C_{n+1} az n+1-cellák által generált szabad modulus.) A definícióhoz elég lenne a cellákon definiálni, amiután ω_s homomorf módon kiterjed C_n-re. De hasznunkra fog válni, ha adunk egy geometriai interpretációt is ω_s egy láncon felvett értékének. Két szomszédos e_α^{n+1}, e_β^{n+1} cellát a közös határuk egy kompnensénél összeragaszthatunk egy új $e_{\alpha+\beta}^{n+1}$ cellává. Erre az új cellára is képezhetjük $\omega_s(e_{\alpha+\beta}^{n+1})$-t a fentebbi konstrukció szerint. Ha $\omega_s(e_\beta^{n+1})$-et úgy is konstruálhatjuk, hogy a határt először egy S^{n-1} mentén összecsípjük egy pontba e_α^{n+1} és e_β^{n+1} közös határán, majd a keletkezett két összefűzött S^n-t külön kicsinyítjük e_α^{n+1}-ben és e_β^{n+1}-ben. Ekkora végén $\omega_s(e_\alpha^{n+1})$-et és $\omega_s(e_\beta^{n+1})$-et fogjuk egy pont felett látni összefűzve. Tehát $\omega_s(e_{\alpha+\beta}^{n+1}) = \omega_s(e_\alpha^{n+1}) + \omega_s(e_\beta^{n+1})$. (A 2 feltétel miatt π_n kommutatív kell legyen $n = 1$-re is, így az additív jelölés indokolt.)

Ha s kiterjed B_{n+1}-re, akkor $\omega_s = 0$, hiszen s megadja a homotópiák egy felemelését, melyek konstans s_1 leképezésben végződnek. Megfordítva, ha $\omega_s = 0$ Minden homotópiát fel lehet emelni úgy, hogy egy nullhomotóp leképezésben végződjön. Az eredeti felemelést a középponttól eltávolítva oda be lehet illeszteni ezt a nullhomotópiát, hogy s egy felemelését kapjuk. Mivel feltettük, hogy $\pi_0(F) = 0$ ez $n = 0$-ra mindig menni fog, tehát feltehetjük ezentúl, hogy $n \geq 1$. ω_s tehát leírja s kiterjeszthető-e B_{n+1}-re.

7.6. Állítás. Az ω_s celluláris kolánc egy kociklus.

Bizonyítás. Ehhez az kell, hogy $n+2$-cellák határán eltűnik. Vegyünk egy e_α^{n+2} $n+2$-cellát. Jelöljük ki az egyik e_β^{n+1} határát alkotó cellát. A többit olvasszunk össze minden egy új e_γ^{n+1} cellába. A rajtuk felvett homotópia osztályok összege lesz $\omega_s(e_\gamma^{n+1})$. e_α^{n+2}-n át ez e_γ^{n+1} és $\omega_s(e_\gamma^{n+1})$ homotópak egymással. Az $\omega_s(e_\gamma^{n+1})$-et adó konstrukciót felemelve és átvíve ezen a homotópián, kapunk egyet, ami e_β^{n+1}-t fogja tudni meghatározni, és $\pi_n(F)$ ugyanazon eleme van középen. Viszont a határ irányítása megfordult ahogy áttoltuk e_α^{n+2}-n, így ha a jó irányítású határt indítjuk el, az ellentettjét fogjuk kapni:

$$\omega_s(e_\beta^{n+1}) = -\omega_s(e_\gamma^{n+1})$$
$$\omega_s(e_\beta^{n+1}) + \omega_s(e_\gamma^{n+1}) = 0$$

Tényleg 0 ω_s kohatára. Ha már A-n definiálva van s, akkor ω_s egy relatív kociklus lesz, ami eltűnik A celláin. Így $H^{n+1}(X,A;\pi_n(F))$ egy elemét fogja meghatározni ω_s (2 feltétel miatt π_n kommutatív kell legyen $n=1$-re is, így $H^2(X,A;\pi_1(F))$ értelmes.) $\square$

7.7. Állítás. Ha s-et lerögzítjuk $B_{n-1}\cup A$-n és változatni kezdjük B_n-en, az asszociált ω_s kociklusok egy kohomológia osztályban maradnak. $[\omega_s]$ akkor lesz 0, ha $s|_{B_{n-1}\cup A}$ kiterjed $B_{n+1}\cup A$-ra.

Bizonyítás. Legyen s, s' két ilyen szelés $B_n\cup A$-n. Próbáljuk $\omega_s-\omega_{s'}$-t meghatározni. Definiáljunk egy új $\tilde{B}$ CW-komplexust. Kezdjök azzal, hogy veszünk egy B' másolatot B. Minden e^n_α n-cellát kössünk össze a B'-beli $e^n_{\alpha'}$ másával úgy, hogy egy új $e^{n+1}_{\tilde{\alpha}}$ $n+1$ cellát ragasztunk közéjük. B'-n vegyünk egy új $\tilde{s}$ szelést, mely a B-beli cellákon s-sel, és a B'-belieken s'-vel egyezik meg. Így egy e^{n+1}_β $n+1$-cellára:

$$\omega_s(e^{n+1}_\beta)=\omega_{\tilde{s}}(e^{n+1}_\beta)$$
$$\omega'_s(e^{n+1}_\beta)=\omega_{\tilde{s}}(e^{n+1}_{\beta'})$$

e^{n+1}_β-hez ragasszuk sorban hozzá a határát alkotó cellákhoz újonnan ragasztott $e^{n+1}_{\tilde{\alpha}}$ cellákat. Ekkor $\omega_{\tilde{s}}$ értéke mindig $\omega_{\tilde{s}}(e^{n+1}_\alpha)$-val változik. Ezt ismételgetve végül elérünk egy cellához, melynek minden e^n_α határát $e^n_{\alpha'}$-re cseréltük, azaz az új cellánk ugyanúgy ragad be, mint $e^{n+1}_{\beta'}$. Ennek következményeképp:

$$\omega_{\tilde{s}}(e^{n+1}_\beta)+\sum_{\alpha:\, e^n_\alpha\in\partial e^{n+1}_\beta}\omega_{\tilde{s}}(e^{n+1}_\alpha)=\omega_{\tilde{s}}(e^{n+1}_{\beta'})$$
$$\omega_s(e^{n+1}_\beta)-\omega'_s(e^{n+1}_\beta)=\sum_{\alpha:\, e^n_\alpha\in\partial e^{n+1}_\beta}\omega_{\tilde{s}}(e^{n+1}_\alpha)$$

Térjünk vissza az eredeti B terünkbe. Definiáljuk az υ celluláris koláncot, mely minden e^n_α cellán Az előbb definiált $\omega_{\tilde{s}}(e^{n+1}_\alpha)$-t veszi fel, és a többi n-cellán 0-t. Egy e^{n+1}_β $n+1$-cellára számoljuk ki υ kohatárát:

$$\delta\omega_s(e^{n+1}_\beta)=\sum_{\alpha:\, e^n_\alpha\in\partial e^{n+1}_\beta}\upsilon(e^n_\alpha)=\sum_{\alpha:\, e^n_\alpha\in\partial e^{n+1}_\beta}\omega_{\tilde{s}}(e^{n+1}_\alpha)=\omega_s(e^{n+1}_\beta)-\omega'_s(e^{n+1}_\beta)$$

Ezzel megkaptuk, hogy $\omega_s-\omega_{s'}$ tényleg egy kohatár, tehát ω_s a kohomológia osztályán belül marad ahogy s-et változtatjuk B_n-en. Ahhoz, hogy lássuk, hogy az egész kohomológia osztályban tényleg mindenkit felvesz, vegyünk egy υ koláncot, mely minden $B \setminus A$-beli n-cellához $\pi_n(F)$ egy elemét rendeli. Egy adott s szelést $B_n \setminus A$-n változtva csináljunk egy új s' szelést. Minden $e^n\alpha$ n-cellán válaszhatjuk úgy s'-t, hogy az fentebbi módszerrel s és s'-höz pont itt pont $\upsilon(e^n\alpha)$-t rendelünk, mivel a nyaláb itt triviális, tehát gondolhatunk rá, mint az $e^n\alpha \times F$ direkt szorzat. A fentebbiek alapján így elérhetjük, hogy az előbbi konstrukció értelmében $\omega_s - \omega_{s'} = \delta\upsilon$, tehát tetszőlegesen lehet ω-t változtatni a kohomológia osztályán belül. □

Ez az elmélete szelések obstrukcióinak ad obstrukciókat a szelések egyértelműségére is, mivel egy homotópiája szeléseknek egy szelése a : $E \times I$ totális terű és $\to B \times I$ bázisú fibrált nyalábnak. Így az obstrukció egy A-n állandó homotópia találására két A-n megegyező szelés között $H^{n+1}(B \times I, B \times \partial I \cup A \times I; \pi_n(F)) \cong H^n(B, A; \pi_n(F))$-be fog esni.

7.2. Definíció. Az *elsődleges obstrukció.* Az egymást követő obstrukciói egy szekció létezésének és egyértelműségének rendre a $H^i(B; \pi_{i-1}(F))$-kben és a $H^i(B; \pi_i(F))$-kben fekszenek. (A-t most már üresnek vesszük.) Tegyük fel, hogy ezek a kohomológia csoportok valamely n dimenzióig eltűnnek, pontosabban $H^i(B; \pi_{i-1}(F)) = 0$ minden $i < n+1$-re és $H^i(B; \pi_i(F)) = 0$ minden $i < n$-re. Ez például olyankor teljesül, $n-1$-szeresen összefüggő F esetén, azaz ha $\pi_i(F) = 0$ minden $i < n$-re. Ekkor B_n felett létezik egy szelés, és ez B_{n-1} felett homotópia erejéig egyértelmű. Ebből következik, hogy az obstrukció a B_{n+1}-re való kiterjesztésre $H^{n+1}(B; \pi_n(F))$-ben jól definiált, minden választástól független. Ez lesz a λ nyalábhoz az $\omega(\lambda)$ elsődleges obstrukció.

7.8. Állítás. Ha $\pi_i(F) = 0$ minden $i < n$-re, akkor az ω elsődleges obstrukció természetes. Azaz, egy $f\colon A \to B$ leképezésre

$$\omega(f^*(\lambda)) = f^*(\omega(\lambda))$$

Bizonyítás. f-et válaszhatjuk egy celluláris leképezésnek, hisz egy homotópiával azzá lehet tenni, és ilyenkor izomorf $f^*(\lambda)$-t kapunk. Az $s\colon B \to E$ szelést f visszahúzza egy $s'\colon A \to E$ leképezésekké, melyre $f(a) = \pi(s'(a))$. Ez pont azt jelenti $E(f^*(\lambda))$ definíciója szerint, hogy a szelést egészen visszahúzhatjuk egy $f^*(s)\colon A \to E(f^*(\xi))$ szeléssé.

Egy $\phi\colon (D^{n+1}, S^n) \mapsto (A_{n+1}, A_n) \in \pi n + 1(A_{n+1}, A_n)$ leképezésre, mint például egy $n+1$-cella karakterisztikus leképezésére, így $\omega_{f^*(s)} = \omega_s(f \circ \phi) = \omega_s(f^*(\phi))$ lesz, mivel úgyanazt reprezentáló $s \circ f \circ \phi$ és $f^*(s) \circ \phi$ leképezéseket kapunk. Ekkor mivel a Hurewicz-leképezés szürjektív π_{n+1} helyett ez H_{n+1}-el is fent fog állni. Ez pedig már a természetesség: $\omega(f^*(\lambda)) = f^*(\omega(\lambda))$. □

Ezzel felvértezve már nekiveselkedhetünk A Stiefel-Whitney osztályok alaposabb megértésének. Egy $\pi\colon E \to B$ projekciójú ξ vektornyalábnak készítsük el a $V_k(\xi)$ Stiefel-nyalábját. ξ-ben független szelések kereséséhez elég itt 1 szelést találjunk.

7.9. Tétel. Legyen ξ egy n rangú, $\pi\colon E \to B$ projekciójú vektornyaláb, B egy CW-komplexus. Ekkor $w_k(\xi)$ a mod 2 elsődleges obstrukció $n-k+1$ lineáris független szelés létezésére.

Bizonyítás. $k = 1$-re már láttuk, hogy $w = 1$ az elsődleges obstrukció n független szekció létezésére B_1 felett. Bár b felett nem feltétlenül lesz ekkor n független szekció, de a reguláris esetben kiterjednek a szelések, hogy az obstrukció mod 2 eltűnjön.

A $k > 1$ esethez szükségünk lesz a $\mathrm{V}_k(\mathbb{R}^n)$ Stiefel-sokaság homotopikus csoportjainak az alábbi jellemzésére:

7.10. Lemma. Az első el nem tűnő homotopikus csoportja $\mathrm{V}_k(\mathbb{R}^n)$-nek π_{n-k} és

$$\pi_{n-k}(\mathrm{V}_k(\mathbb{R}^n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{ha } n-k \text{ páros, vagy } k=1 \\ Z_2 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Emelett a $\mathrm{V}_1(\mathbb{R}^i) \hookrightarrow \mathrm{V}_{n-i+1}(\mathbb{R}^n)$ beágyazás által indukált $\pi_{i-1}(\mathrm{V}_1(\mathbb{R}^i)) \to \pi_{i-1}(\mathrm{V}_{n-i+1}(\mathbb{R}^n))$ homomorfizmus szürjektív, tehát egy izomorfizmus mod 2. [5, Lemma 3.20.]

Ez alapján látjuk, $H^{n-k+1}(B; \pi_{n-k}(\mathrm{V}_k(\mathbb{R}^n)))$-ben lesz az első obstrukció egy $V_k(\xi)$-beli szelés létezésére, ahol az együttható csoport $\mathbb{Z}$ vagy Z_2. De mod 2 obstrukciókat keresünk, tehát az utóbbi csoporttal dolgozhatunk, így $i = n-k+1$-re, mindenképp adódik egy jól definiált $\omega_i(\xi) \in H^i(B; Z_2)$ elsődleges obstrukció.

Mivel ω_i és w_i is természetes, elég az univerzális nyalábra belátni, hiszen egy tetszőleges ξ nyalábhoz vehetünk egy $f\colon E(\xi) \to E(\gamma^n)$ nyalábonkénti izomorfizmust. Ezzel megkapjuk, hogy:

$$w_i(\xi) = f^* w_i(\gamma^n) = f^* \omega(\gamma^n) = \omega(\xi)$$

Tudjuk, hogy $H^*(\mathrm{G}_n) = Z_2[w_1(\gamma^n), \ldots, w_n(\gamma^n)]$. $\omega_i(\gamma_n) \in H^i(\mathrm{G}_n)$, ezért felírható egy polinomként az alábbi alakban:

$$\omega_i(\gamma_n) = p(w_1(\gamma^n), \ldots, w_{i-1}(\gamma^n)) + a_i w_i(\gamma^n)$$

Ahol $a_i \in Z_2$. Először lássuk be, hogy $p(w_1(\gamma^n), \ldots, w_{i-1}(\gamma^n)) = 0$. Tekintsük a $\xi = \gamma_{i-1} \oplus \varepsilon^{n-i+1}_{\mathrm{G}_n}$ vektornyalábot és egy $f\colon E(\xi) \to E(\gamma_n)$ egy nyalábonkénti izomorfizmus. ξ-re $w_j(\xi) = w_j(\gamma_{i-1})$, ami $j \geq i$-re 0. Ekkor

$$\omega_i(\xi) = f^*(\omega_i(\gamma_n)) = f^*(p(w_1(\gamma^n), \ldots, w_{i-1}(\gamma^n)) + a_i w_i(\gamma^n)) =$$
$$p(f^*(w_1(\gamma^n)), \ldots, f^*(w_{i-1}(\gamma^n))) + a_i f^*(w_i(\gamma^n)) = p(w_1(\gamma^{n-1}), \ldots, w_{i-1}(\gamma^{n-1}))$$

De $\omega_i(\xi)$=0, mivel a triviális tényezőben van $n-i+1$ független szelés. Így $p = 0$.

$a_i = 1$ belátásához elég, ha mutatunk egy vektornyalábot, melyre ω_i nem nulla a természetesség és γ_n univerzalitása miatt. Ha $i = n$, akkor ω_i egy sehol sem eltűnő szelés létezésére az obstrukció. Tekintsük a γ^i_{i+1} vektornyalábot $\mathrm{G}_i(\mathbb{R}^{i+1})$ felett. $\mathrm{G}_i(\mathbb{R}^{i+1})$ pontjai $\mathbb{R}^{i+1}$-ben az i-síkok. Ezeket az ortogonális kiegészítőjükkel azonosítva kapunk egy megfeleltetést $\mathrm{G}_i(\mathbb{R}^{i+1})$ pontjai és $\mathbb{R}\mathrm{P}^i$ pontjai, azaz S^i áttelenes pontpárjai között. $\mathrm{G}_i(\mathbb{R}^{i+1})$ pontjaira gondolhatunk úgy, mint két S^i-t érintő párhuzamos i-sík, és így $E(\gamma^i_{i+1})$ pontjaira gondolhatunk, mint vektorpárok ezekben a párhuzamos síkokban, egy-egy vektor mindkét síkból, úgy hogy egymás eltoltjai legyenek. Az egységvektortérmező S^i-n, mely az északi-sark felé mutat ilyen vektorpárokból áll, és megad egy sehol sem eltűnő szelést mindenhol a két sarok azonosításával kapott 1 ponton kívül. Ennek a szelésnek a kiterjesztésére az obstrukció, ha $\mathrm{G}_i(\mathbb{R}^{i+1})$-re, mint $\mathbb{R}\mathrm{P}^i$ gondolunk, a kolánc lesz ami a $\pi_{i-1}(S^{-1})$ egy generátorát rendeli $\mathbb{R}\mathrm{P}^i$-nek az i cellájához, mivel a vektormező sugárirányban befele mutat az északi sarknál. Így az obstrukció $\omega_i(\gamma^i_{i+1})$ nem 0.

Ha $i < n$ Legyen $\xi = \gamma^i_{i+1} \oplus \varepsilon^{n-i}$. ξ-n adódik $n-i$ ortonormált szelés a triviális tagból. Ezt összerakva γ^i_{i+1} az $i = n$ esetben konstruált szeléseivel, kapunk egy szelést, melyre az $\omega_i(\xi)$ obstrukció pont az $i = n$ esetben látott obstrukció képe a $\pi_{i-1}(\mathrm{V}_1(\mathbb{R}^i)) \to \pi_{i-1}(\mathrm{V}_{n-i+1}(\mathbb{R}^n))$ együttható-izomorfizmus szerint, így következik, hogy $\omega_i(\xi) \neq 0$. □

7.11. Következmény. Mivel az ω_i-k jól definiáltak, így beláttuk a w_i Stiefel-Whitney osztályok létezését.

8. fejezet

A Stiefel-Whitney Osztályok Alkalmazásai

Zárásként lássuk néhány alkazlmazását a Stiefel-Whitney osztályoknak, olyan tételeket amikor hasznos lesz az itt felépített elmélet.

A 1.9 Következményben láttuk, hogy nullosztómentes algebrák létézése szorosan kapcsolatban van a parallelizálhatósággal. Gömbök helyett igazán projektív terekkel lesz jó dolgozzunk. Tehát először ezek $\tau_{\mathbb{R}\mathrm{P}^n}$ érintőnyalábját jellemezzük, végül kiszámolva a Stiefel-Whitney osztályait.

8.1. Lemma. A $\tau_{\mathbb{R}\mathrm{P}^n}$ érinytőnyalábja $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$-nek izomorf a $\mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^{1\perp})$, ahol γ_n^1 a kanonikus vonalnyaláb $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ felett, és $\gamma_n^{1\perp}$ ennek az ortogonális kiegészítője ε^{n+1}-ban.

Bizonyítás. Legyen s^n az egységgömb $\mathbb{R}^{n+1}$-ben, és $f\colon S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ a kanonikus leképezés, $f(x) = \pm x$. f-et fel lehet emelni egy $\tilde{f}\colon TS^n \to T\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ firumonkénti izomorfizmussá. $(x, v), (-x, -v) \in TS$-re $\tilde{f}(x, v) = \tilde{f}(-x - v)$. a $T\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ érintőtér az $\{(x, v), (-x, -v)\}$ párokból fog állni, melyek teljesítik, hogy

$$\langle x, x\rangle = 1, \quad \langle x, v\rangle = 0$$

Egy ilyen párt, ha L a $-x$, 0, x egyenes, és ennek $L^\perp$ az ortogonális kiegészítő n-síkja, akkor kölcsönösen meghatároz egy $l\colon L \to L^\perp$ lineáris leképezést, melyre $l(x) = v$. Így az érintőtér $\pm x$-ben kanonikusan izomorf a $\mathrm{Hom}(L, L^\perp)$ vektornyalábbal. Ebből következik, hogy az egész nyaláb izomorf $\mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^{1\perp})$-mal. $\square$

8.2. Állítás. A $\tau_{\mathbb{R}\mathrm{P}^n} \oplus \varepsilon^1$ nyaláb izomorf a $\gamma_n^1 \oplus \ldots \oplus \gamma_n^1$, $n+1$-szeres direkt összeggel. Így a totális Stiefel Whitney osztálya $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$-nek

$$w(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = (1+a)^{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1}a + \binom{n+1}{2}a^2 + \ldots + \binom{n+1}{n}a^n$$

Bizonyítás. A $\mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1)$ nyaláb triviális, hiszen van egy kanonikus sehol sem eltűnő szelése. Ezek alapján:

$$\tau_{\mathbb{R}\mathrm{P}^n} \oplus \varepsilon^1 \approx \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^{1\perp}) \oplus \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1)$$
$$\mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^{1\perp}) \oplus \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1) \approx \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^{1\perp} \oplus \gamma_n^1) \approx \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^{n+1})$$
$$\mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^{n+1}) \approx \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^1 \oplus \ldots \oplus \varepsilon^1) \approx \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^1)$$

Viszont $\mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^1) \approx \gamma_n^1$, mivel van γ_n^1-en euklideszi-struktúra, ami vektortereknél is megszokott módon ad egy ilyen megfeleltetést. Ezzel megkaptuk, hogy

$$\tau_{\mathbb{R}\mathrm{P}^n} \oplus \varepsilon^1 \approx \gamma_n^1 \oplus \ldots \oplus \gamma_n^1$$

$\tau_{\mathbb{R}\mathrm{P}^n}$ totális Stiefel-Whitney osztálya megegyezik $\tau_{\mathbb{R}\mathrm{P}^n} \oplus \varepsilon^1$-ével, ez utóbbit most már könnyű számolni a Whitney szorzat tételből:

$$w(\gamma_n^1 \oplus \ldots \oplus \gamma_n^1) = w(\gamma_n^1) \smile \ldots \smile (\gamma_n^1) = (1+a)^{n+1}$$

Ezt kibonatva megkapjuk a tételben kimondott alakot. $\square$

A binomális együtthatók csak mod 2 érdekelnek minket. mod 2 Pascal-háromszög híresen így néz ki:

$$\begin{array}{lc}
 & 1 \\
 & 1 \quad 1 \\
\mathbb{R}\mathrm{P}^1: & 1 \quad 0 \quad 1 \\
\mathbb{R}\mathrm{P}^2: & 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\
\mathbb{R}\mathrm{P}^3: & 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\
\mathbb{R}\mathrm{P}^4: & 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\
\mathbb{R}\mathrm{P}^5: & 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\
\mathbb{R}\mathrm{P}^6: & 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\
\mathbb{R}\mathrm{P}^7: & 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\
\mathbb{R}\mathrm{P}^8: & 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\
\mathbb{R}\mathrm{P}^9: & 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\
\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}: & 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\
\mathbb{R}\mathrm{P}^{11}: & 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\
\mathbb{R}\mathrm{P}^{12}: & 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\
\mathbb{R}\mathrm{P}^{13}: & 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\
\mathbb{R}\mathrm{P}^{14}: & 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\
\mathbb{R}\mathrm{P}^{15}: & 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1
\end{array}$$

A jobb legszélét figyelmen kívül is hagyhatjuk, hiszen $H^{n+1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = 0$. Ebből leolvashatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
w(\mathbb{R}\mathrm{P}^1) &= 1 \\
w(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) &= 1 + a + a^2 \\
w(\mathbb{R}\mathrm{P}^3) &= 1 \\
w(\mathbb{R}\mathrm{P}^4) &= 1 + a + a^4 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

8.3. Következmény. Akkor és csak akkor lesz $w(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = 1$, ha n kettőhatvány mínusz 1 alakú. Így a parallelizálható projektív síkok $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$, $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$, $\mathbb{R}\mathrm{P}^7$, $\mathbb{R}\mathrm{P}^{15}$, ...

8.4. Tétel. Legyen p egy bilineáris 0-osztómentes szorzás:

$$p\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Ekkor az $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ projektív tér parallelizálható, és így n kettőhatvány kell legyen.

Bizonyítás. Legyen $e_1, \dots, e_n$ a standard bázisa $\mathbb{R}^n$-nek. Az $y \mapsto p(y, b_1)$ megfeleltetés egy automorfizmusa $\mathbb{R}^n$-nek. Így az alábbi egyenlet

$$s_i(p(y, b_1)) = p(y, b_i)$$

egy lineáris $s_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezést definiál. $s_1(x)$, ..., $s_n(x)$ lineárisan függetlenek nem 0 x-re. $s_1(x) = x$. $s_2(x)$, ..., $s_n(x)$ meghatározzák a $\mathrm{Hom}(\gamma^1_{n-1}, \gamma^{1\perp}_{n-1})$ vektornyalábnak $n-1$ független szelését, az alábbi módon: Egy L origón átmenő egyenesre $\bar{s}_i \colon L \to L^\perp$-et definiáljunk $x \in L$-re, mint az $s_i(x)$ ortogonális projekciója $L^\perp$-re. Így $\bar{s}_1 = 0$ lesz, viszont $\bar{s}_2(x)$, ..., $\bar{s}_n(x)$ függetlenek maradnak. Így $\mathrm{Hom}(\gamma^1_{n-1}, \gamma^{1\perp}_{n-1})$ triviális lesz, de erről láttuk, hogy izomorf $\tau_{\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}}$-el. □

Folytatva mind a projektív terek, mind az érintőnyalábok vizsgálatát most foglalkozzunk projektív terek euklideszi térbe immerzálhatóságának kérdésével. Emlékezzünk, hogy a Whitney dualitás tétel szerint, ha egy n-dimenziós M sokaság immerzálható $\mathbb{R}^{n+k}$-ba, akkor

$$w(\nu_M) = \bar{w}(\tau_M)$$

Ez azt jelenti, hogy $\bar{w}_i$ duális Stiefel-Whitney osztályok 0-k lesznek $i > k$-ra. Ezzel tudunk k-ra különböző alsó becsléseket adni. Projektív tereknél például általában valami ilyesmit kapunk:

$$\begin{aligned} w(\mathbb{R}\mathrm{P}^9) &= 1 + a^2 + a^8 \\ \bar{w}(\mathbb{R}\mathrm{P}^9) &= 1 + a^2 + a^4 + a^6 \\ k &\geq 6 \end{aligned}$$

A legerősebb eredményt akkor kapjuk, ha n kettőhatvány, mert ilyenkor egyrészt

$$\begin{aligned} w(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) &= 1 + a + a^n \\ \bar{w}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) &= 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1} \\ k &\geq n-1 \end{aligned}$$

Másrészt ismert eredmény, hogy egy sima zárt n-sokaság ($n > 1$) immerzálható $\mathbb{R}^{2n-1}$-be. Így itt ez egy éles becslés lesz. Érdemes még megjegyezni, hogy a kettőhatványokra vonatkozó náluk magasbb terekre is alkalmazható. Pl. mivel $\mathbb{R}\mathrm{P}^8$ nem immerzálható $\mathbb{R}^14$-be, így $\mathbb{R}\mathrm{P}^9$ se lesz az. Ez megegyezik azzal az eredménnyel amit külön számolva kaptunk.

Utolsó applikációként vezessük be a kobordizmusok jellemzésére alkalmas *Stiefel-Whitney szám*okat. Legyen M egy sima, zárt, de akár nem összefüggő n-sokaság. Z_2 együtthatók felett lesz egy egyértelmű $\mu_M \in H_n(M)$ fundamentális osztály. Egy $v \in H^n(M)$ kohomológia osztályt kiértékelhetünk μ_M-en. Legyenek $r_1, \ldots, r_n$ természetes számok, melyekre $r_1 + 2r_2 + \ldots + nr_n = n$, az ilyen számokra az alábbi monom totális dimenziója n lesz.

$$w_1(\xi)^{r_1} \smile \ldots \smile w_n(\xi)^{r_n} \in H^n(B(\xi))$$

Ezen kiértékelhetjük μ_M-et. Ezt csináljuk meg egy M érintőnyalábjára.

8.1. Definíció. Az így kapott mod 2 szám M-nek egy *Stiefel-Whitney szám*a. Röviden csak, mint $w_1^{r_1} \ldots w_n^{r_n}[M]$ jelöljük.

A Stiefel-Whitney számok vizsgálatakor az érdekel minket, hogy két sokaság minden Stiefel-Whitney száma megegyezik-e.

8.5. Állítás. $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ Stiefel-Whitney számai pontosan a páratlan n-ekre lesznek mind 0-k.

Bizonyítás. Ha n páros akkor $w_n(\tau_{\mathbb{R}\mathrm{P}^n}) = (n+1)a^n$ nem lesz 0, és így a $w_n[\mathbb{R}\mathrm{P}^n]$ Stiefel-Whitney szám se.

Ha n páratlan, azaz $n = 2k-1$, akkor $w(\tau_{\mathbb{R}\mathrm{P}^n}) = (1+a)^2k = (1+a^2)^k = 0$, tehát $w_j(\tau_{\mathbb{R}\mathrm{P}^n}) = 0$ páratlan j-kre. De viszont mivel n páratlan, egy n totális dimenziójú monomban kell egy páratlan dimenziójú w_j tényezőnek legyen, így minden Stiefel-Whitney szám 0 lesz. □

8.6. Tétel. Ha B egy sima zárt peremes sokaság, és határa M, akkor M minden Stiefel-Whitney száma 0 lesz.

Bizonyítás. Legyen a (B, M) pár fundamentális osztálya $\mu_B \in H_{n+1}(B, M)$. Ekkor a természetes homomorfizmus

$$\partial\colon H_{n+1}(B, M) \to H_n(M)$$

μ_B-t μ_M-be viszi. Ha τ_B-t megszorítjuk M-re, résznyalábja lesz τ_M. Egy euklideszi struktúra τ_B-n meghatároz egy egyértelmű kifelé mutató normál vektormezőt M-en, ami kifeszít egy ε^1 triviális nyalábot, és azt kapjuk, hogy

$$\tau_B|_M \approx \tau_M \oplus \varepsilon^1$$

Ebből következik, hogy τ_B Stiefel-Whitney osztályai M-re megszorítva megegyeznek τ_M Stiefel-Whitney osztályaival. Tehát mivel a $w_j(M)$-ek mind megszorítással megkapható kohomológia osztályok az

$$H^j(B) \xrightarrow{i^*} H^j(M) \xrightarrow{\delta} H^{j+1}(B,M)$$

egzakt sorozatot használva, ahol i^* a megszorítás homomorfizmus, következik, hogy minden j-re $\delta(w_j(M)) = 0$. Így már kiszámolhatunk egy $w_1^{r_1} \dots w_n^{r_n}[M]$ Stiefel-Whitney számot:

$$\begin{gathered} w_1^{r_1} \dots w_n^{r_n}[M] = w_1(M)^{r_1} \smile \dots \smile w_n(M)^{r_n}(\mu_M) = \\ = w_1(M)^{r_1} \smile \dots \smile w_n(M)^{r_n}(\partial\mu_B) = \delta(w_1(M)^{r_1} \smile \dots \smile w_n(M)^{r_n})(\mu_B) = \\ = (\delta w_1(M))^{r_1} \smile \dots \smile (\delta w_n)(M)^{r_n})(\mu_B) = 0 \end{gathered}$$

Tehát minden Stiefel-Whitney szám 0. □

A tételnek igaz a lényegesen nehezebb megfordítása. [3] Így ezzel együtt megkapjuk, hogy a Stiefel-Whitney számok teljesen jellemzik a kobordizmus osztályokat: Egy felület pontosan akkor nullkobordáns, ha a Stiefel-Whitney számai mind 0-k. Így Két felület akkor kobordáns, ha megegyeznek a Stiefel-Whitney számaik.

Hivatkozások

[1] Arthur H. Stone. „Paracompactness and product spaces”. Bull. Amer. Math. Soc. 54.10 (1948), 977–982. old.

[2] John W. Milnor és James D. Stasheff. *Characteristic Classes*. Princeton University Press, 1974.

[3] Sandro Buoncristiano és Derek Hacon. „An elementary geometric proof of two theorems of Thom”. *Topology* 20.1 (1981), 97–99. old.

[4] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.

[5] Allen Hatcher. *Vector Bundles and K-Theory*. Cambridge University Press, 2003.