Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Jánosik Áron

Rényi-féle parkolási folyamat és változatai

Szakdolgozat
Matematika BSc
matematikus szakirány

Témavezető:
Backhausz Ágnes
ELTE TTK Matematikai Intézet Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Budapest, 2023

NYILATKOZAT

Név: Jánosik Áron

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: VROXAD

Szakdolgozat címe:
Rényi-féle parkolási folyamat és változatai

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2023. 06. 06.

Jánosik Áron

a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Backhausz Ágnesnek a téma ajánlásáért, a jó hangulatú konzultációkért, a rendszeres, gyors és értékes visszajelzésekért, amelyek nélkül a szakdolgozat nem jöhetett volna létre.

Szeretném megköszönni a családomnak és barátaimnak a támogatást, melyre mindig számíthattam a tanulmányaim során.

Továbbá szeretném megköszönni mindenkori tanáraimnak, akik hozzájárultak a matematikatudásom fejlesztéséhez, illetve pályaválasztásomhoz.

1. fejezet

Bevezetés

A dolgozatban a Page-féle parkolási folyamatot, a Rényi-féle parkolási folyamatot, az RSA-modellt és a Matérn II folyamatot fogjuk bemutatni. Ezek alapjában véve arról szólnak, hogy egy egyenes, illetve egy sík egy részhalmazán szeretnénk diszjunkt alakzatokat elhelyezni. Ezek az alakzatok egy véletlen folyamaton keresztül érkeznek, és azokat tartjuk meg, amelyek az eddigiektől diszjunktak. Az a cél, hogy meghatározzuk, hogy a teljes halmaz hányad részét foglalják el várhatóan az alakzatok.

A 2. fejezetben a Page-féle parkolási folyamattal kezdjük a leírást, Gerin [3] cikke alapján. Ebben a modellben egy diszkrét, véges intervallumra érkeznek 2 hosszúságú autók, és 2 szomszédos helyre leparkolnak. Az autók egyenletes eloszlás szerint választanak a helyek közül, és csak akkor parkolnak le, ha még mindkét hely szabad. Ezt követően a Rényi-féle parkolási folyamatban Clay és Simányi [2] cikke alapján egy intervallumra érkeznek 1 hosszú szakaszok, és az újonnan lerakott szakaszok helyét egyenletesen választjuk a még elérhető helyek közül. Végül az RSA-modell Amaral és Santos [1] cikke szerint azt modellezi egy dimenzióban, hogy az egész számok halmazára érkeznek részecskék, és ha egy szám foglalt, akkor a szomszédai nem lehetnek foglaltak. Ebben az esetben szintén a még választható helyek közül valamelyikre érkezik részecske egyenletes eloszlás szerint.

A 3. fejezet elején bevezetjük a pontfolyamatok és a Poisson-pontfolyamat fogalmát Last és Penrose könyve [4] alapján. Ez lényegében egy olyan folyamatot ír le 2 dimenzióban, amelyben a síkra érkeznek pontok egy intenzitási mérték szerint úgy, hogy egy halmazra érkező pontok száma Poisson-eloszlású, amelynek paramétere a halmaz intenzitási mértéke. Továbbá diszjunkt halmazokon független a beléjük érkező pontok száma. Ezt követően a kétdimenziós Rényi-féle parkolási folyamatot írjuk le, amelynek másik neve Matérn II folyamat. Itt a síkra érkeznek rögzített sugarú körök, és egy lépésben egy Poisson-pontfolyamat pontjai lesznek a körök középpontjai. Először a lépésen belül diszjunktizáljuk a köröket, amelyet megtehetünk, ha megfelelően megválasztjuk az intenzitási mértéket. Majd ezek közül azokat tartjuk meg, melyek a korábbi lépésekben megtartott köröktől diszjunktak. A fejezet végén leírjuk a folyamatra vonatkozó további lehetséges vizsgálati irányokat.

2. fejezet

Az egydimenziós folyamat

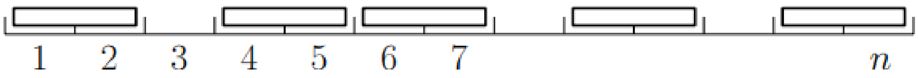
A fejezetben ismertetni fogjuk a Page- és Rényi-féle parkolási folyamatok egydimenziós modelljét Gerin [3], illetve Clay és Simányi [2] cikkei alapján, és egy hasonló modellt, az RSA-modellt Amaral és Santos [1] cikke alapján.

2.1. Page-féle parkolási folyamat

A Page-féle parkolási modellben egy diszkrét véges intervallumra érkeznek 2 hosszúságú autók, és véletlenszerűen leparkolnak 2 szomszédos üres helyre, amíg lehet. Azt fogjuk vizsgálni, hogy a folyamat során várhatóan a helyek hányad részét fogják elfoglalni az autók.

Ezt a következő módon tudjuk modellezni: $n \geq 2$ egész szám esetén vegyünk $\{0,1\}^n$-beli vektorokat, ezeket jelöljük x^t-vel, ahol $t \geq 0$ egész szám, ezek fogják a t. állapotban leírni a parkoló foglaltsági helyzetét. Ha $t = 0$, akkor üres a parkoló, tehát legyen $x^0 = 0^n$. Ha ismerjük a parkoló t. állapotát, akkor a $(t+1)$. állapotot úgy határozzuk meg, hogy választunk egy véletlen számot az $\{1, 2, \dots, n-1\}$ halmazból egyenletesen, legyen ez k. Ekkor ha $x_k^t = x_{k+1}^t = 0$, akkor ez a két hely szabad a t. állapotban, így ide leparkolhat egy új autó, tehát legyen $x_k^{t+1} = x_{k+1}^{t+1} = 1$, és a többi koordináta pedig változatlan. Ha az előbbi egyenlőség nem áll fenn, akkor valamelyik hely már foglalt, oda nem parkolhat új autó, ekkor legyen $x^{t+1} = x^t$.

Ekkor valamely T_n véletlen állapottól kezdve már több autó nem tud leparkolni, azaz $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$-re $x_k^{T_n} = x_{k+1}^{T_n} = 0$ nem áll fent. Legyen $X_n = x^{T_n}$ és $X_n(k) = x_k^{T_n}$ a parkoló végső állapota. Az alábbi ábrán ([3], 2. oldal) látható egy példa az $X_n = (1,1,0,1,1,1,1,0,1,1,0,1,1)$ esetre.



A foglalt helyek száma legyen $M_n = |\{1 \le k \le n : X_n(k) = 1\}|$. Ez az összes hely $\frac{M_n}{n}$-ed része.

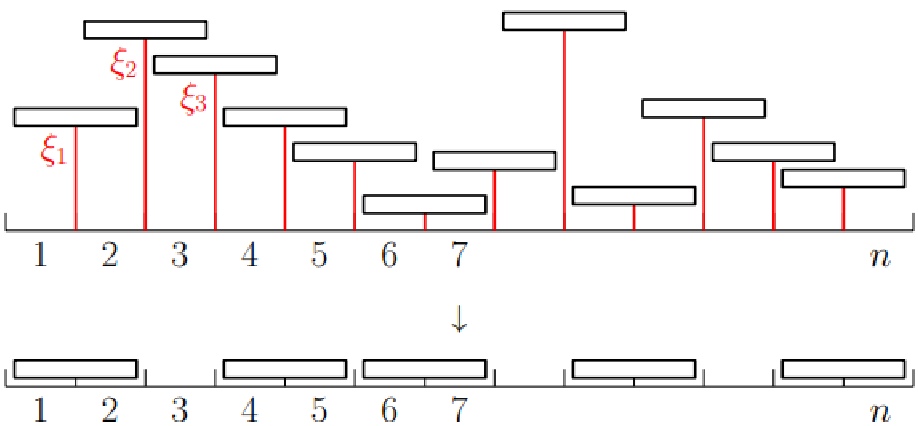
2.1.1. Tétel (Page, 1959, [5])**.** *Az n hosszú diszkrét intervallumon történő parkolási folyamat foglalt helyeinek M_n számára fennáll, hogy*

$$\frac{M_n}{n} \to 1 - e^{-2}$$

sztochasztikusan, ha $n \to \infty$.

A bizonyítás alapötlete, hogy az első autó helye alapján egy rekurzív képletet adunk M_n-re. Ugyanis, ha az első autó helye K, ami egy egyenletesen választott véletlen szám az $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ halmazból, akkor $M_n = M_{K-1} + M'_{n-K-1} + 2$, ahol M_{K-1} és M'_{n-K-1} függetlenek.

Egy másik modell a parkolási folyamat leírására a következő: legyen ξ egy vektorértékű valószínűségi változó, a koordinátái legyenek ξ_i, $1 \le i \le n-1$ független, azonos eloszlású nemnegatív valószínűségi változók, melyeknek az $F(t)$ folytonos függvény az eloszlásfüggvénye. Továbbá legyen $\xi_0 = \xi_n = \infty$. Ekkor a parkolási sorrendet a ξ_i-k rendezési statisztikája adja meg: $\xi_{\sigma(1)} < \xi_{\sigma(2)} < \ldots < \xi_{\sigma(n-1)}$. Ekkor az i. autó $t = \xi_{\sigma(i)}$ időpontban érkezik, és leparkol a $(\sigma(i), \sigma(i)+1)$ helyre, ha mindkettő hely még szabad. Az alábbi ábra ([3], 3. oldal) szemlélteti a parkolás folyamatát.



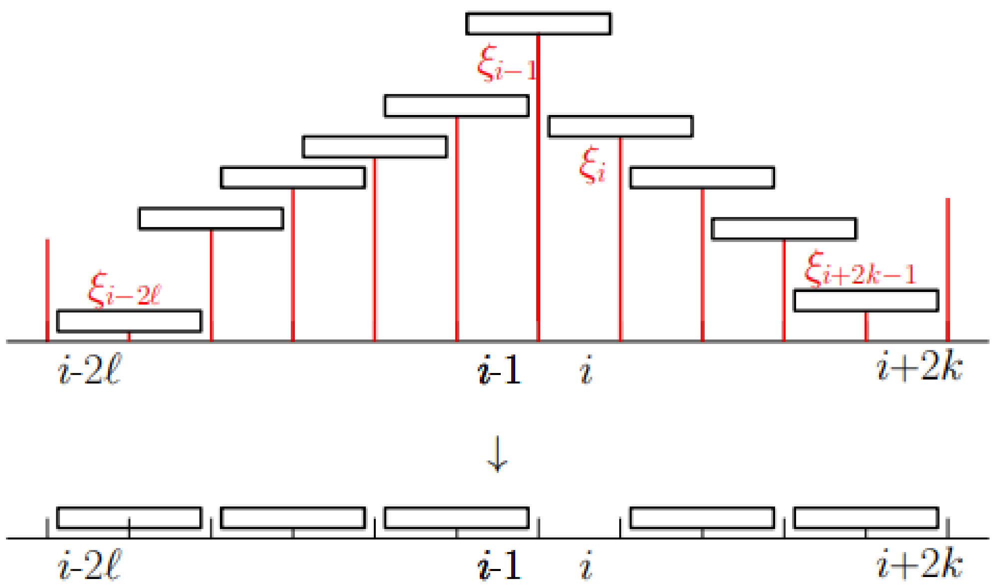
Ezzel ugyanazt az eloszlást kapjuk, mint az előző modellben, és a parkoló végső helyzete, X_n csak a ξ_i-k sorrendjétől függ. Ha i egy lokális minimuma ξ-nek, azaz

$\xi_{i-1} > \xi_i < \xi_{i+1}$, akkor az i. és $(i+1)$. helyek üresek a $t = \xi_i$ időpont előtt, tehát ebben az időpontban le tud parkolni az érkező autó az $(i, i+1)$ helyekre. Ebből következően X_n meghatározható úgy is, ha a lokális minimumok közti intervallumokat külön kezeljük.

A könnyebb kezelés érdekében bevezetünk néhány új fogalmat. Azt mondjuk, hogy i-ben l hosszú növekedés van, ha $i \geq l+1$ és $\xi_{i-l-1} > \xi_{i-l} < \xi_{i-l+1} < \xi_{i-l+2} < \ldots < \xi_{i-1}$, és azt mondjuk, hogy i-ben l hosszú csökkenés van, ha $i \leq n-l$ és $\xi_i > \xi_{i+1} > \ldots > \xi_{i-l+1} < \xi_{i+l}$. A definíció alapján az i-ben l hosszú növekedés, és az i-ben m hosszú csökkenés független, mert a ξ_i-k függetlenek, és a növekedés csak i-nél kisebb indexű ξ-ktől függ, a csökkenés pedig legalább i indexű ξ-ktől. Ezekkel a fogalmakkal könnyen le tudjuk írni X_n-et:

2.1.2. Lemma (Gerin, [3])**.** *$X_n(i) = 0$ pontosan akkor, ha i-ben páros hosszú növekedés és páros hosszú csökkenés van.*

Ezt az állítást szemlélteti az alábbi ábra ([3], 4. oldal) $2l = 6$ hosszú növekedésre és $2k = 4$ hosszú csökkenésre i-ben.



Bizonyítás. Ahogy korábban láttuk, ha i lokális minimumhely, akkor az $(i, i+1)$ helyeken autó áll, ekkor $X_n(i) = 1$. Ha i növekedés közben található, azaz $\xi_{r-1} > \xi_r < \xi_{r+1} < \ldots < \xi_{i-1} < \xi_i < \xi_{i+1}$ valamely r-re, akkor egymást követő autók állnak az $(r, r+1)$, $(r+2, r+3)$, …, $(i-1, i)$ vagy $(i, i+1)$ helyeken ($i - r$ paritásától függően). Tehát ekkor is $X_n(i) = 1$. Ugyanígy, ha i csökkenés közben található, akkor is $X_n(i) = 1$. Tehát $X_n(i)$ csak akkor lehet 0, ha ξ_{i-1} vagy ξ_i lokális maximum. Definiáljuk m_i-t, mint az i-hez legközelebbi, tőle balra lévő lokális minimumhely, és m'_i-t, mint az i-hez legközelebbi, tőle jobbra lévő lokális minimumhely. Ekkor m_i-ben kezdődik egy $s = i - m_i$ hosszú növekedés, és m'_i-ben ér véget egy $s' = m'_i - s' + 1$ hosszú csökkenés. Ekkor tehát autók fognak állni az $(m_i, m_i + 1)$, $(m_i + 2, m_i + 3)$, $\ldots$ helyeken balról jobbra, illetve az $(m'_i, m'_i + 1)$, $(m'_i - 2, m'_i - 1)$, $\ldots$ helyeken jobbról balra. Ekkor ha csak s páratlan, akkor i-t az növekedés utolsó autója fogja elfoglalni, ugyanígy, ha csak s' páratlan, akkor i-t a csökkenés utolsó autója fogja elfoglalni. Ha s és s' is páratlan, akkor ha $\xi_{i-1} < \xi_i$, akkor az $(i - 1, i)$ helyen áll autó, ha $\xi_{i-1} > \xi_i$, akkor pedig az $(i, i + 1)$ helyen áll autó. Ha viszont mindkettő páros, akkor a növekedés utolsó autója az $(i - 2, i - 1)$ helyen áll, a csökkenés utolsó autója pedig az $(i + 1, i + 2)$ helyen áll, így az i. hely szabad. □

Ezzel a konstrukcióval tudjuk definiálni a végtelen parkolás modelljét, $X_\infty(i)$-t, ha ξ-t egy mindkét irányban végtelen sorozatnak tekintjük, mint ξ_i, ahol i tetszőleges egész szám. Ekkor először $X_\infty(i) = X_\infty(i + 1) = 1$ minden i-re, amelyre ξ_i lokális minimum. Ezt követően minden i-re csak az m_i és m'_i közti indexű ξ-ket használva a véges modell alapján tudjuk definiálni $X_\infty(i)$-t. Ez minden i-re 1 valószínűséggel egy véges intervallum lesz. Az előző lemma erre a modellre is igaz.

2.1.3. Tétel (Gerin, [3]). *A végtelen parkolási modellben minden i-re*

$$P(X_\infty(i) = 1) = 1 - e^{-2}.$$

Valamint ha $n \to \infty$, akkor

$$\frac{X_\infty(1) + \ldots + X_\infty(n)}{n} \to 1 - e^{-2}$$

sztochasztikusan.

Bizonyítás. Először az első állítást látjuk be, ehhez elég $P(X_\infty(i) = 0) = e^{-2}$-t belátni. A lemma alapján ehhez i-ben páros hosszú növekedésnek és páros hosszú csökkenésnek kell lennie. Ezek függetlenek, mert a definíció alapján az előbbi csak ξ_{i-1}-től, és ennél kisebb indexű ξ-ktől függ, míg az utóbbi ξ_i-től és nagyobb indexű ξ-ktől függ. Tehát, felhasználva ezek szimmetriáját:

$$\begin{aligned}
P(X_\infty(i) = 0) &= P(i\text{-ben páros hosszú növekedés}) \cdot P(i\text{-ben páros hosszú csökkenés}) \\
&= P(i\text{-ben páros hosszú növekedés})^2 \\
&= \left(\sum_{l \geq 1} P(\xi_{i-2l-1} > \xi_{i-2l} < \xi_{i-2l+1} < \xi_{i-2l+2} < \ldots < \xi_{i-1}) \right)^2
\end{aligned}$$

Ez annak a valószínűsége, hogy $(2l+1)$ véletlen szám milyen valószínűséggel áll olyan nagysági sorrendben, hogy az első nagyobb, mint a második, és a másodiktól kezdve az utolsóig növekvő sorrendben állnak. Ekkor az első számot $(2l)$-féleképpen választhatjuk ki, mert ez nem lehet a legkisebb, és ezután egyértelmű, hogy a többi számot növekvő sorrendbe kell állítani. Ekkor a második szám lesz a legkisebb, tehát az első biztosan nagyobb nála. Így a keresett valószínűség

$$P(\xi_{i-2l-1} > \xi_{i-2l} < \xi_{i-2l+1} < \xi_{i-2l+2} < \ldots < \xi_{i-1}) = \frac{2l}{(2l+1)!} = \frac{1}{(2l)!} - \frac{1}{(2l+1)!}$$

Azaz

$$\begin{aligned} P(X_\infty(i) = 0) &= \left(\sum_{l \geq 1} P(\xi_{i-2l-1} > \xi_{i-2l} < \xi_{i-2l+1} < \xi_{i-2l+2} < \ldots < \xi_{i-1}) \right)^2 \\ &= \left(\sum_{l \geq 1} \frac{1}{(2l)!} - \frac{1}{(2l+1)!} \right)^2 = \left(\sum_{l \geq 0} \frac{1}{(2l)!} - \frac{1}{(2l+1)!} \right)^2 = \left(e^{-1}\right)^2 = e^{-2} \end{aligned}$$

A második állításhoz azt fogjuk belátni, hogy létezik egy olyan $c > 0$ konstans, hogy ha $i \neq j$, akkor

$$|cov(X_\infty(i), X_\infty(j))| \leq \frac{c}{\lfloor |j-i|/3 \rfloor !}.$$

Ez azt jelenti, hogy távoli helyek között kicsi az összefüggés, ami azért van, mert közöttük már sokféleképpen elhelyezkedhetnek az autók. Ebből már következik az állítás, mert azt kapjuk, hogy

$$D^2(X_\infty(1) + \ldots + X_\infty(n)) = \mathcal{O}(n),$$

innen pedig a centrális határeloszlástételből következik a sztochasztikus konvergencia. Tehát lássuk be a kovarianciára vonatkozó állítást.

$$\begin{aligned} & cov(X_\infty(i), X_\infty(j)) = E(X_\infty(i) \cdot X_\infty(j)) - E(X_\infty(i)) \cdot E(X_\infty(j)) \\ &= P(X_\infty(i) = X_\infty(j) = 1) - (1 - e^{-2})^2 = P(X_\infty(i) = X_\infty(j) = 1) - 1 + 2e^{-2} - e^{-4} \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} 2e^{-2} = P(X_\infty(i) = 0) + P(X_\infty(j) = 0) &= P(X_\infty(i) = 0, X_\infty(j) = 1) \\ &+ P(X_\infty(i) = 1, X_\infty(j) = 0) + 2 \cdot P(X_\infty(i) = X_\infty(j) = 0) \end{aligned}$$

így

$$\begin{aligned} cov(X_\infty(i), X_\infty(j)) &= P(X_\infty(i) = X_\infty(j) = 1) - 1 + 2e^{-2} - e^{-4} \\ &= P(X_\infty(i) = X_\infty(j) = 1) - 1 + P(X_\infty(i) = 0, X_\infty(j) = 1) \\ &+ P(X_\infty(i) = 1, X_\infty(j) = 0) + 2 \cdot P(X_\infty(i) = X_\infty(j) = 0) - e^{-4} \\ &= P(X_\infty(i) = X_\infty(j) = 0) - e^{-4} \end{aligned}$$

Az eltolásinvariancia miatt $i = 1$ és $j = p$ feltehető, és tekintsük $p \geq 10$-et. Ekkor felírható, hogy

$$0 \leq P(X_\infty(1) = X_\infty(p) = 0) - P\Big(\text{1-ben páros növekedés, 1-ben legfeljebb } \left\lfloor \frac{p}{3} \right\rfloor \text{ hosszú páros csökkenés, } p\text{-ben legfeljebb } \left\lfloor \frac{p}{3} \right\rfloor \text{ hosszú páros növekedés, } p\text{-ben páros csökkenés}\Big) \leq P\left(\text{1-ben } \left\lfloor \frac{p}{3} \right\rfloor\text{-nál hosszabb páros csökkenés} \cup p\text{-ben } \left\lfloor \frac{p}{3} \right\rfloor\text{-nál hosszabb páros növekedés}\right) \leq \frac{2}{\left\lfloor \frac{p}{3} \right\rfloor !}$$

Továbbá

$$P\Big(\text{1-ben páros növekedés, 1-ben legfeljebb } \left\lfloor \frac{p}{3} \right\rfloor \text{ hosszú páros csökkenés, } p\text{-ben legfeljebb } \left\lfloor \frac{p}{3} \right\rfloor \text{ hosszú páros növekedés, } p\text{-ben páros csökkenés}\Big) \leq e^{-1} \cdot \left(\sum_{l:2l \leq \left\lfloor \frac{p}{3} \right\rfloor} \frac{2l}{(2l+1)!} \right) \cdot e^{-1} = e^{-4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\left\lfloor \frac{p}{3} \right\rfloor !} \right)$$

Ezzel az állítást beláttuk $p \geq 10$-re, és így a maradék véges sok esetet (esetleg nagyobb c-t véve ezek miatt) hozzátéve is igaz az állítás. $\square$

A folytonos idejű folyamatot úgy definiálhatjuk, hogy $X_\infty^t(i)$ legyen t idő elteltével a parkoló helyzete. Ekkor $X_\infty^t(i) = 1$, ha $X_\infty(i) = 1$ és $\tau_i \leq t$, ahol $\tau_i = \xi_{i-1}$, ha az i. helyen álló autó még az $(i-1)$. helyet foglalja el, és $\tau_i = \xi_i$, ha az $(i+1)$. helyet, azaz τ_i az i. helyen álló autó érkezési ideje. Ha az i. helyen nem áll autó, akkor legyen $\tau_i = \infty$.

2.1.4. Tétel (Gerin, [3])**.** *A folytonos idejű végtelen parkolási folyamatra*

$$E(X_\infty^t(i)) = 1 - e^{-2F(t)}$$

Itt $F(t)$ a ξ_i valószínűségi változók folytonos eloszlásfüggvénye.

Ennek az állításnak is a korábbi lemmából következik a bizonyítása.

A véges parkolás elfoglalt helyeinek M_n számának várható értékére felírható a következő állítás.

2.1.5. Tétel (Gerin, [3])**.** *Minden $n \geq 2$-re*

$$|E(M_n) - n(1 - e^{-2})| \leq 14$$

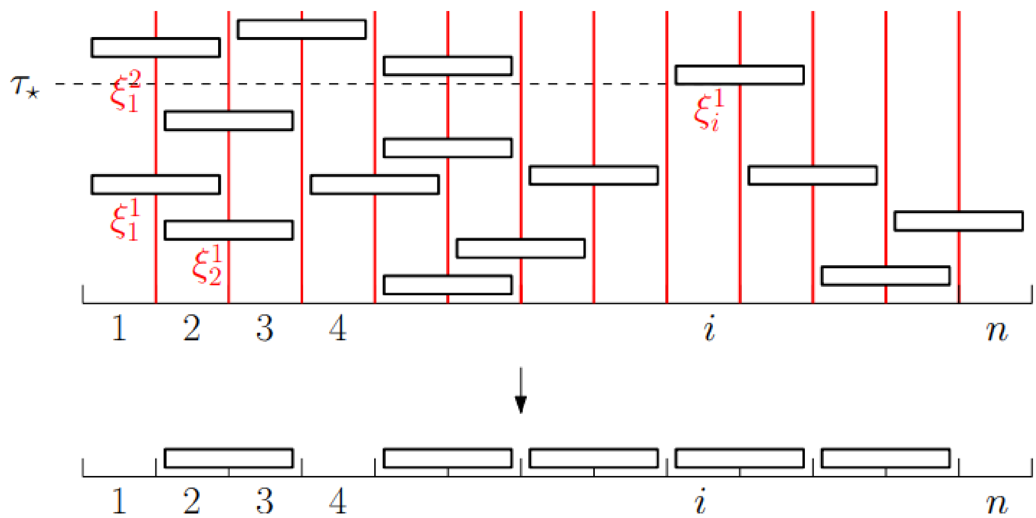
Ennek a bizonyítása egy párosításon múlik, amelyet a véges és a végtelen parkolási modell között állíthatunk fel. Ezt az alapján csináljuk, hogy a végtelen modellben tekintjük az 1 és n közé eső legszélső lokális minimumokat, és ha vannak ilyenek, akkor ezek között a véges és végtelen modell foglaltsági állapota megegyezik.

A következőekben a véges hosszú intervallumon történő folyamat időtartamára adunk becslést. Legyen T_n azon autók száma, amelyek megpróbáltak leparkolni, még mielőtt a folyamat véget ért volna (azaz elfogytak a szomszédos üres helyek). Ehhez egy másikfajta modellt használunk, hogy figyelembe tudjuk venni azon autókat is, amelyek egy olyan helypárra próbáltak parkolni, ahol már állt autó. Ezek korábban lényegtelenek voltak, hiszen csak a foglaltságot néztük, amihez elég volt mindenhová az első érkező autót számításba venni. Tehát most tekintsünk minden $1 \leq i \leq n-1$ számra egy ξ_i^j valószínűségi változókból álló sorozatot ($j \geq 1$). A $\left\{\xi_i^j\right\}_{i,j}$ változócsalád tagjai legyenek független, 1 várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Ekkor a modell az, hogy az $(i, i+1)$ helyre a

$$\xi_i^1, \xi_i^1 + \xi_i^2, \xi_i^1 + \xi_i^2 + \xi_i^3, \ldots$$

időpontokban próbál meg autó leparkolni. Az első érkezést az egyszerűség kedvéért a korábbiakkal egyező módon ξ_i-vel jelöljük (azaz $\xi_i = \xi_i^1$).

Legyen τ_* az érkezési ideje az utolsó autónak, amelynek sikerül leparkolnia. Tehát ahogy τ_i-vel jelöltük az i helyen álló autó érkezési idejét (és végtelennek definiáltuk, ha üres): $\tau_* = \max\{\tau_i : \tau_i < \infty\}$. Az alábbi ábrán ([3], 9. oldal) látható egy példafolyamat. Ekkor az utolsó érkező autó az $(i, i+1)$ helyre parkol, így $\tau_* = \tau_i$, és az eddig érkező autók száma $T_n = 12$.



Ez alapján T_n-et felírhatjuk úgy, hogy összeadjuk minden i-re, hogy az $(i, i+1)$ helyre τ_*-ig hány autó próbált meg leparkolni. Azaz a maximumát kell venni azon j-knek, melyekre $\xi_i^1 + \xi_i^2 + \ldots + \xi_i^j \leq \tau_*$. Így

$$T_n = \sum_{i=1}^{n-1} \max\{j : \xi_i^1 + \xi_i^2 + \ldots + \xi_i^j \leq \tau_*\}.$$

2.1.6. Tétel (Gerin, [3])**.**

$$\frac{T_n}{n \cdot \log(n)} \to 1$$

sztochasztikusan, ha $n \to \infty$.

A felső korlát azon múlik, hogy T_n sztochasztikusan kisebb, mint a kupongyűjtő feladat (coupon collector problem) $(n-1)$-re. Tehát ebből belátható, hogy

$$P\left(\frac{T_n}{n \cdot \log n} > 1 + \epsilon\right) \to 0.$$

Tehát a határérték legfeljebb 1 lehet.

Az alsó korláthoz a következő lemmát használhatjuk.

2.1.7. Lemma. *Minden $\delta > 0$-ra*

$$P(\tau_* \geq (1-\delta) \cdot \log n) \to 1,$$

ha $n \to \infty$.

Ennek bizonyításához definiálni kell $A_{i,l}(u)$ eseményeket, amelyek intuitívan azt írják le elég nagy l esetén, hogy az i hely foglalttá válik, de legkorábban az u időpontban. Ebből a $0 \leq P(u \leq \tau_* < \infty) - P(A_{i,l}(u))$ valószínűségre tudunk adni egy felső becslést is. Innen tudunk adni $P(\tau_* \leq u)$-ra egy felső becslést, és megfelelő behelyettesítéssel ($l = 50 \log n$ és $u = (1-\delta) \cdot \log n$) megkapjuk a lemma állítását.

Innen az alsó becslést úgy kapjuk meg, hogy

$$\begin{aligned} P(T_n \leq (1-\epsilon) n \log n) \leq \\ P(\tau_* \leq (1-\delta) \cdot \log n) + P(T_n \leq (1-\epsilon) n \log n; \tau_* > (1-\delta) \cdot \log n) \leq \\ P(\tau_* \leq (1-\delta) \cdot \log n) + \\ P\left(\sum_{i=1}^{n-1} \max\{j : \xi_i^1 + \xi_i^2 + \ldots + \xi_i^j \leq (1-\delta) \log n\} \leq (1-\epsilon) n \log n\right) \leq \\ P(\tau_* \leq (1-\delta) \cdot \log n) + P\left(\sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Poiss}_i((1-\delta) \cdot \log n) \leq (1-\epsilon) n \log n\right) \end{aligned}$$

Itt $\mathrm{Poiss}_i(\lambda)$ független, λ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változók. A lemma miatt az első tag 0-hoz tart, míg a második tag a Csebisev-egyenlőtlenség miatt tart 0-hoz $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ választással.

Azaz
$$P\left(\frac{T_n}{n \cdot \log n} < 1 - \epsilon\right) \to 0,$$
így a határérték legalább 1. Ezzel a tételt beláttuk.

2.2. Rényi-féle parkolási folyamat

A Rényi-féle parkolási probléma vizsgálata a következő folyamat tanulmányozásával kezdődött: vegyünk egy I intervallumot, melynek hossza x, ami 1-nél jóval nagyobb, és egymás után rakjunk le rá páronként diszjunkt, egy hosszú intervallumokat, amíg ez lehetséges. Minden lépésben az újonnan lerakott intervallum helyét egyenletesen választjuk az elérhető helyek közül. Legyen a lefedett szakaszok összhossza $M(x)$. Ekkor az $\frac{M(x)}{x}$ hányados a parkolási folyamat várható fedési sűrűségét adja meg.

2.2.1. Tétel (Rényi, [8])**.** *A Rényi-féle parkolási folyamatban $M(x) = 0$, ha $0 \leq x < 1$, és*

$$M(x) = 1 + \frac{2}{x-1} \int_0^{x-1} M(y)dy,$$

ha $x \geq 1$. Az aszimptotikus átlagos fedési sűrűség:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x} = \int_0^{\infty} \exp\left(-2\int_0^x \frac{1-e^{-y}}{y} dy\right) dx \approx 0,7475979203,$$

ezt a számot Rényi parkolási konstansának nevezik.

Ennek a problémának a diszkrét változata a következő. A vizsgált modell: az érkező autók $n+k-1$, egy sorban lévő parkolóhely valamelyikén állhatnak meg, úgy, hogy a szomszédos foglalt helyek távolsága legalább $(k+1)$ legyen, tehát legalább k üres hely legyen két autó között (illetve az első autó előtt és az utolsó autó után is). Amikor egy új autó érkezik, akkor egyenletesen választ a még elfoglalható helyek közül. A folyamat addig tart, amíg még van elfoglalható hely.

A folyamat végén az autók közti üres helyek száma lehet $k, k+1, \ldots, 2k$, hiszen ez legalább k, viszont legalább $2k+1$ nem lehet, mert akkor az előrébb álló autó után k helyet kihagyva megállhatna még egy autó, és utána is legalább k üres hely maradna. Ekkor legyen $a_n^{(r)}$ a várható száma ezen folyamat során annak, hogy két egymást követő autó között összesen r üres hely van (ahol $k \leq r \leq 2k$). Mivel az első autó a $(k+1)$. és $(n-1)$. helyek közül választ egyenletesen, és a kiválasztott helyre mindig le tud parkolni, így az alábbi rekurziós formula írható fel $a_n^{(r)}$-re: $a_n^{(r)} = \frac{2}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k-1} a_i^{(r)}$, ha $n \geq k+2$.

A vizsgált mennyiség a következő határérték: $D(k,r) = (r+1) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^{(r)}}{n}$. Ez minden $k \leq r \leq 2k$-ra létezik, és ezek összege 1. Az ebből kiszámítható $D(k) = \sum_{r=k}^{2k} \frac{k+1}{r+1} D(k,r)$ jelentése az autók fedési sűrűségének határértéke. Különösen érdekes a $D = \lim_{k\to\infty} D(k)$ határérték, mivel ez numerikusan kiszámítható, és Rényi parkolási konstansával egyezik meg. A korábbi, Page-féle változattal úgy állítható kapcsolatba, hogy az ott kiszámított $1-e^{-2}$ fedési sűrűség a $D(1)$ számmal egyezik meg, mivel az jelöli azt az esetet, amikor az autók hossza $1+1=2$.

2.3. RSA-modell egy dimenzióban

Most az RSA-modell alapjait ismertetjük Amaral és Santos cikke [1] alapján.

Az RSA-modellben (random sequential adsorption) részecskék érkeznek egymás után valamilyen felületre, és a már megérkezett részecskék megakadályozzák további részecskék érkezését egy bizonyos környezetükben. A folyamat megáll, ha már további részecskék nem érkezhetnek, mert mindenhol meg van akadályozva az érkezésük, ezt a rendszer telítődésének (jamming) nevezzük. A mi esetünkben a felület az egész számok halmaza lesz, és egy részecske akkor érkezhet meg egy egész számra, ha mindkét szomszédja (azaz az 1-gyel kisebb és 1-gyel nagyobb egész szám) még szabad, illetve minden pontban csak egy részecske lehet, így minden pontban csak egy érkezést kell vizsgálni.

Ezt a következő módon fogjuk modellezni. Vegyük minden s egész számra egy t_s valószínűségi változót úgy, hogy ezek függetlenek, és a $[0,1]$-en egyenletes eloszlásúak. A t_s-ekből alkotott vektort pedig jelölje T. Az ezekhez tartozó valószínűségi szorzatmértéket jelölje P. Ezek által a folytonos idejű véletlen folyamatot úgy adjuk meg, hogy a $t=0$ időpontban minden hely szabad, és egy s egész számra a t_s időpontban az s hely foglalttá válik, ha az $s-1$ és az $s+1$ helyek szabadok ebben a t_s időpillanatban. Ha egy hely foglalt, azt 1-essel fogjuk jelölni, ha pedig szabad, akkor 0-val. A T vektorhoz tartozó foglaltsági állapotot a t időpontban jelölje $\omega(T,t)$, ez mindig egy $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$-beli vektor, amelynek s-edik koordinátája, $\omega_s(T,t)$ akkor 1, ha a t időpillanatban az s hely foglalt, és 0, ha a t időpontban az s hely szabad.

2.3.1. Állítás. *Minden $t \in [0,1]$-re és P-majdnem minden $T \in [0,1]^{\mathbb{Z}}$-re $\omega(T,t)$ jóldefiniált.*

Ez azon múlik, hogy 0 valószínűséggel lesz s és p különböző egész számokra $t_s = t_p$. A továbbiakban a T változót elhagyjuk a jelölésekből, az egyszerűsítés kedvéért.

Ez a konstrukció lényegében megegyezik a 2.1. alfejezetben leírt végtelen parkolási modellel, hiszen ha minden pont mellett balra lévő pontot is foglaltnak tekintjük, akkor ezeket tekinthetjük 2 hosszú autóknak, és köztük legfeljebb 1 hely marad ki mindig, mert az RSA-modellünkben legfeljebb 2 szomszédos üres hely lehetett. Természetesen itt a foglalt helyek sűrűsége a felére csökken a korábbihoz képest.

Jelöljük $\phi_s(t)$-vel annak valószínűségét, hogy az s hely foglalt a t időpontban. Ez minden s-re megegyezik, a $\mathbb{Z}$ eltolási invarianciája miatt. Ez pedig ergodtételek alapján megegyezik a t időpontban a foglalt helyek sűrűségével (azaz a foglalt helyek arányával az összes helyhez viszonyítva), amelyet ρ_t-vel jelölünk. Az egyik fő cél ennek a meghatározása. Egy másik mennyiség, melyet meg fogunk határozni, a páronkénti korreláció. Az i és j helyekre ezt a korrelációt az ω_i és ω_j változók kovarianciája definiálja. Egy t időpontban ezt $Cov_t(i,j)$-vel fogjuk jelölni. Ekkor

$$Cov_t(i,j) = E(\omega_i(t)\omega_j(t)) - E(\omega_i(t))E(\omega_j(t)),$$

ahol a várható értéket a P szorzatmérték alapján számítjuk ki. Ha $|i-j| = s$, akkor az eltolási invariancia alapján $Cov_t(i,j) = Cov_t(0,s)$, így elég csak a $Cov_t(0,s)$-et meghatározni, hogy bármely két hely között tudjuk a korrelációt. Jelölésünk erre $Cov_t(0,s) = C_s(t)$ lesz.

2.3.2. Tétel (Amaral, Santos,[1])**.** *Az RSA-modellben $\mathbb{Z}$-n a szomszédok kihagyásával minden $t \in [0,1]$-re és minden $k \in \mathbb{Z}$-re*

$$\rho_t = \frac{1-e^{-2t}}{2}$$

$$C_{2k+1}(t) + C_{2k}(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} \cdot \sum_{i=2k+1}^{\infty} \frac{(-2t)^i}{i!}$$

Továbbá azt is belátta Pedersen és Hemmer [7] differenciálegyenletekkel, hogy minden $s \in \mathbb{Z}$-re

$$C_s(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2t)^{2n+s+1}}{(2n+s+1)!}$$

Ezt nem fogjuk bizonyítani.

Az első állítás bizonyítása lényegében a Gerin [3] cikkében található, páros hosszú emelkedésről és csökkenésről szóló lemmából jön ki.

Bizonyítás. A második állítás bizonyításához vegyük észre, hogy:

$$\phi_s(t) = P(\omega_{-1}(t) = 0, \omega_0(t) = 0, \omega_s(t) = 1) + P(\omega_{-1}(t) = 1, \omega_0(t) = 0, \omega_s(t) = 1)$$
$$+P(\omega_{-1}(t) = 0, \omega_0(t) = 1, \omega_s(t) = 1)$$

A bal oldalon annak valószínűsége található, hogy az s hely a t időpontban foglalt, amely az $\{\omega_s(t) = 1\}$ esemény valószínűsége. Ezt bontjuk szét egy teljes eseményrendszer mentén az alapján, hogy a (-1) és 0 helyek közül melyik foglalt. Mindkettő nem lehet foglalt, hiszen egy foglalt hely szomszédai mindig üresek, így 3 lehetőség van: mindkettő üres, a (-1)-es foglalt vagy a 0-s foglalt.

Definiáljuk a $p_s(t) = P(\omega_0(t) = 1, \omega_s(t) = 1)$ valószínűséget. Ekkor nyilván $P(\omega_{-1}(t) = 0, \omega_0(t) = 1, \omega_s(t) = 1) = p_s(t)$, mert ha a 0-s hely foglalt, akkor a (-1)-es hely üres. Valamint az eltolási invariancia miatt $P(\omega_{-1}(t) = 1, \omega_0(t) = 0, \omega_s(t) =$

$1) = P(\omega_0(t) = 1, \omega_1(t) = 0, \omega_{s+1}(t) = 1) = p_{s+1}(t)$. Tehát a fenti képletből két tagot már átírtunk ezen a módon. A harmadik taghoz vezessünk be egy új eseményt: $D_s(t) = \{\omega_{-1}(t) = 0, \omega_0(t) = 0, \omega_s(t) = 1\}$, és legyen $P(D_s(t)) = \gamma_s(t)$. Ekkor az egyenlet az alábbi alakba írható:

$$\phi_s(t) = \gamma_s(t) + p_{s+1}(t) + p_s(t)$$

A következőekben megadunk egy képletet $\gamma_s(t)$-re, ha s páros. Ekkor ugyanis $D_s(t)$ felírható diszjunkt események uniójaként, ami a páratlan s-ek esetén nem tehető meg.

2.3.3. Lemma. *Minden $t \in [0,1]$-re és s páros számra*

$$\gamma_s(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} \cdot \sum_{i=1}^{s} \frac{(-2t)^i}{i!}.$$

Bizonyítás. Tekintsük a következő eseményeket.

$$M_1(t) = \{t_{-1} > t, t_0 > t\}, M_2(t) = \{t_{-1} < t, t_0 < t\},$$
$$M_3(t) = \{t_{-1} < t, t_0 > t\}, M_4(t) = \{t_{-1} > t, t_0 < t\}$$

Vezessük be ezt a jelölést: $\gamma_{s,i} = P(D_s(t) \cap M_i(t))$. Ekkor $\gamma_s = \gamma_{s,1} + \gamma_{s,2} + \gamma_{s,3} + \gamma_{s,4}$. A következőekben $\gamma_{s,1}$-et és $\gamma_{s,2}$-t fogjuk kiszámítani, a másik két eset ugyanígy megy. Ehhez az a cél, hogy $D_s(t) \cap M_i(t)$-t előállítsuk független események metszetének uniójaként.

Először számítsuk ki $\gamma_{s,1}$-et. Mivel $M_1(t)$-ben $t_{-1} > t$ és $t_0 > t$, így $\omega_0(t) = \omega_1(t) = 0$. Azaz $\gamma_{s,1} = P(M_1(t), \omega_s(t) = 1)$.

Vezessünk be a következő eseményekre jelöléseket, amelyekkel el tudjuk végezni majd az említett felbontást. $G^s_{jk}(t)$ jelölje azt az eseményt, hogy $t > t_s$, $t_{s-i} > t_{s-i-1}$ minden $0 \leq i \leq 2j-1$-re, $t_{s-2j} < t_{s-2j-1}$, és hasonlóan $t_{s+i} > t_{s+i+1}$ minden $0 \leq i \leq 2k-1$-re és $t_{s+2k} < t_{s+2k+1}$. Ebből az következik, hogy $s-2j$ és $s+2k$ között minden második hely lesz foglalt úgy, hogy $s-2j$ és $s+2k$ is foglalt (hiszen ezek lokális minimumok), így emiatt s is foglalt a t időpontban, hiszen $t > t_s$. Továbbá az is látható, hogy ha $\omega_s(t) = 1$, akkor valamely j,k számpárra $G^s_{jk}(t)$ teljesül. Ez azért van, mert ha s foglalt, akkor $s-1$ nem lehet foglalt, ami vagy azért van, mert $t_{s-1} > t_s$ (ekkor $j = 0$) vagy $t_{s-1} < t_s$, de $s-2$ már foglalt a t_{s-1} időpontban, azaz $t_{s-2} < t_{s-1}$, és így tovább $s-2$-re ugyanez a két eset elmondható. Szintén $s+1$ felé elindulva is ugyanez a helyzet. Azaz

$$\{\omega_s(t) = 1\} = \bigcup_{j,k \geq 0} G^s_{jk}(t).$$

Továbbá a $G^s_{jk}(t)$ eseményekről azt is triviálisan tudjuk különböző (j,k) számpárokra, hogy diszjunktak. Azaz

$$\phi_s(t) = \sum_{k\geq 0}\sum_{j\geq 0} P(G^s_{jk}(t)).$$

Kiszámítható az is, hogy

$$P(G^s_{jk}(t)) = \frac{t^{2k+2j+1}}{(2k)!(2j)!(2k+2j+1)} - \frac{t^{2k+2j+2}}{(2k+1)!(2j)!(2k+2j+2)} - \frac{t^{2k+2j+2}}{(2k)!(2j+1)!(2k+2j+2)} + \frac{t^{2k+2j+3}}{(2k+1)!(2j+1)!(2k+2j+3)}$$

Ebből pedig kijön egy, a későbbiekben szükséges összegképlet: Ha az előző kifejezésben a 4 tagot (pozitív előjellel) rendre a_{jk}, b_{jk}, c_{jk}, d_{jk}-val jelöljük, akkor

$$\sum_{j\geq 0} P(G^s_{jk}(t)) = \sum_{j\geq 0}(a_{jk} - b_{jk} - c_{jk} + d_{jk})$$

Külön-külön összegezve a tagokat, felhasználva a sinh és cosh függvények hatványsorát:

$$\sum_{j\geq 0} a_{jk} = \int_0^t \frac{u^{2k}}{(2k)!}\cosh(u)du$$

$$\sum_{j\geq 0} b_{jk} = \int_0^t \frac{u^{2k}}{(2k)!}\sinh(u)du$$

$$\sum_{j\geq 0} c_{jk} = \int_0^t \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!}\cosh(u)du$$

$$\sum_{j\geq 0} d_{jk} = \int_0^t \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!}\sinh(u)du$$

Innen összegezve:

$$\sum_{j\geq 0} P(G^s_{jk}(t)) = \int_0^t \left[\frac{u^{2k}}{(2k)!} - \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] e^{-u}du = \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot e^{-t}$$

Azaz mivel tudjuk, hogy

$$\{\omega_s(t) = 1\} = \bigcup_{j,k\geq 0} G^s_{jk}(t),$$

így

$$\{M_1(t), \omega_s(t) = 1\} = M_1(t) \cap \bigcup_{j,k\geq 0} G^s_{jk}(t).$$

Ha $j \geq \frac{s}{2}$, akkor $t > t_s > t_{s-1} > \ldots > t_{s-2j}$, és $s - 2j \leq 0$, így $t > t_0$. Tehát a $j \geq \frac{s}{2}$ esetben $G^s_{jk}(t) \cap \{t_0 > t\} = \emptyset$, és mivel $M_1(t) \subset \{t_0 > t\}$, így elég csak $\frac{s-2}{2}$-ig nézni az uniót (hiszen s páros), mert a maradékkal üres lenne a metszet mindenképpen.

$$M_1(t) \cap \bigcup_{j,k\geq 0} G^s_{jk}(t) = M_1(t) \cap \bigcup_{j=0}^{(s-2)/2} \bigcup_{k\geq 0} G^s_{jk}(t)$$

Itt viszont azt használhatjuk fel, hogy ha $j \leq \frac{s-2}{2}$, akkor $M_1(t)$ és $G^s_{jk}(t)$ (rögzített t-re) független, mert $M_1(t)$ csak t_{-1}-től és t_0-tól függ, és $G^s_{jk}(t)$-ben a legkisebb indexű változó t_1 lehet, mert $s - 2j - 1$ a legkisebb index, és $j \leq \frac{s-2}{2}$-ből következik, hogy $s - 2j - 1 \geq 1$. Azaz ekkor a valószínűségeket szorzat alakban felírhatjuk.

$$P(M_1(t)) = P(\{t_0 > t, t_{-1} > t\}) = P(\{t_{-1} > t\}) \cdot P(\{t_0 > t\}) = (1-t)^2.$$

Tehát használva az előző összegképletet, azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
\gamma_{s,1}(t) = P(D_s(t) \cap M_1(t)) = P(M_1(t), \omega_s(t) = 1) = P\left(M_1(t) \cap \bigcup_{j=0}^{(s-2)/2} \bigcup_{k\geq 0} G^s_{jk}(t)\right) \\
= P(M_1(t)) \cdot \sum_{j=0}^{(s-2)/2} \sum_{k\geq 0} P(G^s_{jk}(t)) = (1-t)^2 \cdot \sum_{j=0}^{(s-2)/2} \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!} \cdot e^{-t}
\end{aligned}$$

Ezt követően számítsuk ki $\gamma_{s,2}(t)$-t. Mivel $M_2(t) = \{t_{-1} < t, t_0 < t\}$, viszont $D_s(t)$ definíciója szerint $\omega_0(t) = 0$ és $\omega_{-1}(t) = 0$, ezért amikor megérkeztek (még a t időpont előtt), akkor a (másik) szomszédjuknak már foglaltnak kellett lennie, azaz $\omega_1(t) = 1$ és $\omega_{-2}(t) = 1$. Tehát

$$\begin{aligned}
\gamma_{s,2}(t) &= P(M_2(t), \omega_{-2}(t) = 1, \omega_1(t) = 1, \omega_s(t) = 1) \\
&= P\left(M_2(t), \bigcup_{u,v\geq 0} G^{-2}_{uv}(t), \bigcup_{j,k\geq 0} G^1_{jk}(t), \bigcup_{l,m\geq 0} G^s_{lm}(t)\right)
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy ha $k \geq \frac{s-2}{2}$, akkor $G^1_{jk}(t)$ és $G^s_{lm}(t)$ diszjunktak, mert $G^1_{jk}(t)$-ben 1-től kezdve $(1+2k)$-ig a páratlan számok foglaltak, és $2k+1 \geq s-1$ (és s páros), így $G^1_{jk}(t)$-ben $\omega_{s-1}(t) = 1$, viszont $G^s_{lm}(t)$-ben $\omega_s(t) = 1$, amely viszont egyszerre nem lehetséges. Továbbá ha $l \geq \frac{s-2k-2}{2}$, akkor is $G^1_{jk}(t)$ és $G^s_{lm}(t)$ diszjunktak, mert $G^s_{lm}(t)$-ben s-től kezdve $s-2l$-ig a páros számok foglaltak (s páros), és $s - 2l \leq 2k+2$, így $G^s_{lm}(t)$-ben $\omega_{2k+2}(t) = 1$, viszont $G^1_{jk}(t)$-ben $\omega_{2k+1}(t) = 1$, amely viszont egyszerre nem lehetséges. Különben pedig független események, mert különböző indexű t-ktől függnek csak. Így a fenti képlet átírható az alábbi alakba:

$$\gamma_{s,2}(t) = P\left(M_2(t), \bigcup_{u,v,m,j\geq 0} \bigcup_{k=0}^{(s-4)/2} \bigcup_{l=0}^{(s-2k-4)/2} G_{uv}^{-2}(t) \cap G_{jk}^{1}(t) \cap G_{lm}^{s}(t)\right)$$

$$= \sum_{u,v,m,j\geq 0} \sum_{k=0}^{(s-4)/2} \sum_{l=0}^{(s-2k-4)/2} P((M_2(t) \cap G_{uv}^{-2}(t) \cap G_{jk}^{1}(t)) \cdot P(G_{lm}^{s}(t))$$

Határozzuk meg most ebből $P((M_2(t) \cap G_{uv}^{-2}(t) \cap G_{jk}^{1}(t))$-t. Tudjuk, hogy a metszetben $\omega_{-2}(t) = \omega_1(t) = 1$, és $\omega_{-1}(t) = \omega_0(t) = 0$. Viszont ha $v > 0$, akkor $\omega_0(t) = 1$ lenne, valamint ha $j > 0$, akkor $\omega_{-1}(t) = 1$ lenne, tehát ezen esetekben a metszet üres, csak a $v = j = 0$ eset érdekes. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$B_k(t) = \{t > t_0 > t_1 > \ldots > t_{2k+1}, t_{2k+2} > t_{2k+1}\}$$

$$B_{-u}(t) = \{t > t_{-1} > t_{-2} > \ldots > t_{-2u-2}, t_{-2u-3} > t_{-2u-2}\}$$

Ezt használva $M_2(t) \cap G_{u0}^{-2}(t) \cap G_{0k}^{1}(t) = B_{-u}(t) \cap B_k(t)$ a definíciók szerint. Mivel $B_{-u}(t)$ és $B_k(t)$ független, így az előbbi képletet átalakítva:

$$\gamma_{s,2}(t) = \sum_{u,m\geq 0} \sum_{k=0}^{(s-4)/2} \sum_{l=0}^{(s-2k-4)/2} P(B_{-u}(t)) \cdot P(B_k(t)) \cdot P(G_{lm}^{s}(t))$$

Továbbá az is belátható számolással, hogy

$$P(B_k(t)) = P(B_{-k}(t)) = \frac{t^{2k+2}}{(2k+2)!} - \frac{t^{2k+3}}{(2k+3)!}$$

Eközben azt használtuk, hogy $P(X \cap Y) = P(X) - P(X \cap Y^C)$ (ahol Y^C az Y esemény komplementerét jelöli).
Ebből az e^{-t} Taylor-sorának felhasználásával

$$\sum_{k\geq 0} P(B_k(t)) = e^{-t} - 1 + t$$

Így, használva a korábbi összegképletet is:

$$\gamma_{s,2}(t) = (e^{-t} - 1 + t)e^{-t} \sum_{k=0}^{(s-4)/2} \sum_{l=0}^{(s-2k-4)/2} \left(\frac{t^{2l+2k+3}}{(2l+1)!(2k+2)!} - \frac{t^{2l+2k+4}}{(2l+1)!(2k+3)!}\right)$$

Ebből egyszerűsítés után kapjuk, hogy

$$\gamma_{s,2}(t) = -(e^{-t} - 1 + t)e^{-t}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=3}^{s} \frac{(-2t)^i}{i!} + (1-t)\sum_{i=0}^{(s-4)/2} \frac{t^{2i+3}}{(2i+3)!}\right)$$

Hasonlóan az eddigi két számoláshoz, megkapható, hogy:

$$\gamma_{s,3}(t) = (1-t)(e^{-t} - 1 + t)e^{-t} \sum_{i=0}^{(s-2)/2} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

$$\gamma_{s,4}(t) = -(1-t)e^{-t} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=3}^{s} \frac{(-2t)^i}{i!} + (1-t) \sum_{i=0}^{(s-4)/2} \frac{t^{2i+3}}{(2i+3)!} \right)$$

Innen belátható, hogy

$$\gamma_{s,1}(t) + \gamma_{s,3}(t) = (1-t)e^{-2t} \sum_{i=0}^{(s-2)/2} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

$$\gamma_{s,2}(t) + \gamma_{s,4}(t) = -e^{-2t} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=3}^{s} \frac{(-2t)^i}{i!} + (1-t) \sum_{i=0}^{(s-4)/2} \frac{t^{2i+3}}{(2i+3)!} \right)$$

Ezeket összeadva

$$\gamma_s(t) = -e^{-2t} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=3}^{s} \frac{(-2t)^i}{i!} - (1-t)t \right) = -\frac{1}{2} e^{-2t} \cdot \sum_{i=1}^{s} \frac{(-2t)^i}{i!}$$

$\square$

Tegyük fel, hogy r páros. Ekkor a lemma formuláját $s = r$ választással behelyettesítve

$$\phi_r(t) = \frac{1}{2} e^{-2t} \cdot \sum_{i=1}^{r} \frac{(-2t)^i}{i!} + p_{r+1}(t) + p_r(t)$$

Tudjuk, hogy $\phi_r(t) = \rho_t = \frac{1-e^{-2t}}{2}$. Ebből kapjuk egyszerű átalakításokkal (e^{-2t} hatványsorának felhasználásával), hogy

$$p_{r+1}(t) + p_r(t) = \frac{1-e^{-2t}}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t} \cdot \sum_{i=1}^{r} \frac{(-2t)^i}{i!} = 2 \cdot \left(\frac{1-e^{-2t}}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} e^{-2t} \cdot \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{(-2t)^i}{i!}$$

$$= 2\rho_t^2 - \frac{1}{2} e^{-2t} \cdot \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{(-2t)^i}{i!}$$

Valamint a definíció szerint (tetszőleges r természetes számra)

$$C_r(t) = Cov_t(0, r) = E(\omega_0(t)\omega_r(t)) - E(\omega_0(t)) \cdot E(\omega_r(t))$$

Mivel ω_0, ω_r, illetve $\omega_0 \cdot \omega_r$ értéke 0 vagy 1, így a várható érték megegyezik annak valószínűségével, hogy a megfelelő kifejezés értéke 1. Azaz

$$C_r(t) = P(\omega_0(t) = 1, \omega_r(t) = 1) - P(\omega_0(t) = 1) \cdot P(\omega_r(t) = 1)$$

Azaz a bevezetett jelöléseket felhasználva:

$$C_r(t) = p_r(t) - \phi_0(t) \cdot \phi_r(t) = p_r(t) - \rho_t^2$$

Tehát azt kapjuk (páros r esetén), hogy

$$C_{r+1}(t) + C_r(t) = p_{r+1}(t) + p_r(t) - 2\rho_t^2 = \frac{1}{2}e^{-2t} \cdot \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{(-2t)^i}{i!}$$

□

Tehát azt tudjuk, hogy ha k természetes szám, akkor

$$C_{2k+1}(t) + C_{2k}(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} \cdot \sum_{i=2k+1}^{\infty} \frac{(-2t)^i}{i!}$$

Ha t-t rögzítjük, és k-val tartunk végtelenbe, akkor a Taylor-sor maradéktagos becslése alapján a szummára felírhatjuk, hogy:

$$\left| \sum_{i=2k+1}^{\infty} \frac{(-2t)^i}{i!} \right| \leq \frac{2^{2k+1} \cdot (2t)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{4^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot t^{2k+1}$$

Ez alapján exponenciálisnál gyorsabban tart 0-hoz a jobb oldal, ha k-val végtelenbe tartunk. Mivel $C_s(t)$ lehet negatív is, ezért ebből még nem következik az exponenciális lecsengés. A Pedersen és Hemmer [7] által belátott eredmény:

$$C_s(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2t)^{2n+s+1}}{(2n+s+1)!}$$

A $(-2t)$ kitevőjéből az látszik, hogy páros s-re $C_s(t)$ pozitív, páratlan s-re $C_s(t)$ negatív. $s = 1$-re ez nyilvánvaló, mert szomszédos helyek nem lehetnek egyszerre foglaltak, $s = 2$-re pedig azért lehet pozitív, mert nem maradhat üresen hely.

3. fejezet

A kétdimenziós folyamat

A fejezetben bevezetjük a Poisson-pontfolyamat fogalmát a többdimenziós változathoz Last és Penrose könyve [4] alapján. Ezt követően a fogalmat használva ismertetni fogjuk a Rényi-féle parkolási folyamat kétdimenziós változatát, amely a szakirodalmoban Matérn II folyamat néven is szerepel.

3.1. Pontfolyamatok és a Poisson-pontfolyamat

Ebben a fejezetben Last és Penrose könyve alapján bevezetjük a pontfolyamatok általános fogalmát, alapvető tulajdonságait, majd speciálisan a Poisson-pontfolyamatot. Ezt a fejezet második részében a Rényi-féle parkolási folyamat kétdimenziós általánosítására fogjuk használni, annak megadására, hogy az autók milyen eloszlás szerint érkeznek.

A pontfolyamatokat általában úgy képzelhetjük el, mint legfeljebb megszámlálható sok, véletlenszerű pont halmazát egy térben, például egy euklideszi térben. Ekkor bármely halmazhoz hozzárendelhetjük azt a számot, hogy hány pontot tartalmaz. Így lényegében egy véletlen számlálómértéket kapunk. Ez fogja megadni az általános definíciót a pontfolyamatokhoz.

Az általános definícióhoz bevezetünk néhány jelölést. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ egy valószínűségi mértéktér, és legyen $(X, \mathcal{A})$ egy mérhető tér, ezt később az $X = \mathbb{R}^2$-re fogjuk alkalmazni a Borel-halmazok szigma-algebrájával. Jelölje $N_{<\infty}(X)$ az olyan mértékek halmazát az X téren, melyekre minden $B \in \mathcal{A}$-ra B mértéke egy természetes szám. Valamint jelölje $N(X)$ azon mértékek halmazát, melyek előállnak megszámlálható sok $N_\infty(X)$-beli mérték összegeként. Példák $N(X)$ elemeire: az azonosan 0 mérték, az egy pontra koncentrálódó/Dirac-mérték, azaz egy adott $x \in X$-re $\delta_x(B) := \mathbf{1}_B(x)$. Ennek általánosításaként megszámlálható sok Dirac-mérték összege is $N(X)$-beli. Tehát ha adott egy $(x_n)_{n=1}^k$ X-beli pontokból álló sorozat (ahol k egy nemnegatív egész, vagy végtelen), akkor

$$\mu := \sum_{n=1}^{k} \delta_{x_n}(B)$$

teljesíti, hogy $\mu \in N(X)$,

$$\mu(B) = \sum_{n=1}^{k} \mathbf{1}_B(x_n),$$

és bármely $f : X \to [0, \infty]$ mérhető függvényre

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{k} f(x_n).$$

Ha $k = 0$, akkor az azonosan 0 mértéket kapjuk. Ha a sorozatban valamely X-beli elemek többször szerepelnek, akkor azt mondjuk, hogy μ-nek multiplicitásai vannak. Ekkor minden ilyen μ egy számlálómérték, esetleg multiplicitásokkal.

Általában nem írható fel egy $\mu \in N(X)$ a fenti alakban. Azt mondjuk, hogy egy ν mérték X-en s-véges, ha ν felírható, mint megszámlálható sok véges mérték összege. Ekkor $N(X)$ minden eleme s-véges. Azt mondjuk, hogy egy ν mérték X-en σ-véges, ha léteznek olyan $B_n \in \mathcal{A}$ halmazok minden $n \in \mathbb{N}$-re, hogy $\cup_n B_n = X$ és $\nu(B_n) < \infty$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Ekkor minden σ-véges mérték s-véges is, hiszen a B_n-ek különbségeire megszorítva fel tudjuk írni a σ-véges mértéket megszámlálható sok véges mérték összegeként. A megfordítás viszont nem igaz, hiszen ha valamely $x \in X$-re $\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_x$, akkor ez nem σ-véges, de s-véges mérték. Ha egy X-en σ-véges mérték csak természetes számokat és végtelent vesz fel, akkor eleme $N(X)$-nek. A σ-véges mértékekkel ellentétben megszámlálható sok s-véges mérték összege is s-véges. A számlálómérték $\mathbb{R}$-en csak természetes számokat és végtelent vesz fel, de nem s-véges.

Jelölje $\mathcal{M}(X)$ az $N(X)$ alábbi részhalmazai által generált σ-algebrát:

$$\{\mu \in N(X) : \mu(B) = k\}, B \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{M}(X)$ a legkisebb σ-algebra $N(X)$-en úgy, hogy $\forall B \in A$-ra a $\mu \mapsto \mu(B)$ egy mérhető függvény.

3.1.1. Definíció. Egy pontfolyamat X-en egy véletlen η eleme $(N(X), \mathcal{M}(X))$-nek, azaz egy $\eta : \Omega \to N(X)$ mérhető leképezés.

Azt mondjuk, hogy két pontfolyamat, η és η' majdnem biztosan egyenlő, ha létezik $A \in \mathcal{F}$, hogy $P(A) = 1$ és $\forall \omega \in A$-ra $\eta(\omega) = \eta'(\omega)$.

Példák pontfolyamatra: Ha Y egy véletlenszerű eleme X-nek, akkor $\eta := \delta_Y$ egy pontfolyamat. Ez azért van, mert a fenti mérhetőségi feltétel teljesül:

$$\{\eta(B) = k\} = \begin{cases} \{Y \in B\} & \text{ha } k = 1 \\ \{Y \notin B\} & \text{ha } k = 0 \\ \emptyset & \text{különben.} \end{cases}$$

Ennek általánosítása a következő pontfolyamat. Legyen Q valószínűségi mérték X-en, és legyenek $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ független, Q eloszlású véletlen pontok X-ben. Ekkor $\eta := \delta_{Y_1} + \delta_{Y_2} + \ldots + \delta_{Y_m}$ egy pontfolyamat X-en. Ugyanis $0 \leq k \leq m$-re

$$P(\eta(B) = k) = \binom{m}{k} Q(B)^k \cdot (1 - Q(B))^{m-k}.$$

Ennek elnevezése binomiális folyamat m mintamérettel és Q mintaeloszlással.

Ezekben a példákban az η véletlen mérték előáll Dirac-mértékek összegeként, a pontfolyamatok ezen osztályára bevezetünk egy elnevezést.

3.1.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az η pontfolyamat az X térben egy valódi pontfolyamat (proper point process), ha léteznek $Y_1, Y_2, \ldots$ véletlen elemei X-nek, és egy κ $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$-beli értékeket felvevő véletlen szám, hogy

$$\eta = \sum_{n=1}^{\kappa} \delta_{Y_n}$$

majdnem biztosan. Ha $\kappa = 0$, akkor ez az azonosan 0 mérték X-en.

Ezt a definíciót az motiválja, hogy a pontfolyamat elnevezés alatt egy véletlen ponthalmazt szeretnénk érteni, nem pedig egy egészértékű mértéket. Így a valódi pontfolyamat már tényleg ezt jelöli, egy megszámlálható méretű véletlen ponthalmazt X-ben.

Egy pontfolyamatot karakterizálhatunk egy tetszőleges mérhető halmazba eső pontjainak átlagos számával, ehhez segít a következő definíció:

3.1.3. Definíció. Egy η pontfolyamatnak az intenzitási mértéke

$$\lambda(B) := E[\eta(B)], B \in \mathcal{A}$$

.

A várható érték tulajdonságaiból következik, hogy λ valóban egy mérték.

3.1.4. Állítás (Campbell-formula)**.** *Legyen η egy λ intenzitási mértékű pontfolyamat (X, A)-n és u egy X-ről $\mathbb{R}$-be képező függvény. Ekkor $\int u(x)\eta(dx)$ egy valószínűségi változó, valamint*

$$E\left(\int u(x)\eta(dx)\right) = \int u(x)\lambda(dx),$$

ha $u \geq 0$ vagy $\int u(x)\lambda(dx) < \infty$.

Ennek a bizonyítása a szokásos mértékelméleti eszközökkel történik, először egy tetszőleges mérhető halmaz indikátorfüggvényére, majd egyszerű függvényekre, onnan monoton konvergenciával nemnegatív függvényekre, és végül véges integrálú függvényekre is igaz az állítás.

3.1.5. Definíció. Egy η pontfolyamat eloszlása az a P_η valószínűségi mérték az $(N(X), \mathcal{M}(X))$ téren, amelyre $P_\eta(M) = P(\eta \in M)$ minden $M \in \mathcal{M}(X)$-re.

Ha η és η' eloszlása megegyezik, akkor ezt a jelölést használjuk: $\eta \overset{d}{=} \eta'$.

3.1.6. Definíció. Egy η pontfolyamat Laplace- vagy karakterisztikus függvénye az az $L_\lambda : \mathbb{R}_+(X) \to [0, 1]$ leképezés, melyre:

$$L_\eta(u) = E\left(e^{-\int u(x)\eta(dx)}\right),$$

ahol $u \in \mathbb{R}_+(X)$ (ami az X-ről $\mathbb{R}$-be képező nemnegatív függvények halmazát jelöli).

A Laplace-függvénnyel karakterizálni lehet pontfolyamatok eloszlásbeli egyenlőségét, erről szól a következő állítás.

3.1.7. Állítás. *Az η és η' pontfolyamatokra az X téren az alábbi kijelentések ekvivalensek:*

- $\eta \overset{d}{=} \eta'$,
- $(\eta(B_1), \ldots, \eta(B_m)) \overset{d}{=} (\eta'(B_1), \ldots, \eta'(B_m)$ *minden $m \in \mathbb{N}$-re és páronként diszjunkt $B_1, \ldots, B_m$ mérhető halmazokra,*
- $L_\eta(u) = L_{\eta'}(u)$ *minden $u \in \mathbb{R}_+(X)$-re,*
- *minden $u \in \mathbb{R}_+(X)$-re $\eta(u) \overset{d}{=} \eta'(u)$, mint valószínűségi változók.*

Ezekkel a fogalmakkal már be tudjuk vezetni a Poisson-pontfolyamatot.

3.1.8. Definíció. Legyen λ egy s-véges mérték X-en. Ekkor az η pontfolyamatot X-en egy λ intenzitású Poisson-pontfolyamatnak nevezzük, ha az alábbi két tulajdonság teljesül:

1. Minden $B \in \mathcal{A}$-ra az eloszlása $\eta(B)$-nek egy $\lambda(B)$ paraméterű Poisson-eloszlás.
2. Minden $m \in \mathbb{N}$-re és bármely, páronként diszjunkt $B_1, B_2, \dots, B_m \in \mathcal{A}$ halmazokra az $\eta(B_1), \eta(B_2), \dots, \eta(B_m)$ véletlen változók függetlenek.

Az elnevezést az első tulajdonság indokolja, míg a második tulajdonsággal rendelkező pontfolyamatokat teljesen független (completely independent) pontfolyamatoknak nevezzük. Ha η egy Poisson-pontfolyamat λ intenzitással, akkor $E(\eta(B)) = \lambda(B)$, tehát az intenzitás definíciójával konzisztens az elnevezés.

3.1.9. Állítás (Last, Penrose, [4]). *Legyen η és η' két Poisson-pontfolyamat az X téren azonos λ (s-véges) intenzitással. Ekkor $\eta \overset{d}{=} \eta'$.*

Ennek bizonyítása a pontfolyamatok eloszlására vonatkozó ekvivalens megállapításokból következik.

A következőekben megmutatjuk egy konstrukción keresztül, hogy bármely s-véges λ mértékhez létezik Poisson-pontfolyamat λ intenzitási mértékkel. Ehhez először független Poisson-pontfolyamatok összegét vizsgáljuk.

3.1.10. Állítás (Last, Penrose, [4]). *Legyenek $\eta_i, i \in \mathbb{N}$ független Poisson-pontfolyamatok rendre $\lambda_i, i \in \mathbb{N}$ intenzitási mértékkel. Ekkor $\eta = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i$ egy Poisson-pontfolyamat $\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ intenzitási mértékkel.*

Az állítás bizonyítása az első tulajdonsághoz a valószínűségi mérték folytonosságát, és a második tulajdonsághoz független valószínűségi változók csoportosíthatóságát használja.

A konstrukcióhoz szükség lesz a kevert binomiális folyamatra (mixed binomial process).

3.1.11. Definíció. Legyenek V és Q valószínűségi mértékek rendre $\mathbb{N}$-en és X-en. Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független valószínűségi változók X-en Q eloszlással, és legyen κ valószínűségi változó V eloszlással a természetes számok halmazán, független az X_i-ktől. Ekkor az

$$\eta = \sum_{i=1}^{\kappa} \delta_{X_i}$$

pontfolyamatot kevert binomiális folyamatnak nevezzük V keverési eloszlással (mixing distribution) és Q mintaeloszlással.

3.1.12. Állítás. *Legyen Q valószínűségi mérték X-en, és $\gamma \geq 0$. Tegyük fel, hogy η egy kevert binomiális folyamat Q mintaeloszlással, és keverési eloszlása γ paraméterű Poisson-eloszlás. Ekkor η egy Poisson-pontfolyamat γQ intenzitással.*

3.1.13. Tétel (Last, Penrose, [4])**.** *Legyen λ egy s-véges mérték X-en. Ekkor létezik X-en Poisson-pontfolyamat λ intenzitási mértékkel.*

$\lambda = 0$-ra triviális az állítás, ha $0 < \lambda(X)$ véges, akkor az előző állítás alapján kaphatunk egy megfelelő kevert binomiális folyamatot, amely megadja a keresett Poisson-pontfolyamatot. Ha pedig $\lambda(X) = \infty$, akkor tudunk venni egy λ_i mértékekből álló sorozatot, melyekre $0 \geq \lambda_i \geq \infty$ és $\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$. Ekkor az előző rész alapján ezekhez létezik megfelelő Poisson-pontfolyamat, amelyeket a megfelelő szorzattéren megadva függetlennek felvehetünk. Ezeket összeadva kapható λ-hoz tartozó Poisson-pontfolyamat.

3.1.14. Állítás. *Minden Poisson-pontfolyamat eloszlásban megegyezik egy valódi Poisson-pontfolyamattal.*

Ez az előző konstrukcióból következik. Tehát innentől kezdve feltehetjük, hogy ha egy Poisson-pontfolyamatnak csak az eloszlását vizsgáljuk, akkor ez alatt valódi Poisson-pontfolyamat eloszlását értjük.

3.2. A folyamat leírása

A Page-féle parkolási folyamatban egy szakasz vagy egyenes az alaphalmaz, és erre érkeznek diszkrét szakaszok, amíg lehet. A Rényi-féle parkolási folyamat ezt általánosítja, itt a szakaszok már akárhová érkezhetnek, azonos valószínűséggel. A kétdimenziós változathoz az alaphalmaz a sík (vagy ennek egy mérhető részhalmaza). Erre érkeznek az alakzataink, amelyek itt már nem szakaszok, hiszen abból megszámlálható sok diszjunktat lerakva is 0 területű részt fedne le, így a folyamat nem érne véget. Tehát ehelyett valamilyen másfajta D alakzatot kell lerakni, például körlemezt vagy téglalapot. Esetünkben adott $r = 1$ sugarú körlapokat rakunk le az alapproblémához. Mivel az egész sík területe végtelen, így véges sok kör lerakása után biztos nem ér véget a folyamat, ezért egy lépés során több kört rakunk le egyszerre. Ehhez használjuk a Poisson-pontfolyamatot, azaz a k. lépésben tekintünk egy, a későbbiekben megválasztott λ intenzitású η_k valódi Poisson-folyamatot, a kapott pontok halmaza legyen H, és H minden P pontja körül veszünk egy egység sugarú nyílt körlapot. Ezt a folyamat egy rétegének fogjuk nevezni.

Először azt szeretnénk elérni, hogy egy tetszőleges rétegen belül diszjunkt körlemezek legyenek, hiszen majd ez lesz a kétdimenziós folyamat célja, hogy diszjunkt körlemezeket rakunk le a síkra, amíg még lehetséges. Viszont azt is szeretnénk, hogy minden pont pozitív valószínűséggel kerüljön be valamelyik körlemezbe. Ehhez tekintsük azt a G gráfot, amelynek csúcsai H elemei, és két csúcs pontosan akkor van összekötve, ha a távolságuk legfeljebb 2 (mivel ekkor metszenek össze a körülöttük lévő 1 sugarú körök).

3.2.1. Állítás. *Ha G-ben nincs végtelen sok csúcsú összefüggő komponens, akkor el tudjuk végezni a diszjunktizálást.*

Bizonyítás. Vegyünk minden $P \in H$ ponthoz egy ξ_P valószínűségi változót, amely egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon (tehát sorsoljunk ki minden P pontra egy számot). Ekkor először tartsuk meg a G gráfon ξ_P szerinti lokális minimumokat, tehát azokat a csúcsokat, amelyekhez minden szomszédjuknál kisebb ξ_P érték tartozik. A lokális minimumok szomszédait hagyjuk el (élekkel együtt), és az így kapott gráfon ismételjük meg az előző folyamatot. Mivel véges sok csúcs van minden komponensben, így ez az algoritmus véges. □

Az előző algoritmus nem alkalmazható, ha van végtelen komponens, hiszen akkor nem biztos, hogy van lokális minimuma a ξ_P-nek.

3.2.2. Állítás. *Ha $\lambda \neq 0$ egy megfelelő mérték, akkor 1 valószínűséggel G minden összefüggőségi komponense véges.*

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy egy rögzített Q csúcs összefüggőségi komponense véges. Ehhez elágazó folyamatokat használunk. Jelölje X azt a valószínűségi változót, amelynek értéke a Q csúcs szomszédainak száma. Ennek értéke felülről becsülhető a $\lambda(B(Q,1))$ paraméterű Poisson-eloszlással, ahol $B(Q,1)$ a Q középpontú, 1 sugarú körlap. Ez azért van, mert a Q szomszédai ebből a körből kerülhetnek ki, viszont ebbe a Q nem számít bele, de a $\lambda(B(Q,1))$ paraméterű Poisson-eloszlásba beleszámít. Tehát X várható értéke legfeljebb a Poisson-eloszlás paramétere, azaz $E(X) \leq \lambda(B(Q,1))$. Ez minden csúcsra fennáll, tehát tekinthetjük az elágazó folyamatot, ahol minden csúcs leszármazottai a szomszédai (kivéve az összes korábbi generáció csúcsai, amelyek elhagyásával tovább csökken X értéke). Ekkor ha $E(X) < 1$, akkor 1 valószínűséggel kihal a Q-ból indított elágazó folyamat, tehát Q 1 valószínűséggel véges sok csúccsal van egy komponensben G-ben. Tehát az elég, hogy $\lambda(B(Q,1)) < 1$ tetszőleges Q-ra. Azaz például a $\lambda = \frac{\lambda_2}{2\pi^2}$ egy jó választás, ahol λ_2 a kétdimenziós Lebesgue-mértéket jelöli. Hiszen ekkor

$$\lambda(B(Q,1)) = \frac{\lambda_2(B(Q,1))}{2\pi^2} = \frac{\pi^2}{2\pi^2} = \frac{1}{2} < 1$$

. Tehát λ megfelelő választásával egy rögzített csúcs komponense 1 valószínűséggel véges.

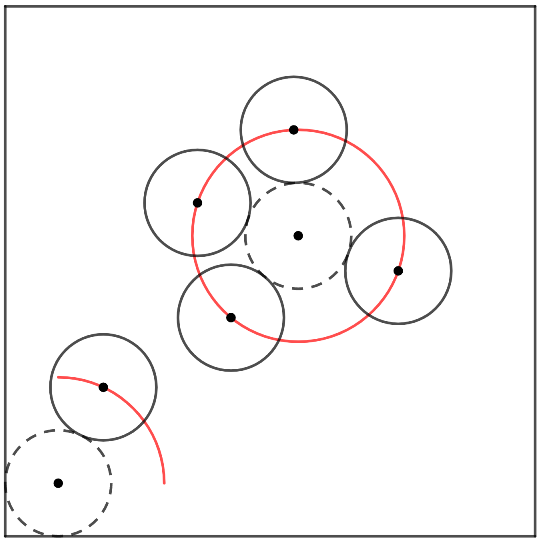
Ekkor annak valószínűsége, hogy létezik végtelen komponens, felírható úgy, hogy létezik olyan csúcs, amelynek komponense végtelen. A Poisson-pontfolyamat 1 valószínűséggel csak megszámlálható sok pontból áll, ugyanis felbontható a sík megszámlálható sok diszjunkt kis négyzetre, és ezekben a Poisson-pontfolyamatnak 1 valószínűséggel csak véges sok pontja lesz, így 1 valószínűséggel összesen csak megszámlálható sok pont lesz. Ezért a szigma-szubadditivitás miatt a végtelen komponens létezésének valószínűsége felülről becsülhető azzal, hogy összeadjuk minden pontra annak valószínűségét, hogy az ő komponense végtelen. Viszont ezen valószínűség minden rögzített pontra 0, így annak valószínűsége, hogy létezik végtelen összefüggőségi komponens, 0. Ezzel az állítást beláttuk. □

Azaz λ megfelelő választásával el tudjuk érni, hogy minden rétegen diszjunkt körlapok érkezzenek a síkra.

Így a folyamat a következő: minden lépésben egy Poisson-pontfolyamat segítségével generálunk egy réteget az előbbiekben leírt módon, amelyet ezután diszjunktizálunk. Ezt követően az új réteget lerakjuk az eddigi körlapokkal fedett síkra, és azokat megtartjuk, amelyek semelyik korábbi körlapot nem metszik. Ezt addig csináljuk, amíg még van olyan hely, ahová tudunk lerakni körlapot, ami a korábbiaktól diszjunkt.

3.2.3. Állítás. *A kétdimenziós folyamat véges, négyzet alakú tartományon 1 valószínűséggel véges sok lépésen belül véget ér.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy véges sok lépésen belül nem ér véget a folyamat. Ez csak úgy lehetséges, hogy ha egy idő után nem kerül le egy kör sem, hiszen a tartomány véges. Tekintsük azokat a pontokat, amelyek még lehetnek egy olyan kör középpontjai, ami az eddigiektől diszjunkt. Ezen pontok halmaza mérhető, mert előáll megszámlálható sok mérhető halmaz metszeteként. Ha ezen halmaz intenzitási mértéke nagyobb, mint 0, akkor ide 1 valószínűséggel véges sok lépésen belül esik pont. Ez azért van, mert minden lépésben valamilyen $p > 0$ valószínűséggel esik ide pont, és a lépések függetlenek, így k lépés után $(1-p)^k$ valószínűséggel nem esik ide pont, amely 0-hoz tart. Tehát 0 annak a valószínűsége, hogy ide nem esik pont véges sok lépés után. Ha pedig ezen halmaz intenzitási mértéke 0, akkor az csak bizonyos, egy kört érintő véges sok körből álló rossz konfigurációk esetén lehetséges, illetve ha a még lerakható kör érinti a tartomány határát. Ezt szemlélteti a következő ábra. A szaggatott vonallal jelölt körök azok, amelyek még nincsenek lerakva, és csak egy bizonyos pontba (egy speciális nullmértékű halmazba) kerülhet a középpontjuk. A pirossal jelölt körív, illetve kör az a halmaz, ahová a rossz konfiguráció előállító körei kerülhetnek, ez is nullmértékű.



Azt kell belátni, hogy rossz konfiguráció előállási valószínűsége 0. Tegyük fel, hogy 0-nál nagyobb valószínűséggel áll elő rossz konfiguráció. Ekkor 0-nál nagyobb valószínűséggel áll elő majdnem rossz konfiguráció, ami azt jelenti, hogy egy rossz konfiguráció valamelyik körlap nélkül. Ekkor vehetjük azt a feltételes valószínűséget, hogy annak a valószínűsége, hogy befejeződik a rossz konfiguráció, feltéve, hogy előállt egy majdnem rossz konfiguráció. Ennek valószínűsége 0, mivel egy majdnem rossz konfigurációhoz csak egy nullmértékű halmazon (egy pontban, egy köríven vagy egy szakaszon) tudjuk hozzávenni egy kör középpontját, hogy kiegészüljön rossz konfigurációvá, hiszen csak így érhető el, hogy a körök érintsék egymást vagy a határt. Tehát ekkor a rossz konfiguráció előállásának valószínűsége 0 a feltételes valószínűség képlete alapján. Ezzel ellentmondásra jutottunk, így 0 valószínűséggel áll elő rossz konfiguráció. Azaz egy véges négyzeten 1 valószínűséggel véges sok lépés alatt véget ér a folyamat. $\square$

Mivel a Poisson-pontfolyamat az egész síkon definiálható, ezért ez a Matérn II néven is ismert modell is definiálható az egész síkon.

A folyamattal kapcsolatos érdekes feladat, hogy hányad részét foglalják el az alaphalmaznak a körök, ezt Penrose [6] vizsgálta meg cikkében, amelyet Palásti Ilona sejtéseire épített. Illetve további alkalmazásokról ír Teichmann, Ballani és van den Boogaart [9] cikke, például a fontainebleaui homokkő pórushálózatának meghatározásáról vagy alumínium-oxid részecskék mintázatának leírásáról.

Irodalomjegyzék

[1] Amaral, Charles S. do, and Santos, Diogo C. dos. "Density and correlation in a random sequential adsorption model." arXiv preprint arXiv:2210.05627 (2022).

[2] Clay, M. P., & Simányi, N. J. Rényi's parking problem revisited. Stochastics and Dynamics, 16(02), 1660006. (2016).

[3] Gerin, L. The Page-Rényi parking process. arXiv preprint arXiv:1411.8002. (2014).

[4] Last, G., and Penrose, M. Lectures on the Poisson process. Vol. 7. Cambridge University Press, (2017).

[5] Page, E. S. The distribution of vacancies on a line. Journal of the Royal Statistical Society. Series B, vol.21 (1959), p.364-374.

[6] Penrose, M. D. Random Parking, Sequential Adsorption, and the Jamming Limit. Communications in Mathematical Physics 218 (2001): 153-176.

[7] Pedersen, F.B., and Hemmer, P.C. Time evolution of correlations in a random sequential adsorption process, J. Chem. Phys. 98(3), 2279-2282 (1993).

[8] Rényi, A. On a One-Dimensional Problem Concerning Random Space-Filling, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. 3, 109–127 (1958).

[9] Teichmann, J., Ballani, F., & van den Boogaart, K. G. Generalizations of Matérn's hard-core point processes. Spatial Statistics, 3, 33-53. (2013).