

---

# Pénzügyi eszközárfoiyamatok modelljeinek identifikációja és implementációja

---

Szakedolgozat

Gyűrűs Boldizsár István

Matematikus BSc  
Matematikus szakirány

Témavezető

Dr. Márkus László

ELTE Matematikai Intézet  
Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem  
Természettudományi Kar  
Budapest, 2023

# Tartalomjegyzék

<b>1</b>	<b>A Heston-modell</b>	<b>2</b>
1.1	Szükséges alapfogalmak . . . . .	2
1.2	A Heston-modell formális bevezetése . . . . .	3
1.3	Euler-Maruyama-diszkretizáció . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Markov lánc Monte Carlo metódus</b>	<b>5</b>
2.1	Az MCMC-ről általánosságban . . . . .	5
2.2	Az MCMC módszer alkalmazása a Heston-modellre . . . . .	6
2.2.1	A teljes utólagos sűrűségfüggvény . . . . .	6
2.2.2	Az egyes paraméterek utólagos sűrűségfüggvényei . . . . .	8
2.2.3	Volatilitás becslés a Heston-modellben Metropolis-Hastings módszerrel . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Idősorok generálása</b>	<b>11</b>
3.1	$\mu$ , a részvényár sodrása . . . . .	12
3.2	$\kappa$ és $\theta$ , a volatilitás fő paraméterei . . . . .	13
3.3	A $\sigma_v$ és $\rho$ paraméterek . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Paraméterek visszabecslése MCMC módszerrel</b>	<b>15</b>
4.1	Ismert paraméterű idősorok . . . . .	16
4.2	Skálázás – $\Delta t$ megválasztása . . . . .	20
4.3	Valódi idősorok paraméter és volatilitás becslése . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Konklúzió</b>	<b>21</b>

## Bevezetés

A XX. század második felétől kezdődően a matematikai modellek egyre fontosabb szerephez jutottak a pénzügyi világban. A valószínűségszámítás rohamos fejlődésével lehetségessé vált a különböző pénzügyi folyamatok, eladások, részvényár változások egyre pontosabb előrejelezhetősége, modellezése. Mostanra a pénzügyi matematika jelentő kutatási területté nőtte ki magát, mely a számítástechnika fejlődésének hatására újabb és újabb eredményeket képes elérni.

Ez egy komplex és szerteágazó szakterület, így a fókusz megtartásának érdekében a továbbiakban mi limitálni fogjuk magunkat ebben a részvényárak modellezésére, specifikusan a Heston-modellre. A Heston-modell egy a részvény volatilitásának és árának modellezésére alkalmas matematikai eszköz, melyet Steven L. Heston amerikai matematikus dolgozott ki a 90-es években. A modell részletes bemutatására az 1. fejezetben kerül sor.

A részvényárak időbeli változásának vizsgálata nehéz feladat a mögöttük megbúvó sztochasztikus folyamatok miatt. Közel sem triviális például, hogy miként lehetne a tech-cégek indexének együtt mozgását matematikai értelemben megfogni. Márpedig az ilyen részvényár idősorok összehasonlítása kiemelt jelentőségű a pénzügyi matematika világában; a Heston-modell – többek között – erre ad lehetőséget. A modell paramétereinek visszabeckelésével lehetőségünk van feltérképezni a részvényárak alakulásának közös okait. Persze a paraméterek visszakeresése sem egyszerű feladat, ebben a munkában mi egy Markov lánc Monte Carlo (*továbbiakban MCMC*) módszeren alapuló metódust fogunk használni, melynek részletes bevezetése a 2. fejezetben található.

A 3. és 4. fejezetekben a Heston-modell paramétereinek gyakorlatban történő visszakeresését mutatjuk be hipotetikus és valós részvényár idősorok felhasználásával.

## 1 A Heston-modell

A Heston-modell a részvényárak elemzésére használ modellek egyik legegyszerűbbike, ugyanis elhanyagolja az ugrás-szerű változásokat. A valóletben azok a modellek, amelyekbe beépítették ezeket a hirtelen részvényár változásokat (lásd Bates-modell, SVMJ, stb.) pontosabban képesek lekövetni az idősorok mozgását, mindazonáltal a Heston-modell továbbra is használatban maradt egyszerűségének és széleskörű felhasználhatóságának okán. Ebben a fejezetben a Heston-modell alapvető tulajdonságait fogjuk bemutatni.

### 1.1 Szükséges alapfogalmak

A dolgozat nagymértékben alapoz a sztochasztikus analízis, valamint a pénzügy matematika ismert fogalmaira és bizonyított állításaira, összefüggéseire. Bár a matematika BSc. tananyagának nem részei, ezek bemutatása a dolgozat kereteit szétfeszítené, ezért helyette az érdeklődő olvasó számára hivatkozunk két, jól ismert, összefoglaló műre (Karatzas & Shreve 2011 és Karatzas & Shreve 1998). Ezek után a fogalmakat, állításokat minden további hivatkozás nélkül használjuk. A teljesség igénye nélkül felsorolunk néhányat: filtrált valószínűségi mező, adaptált folyamat, Brown mozgás vagy Wiener folyamat, Wiener folyamat szerinti integrál, annak tulajdonságai, sztochasztikus differenciálegyenlet fogalma, erős megoldásának létezési, és erős egyértelműségi feltételei, a megoldás tulajdonságai, stb.

## 1.2 A Heston-modell formális bevezetése

Legyen  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$  filtrált valószínűségi mező, ahol az  $\mathbb{F}$  filtrációra teljesülnek a szokásos feltételek. Legyen továbbá adottak  $W_1(t)$  és  $W_2(t)$  egymástól független, az  $\mathbb{F}$  filtrációhoz adaptált Wiener folyamatok. Ekkor a Heston-modellt alkotó két folytonos és adaptált sztochasztikus folyamatot, a részvényárat  $S(t)$ , és a volatilitást,  $v(t)$ , az alábbi sztochasztikus differenciálegyenlet rendszer írja le.

**Definíció 1.** A Heston-modell a részvény árának  $(S(t))$  és volatilitásának  $(v(t))$  közös változását leíró differenciálegyenlet rendszer:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sqrt{v(t)}SdW_1(t) \quad (1)$$

$$dv(t) = \kappa(\theta - v(t))dt + \sigma_v\sqrt{v(t)}dW_2(t) \quad (2)$$

$$dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt \quad (3)$$

ahol  $\mu$  a részvényár sodrása;  $\kappa \geq 0$  a volatilitás átlagos visszatérési sebessége;  $\theta \geq 0$  a sztochasztikus volatilitás hosszútávú átlaga;  $\sigma_v \geq 0$  az úgynevezett volatilitás volatilitása; és  $\rho$  a korrelációs együttható. A  $(\mu, \kappa, \theta, \sigma_v, \rho)$  mind az adott folyamatra jellemző konstansok.

Bár az Itó-féle Lipschitzesség és lineáris növekedés feltétel nem teljesül az egyenletekre, (Karatzas & Shreve 2011., 5.10 Corollary, illetve Heston 1998 alapján) állítható, hogy a sztochasztikus differenciálegyenlet rendszer erős megoldása létezik és erősen egyértelmű a paraméterekre általunk megadott feltételek mellett, továbbá a második egyenlet megoldása nemnegatív.

Noha a Heston-modell folytonos időben írja le egy részvény árának alakulását, a gyakorlatban vizsgált részvényár idősoroknak diszkrét a struktúrája, hiszen a mérési időközök nem infenitezimálisak: vannak olyan részvényár adatbázisok, ahol a napi átlag részvényár van feltüntetve, míg máshol esetleg óránkénti vagy percenkénti adatok álnak rendelkezésre. Ezek egységes kezelése érdekében van szükség a folytonos idejű modellezésre s ugyanakkor a folytonos modell diszkrétizációjára.

## 1.3 Euler-Maruyama-diszkrétizáció

A Heston-modell diszkrétizációjának többféle megközelítése van, melyek közül itt az Euler-Maruyama-félet fogjuk részletesebben taglalni. Tesszük mindezt annak tudatában, hogy ismertek előttünk az Euler-Maruyama approximáció kedvezőtlen tulajdonságai, különösen a modell második, a volatilitást megadó Cox Ingersoll Ross folyamata esetén (Kloeden & Neuenkirch 2013). Például a folyamat pozitív értékű, de az approximáció pozitív valószínűséggel negatív értékeket is előállít. Ez ugyan korrigálható a tükrözés vagy a teljes csonkolás módszerével, de azok rontják a közelítés egyéb tulajdonságait (Dereich et al. 2011). Ugyancsak ismert probléma, hogy az Euler-Maruyama diszkrét közelítés nagyobb tapasztalati momentumai a felbontás finomításával a végtelenbe tartanak, holott – a megoldás stacionárius eloszlása gamma lévén – az elméleti momentumok mind végesek. Sajnos a valamivel gyorsabban konvergáló Milstein módszer sem orvosolja ezeket a problémákat. Létezik olyan approximáció, (lásd Halidias 2015) amely megőrzi a nemnegativitást és kezeli a momentum problémát is, azonban ennek a szofisztikált eljárásnak az implementációja meghaladta a dolgozat kereteit.

Tegyük fel, hogy adott az alábbi differenciálegyenlet:

$$dS(t) = f(S(t), t)dt + g(S(t), t)dW(t), \quad (4)$$

ahol  $f$  és  $g$  nem sztochasztikus függvények,  $W(t)$  pedig egy Wiener-folyamat. Meggondolható, hogy az egyenlet integrál formában az alábbi alakra hozható:

$$S_{t+\Delta t} = S_t + \int_t^{t+\Delta t} f(S(u), u)du + \int_t^{t+\Delta t} g(S(u), u)dW(u). \quad (5)$$

Az Euler-Maruyama módszer szerint ezután az integrál bal oldali pontjára fókuszálunk, és így kapjuk a

$$S(t + \Delta t) = S(t) + f(S(t), t)\Delta t + g(S(t), t)(W(t + \Delta t) - W(t)) = \\ S(t) + f(S(t), t)\Delta t + g(S(t), t)\sqrt{\Delta t}Z(t) \quad (6)$$

ahol az utolsó lépésben felhasználtuk, hogy  $(W(t + \Delta t) - W(t))$  eloszlásban megegyezik  $\sqrt{\Delta t}Z(t)$ -vel, ahol  $Z(t)$  minden  $t$ -re egy standard normális eloszlású valószínűségi változó.

Ezt a módszertant most a Heston-modell (1)-es és (2)-es egyenletére alkalmazzuk. Először a volatilitásra kapjuk, hogy

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \kappa(\theta - v(t))\Delta t + \sigma_v\sqrt{v(t)\Delta t}Z_v(t), \quad (7)$$

ahol  $Z_v$  egy standard normális eloszlású valószínűségi változó. Mivel az így kapott volatilitás nem feltétlenül nemnegatív, a negativitást a teljes csonkolás módszerével fogjuk elkerülni:  $\tilde{v}(t) = \max(0, v(t))$ .

Ezután az árfolyam logaritmusára fogjuk felírni az Euler-Maruyama-féle diszkretizációs lépéseket. Az Itó lemma segítségével (1) átírható az:

$$\ln S(t + \Delta t) = \ln S(t) + \int_0^t \left( \mu - \frac{v(u)}{2} \right) du + \int_0^t \sqrt{v(u)}dW_1(u) \quad (8)$$

alakba, majd az  $\ln S(t)$  folyamatot diszkretizálva:

$$\ln S(t + \Delta t) = \ln S(t) + \left( \mu - \frac{v(u)}{2} \right) \Delta t + \sqrt{v(u)}Z_S(t) \quad (9)$$

ahol  $Z_S$  a megfelelő standard normális eloszlású valószínűségi változó. Mindent összevetve tehát az Euler-Maruyama diszkretizált Heston-modell egyenletei:

$$S(t + \Delta t) = S(t) \cdot \exp \left( \left( \mu - \frac{v(t)}{2} \right) \Delta t + \sqrt{v(t)\Delta t}Z_S(t) \right) \quad (10)$$

$$v(t + \Delta t) = \max \left( 0, v(t) + \kappa(\theta - v(t))\Delta t + \sigma_v\sqrt{v(t)\Delta t}Z_v(t) \right) \quad (11)$$

$$\text{corr}(Z_S(t), Z_v(t)) = \rho \quad (12)$$

Ez alapján könnyű látni, hogy hogyan lehet a Heston-moddellel részvényár idősorokat gyártani. Generálunk  $Z_1$  és  $Z_2$  független standard normális eloszlású valószínűségi változókat, majd definiáljuk a  $Z_v = Z_1$  és  $Z_S = \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2}Z_2$  valószínűségi változókat. Ezután adott  $(\mu, \kappa, \theta, \sigma_v, \rho)$  paraméterek mellett  $S(0)$ -ból és  $v(0)$ -ból iteratíven kiszámolható  $S(t)$  és  $v(t)$  a (10)-es és (11)-es egyenletekből.

## 2 Markov lánc Monte Carlo metódus

Most, hogy a Heston-modell matematikai formulációja bevezetésre került a következő lépés azon módszerek bemutatása, melyekkel egy Heston-moddellel leírt részvényár idősorból a modellbeli paraméterek visszakereshetőek. Először általánosságban fogjuk bemutatni a Markov lánc Monte Carlo metódus lépéseit, majd konkrétan a Heston-moddellre is kiszámoljuk a szükséges eloszlásokat. A félreértések elkerülése végett több helyen az angol nevezéktant is használni fogjuk az MCMC módszer leírása közben. A továbbiakban legyen  $\Theta$  a paraméterek halmaza,  $S$  a részvényár és  $v$  a volatilitás.

### 2.1 Az MCMC-ről általánosságban

A cél az, hogy megtaláljuk a paraméterek és a volatilitás feltételes eloszlását a részvényár feltétele mellett. Formailag tehát az  $F(\Theta, v|S)$  eloszlásfüggvényt keressük, melyet *utólagos* (*posterior*) eloszlásként nevezünk. A gyakorlatban az utólagos eloszlás kiszámolása rendkívül összetett feladat tud lenni, ezért az MCMC metodika keretein belül jellemzően először ezt az eloszlást több egyszerűbb eloszlásra bontjuk (ezeket az *utólagos eloszlást alkotó feltételes eloszlások osztályának* nevezzük majd). Ennek elméleti igazolása a Clifford-Hammersley tételre alapul (részletesen lásd Griffeath 1976), melynek itt a releváns változatát vázoljuk fel.

**Tétel 1.** *Adott  $F(\Theta|v, S)$  és  $F(v|\Theta, S)$  feltételes eloszlások egyértelműen meghatározzák az  $F(\Theta, v|S)$  együttes eloszlást, feltéve, hogy az  $F(\Theta, v|S)$  eloszlásfüggvény, illetve az  $f(\Theta|S)$  és  $f(v|S)$  sűrűségfüggvények a mintavételezési tér minden pontjában pozitívak.*

Vegyük észre, hogy a tétel kiterjesztéseként az  $F(\Theta|v, S)$  eloszlás is felbontható  $\Theta$  komponensei szerint.

Abban az esetben ha az utólagos eloszlást alkotó feltételes eloszlások osztályának minden eleméből egyszerűen lehet mintavételezni, úgy használhatjuk az úgynevezett *Gibbs-mintavételezést* (lásd Johannes & Polson 2010). Ennek során adott  $\Theta^{(0)}$  és  $v^{(0)}$  kezdeti értékek mellett, iteratív generálunk  $\{v^{(i)}; \Theta^{(i)}\}$  párok azáltal, hogy az  $X^{(i)}$  és  $\Theta^{(i)}$  valószínűségi változókat rendre az  $F(v|\Theta^{(i-1)}, S)$  és az  $F(\Theta|v^{(i-1)}, S)$  feltételes eloszlásokból választjuk. Természetesen, ha  $\Theta$  maga is magasabb dimenziós (mint az majd a Heston-modell esetén is lesz), akkor nem párokat, hanem  $n$ -eseket generálunk. Noha a  $\{v^{(i)}; \Theta^{(i)}\}_{i=1}^N$  sorozat nem független azonos eloszlású, elemei *Markov láncot* alkotnak, amely az előző tételben felhasznált feltételek mellett konvergálni fog az  $F(\Theta, v|S)$  eloszláshoz. Így kellően sok iterációs lépés után olyan lesz, mintha az utólagos eloszlásból mintavételeznénk.

Abban az esetben, ha nem tudjuk alkalmazni a Gibbs-mintavételezést, mert az eloszlások némelyike túlzottan összetett ahhoz, hogy direkt generáljunk belőlük valószínűségi változókat, alternatív módszerekhez kell fordulnunk. Az egyik legelterjedtebb technika a *Metropolis-Hastings véletlen bolyongás* (szintén Johannes & Polson 2010). A módszer a Gibbs-mintavételezéshez hasonlóan iteratíven generálja az újabb elemeket, de azokat csak egy elfogadási arányszám szerint tartja meg. Legyen

$$\pi(\Theta_i) = F(\Theta_i|\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{i-1}, \Theta_{i+1}, \dots, \Theta_n, v, S) \quad (13)$$

és  $\Theta_i^{(0)}$  valami kezdeti érték. Generáljuk iteratíven a rákövetkező elemeket a  $\Theta_i^{(g+1)} = \Theta_i^{(g)} + \varepsilon_g$  szerint, ahol  $\varepsilon_g$  valami független, nulla várhatóértékű, szimmetrikus

sűrűségfüggvényű valószínűségi változó. Ekkor ha a  $\pi(\Theta_i^{(g+1)})/\pi(\Theta_i^{(g)})$  arányszám könnyen kiszámolható, akkor definiálhatunk egy elfogadási küszöbszámot úgy mint

$$\alpha(\Theta_i^{(g)}, \Theta_i^{(g+1)}) = \min\left(\frac{\pi(\Theta_i^{(g+1)})}{\pi(\Theta_i^{(g)})}; 1\right) \quad (14)$$

Ezek után az algoritmus iterációs lépései a következők: mintavételezünk egy  $\tilde{\Theta}_i$  paramétert a  $\Theta_i^{(g)} + \varepsilon_g$  egyenlet szerint, és veszünk hozzá egy  $U$  egyenletes eloszlású valószínűségi változót a  $[0, 1]$  intervallumból. Ezután

$$\Theta_i^{(g+1)} = \begin{cases} \tilde{\Theta}_i & \text{ha } U < \alpha(\Theta_i^{(g)}, \tilde{\Theta}_i) \\ \Theta_i^{(g)} & \text{különben} \end{cases} \quad (15)$$

Az így generált  $\{\Theta_i^{(g)}\}_{g=1}^N$  minta eloszlásban a  $\pi(\Theta_i)$ -hez konvergál. Jegyezzük meg, hogy befolyásolni tudjuk a módszer konvergenciájának sebességét és az átlagos elfogadási gyakoriságot azáltal, hogy az  $\varepsilon_g$  tag szórását mi határozzuk meg. A szakirodalomban az az elfogadott, hogy  $\varepsilon_g$  szórását úgy választják meg, hogy az elfogadási arány 20% és 40% közé essen (Cape et al. 2015).

Az utólagos eloszlást alkotó feltételes eloszlások meghatározására a gyakorlatban gyakran alkalmazzuk a folytonos Bayes-tételt. Első lépésben meghatározzuk az  $F(S, v|\Theta)$  függvényt, majd a

$$F(\Theta_i|\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{i-1}, \Theta_{i+1}, \dots, \Theta_n, v, S) \propto F(S, v|\Theta) \cdot F(\Theta_i) \quad (16)$$

összefüggés segítségével számoljuk ki a többi sűrűséget. Az  $F(\Theta_i)$  sűrűségfüggvényt a paraméterek *kezdeti (priori)* sűrűségfüggvényének is nevezik. Ezt a kezdeti sűrűségfüggvényt jellemzően az a személy határozza meg, aki a részvényár vizsgálatát végzi. Ezen keresztül nyílik lehetőségünk arra, hogy fontos gyakorlati feltételeket beépítsünk a matematikai modellbe, például egyes paraméterek pozitivitását, vagy felső korlátját (Johannes & Polson 2010).

## 2.2 Az MCMC módszer alkalmazása a Heston-modellre

Ebben a szekcióban (elsősorban Cape et al. 2015-öt követve) levezetjük a Heston-modell esetén az MCMC módszerhez szükséges összes eloszlást és részletesen leírjuk a paraméterek visszabecsléséhez szükséges összes lépést. A továbbiakban feltételezzük, hogy a  $[0, T]$  intervallumot  $N$  db egyenlő  $\Delta t$  méretű részre bontottuk, legyen  $\Theta = \{\mu, \kappa, \theta, \sigma_v, \rho\}$ ,  $Y_t = \ln S(t) - \ln S(t - \Delta t)$  és  $v_t = v(t)$ ; illetve legyen  $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\}$  és  $v = \{v_0, v_1, \dots, v_N\}$ .

### 2.2.1 A teljes utólagos sűrűségfüggvény

Először az  $F(Y, v|\Theta)$  sűrűségfüggvényre lesz szükség. Vezessük be a  $\psi = \rho\sigma_v$  és  $\Omega = \sigma_v^2(1 - \rho^2)$  paramétereket, illetve definiáljuk a  $Z_S, Z_v$  valószínűségi változók helyett az  $X_t^S = Z_S(t)$  és  $X_t^v = \sigma_v Z_v(t)$  valószínűségi változókat. Ekkor a Heston-modell diszkrétizált egyenletei:

$$Y_t = \mu\Delta t - \frac{v_{t-1}}{2}\Delta t + \sqrt{v_t - 1}\Delta t X_t^S \quad (17)$$

$$v_t = v_{t-1} + \kappa(\theta - v_{t-1})\Delta t + \sqrt{v_{t-1}}\Delta t X_t^v \quad (18)$$

$$(19)$$

melyeket átrendezve a

$$X_t^S = \frac{Y_t - \mu\Delta t + \frac{v_{t-1}}{2}\Delta t}{\sqrt{v_{t-1}}\Delta t} \quad (20)$$

$$X_t^v = \frac{v_t - v_{t-1} + \kappa(\theta - v_{t-1})\Delta t}{\sqrt{v_{t-1}}\Delta t} \quad (21)$$

kifejezéseket kapjuk a valószínűségi változóinkra. Ezek együttes eloszlása:

$$(X_t^S, X_t^v) \sim \mathcal{N}\left((0, 0); \begin{pmatrix} 1 & \rho\sigma_v \\ \rho\sigma_v & \sigma_v^2 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{N}\left((0, 0); \begin{pmatrix} 1 & \psi \\ \psi & \psi^2 + \Omega \end{pmatrix}\right) \quad (22)$$

Mivel minden  $(Y_t, v_t)$  pár a  $(X_t^S, X_t^v)$  függvénye, ezért  $F(Y, v|\Theta)$  felírható  $\prod_{t=1}^N F(Y_t, v_t|v_{t-1}\Theta)$  alakban. A változók felcserélése után, felhasználva, hogy a Jacobi mátrixra

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial X_t^S}{\partial Y_t} & \frac{\partial X_t^v}{\partial Y_t} \\ \frac{\partial X_t^S}{\partial v_t} & \frac{\partial X_t^v}{\partial v_t} \end{pmatrix} = \frac{1}{V_{t-1}\Delta t} \quad (23)$$

azt kapjuk, hogy

$$F(Y, v|\Theta) = \prod_{t=1}^N \frac{1}{V_{t-1}\Delta t} \left| \begin{pmatrix} 1 & \psi \\ \psi & \psi^2 + \Omega \end{pmatrix} \right|^{-1/2} \times \exp\left(-\frac{1}{2}\text{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & \psi \\ \psi & \psi^2 + \Omega \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X_t^S \\ X_t^v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t^S & X_t^v \end{pmatrix}\right)\right) \quad (24)$$

Most

$$\begin{aligned} \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & \psi \\ \psi & \psi^2 + \Omega \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X_t^S \\ X_t^v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t^S & X_t^v \end{pmatrix}\right) &= \text{tr}\left(\frac{1}{\Omega} \begin{pmatrix} \psi^2 + \Omega & -\psi \\ -\psi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t^{S^2} & X_t^S X_t^v \\ X_t^S X_t^v & X_t^{v^2} \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{\psi^2 + \Omega}{\Omega} X_t^{S^2} - 2\frac{\psi}{\Omega} X_t^S X_t^v + \frac{1}{\Omega} X_t^{v^2} \end{aligned} \quad (25)$$

és

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & \psi \\ \psi & \psi^2 + \Omega \end{pmatrix} \right|^{-1/2} = \Omega^{-1/2} \quad (26)$$

felhasználásával

$$\begin{aligned} F(Y, v|\Theta) &= \prod_{t=1}^N \frac{1}{V_{t-1}\Delta t} \Omega^{-1/2} \exp\left(\left[-\frac{1}{2}\frac{\psi^2 + \Omega}{\Omega} X_t^{S^2} - 2\frac{\psi}{\Omega} X_t^S X_t^v + \frac{1}{\Omega} X_t^{v^2}\right]\right) \\ &= \Omega^{-N/2} \left(\prod_{t=1}^N \frac{1}{V_{t-1}\Delta t}\right) \exp\left(-\frac{1}{2\Omega} \sum_{t=1}^N \left[(\psi^2 + \Omega) X_t^{S^2} - 2\psi X_t^S X_t^v + X_t^{v^2}\right]\right) \end{aligned} \quad (27)$$



## 2.2.2 Az egyes paraméterek utólagos sűrűségfüggvényei

Most hogy kiszámoltuk a teljes utólagos sűrűségfüggvényt, a (16)-os egyenletnek megfelelően fel tudjuk használni az egyes paraméterekhez tartozó utólagos sűrűségfüggvények kiszámításához. Először meg kell egyeznünk a paraméterek kezdeti eloszlásaiban melyeket a Li et al. 2008 és Cape et al. 2015 cikkekel összhangban választunk meg.

$$\mu \sim \mathcal{N}(\mu_\mu, \sigma_\mu^2) \quad (28)$$

$$\kappa \sim \mathcal{N}(\mu_\kappa, \sigma_\kappa^2) \quad (29)$$

$$\theta \sim \mathcal{N}(\mu_\theta, \sigma_\theta^2) \quad (30)$$

$$\Omega \sim IG(\alpha_\Omega, \beta_\Omega) \quad (31)$$

$$\psi \sim \mathcal{N}(\mu_\psi, \sigma_\psi^2(\Omega)) \sim \mathcal{N}(\mu_\psi, \Omega/p_\psi) \quad (32)$$

Vegyük észre, hogy a  $\psi$  paraméter sűrűségfüggvényének szórása függ a generált  $\Omega$  paramétertől. Ez a későbbiekben ahhoz fog vezetni, hogy a  $(\psi, \Omega)$  párokat egyidejűleg fogjuk mintavételezni egy közös, 2 dimenziós eloszlásból. A fenti kezdeti eloszlások alapján az utólagos eloszlásfüggvények a következők:

*A  $\mu$  paraméter utólagos sűrűségfüggvénye:*

$$\begin{aligned} F(\mu|\kappa, \theta, \Omega, \psi, v, Y) &\propto F(Y, v|\Theta) \cdot F(\mu) \\ &\propto \exp\left(-\frac{1}{2\Omega} \sum_{t=1}^N [(\psi^2 + \Omega)X_t^{S^2} - 2\psi X_t^S X_t^v + X_t^{v^2}]\right) \cdot \exp\left(-\frac{(\mu - \mu_\mu)^2}{2\sigma_\mu^2}\right) \end{aligned} \quad (33)$$

A (20) és (21)-es egyenletekből behelyettesítve  $X_t^S$  és  $X_t^v$  helyére:

$$\begin{aligned} F(\mu|\kappa, \theta, \Omega, \psi, v, Y) &\propto \exp\left(-\frac{1}{2\Omega} \sum_{t=1}^N \left[ (\psi^2 + \Omega) \left( \frac{Y_t - \mu\Delta t + \frac{v_{t-1}}{2}\Delta t}{\sqrt{v_{t-1}\Delta t}} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\psi \frac{Y_t - \mu\Delta t + \frac{v_{t-1}}{2}\Delta t}{\sqrt{v_{t-1}\Delta t}} \cdot \frac{v_t - v_{t-1} + \kappa(\theta - v_{t-1})\Delta t}{\sqrt{v_{t-1}\Delta t}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( \frac{v_t - v_{t-1} + \kappa(\theta - v_{t-1})\Delta t}{\sqrt{v_{t-1}\Delta t}} \right)^2 \right] \right) \cdot \exp\left(-\frac{(\mu - \mu_\mu)^2}{2\sigma_\mu^2}\right) \end{aligned} \quad (34)$$

Most leegyszerűsíthetünk azokkal a tagokkal, amik nem függenek  $\mu$ -tól:

$$\begin{aligned} F(\mu|\kappa, \theta, \Omega, \psi, v, Y) &\propto \exp\left(-\frac{1}{2\Omega} \sum_{t=1}^N \left[ (\psi^2 + \Omega) \left( \frac{Y_t - \mu\Delta t + \frac{v_{t-1}}{2}\Delta t}{\sqrt{v_{t-1}\Delta t}} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\psi \frac{Y_t - \mu\Delta t + \frac{v_{t-1}}{2}\Delta t}{\sqrt{v_{t-1}\Delta t}} \cdot \frac{v_t - v_{t-1} + \kappa(\theta - v_{t-1})\Delta t}{\sqrt{v_{t-1}\Delta t}} \right] \right) \cdot \exp\left(-\frac{(\mu^2 - 2\mu_\mu\mu)}{2\sigma_\mu^2}\right) \end{aligned} \quad (35)$$

Belátható, hogy ekkor

$$F(\mu|\kappa, \theta, \Omega, \psi, v, Y) \propto \exp\left(-\frac{(\mu - \mu^*)^2}{2\sigma_{\mu^*}^2}\right) \quad (36)$$

ahol

$$\mu^* = \frac{\left( \sum_{t=1}^N \frac{(\Omega + \psi^2)(Y_t + \frac{v_{t-1}}{2} \Delta t) - \psi(v_t - \kappa \theta \Delta t + (\kappa \Delta t - 1)v_{t-1})}{\Omega v_{t-1}} \right) + \frac{\mu_\mu}{\sigma_\mu^2}}{\Delta t \left( \sum_{t=1}^N \frac{\Omega + \psi^2}{\Omega v_{t-1}} \right) + \frac{1}{\sigma_\mu^2}} \quad (37)$$

$$\sigma_{\mu^*}^2 = \frac{1}{\Delta t \left( \sum_{t=1}^N \frac{\Omega + \psi^2}{\Omega v_{t-1}} \right) + \frac{1}{\sigma_\mu^2}} \quad (38)$$

Hasonlóan eljárással levezethetőek az utólagos eloszlások a többi paraméterre is (részletesebben lásd Cape et al. 2015). Ezen utólagos eloszlásokat itt a számolás részletezése nélkül csak kimondjuk, de megjegyezzük, hogy a levezetés teljesen analóg a  $\mu$  utólagos eloszlásánál vázolttal.

*A  $\kappa$  paraméter utólagos sűrűségfüggvénye:*

$$F(\kappa | \mu, \theta, \Omega, \psi, v, Y) \propto \exp \left( -\frac{(\kappa - \kappa^*)^2}{2\sigma_{\kappa^*}^2} \right) \quad (39)$$

ahol

$$\kappa^* = \frac{\left( \sum_{t=1}^N \frac{(\theta - v_{t-1})(v_t - v_{t-1} - \psi(Y_t - \mu \Delta t + \frac{v_{t-1}}{2} \Delta t))}{\Omega v_{t-1}} \right) + \frac{\mu_\kappa}{\sigma_\kappa^2}}{\Delta t \left( \sum_{t=1}^N \frac{(\theta - v_{t-1})^2}{\Omega v_{t-1}} \right) + \frac{1}{\sigma_\kappa^2}} \quad (40)$$

$$\sigma_{\kappa^*}^2 = \frac{1}{\Delta t \left( \sum_{t=1}^N \frac{(\theta - v_{t-1})^2}{\Omega v_{t-1}} \right) + \frac{1}{\sigma_\kappa^2}} \quad (41)$$

*A  $\theta$  paraméter utólagos sűrűségfüggvénye:*

$$F(\theta | \mu, \kappa, \Omega, \psi, v, Y) \propto \exp \left( -\frac{(\theta - \theta^*)^2}{2\sigma_{\theta^*}^2} \right) \quad (42)$$

ahol

$$\theta^* = \frac{\left( \sum_{t=1}^N \frac{\kappa(v_t + (\kappa \Delta t - 1)v_{t-1} - \psi(Y_t - \mu \Delta t + \frac{v_{t-1}}{2} \Delta t))}{\Omega v_{t-1}} \right) + \frac{\mu_\theta}{\sigma_\theta^2}}{\Delta t \left( \sum_{t=1}^N \frac{\kappa^2}{\Omega v_{t-1}} \right) + \frac{1}{\sigma_\theta^2}} \quad (43)$$

$$\sigma_{\theta^*}^2 = \frac{1}{\Delta t \left( \sum_{t=1}^N \frac{\kappa^2}{\Omega v_{t-1}} \right) + \frac{1}{\sigma_\theta^2}} \quad (44)$$

*Az  $\Omega$  és a  $\psi$  paraméterek közös utólagos sűrűségfüggvényei:*

$$\Omega \sim IG(\alpha^*, \beta^*) \quad \text{és} \quad \psi | \Omega \sim \mathcal{N}(\psi^*, \sigma_{\psi^*}^2) \quad (45)$$

ahol

$$\alpha^* = \frac{N}{2} + \alpha_\Omega \quad (46)$$

$$\beta^* = \beta_\Omega + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N (X_t^v)^2 + \frac{1}{2} p_\psi \mu_\psi^2 - \frac{1}{2} \frac{\left( p_\psi \mu_\psi + \sum_{t=1}^N X_t^S X_t^v \right)^2}{p_\psi + \sum_{t=1}^N (X_t^S)^2} \quad (47)$$

illetve

$$\theta^* = \frac{\left( \sum_{t=1}^N \frac{\kappa(v_t + (\kappa\Delta t - 1)v_{t-1} - \psi(Y_t - \mu\Delta t + \frac{v_{t-1}}{2}\Delta t))}{\Omega v_{t-1}} \right) + \frac{\mu\theta}{\sigma_\theta^2}}{\Delta t \left( \sum_{t=1}^N \frac{\kappa^2}{\Omega v_{t-1}} \right) + \frac{1}{\sigma_\theta^2}} \quad (48)$$

$$\sigma_\theta^{*2} = \frac{1}{\Delta t \left( \sum_{t=1}^N \frac{\kappa^2}{\Omega v_{t-1}} \right) + \frac{1}{\sigma_\theta^2}} \quad (49)$$

### 2.2.3 Volatilitás becslés a Heston-modellben Metropolis-Hastings módszerrel

Noha a Gibbs-mintavételezést a Heston-modell paramétereinek megbecslésére könnyen lehet használni, a volatilitás közelítéséhez komplexebb MCMC módszertanra lesz szükség. Az előző fejezetben már bemutattuk a Metropolis-Hastings metódust az általános esetben. Ebben az alfejezetben így specifikusan a Heston-moddellel összefüggésben mutatjuk be a Metropolis-Hastings módszert.

Eleinte gondolhatnánk azt, hogy a volatilitás utólagos sűrűségfüggvényét a többi paraméter sűrűségfüggvényéhez hasonlóan meg lehet határozni, majd ebből lehet direktbe mintavételezni is. A meghatározása  $v$  utólagos sűrűségfüggvényének valóban nem nehéz, megmondolva, hogy

$$F(v_t | \Theta, v_{t+1}, v_{t-1}, Y) = F(Y, v_{t+1}, v_t | \Theta, v_{t-1}) \frac{F(v_{t-1} | \Theta)}{F(Y, v_{t+1}, v_{t-1} | \Theta)} \quad (50)$$

ez ekkor

$$\begin{aligned} &\propto \frac{1}{v_t \Delta t} \exp \left( -\frac{1}{2\Omega} \left[ (\psi^2 + \Omega) X_{t+1}^S{}^2 - 2\psi X_{t+1}^S X_{t+1}^v + X_{t+1}^v{}^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\Omega} \left[ (\psi^2 + \Omega) X_t^S{}^2 - 2\psi X_t^S X_t^v + X_t^v{}^2 \right] \right) \end{aligned} \quad (51)$$

ahol  $X_t^S$  és  $X_t^v$  a szokásos dolgokat jelölik. Így kiírva:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{v_t \Delta t} \exp \left( -\frac{1}{2\Omega v_t \Delta t} \left[ (\psi^2 + \Omega) \left( Y_{t+1} - \mu\Delta t + \frac{v_t}{2}\Delta t \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\psi \left( Y_{t+1} - \mu\Delta t + \frac{v_t}{2}\Delta t \right) (v_{t+1} - v_t + \kappa(\theta - v_t)\Delta t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (v_{t+1} - v_t + \kappa(\theta - v_t)\Delta t)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\Omega v_{t-1} \Delta t} \left[ -2\psi \left( Y_t - \mu\Delta t + \frac{v_{t-1}}{2}\Delta t \right) (v_t - v_{t-1} + \kappa(\theta - v_{t-1})\Delta t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (v_t - v_{t-1} + \kappa(\theta - v_{t-1})\Delta t)^2 \right] \right) \end{aligned} \quad (52)$$

Annak ellenére, hogy ez a sűrűségfüggvény kiszámolható, mintavételezni belőle már közel sem triviális. A probléma áthidalásának érdekében alkalmazzák a szakirodalomban ilyenkor előszeretettel a Metropolis-Hastings módszert (Jonahhes & Polson 2010). Mint általában, a itt a Heston-modellnél is abból fogunk kiindulni, hogy adottak valami kezdeti  $v_0^{(0)}, v_1^{(0)}, \dots, v_N^{(0)}$  volatilitás értékek. Ekkor a Metropolis-Hastings módszer szerint a  $t$ -edik időpillanatban vizsgált volatilitásra a javaslat rekurzíven megadva az  $g$ -edik iteráció során:

$$v_t^{*(g)} = v_t^{(g-1)} + \mathcal{N}_t \quad (53)$$

ahol  $\mathcal{N}_t$  egy nulla várhatóértékű,  $\sigma_n$ -szórású véletlen normális változó.  $\sigma_n$  meghatározása empirikus módon történik úgy, hogy a módszer stabil maradjon, de azért kellően gyakran és intenzíven frissítse a kezdetleges volatilitás értékeket. A normális változó helyett történtek javaslatok arra is, hogy esetleg más eloszlású véletlen változót vezessünk be plusz tagként (lásd Márkus & Kumar 2021). Noha a becsült volatilitást eloszlását elméleti szinten befolyásolja, hogy milyen eloszlásúak ezek a plusz tagok, a valóságban azt gondoljuk, hogy a módszer általunk implementált változata nem igazán precíz ahhoz, hogy ezek az apró változtatások jelentős különbségeket mutassanak.

A Metropolis-Hastings módszer  $\pi$  függvénye az (52)-as egyenletből könnyen megadható:

$$\begin{aligned} \pi(A) = \frac{1}{A\Delta t} \exp \left( -\frac{1}{2\Omega A\Delta t} \left[ (\psi^2 + \Omega) \left( Y_{t+1} - \mu\Delta t + \frac{A}{2}\Delta t \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. - 2\psi \left( Y_{t+1} - \mu\Delta t + \frac{A}{2}\Delta t \right) \left( v_t + 1^{(g-1)} - A + \kappa(\theta - A)\Delta t \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \left( v_{t+1}^{(g-1)} - A + \kappa(\theta - A)\Delta t \right)^2 \right] \right) \\ \left. - \frac{1}{2\Omega v_{t-1}^{(g)}\Delta t} \left[ -2\psi \left( Y_t - \mu\Delta t + \frac{v_{t-1}^{(g)}}{2}\Delta t \right) \left( A - v_{t-1}^{(g)} + \kappa(\theta - v_{t-1}^{(g)})\Delta t \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \left( A - v_{t-1}^{(g)} + \kappa(\theta - v_{t-1}^{(g)})\Delta t \right)^2 \right] \right) \quad (54) \end{aligned}$$

ahol  $v_t^{(g)}$  továbbra is a  $g$ -edik iterációban a  $t$  időponthoz rendelt értéket jelöli. Innen a jellemző elfogadási arány a  $\pi$  függvény segítségével:

$$\alpha \left( v_t^{*(g)}, v_t^{(g-1)} \right) = \min \left( \frac{\pi \left( v_t^{*(g)} \right)}{\pi \left( v_t^{(g-1)} \right)}, 1 \right) \quad (55)$$

-ként definiáljuk. Ezek után egy egyenletes eloszlású  $u \sim \mathcal{U}[0, 1]$  valószínűségi változóval döntjük el, hogy a volatilitás adatpontunkat lecseréljük-e a javasolt értékre. Az általános esethez hasonlóan:

$$v_t^{(g)} = \begin{cases} v_t^{*(g)} & \text{ha } u < \alpha \left( v_t^{*(g)}, v_t^{(g-1)} \right) \\ v_t^{(g-1)} & \text{különben} \end{cases} \quad (56)$$

### 3 Idősorok generálása

Most, hogy bemutattuk azt a módszertant, amivel a Heston-moddellen alapuló részvényár idősorokat elemezni tudjuk, rátérhetünk a Heston-modell gyakorlati vizsgálatára. Ebben a fejezetben áttekintjük, hogy a Heston-modellre milyen hatással vannak az egyes paraméterek, és megvizsgáljuk az adott paraméterű idősorok eloszlásait a kezdő ponttól különböző távolságokban. Jellemzően a vizsgált részvényár idősorok 15-20 évet átívelő napi rendszerességű adatokat tartalmaznak. Ez 250 munkanappal számolva körülbelül 5000 adatpontot jelent. A következőkben ennek megfelelően olyan idősorokat fogunk

generálni, ahol  $\Delta t = 1/250$  és  $N = 5,000$ . A Heston-modell további paramétereit az 1.-es táblázatban részletezzük.

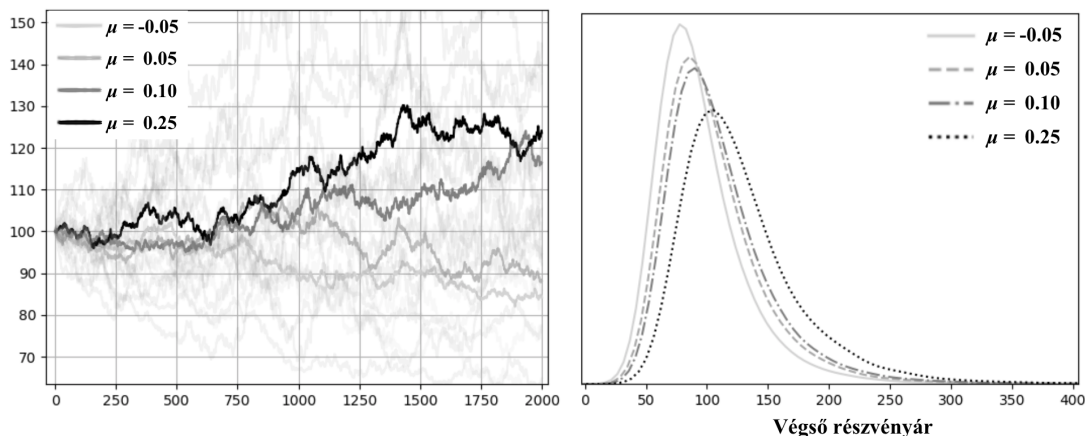
Paraméterek	$\mu$	$\kappa$	$\theta$	$\sigma_v$	$\rho$
Értékek	0.10	1.50	0.20	0.40	-0.1

1. táblázat: A későbbi analízis során használt idősorok paramétereit.

Mielőtt rátérnénk a paraméterek visszakeresésére röviden megvizsgáljuk, hogy az egyes paraméterek hogyan hatnak részvényár idősorokra, majd a megfigyelések és különböző pénzügyi-matematikai megfontolások alapján megpróbáljuk meghatározni, hogy milyen értékeket érdemes használni. Annak érdekében, hogy az egyes paraméterek hatásait izoláltan lehessen tekinteni, a következőkben fixáljuk a  $\Theta$  értékeit egy kivétellel, és csak azon egy változtatása mellett vizsgáljuk a kapott idősorokat. Az analízishez  $N = 2,000$  és  $\Delta t = 1/250$  lett választva.

### 3.1 $\mu$ , a részvényár sodrása

A részvényár változásának determinisztikus fő tendenciáját a  $\mu$  paraméter segítségével fogja meg a Heston-modell. Figyeljük meg az (1)-es egyenletben, hogy a Wiener-folyamat véletlen tagjai nélkül, valóban csak  $\mu$  befolyásolja az idősor alakulását. Ha ábrázolunk néhány részvényár idősort különböző  $\mu$  paraméterekkel (lásd 1. ábra bal oldalán), akkor még nem konstans nulla Wiener folyamat mellett is nyomonkövethető a tendencia. Ahogy  $\mu$  értékét növeljük, átlagosan úgy lesz egyre nagyobb a részvényár növekménye is.



1. ábra: *bal*: Különböző  $\mu$  paraméterekhez tartozó részvényár idősorok; *jobb*: a vizsgált időszak végén mért részvényár eloszlása.

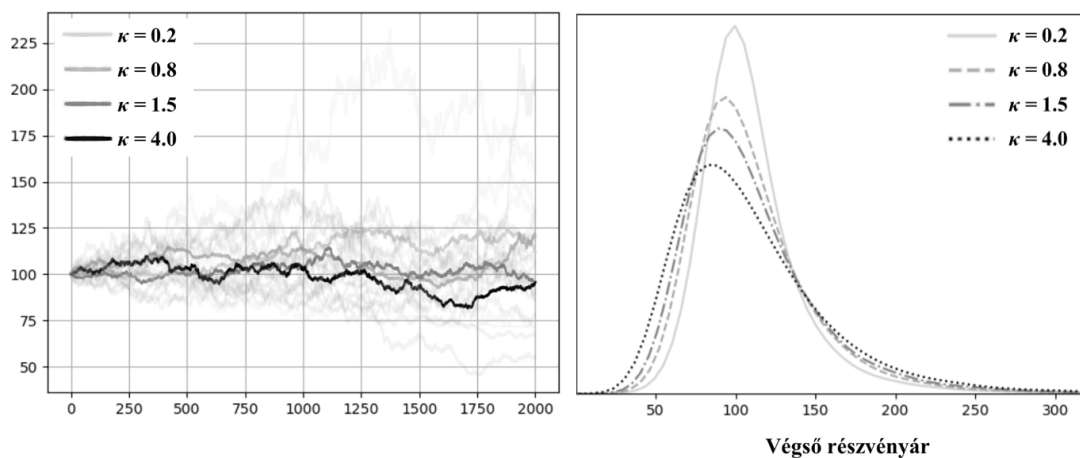
Azt is érdemes megvizsgálni, hogy ugyanolyan kezdeti értékek mellett, ha a  $\mu$  kivételével minden más paraméter adott, akkor hogyan változik a 4. év végére a részvényár. Ennek bemutatására vesszük a 4. év végén a részvényár eloszlásának grafikonját a különböző  $\mu$  értékek mellett (lásd 1. ábra jobb oldalán). Mint azt vártuk, a  $\mu$  növelésével, az eloszlás várható értéke és szórása is nő.

Ez alapján azt várjuk, hogy ha a részvényár sodrásának abszolút értéke nagy, akkor az idősor nem elhanyagolható valószínűséggel valószínűszerűtlenül nagy értékeket is felvehet relatív rövid idő alatt (értsd például 3-4 év alatt megtriplázódik). Ennek elkerülése

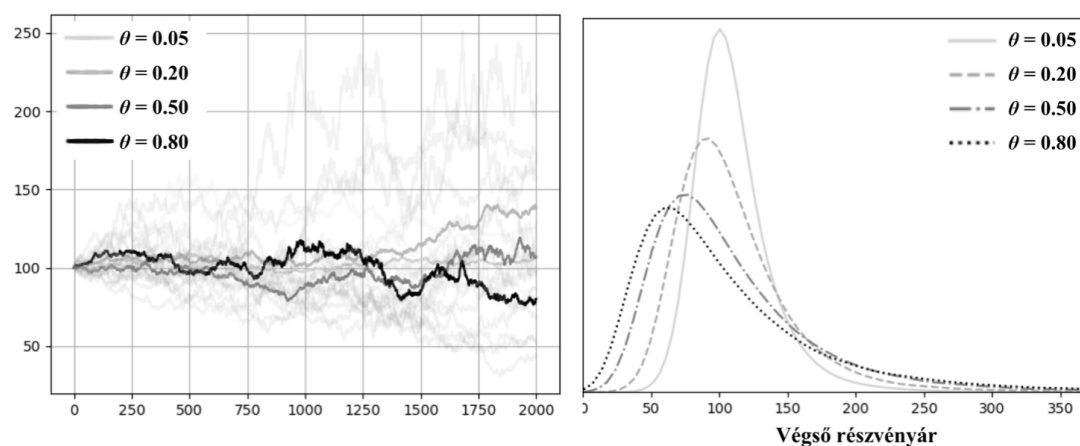
érdekében a következőkben limitáljuk a paraméter értékeket  $|\mu| < 0.2$  szerint.

### 3.2 $\kappa$ és $\theta$ , a volatilitás fő paraméterei

A szakirodalomban a  $\kappa$  és  $\theta$  paramétereket gyakran közösen kezelik, hiszen mindkettő a volatilitás fő tendenciáját határozza meg. Előbbi a volatilitás átlagos visszatérési sebességét számszerűsíti, míg utóbbi a volatilitás hosszútávú átlagát jelöli. Mivel csak közvetetten hatnak a részvényárra, ezért a hatásuk izolációja nehezebb. Ha megvizsgáljuk a (2)-es egyenletet észrevehetjük, hogy a véletlen tagok nélkül  $\kappa$  direktben befolyásolja a volatilitás megváltozásának mértékét, míg  $\theta$  egy eltolást eredményez. Ennek megfelelően azt várjuk, hogy a  $\kappa$  csökkenésével a részvényár szórása is csökken; a  $\theta$  csökkentésével pedig a részvényár várható értéke eltolódik. Ennek ellenőrzésére megint ábrázolunk néhány részvényár idősort különböző  $\kappa$  és  $\theta$  paraméterekkel (lásd 2. és 3. ábra bal oldalán).



2. ábra: *bal*: Különböző  $\kappa$  paraméterekhez tartozó részvényár idősorok; *jobb*: a vizsgált időszak végén mért részvényár eloszlása.



3. ábra: *bal*: Különböző  $\theta$  paraméterekhez tartozó részvényár idősorok; *jobb*: a vizsgált időszak végén mért részvényár eloszlása.

Valóban úgy tűnik, hogy a nagyobb  $\kappa$  vagy  $\theta$  értékek a részvényár csökkenéséhez, fluktuációjának (szórásának) növekedéséhez vezetnek. Ez valóban szembetűnő, ha megint

megvizsgáljuk a 4. évvégi részvényár eloszlást (lásd 2. és 3. ábra jobb oldala).

Pénzügyi-matematikai értelemben sem a negatív  $\kappa$ -nak sem a negatív  $\theta$ -nak nincs értelme, amit figyelemmel kell kísérni a paraméterek meghatározásakor és a későbbi MCMC mintavételezés közben is. Ennek a megkötésnek az egyik oka az, hogy a volatilitás nem lehet negatív, és így a hosszútávú átlaga sem lehet az. Másrészt a (2)-es vagy (11)-es egyenletet megfigyelve megállapítható, hogy a negatív  $\kappa$  a volatilitás exponenciális növekedéséhez vezetne, hiszen a nagyobb volatilitás még nagyobb pozitív változást idézne elő  $dv(t) \propto -\kappa v(t)$  szerint.

A levágott normális  $\kappa$  és  $\theta$  eloszlásokból a szakirodalomban elterjedt módon érdemes mintavételezni (Li et al. 2008). Legyen

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-(t-\mu_i)^2/2\sigma_i^2} dt$$

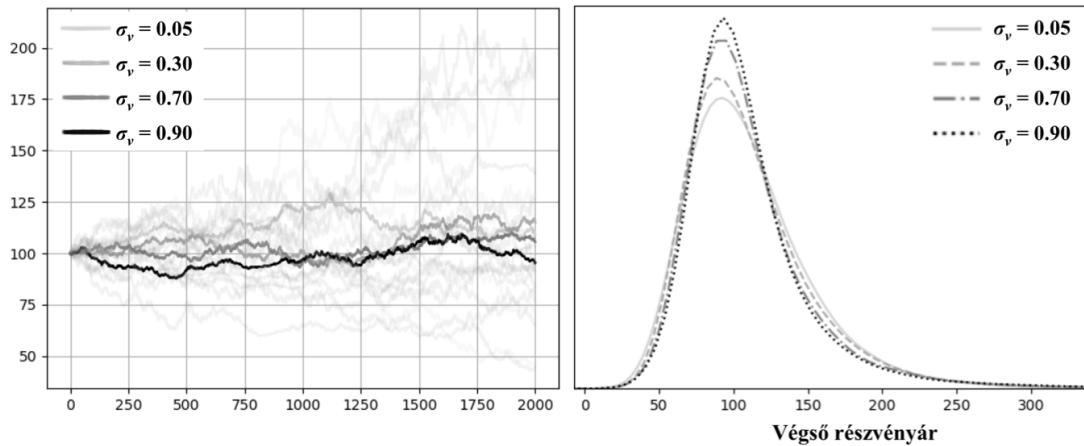
a normális eloszlás kumulált eloszlásfüggvénye, és  $u \sim \mathcal{U}[0, 1]$  egyenletes eloszlású valószínűségváltozó. Most a becsült nem negatív  $\kappa$  vagy  $\theta$  érték megkapható a

$$\Phi^{-1}((1 - \Phi(0)) \cdot u + \Phi(0)) \quad (57)$$

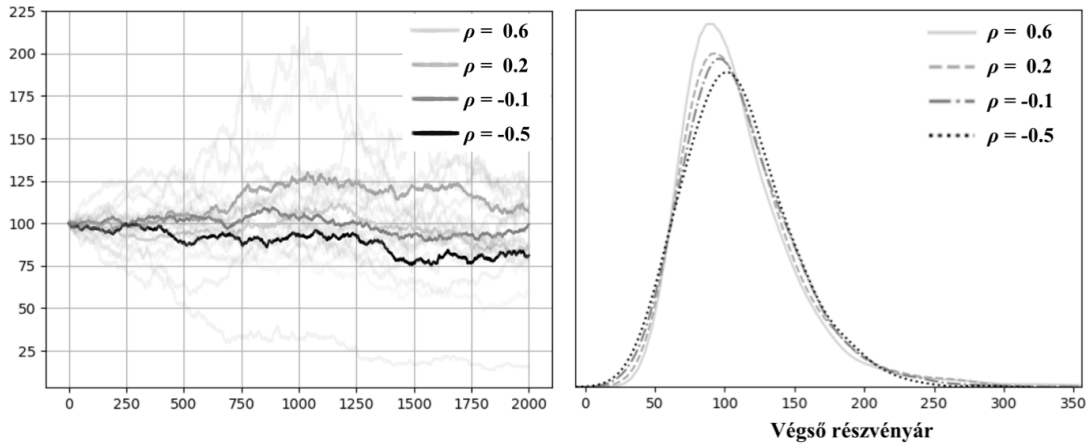
formulából.

### 3.3 A $\sigma_v$ és $\rho$ paraméterek

Mint azt a bevezetésben is említettük  $\sigma_v$  az úgynevezett volatilitás volatilitása, ez a paraméter szabályozza Wiener-folyamatoknak a volatilitásra gyakorolt hatását.  $\rho$  ezzel szemben a Wiener-folyamatok véletlen tagjai közötti korrelációt adja meg. Egyik paraméter hatását sem egyszerű pusztán a képletekből meghatározni, így érdemes lehet a részvényár idősorokat és az 2,000 lépés utáni eloszlásokat megvizsgálni, a kvalitatív összefüggések meghatározása érdekében (lásd 4. és 5. ábra).



4. ábra: *bal*: Különböző  $\sigma_v$  paraméterekhez tartozó részvényár idősorok; *jobb*: a vizsgált időszak végén mért részvényár eloszlása.



5. ábra: *bal*: Különböző  $\rho$  paraméterekhez tartozó részvényár idősorok; *jobb*: a vizsgált időszak végén mért részvényár eloszlása.

Látszik, hogy a paraméterek részvényárra gyakorolt hatása nem egyértelmű, de többnyire megállapítható, hogy mind  $\sigma_v$  mind  $\rho$  növelésével csökken a végso részvényár szórása. A  $\rho$  paraméter esetén emellett még az eloszlás móduszának kisebb eltolódását is megfigyelhetjük.

A Heston-modellben pénzügyi-matematikai megfontolásokból (konkrétan a tőkeáttételi hatás miatt) negatív korrelációs együtthatókat használnak, így a későbbi analízis során mi is így fogunk tenni.

Érdemes még megjegyezni, hogy az összes fent bemutatott eloszlás (1-5. ábrák jobb oldalán) *gamma*-eloszlásra hajaz. Ez többnyire összhangban van az elvárásainkkal, ugyanis a Cox Ingersoll Ross folyamatoknak a stacionáris eloszlása éppen gamma (lásd Karatzas & Shreve 2011).

## 4 Paraméterek visszabecslése MCMC módszerrel

A Heston-modell matematikai háttérének és a paramétereknek a részvényárra gyakorolt hatásának az áttekintése után elérkezett az idő az előző fejezetekben bemutatott MCMC mintavételezési technikák gyakorlati alkalmazására.

Törekszünk arra, hogy a Gibbs-mintavételezés során minél kevésbé informatív, minél általánosabb eloszlásokat válasszunk priori eloszlásoknak. Éppen ezért a szakirodalomban (például Cape et al. 2015) elterjedt módon:

$$\mu \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (58)$$

$$\kappa \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (59)$$

$$\theta \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (60)$$

$$\Omega \sim IG(2, 1/200) \quad (61)$$

$$\psi \sim \mathcal{N}(0, \Omega/2) \quad (62)$$

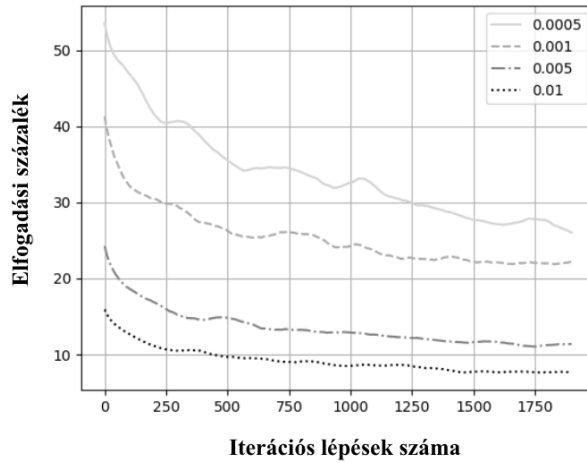
Emellett a  $v_t^{(0)}$  kezdeti volatilitást egy  $(N + 1)$  hosszú véletlenváltozó sorozattal adjuk meg, ahol  $N$  a részvényár idősorának hossza. Itt minden  $t$ -re

$$v_t^{(0)} \sim \mathcal{N}(0.025, \sqrt{(0.005)})\mathbb{I}_{v_t > 0} \quad (63)$$



Először a fenti eloszlásokból mintavételezünk  $\{\mu^{(0)}, \kappa^{(0)}, \theta^{(0)}, \Omega^{(0)}, \psi^{(0)}\}$  paramétereket, majd a (36)-(49)-es egyenleteknek megfelelően mintavételezünk az utólagos sűrűségfüggvényekből. Figyelve arra, hogy  $\Omega$ -nak és  $\psi$ -nek közös sűrűségfüggvénye van kapunk  $\{\mu^{(1)}, \kappa^{(1)}, \theta^{(1)}, \Omega^{(1)}, \psi^{(1)}\}$ -nek megfelelő paramétereket, melyekre csak akkor cseréljük le az előző lépésben használt paraméter-értékeket, ha már az összeset mintavételeztük. Így tehát az  $n$ -edik lépésben adottak lesznek  $\{\mu^{(n-1)}, \kappa^{(n-1)}, \theta^{(n-1)}, \Omega^{(n-1)}, \psi^{(n-1)}\}$  paraméterek, melyek felhasználásával  $\{\mu^{(n)}, \kappa^{(n)}, \theta^{(n)}, \Omega^{(n)}, \psi^{(n)}\}$  mindegyike egyidejűleg mintavételezhető.

Minden iterációs lépésben frissíteni kell a volatilitást is a Metropolis-Hastings módszertanának megfelelően. Mint azt már említettük az MCMC módszertanának elméleti tárgyalásánál, a volatilitás frissítésénél használ normális eloszlású valószínűségi változó szórásának  $\sigma_n$  nem egyértelmű, hogy mit érdemes választani. Annak érdekében, hogy alkalmas gyakorisággal legyenek frissítve a volatilitás értékek, megvizsgáltuk az elfogadási arányt az iterációs lépések függvényében adott  $\sigma_n$  érték esetén. Az eredményeket a 6-os ábrán mutatjuk be.



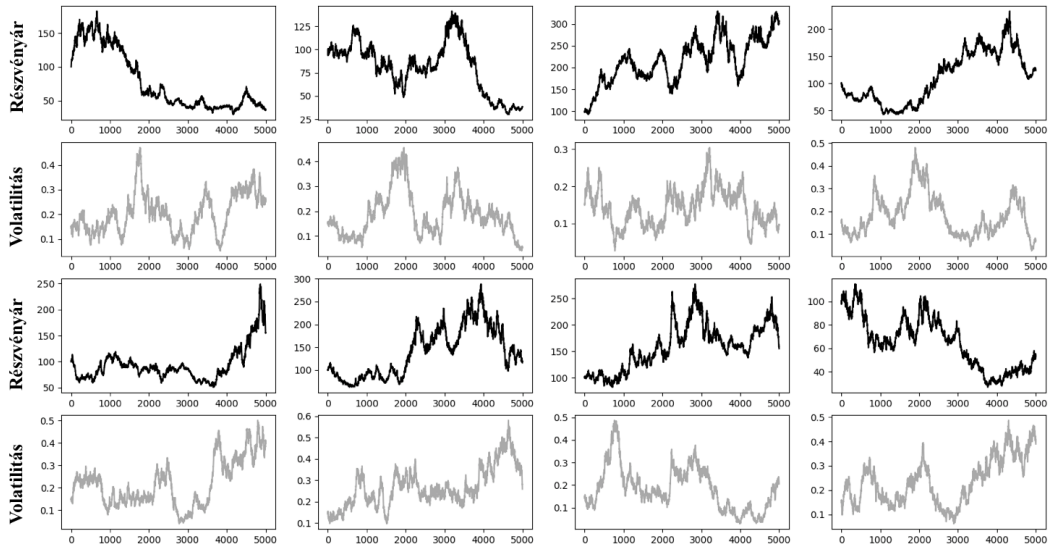
6. ábra: A metropolis-Hastings módszer elfogadási arányának változása iterációs lépésenként, ahogy az MCMC módszer egyre későbbi és későbbi szakaszaiba érünk. A különböző görbék különböző  $\sigma_n$  értékeknek felelnek meg.

Ezek alapján a  $\sigma_n = 0.001$  választás megfelelőnek tűnt, ami többnyire összhangban van a szakirodalomban fellelhető értékekkel (Cape et al. 2015).

A paraméterek mintavételezésére irányuló Gibbs-módszert és a Metropolis-Hastings módszer lépéseit ismételtük iteratíven  $m$ -szer, úgy, hogy az első  $p$  iterációt beégetési vagy ráállási időnek tekintjük, és így nem vesszük figyelembe. Az ezen felüli mérések átlagát fogjuk venni a legjobb paraméter illetve volatilitás becslésnek.

#### 4.1 Ismert paraméterű idősorok

Annak érdekében, hogy ellenőrizzük a módszertan pontosságát és robusztusságát, először ismert paraméterekkel rendelkező részvényár idősorokra fogjuk vissza keresni volatilitást, valamint a  $\mu, \kappa, \theta, \sigma_v$  és  $\rho$  értékeket. Ehhez  $m = 10,000$  és  $p = 7,500$  iterációs paramétereket választunk.  $N$  továbbra is 5,000, de  $\Delta t = 1/250$ . A vizsgált idősorokat az 1-es táblázatbeli paramétereknek megfelelően generáltuk, összesen 10 darabot. Az alábbi ábrán ezekből mutatunk néhányat.



7. ábra: Az 1-es táblázatbeli paraméterek alapján generált idősorok közül néhány példa.

A generált idősorok mindegyikére lefuttatuk az MCMC módszertanon alapuló paraméter és volatilitás visszabecslésünket, és az eredményeket az alábbi táblázatokban foglaltuk össze (emlékezzünk, hogy  $\sigma_v^2 = \Omega + \psi^2$  és  $\rho = \psi/\sigma_v$ ).

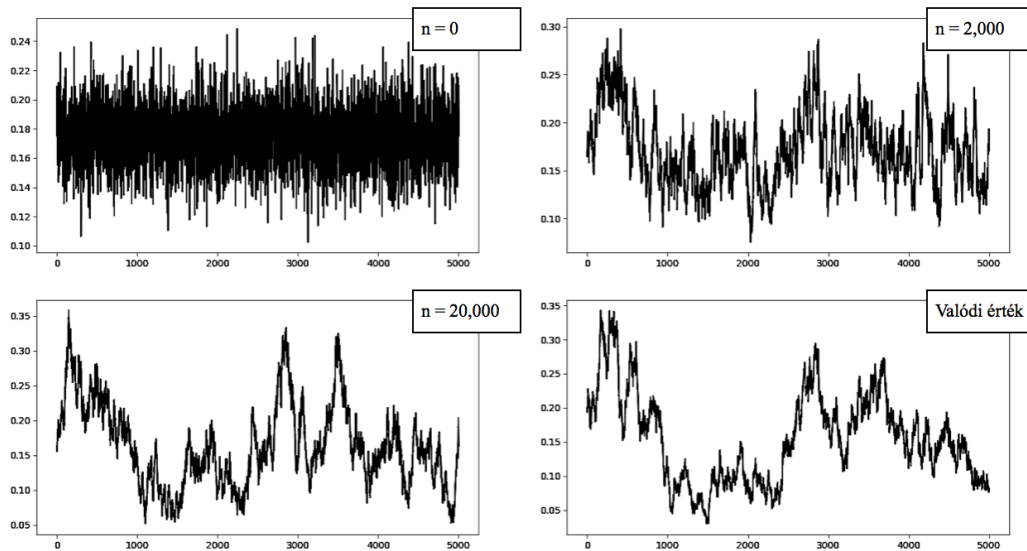
	$\mu$	$\kappa$	$\theta$	$\sigma_v$	$\rho$
Elméleti:	0.100	1.500	0.200	0.400	-0.10000
1	0.141	1.787	0.189	0.422	-0.00307
2	0.079	1.650	0.205	0.387	0.00214
3	0.145	1.409	0.187	0.269	0.00119
4	0.110	1.233	0.195	0.265	-0.00143
5	0.085	1.561	0.211	0.312	-0.00324
6	0.131	1.480	0.207	0.381	-0.00362
7	0.102	1.311	0.191	0.451	-0.00158
8	0.096	1.621	0.183	0.394	-0.00260
9	0.137	1.684	0.203	0.436	-0.00207
10	0.128	1.443	0.195	0.298	0.00060
Átlag:	0.115	1.518	0.197	0.362	-0.00136

2. táblázat: Ismert idősorok ( $\{\mu = 0.10; \kappa = 1.50; \theta = 0.20; \sigma_v = 0.40; \rho = -0.10\}$ ) MCMC módszerrel mintavételezett paraméterbecslésének eredményei.

A táblázat adatai alapján látszik, hogy a legtöbb paraméter becslése pontos. A konkrét esetben a  $\mu$  és  $\kappa$  paramétereket kissé felül becsültük, a  $\theta$  és  $\sigma_v$  paramétereket kissé alul becsültük, de a valódi érték mindkét esetben bőven a szóráson belül lenne. Ezzel szemben mindenképpen feltűnő, hogy a  $\rho$  korrelációs együttható közel sincs a valósághoz. Azt gondoljuk, hogy ez elsősorban implementációs problémákból adódik, melyekre azonban jelen szakdolgozat keretei közt nem prezentálunk megoldást. Megemlítendő ugyanakkor, hogy a  $\rho$  korrelációs együttható az egyetlen paraméter amelyik nem jelenik meg direkt a Heston-modell sztochasztikus differenciál egyenleteiben.

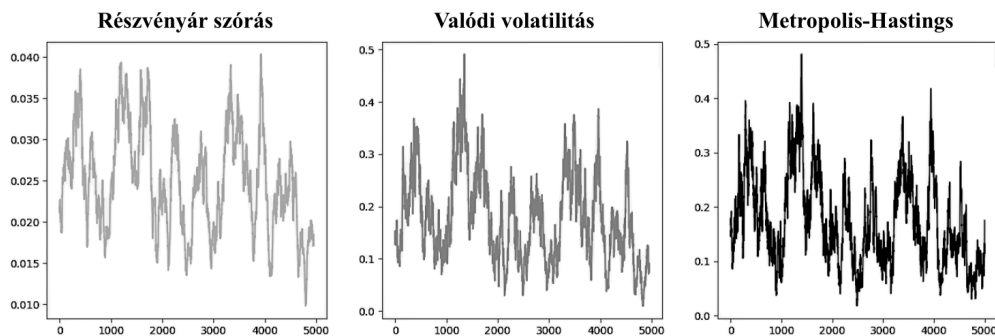
A  $\Theta$  paraméterek mintavételezése mellett fontos megfigyelni és minősíteni a volatilitás becslést is. A volatilitás változása is nyomon követhető az MCMC módszer során. Mivel

az idősorok generálásakor megőriztük a valódi volatilitást, azt most fel lehet használni a Metropolis-Hastings módszeren alapuló eljárásunk tesztelésére. Az alábbi ábrán a Metropolis-Hastings módszerben alkalmazott volatilitást és annak változását mutatjuk be. A kezdeti volatilitás becslés mellett mutatunk egy volatilitást 5,000 iteráció után, majd egyet 10,000 után. Referenciaként az eredeti volatilitást is megjelenítjük.



8. ábra: A Metropolis-Hastings módszer konvergálásának bemutatása. Bal fentről: kezdeti volatilitás; volatilitás 2,000 iteráció után; volatilitás 20,000 iteráció után; a valódi volatilitás.

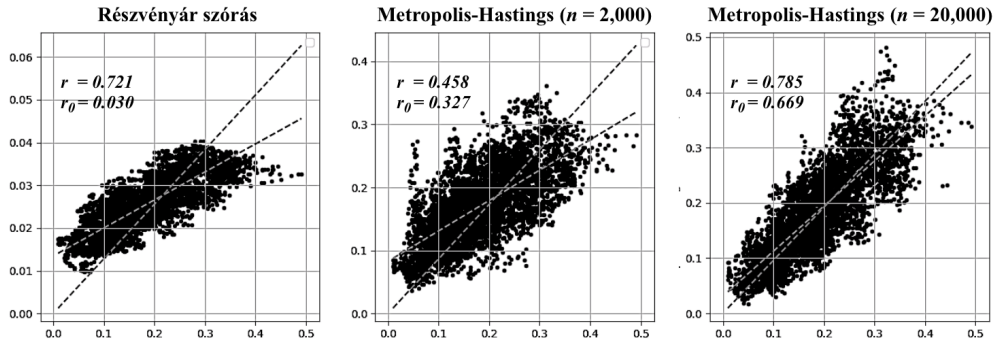
A Metropolis-Hastings módszertana nélkül a legjobb becslésünk a volatilitásra a részvényár idősor szórásának vizsgálatából adódik. Ezen alapvető technika lényege az, hogy az idősornak egy kicsiny (kb 50 adatpontból álló) szegmensét nézzük, és ott kiszámoljuk a részvényár értékek szórását. Ahogy a vizsgált szegmenst mozgatjuk egy-fajta csúszó ablakként, a szórás értékek éppen a volatilitás (valami konstans-szorosát) fogják megadni. Az alábbi ábrán ez a kontroll módszertan is bemutatásra kerül a 20,000 iteráció utáni Metropolis-Hastings, illetve az eredeti volatilitás mellett.



9. ábra: A volatilitás visszabecslésének vizsgálata, balról jobbra: a csúszó tartományon vizsgált részvényár szórásból kapott volatilitás becslés; az eredetileg generált volatilitás; illetve a Metropolis-Hastings módszerből kapott volatilitás ( $m = 20,000$ ).

A szóráson alapuló módszer meglepően jól teljesít egyszerűségéhez képest. De nehéz megmondani, hogy pontosan mennyire precíz. Annak érdekében, hogy kvalitatívebben

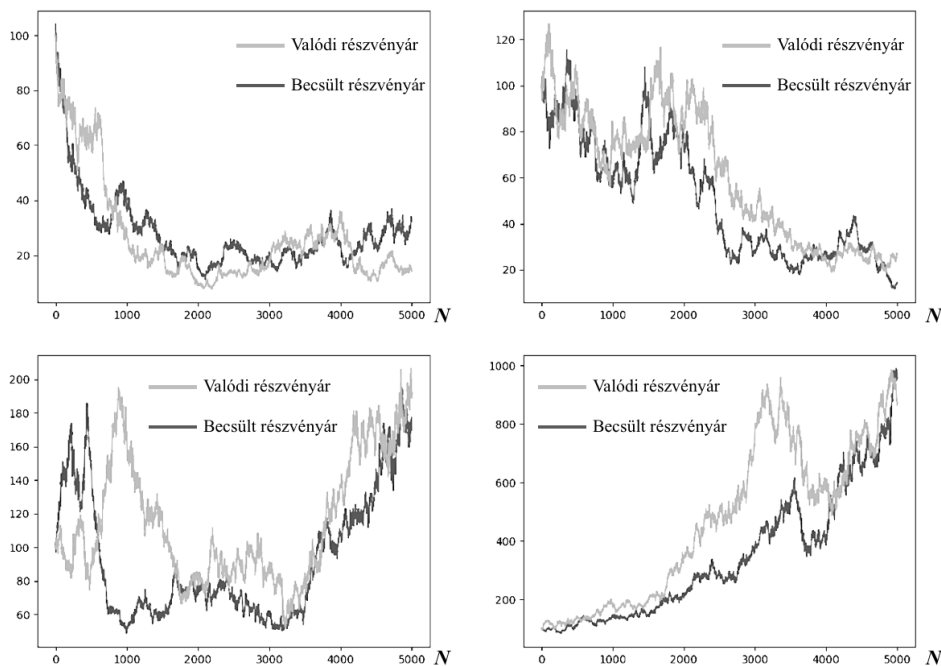
lehesen összehasonlítani a módszereket, a következőkben megpróbáljuk megilleszteni a becsült volatilitás értékeket az eredeti volatilitás értékekkel. Noha azt várjuk, hogy az  $y$ -tengely metszéspontja az origó legyen, az illesztéseket ennek megfelelően, illetve ezen megkötés nélkül is elvégeztük.



10. ábra: A becsült volatilitások megillesztése az eredeti, generált volatilitás értékekkel a két különböző módszertan esetén. Az  $r_0$ -hoz tartozó egyenes az az illesztés, amikor azt is megköveteljük, hogy az egyenes átmenjen az origón.

A lineáris regresszió Pearson korrelációs együtthatójának összehasonlításából látszik, hogy kellő iterációs lépés után mind az origón átmenő megkötés mellett, mind a megkötés nélkül is jobban teljesít a Metropolis-Hastings módszer.

A becslések helyességének ellenőrzése érdekében érdemes lehet a kapott paraméterek, a volatilitás és egy kezdeti részvényár érték alapján kiszámolni a teljes részvényár idősort. Ez azért is hasznos egyfajta végső kvalitatív tesztként mert a  $\rho$ -paraméter becsléseink önmagukban nem tűnnek kellően meggyőzőnek. A 11-es ábrán néhány részvényár idősor ilyen visszabecslése látható, melyek alapján elmondható, hogy a módszertan alapvetően jól teljesít.



11. ábra: Néhány részvényár visszabecslés a volatilitásból és a paraméterekből.

## 4.2 Skálázás – $\Delta t$ megválasztása

Valódi részvényár idősorok esetén gyakran előfordul, hogy az adatpontok időköze változik, hiszen lehet, hogy valakit a napi átlag részvényár alakulása érdekel, mások viszont sokkal kisebb 1 perces vagy 5 perces adatok vizsgálatával foglalkoznának inkább. Mivel a háttérben megbúvó folyamat elvileg nem függ az időskála megválasztásától azt várnánk, hogy állandó  $\Theta$  paraméterek mellett a különböző  $\Delta t$ -khez tartozó skálázásokra alkalmazott MCMC módszertan ugyanazokat a becsléseket adja.

A gyakorlatban természetesen nem ilyen egyszerű a helyzet, ugyanis a  $\Delta t$  paraméter megválasztása nagyban befolyásolja az MCMC módszertan konvergálási idejét, ezért fix iterációs lépésszám mellett úgy tűnhet a kicsiny  $\Delta t$  rosszabb becslést eredményez. Azt gondoljuk azonban, ha ez az iterációs idő kellően nagy, akkor a mintavételezések pontossága közötti különbségek eltűnnek. Ez az eredmény jelentős, hiszen egy elméleti szinten várt skálafüggetlenséghez vezet.

Ennek demonstrálására generálunk egy  $N = 5,000$  hosszú idősort  $\Delta t = 1/250$ -es lépésközzel és az 1-es táblázatnak megfelelő paraméterekkel. Noha a szakirodalomban a Heston-modell paraméter-becslését illetően nincsenek olyan kritériumok megfogalmazva, amik a skálázás és a becslés stabilitását összekapcsolják, a konzisztencia érdekében fontos lehet odafigyelni arra, hogy a skálázást a

$$\Delta t \rightarrow 0 \quad N \rightarrow \infty \quad N \cdot \Delta t \rightarrow 0$$

figyelembevételével végezzük (hasonlóért lásd Hu et al. 2019). Ezen kritériumoknak az alábbi módon fogunk eleget tenni. A leggenerált 5,000 hosszú idősor első 4,500 adatpontjának először minden harmadik elemét vizsgáljuk. Ekkor tehát  $\Delta t_1 = 3/250$  és  $N_1 = 1,500$ . Ezután finomítjuk a felosztásunkat, az első 4,000 elemből minden másodikat véve ( $\Delta t_2 = 2/250$ ;  $N_2 = 2,000$ ). Végül a részvényár adatsorunk első 3,500 elemét vizsgálva egy  $\Delta t_3 = 1/250$  és  $N_3 = 3,500$ -as idősort kapunk. Könnyű látni, hogy a becslési konzisztenciához (esetleg) szükséges kritériumnak így eleget teszünk. Az egyes idősorokra kapott paraméterbecsléseinket a 3-as táblázatban mutatjuk be. Fontos kiemelni, hogy az értékeket ugyanazon idősoron elvégzett 5 becslés átlaga alapján határoztuk meg.

$\Delta t$ ( $\rightarrow 0$ )	$N$ ( $\rightarrow \infty$ )	$N \cdot \Delta t$ ( $\rightarrow 0$ )	$\mu$	$\kappa$	$\theta$	$\sigma_v$	$\rho$
3/250	1,500	18	0.122	1.423	0.226	0.428	-0.0004
2/250	2,000	16	0.106	1.452	0.231	0.440	-0.0005
1/250	3,500	14	0.114	1.575	0.221	0.378	-0.0078

3. táblázat: Különböző finomságú becslések ugyanarra a részvényár idősorra. Az iterációs lépések száma 5,000-nek volt választva ( $p = 3,500$ ).

Észrevehetjük, hogy a paraméterbecslésünk pontossága a 2-es táblázatban megfigyelt precizitással összemérhető. Ez alapján arra következtetünk, hogy a skálázástól függetlenül a becslések többnyire konzisztensek egymással. Ugyanakkor azt várjuk, hogy az iterációs lépések növelésével az skálafüggetlenség tovább erősödik.

## 4.3 Valódi idősorok paraméter és volatilitás becslése

Most, hogy részletesen bemutattuk a Heston-modellre alkalmazott MCMC módszertan elméleti lépéseit és gyakorlati alkalmazásának trükkjeit, próbáljuk meg arra használni, hogy néhány valódi részvényár idősor paraméterét megbecsüljük és összehasonlítsuk (hasonlóért lásd például Eraker et al. 2003).

A következőkben az 5 nagy technológiai cég közül 4-et fogunk megvizsgálni, az Apple-t a Microsoft-ot az Alphabet-et és az Amazont. Ezzel szemben elvégezzük az S&P 500 tőzsdei indexre is a paraméter becslésünket. Azt várjuk, hogy a technológiai cégek paraméterei alapvetően közelebb helyezkednek majd el egymáshoz, hiszen a kiváltó okok valószínűleg erősebben korreláltak. Gondoljunk bele, hogy a Heston-modell paraméterei elsősorban a fundamentumokat és a különböző piaci hatásokat hivatottak megfogni. A részvény ár változását természetesen számos a cégen belüli és kívüli dolog befolyásolhatja, de alapvetően azt várjuk, hogy azonos iparágak esetén hasonlóak lesznek egymáshoz azok a paraméterek, melyekre a piaci hangulat jelentős hatással van (lásd például a volatilitás  $\kappa$  és  $\theta$  paraméterei).

A részvényár idősorokat 2005 január 1 és 2020 január 1 között vizsgáltuk, szándékosan kihagyva a COVID-19 időszakát.  $\Delta t = 1/250$  választással, 5,000 iterációs lépéssel mintavételeztünk. Az eredmények statisztikai szignifikanciájának növelése érdekében a becsléseket mindegyik idősorra 5-ször megismételtük. Az alábbi táblázat egyes soraiban rendre az 5-5 mintavételezés átlagát ismertetjük.

Részvény	$\mu$	$\kappa$	$\theta$	$\sigma_v$	$\rho$
Alphabet	0.24	4.29	0.16	0.40	0.0059
Amazon	0.28	4.72	0.19	0.87	0.0013
Apple	0.37	4.46	0.17	0.41	0.0158
Microsoft	0.21	4.52	0.15	0.46	0.0114
S&P 500	0.13	5.68	0.11	0.48	-0.0076

4. táblázat: Az egyes részvényár idősorok paraméterbecslései, az eredmények 5 becslés átlagaként kerültek kiszámításra.

A táblázat adatai alapján valóban felfedezhető egy tendenciózus különbség az S&P 500 és a 4 technológiai cég paraméterei között. A vártnak megfelelően ez a hatás a  $\kappa$  és  $\theta$  értékeinél különösen szembetűnő. Érdekes megfigyelni, hogy a 4 tech-cég közül is kicsit kilóg az Amazon főleg a  $\sigma_v$  paraméterével, ami valamennyire várható a működési mechanizmusának különbségeit figyelembe véve. Jegyezzük is meg, hogy a másik 3-mal ellentétben az Amazon elsősorban nem informatikai cég.

A fenti megfigyelések természetesen csak indikatív jellegűek, a részletes analízishez további komplex módszertanok alkalmazása szükséges melyekre jelen szakdolgozatban nem térünk ki (lásd Márkus & Kumar 2021).

## 5 Konklúzió

A különböző eszközár folyamatok modellezése egy rendkívül komplex és szerteágazó területe a modern pénzügyi-matematikának. A fent elméleti úton bevezetett és példákon keresztül bemutatott különböző Markov-lánc Monte Carlo módszerek segítségével könnyen megvizsgálhatóak olyan összefüggések is, melyeket az őket okozó bonyolult sztochasztikus folyamatok miatt másképpen csak nagyon nehezen lehetne analizálni. A Gibbs-mintavételezés és a Metropolis-Hastings módszerek számos más magasabb dimenziós eloszlás esetén is használhatóak.

Ebben a szakdolgozatban az MCMC módszertanát a Heston-modell konkrét példáján keresztül szemléltettük. Levezettük a megfelelő utólagos sűrűségfüggvényeket, megvizsgáltuk a modell paramétereinek viselkedését, értelmezési tartományát. Elméleti úton generált idősorokon bemutattuk a metodika becslési erejét, és demonstráltuk a

volatilitás, illetve a  $\mu$ ,  $\kappa$ ,  $\theta$  és  $\sigma_v$  paraméterek mintavételezésének pontosságát. Sajnos a  $\rho$  paraméter visszabecsléséhez használt módszertan implementációja nem sikerült teljes mértékben, a megfelelő előjelen túl, ezen szakdolgozat keretei közt, nem tudtuk a  $\rho$  értékét pontosan meghatározni.

Konkrét idősorokon demonstráltuk a mintavételezések skálafüggetlenségét is, kiemelve, hogy az iterációs idő várhatóan tovább javítja a megfigyelt konzisztenciát. Végül a módszertant valós részvényár idősorokra is lefuttattuk, és ennek segítségével összehasonlítottuk 4 technológiai cég és az S&P 500 paramétereit. A megfigyelések szerint jelentős különbségek vannak azon piaci hatások között, melyek a tech-cégeket érték az elmúlt 15 évben. Ez természetesen összhangban van az elvárásainkkal és pénzügyi/gazdasági megfigyeléseinkkel.

Noha a bemutatott MCMC eszközök pontosak, számítási igényük jelentős. A mesterséges intelligencia térhódításával párhuzamosan a pénzügyi-matematika ezen területén is erős törekvések vannak arra, hogy a módszertant tovább automatizálják ezáltal gyorsítva és pontosítva a következtetéseket. Azonban ezen előre lépéshez nélkülözhetetlen az algoritmusok és modellek pontos megértése, a mechanizmusok pontos kiismerése. Reméljük a jelen munkával sikerült felhívni a figyelmet az MCMC módszerek nyújtotta lehetőségek mellett, a módszer néhány kevésbé egyértelmű aspektusára is.

## Irodalomjegyzék

- [1] Ioannis Karatzas, Steven E. Shreve: Brownian Motion and Stochastic Calculus, 2. kiadás, *Springer New York*, 2011. szept. 8., 470 oldal
- [2] Ioannis Karatzas, Steven E. Shreve: Methods of Mathematical Finance, *Springer Science & Business Media*, 1998. aug. 13., 407 oldal
- [3] S. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, Vol.6., No.2.,pp.327–343, 1993.
- [4] P. Kloeden and A. Neuenkirch: Convergence of numerical methods for stochastic differential equations in mathematical finance. *Recent Developments in Computational Finance: Foundations, Algorithms and Applications*, 2013, pp. 49–80.
- [5] S. Dereich, A. Neuenkirch, and L. Szpruch: An Euler-type method for the strong approximation of the Cox–Ingersoll–Ross process. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, page rspa20110505. The Royal Society, 2011.
- [6] N. Halidias: Constructing positivity preserving numerical schemes for the two-factor CIR model. *Monte Carlo Methods and Applications*, Vol. 21., No.4. pp. 313–323, 2015.
- [7] Griffeath, D. Introduction to Random Fields. *Denumerable Markov Chains. Graduate Texts in Mathematics*, Vol 40. Chapter 12., pp. 425-458, 1976.
- [8] Márkus, L., Kumar, A. Modelling Joint Behaviour of Asset Prices Using Stochastic Correlation. *Methodology and Computing in Applied Probability*, Vol.23., pp. 341-354, 2021.
- [9] Li, Haitao, Martin T. Wells, and Cindy L. Yu. A Bayesian Analysis of Return Dynamics with Lévy Jumps. *The Review of Financial Studies*, Vol. 21., pp. 2345–78, 2008.
- [10] Cape, J., Dearden, W., Gamber, W., Liebner, J., Lu, Q., Nguyen, M. L., Estimating Heston’s and Bates’ models parameters using Markov chain Monte Carlo simulation, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, pp. 2295-2314, 2015.
- [11] Johannes, M., Polson, N., MCMC methods for continuous-time financial econometrics, *Handbook of financial econometrics*, Vol. 2., Chapter 13., pp. 1-72, 2010.
- [12] Hu, Y., Nualart, D., Zhou, H. Parameter estimation for fractional Ornstein-Uhlenbeck processes of general Hurst parameter. *Statistical Inference for Stochastic Processes* Vol. 22., pp. 111-142. 2019.
- [13] Eraker, B., Johannes, M., Polson, N., The Impact of Jumps in Volatility and Returns. *The Journal of Finance*, Vol. 58., pp. 1269–1300, 2003.