

Periodikus pontok létezése

SZAKDOLGOZAT

Készítette
Burgya Julianna Imola
Matematika BSc
Elemző szakirány

Témavezető
Dr. Buczolic Zoltán
egyetemi tanár
Analízis tanszék



EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

2022

1. Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Buczolic Zoltánnak a megelőlegezett bizalmat, támogatást és szakmai segítséget, amelyet a szakdolgozatom írásához nyújtott.

Szeretném még kiemelni Köcski Nórát, akinek a segítségével sosem hittem volna el, hogy ez sikerülhet.

Végül, de nem utolsó sorban köszönöm szépen a családomnak, akiknek a támogatása sokat segített ezekben az időkben.

Tartalomjegyzék

1. Köszönetnyilvánítás	1
2. Bevezetés	3
3. Matematikai háttér	4
3.1. Alapfogalmak	4
3.2. Iterált fogalma	5
3.3. Orbitok, fix- és periodikus pontok	5
3.4. Vonzó és taszító halmazok	6
4. Sarkovszkij tétel és annak bizonyítása	8
4.1. A Sarkovszkij rendezés	8
4.2. Sarkovszkij tétel bizonyítása	8
5. Periodikus pont keresési módszerek	24
5.1. Intervallumfelezési módszer	24
5.2. Húrmódszer	25
5.3. Szelőmódszer	26
5.4. Newton-módszer	27
5.5. Hogyan keressünk megfelelő intervallumot?	28
6. $Q_c(x) = x^2 + c$ függvénycsalád	32
6.1. Q_c függvény 3-periódusú orbitja	35
7. Összegzés	39

2. Bevezetés

A szakdolgozatomban periodikus pontok létezésével foglalkozom, majd periodikus pontok keresésével a $Q_c(x) = x^2 + c$ függvényben. Először a Sarkovszkij tételt bizonyítom, mert úgy hiszem, hogy ez az egyik legfontosabb tétel periodikus pontokkal kapcsolatban, hiszen egy p -periodikus pont megléte vagy nem léte alapján megtudhatjuk, hogy milyen értékekre van vagy éppen nincs periodikus pont.

Miután bebizonyítottam a tételt, beszélek különböző periodikus pont keresési technikákról, először olyanokról, amelyekkel könnyen, analóg módon lehet keresni egyszerű függvényekre, majd olyan numerikus módszerekről, amelyek bármilyen függvény zérushelyeit megtalálhatják, amennyiben megfelelő intervallumon keresünk, és amelyekből vissza tudunk következtetni a függvény fixpontjaira.

Tehát a szakdolgozatom célja, hogy minél egyszerűbben megérthessük a periodikus pont létezésének elméletét és az ilyen pontok keresésének technikáit.

A szakdolgozatomban felhasznált képek nagy részét az irodalomjegyzékben található anyagok tartalmazzák, illetve kisebb részét saját magam készítettem. Mindegyiket újra-rajzoltam a GeoGebra és a Dia programok segítségével.

3. Matematikai háttér

3.1. Alapfogalmak

A későbbiekben, ahol I szerepel ott $I = [a, b]$ intervallum, ahol $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.

Ebben a fejezetben bevezetünk néhány matematikai fogalmat, amelyek segítségünkre lesznek a szakdolgozatban említett témák megértésében.

3.1. Definíció. Az f valós függvényt **simának** nevezzük, ha végtelenszer deriválható az értelmezési tartomány minden pontjában.

Mivel a szakdolgozat folyamán függvény iterációkat szeretnénk tanulmányozni, ezért fontos lesz számunkra, hogy a függvény értékkészlete részhalmaza legyen a függvény értelmezési tartományának.

3.2. Definíció. Egy függvényt **leképezésnek** fogunk nevezni, ha az értékkészlete részhalmaza az értelmezési tartományának.

3.3. Definíció. A következőkben, amennyiben a változók a számegyenes pontjai, az $|x - y|$ alatt a közönséges Euklédészi térben egymástól való távolságukat fogjuk érteni. Ha a pontok $\mathbb{R}^n$ -ből kerülnek ki, akkor az n dimenzióban vett megfelelő vektor hossza lesz.

Bár ezt is több dimenzióra definiáltuk a szakdolgozatban inkább a 2-dimenziós pontokról lesz szó.

3.4. Definíció. $B(p, \epsilon)$ alatt egy, valamely n dimenziós térben a $p \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ változókkal a p körüli ϵ sugarú nyílt gömböt vagyis a p pont **epszilon környezetét** értjük, amelybe azok az x pontok tartoznak bele, amelyekre igaz, hogy $|p - x| < \epsilon$. Az ϵ alatt általában egy kicsi pozitív számra szoktunk gondolni.

3.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy az X halmaz **sűrű** az A halmazban, ha $X \subset A$ és bármely $a \in A$ pont minden epszilon környezetében létezik olyan b pont, hogy $b \in X$.

Például a racionális számok halmaza sűrű a valós számok halmazán, hiszen nem tudunk olyan kicsi intervallumot választani a valós számok halmazán belül, amelyben ne lenne racionális szám.

3.6. Definíció. Egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt **homeomorfizmusnak** nevezünk, ha az f függvény és annak inverz függvénye is folytonos.

3.2. Iterált fogalma

A következőkben az $f^n(x)$ függvényt nem az $f(x)$ függvény n -edik hatványaként fogjuk értelmezni, hanem az n -edik iteráltjaként, ahol n egy egész szám. Amennyiben ez az n szám negatív és az f függvény invertálható, akkor az inverz függvény $-n$ -edik iterált függvényét értjük alatta. Amennyiben a függvény nem invertálható akkor a negatív n -re nem tudjuk definiálni az n -edik iteráltat.

3.7. Definíció. Legyen f egy $A \rightarrow B$ függvény. Ekkor:

- $f^0(x) = x$
- $f^1(x) = f(x)$
- $f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$
- $f^n(x) = (f \circ f^{n-1})$ minden $n \geq 3$ számra
- $f^{-1}(x)$ amire $f(f^{-1}(x)) = x$
- $f^n(x)$ amire $f^{-n}(f^n(x)) = x$, minden $n \leq -1$ számra.

3.8. Példa. Legyen $f(x) = x^2 + 3$ függvény, amely valós számokról valós számokra képez. Ekkor az $f(x)$ függvény második iteráltja a következőképpen néz ki:

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2 + 3) = (x^2 + 3)^2 + 3 = x^4 + 6x^2 + 12.$$

3.3. Orbitok, fix- és periodikus pontok

Orbit alatt egy x pont pályáját értjük, azt, hogy mi történik a ponttal, amikor ismételtén alkalmazzuk rá a függvényt.

3.9. Definíció. Legyen $f : I \rightarrow I$ egy sima függvény. Ekkor az $x \in X$ **(előrefele vett) orbitja** (pályája) $O^+(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$. Ha f invertálható akkor $x \in X$ **teljes orbitja** (pályája) $O(x) = \{x, f(x), f^{-1}(x), f^2(x), f^{-2}(x), \dots\}$ illetve x **visszafele vett orbitja** (pályája) $O^-(x) = \{x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), \dots\}$. [2]

A definíciókat a fixpontokkal folytatnám, mert ezek a periodikus pontok egy speciális és egyszerűbb esetei.

3.10. Definíció. Legyen $f : A \rightarrow B$ függvény, ahol $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A \cap B \neq \emptyset$ és $x \in A$. Ekkor x **fixpontja** f -nek, ha $f(x) = x$.

3.11. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény. Ekkor p -t **periodikus pont**nak nevezzük, ha $f^k(p) = p$. Kicsit rövidebben, ezek a p pontok az f^k függvény fixpontjai lesznek. Abban az esetben, ha ez a k a legkisebb pozitív egész szám, amelyre $f^k(p) = p$, akkor a p pontot **k alapperiódusú periodikus pont**nak nevezzük, vagy rövidítve, **k -periódusú pont**nak.

3.12. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és tegyük fel, hogy a p pont az f függvény k -szerint periodikus pontja. Ekkor azt az orbit-ot (pályát) aminek a kezdeti értéke p (és amely k pontot foglal magában) **k -periódusú periodikus orbit**nak nevezzük, vagy rövidítve **k -periódusú orbit**nak. [1]

3.4. Vonzó és taszító halmazok

3.13. Definíció. Legyen f egy leképezés $\mathbb{R}$ -en és legyen p egy olyan valós szám, amelyre igaz, hogy $f(p) = p$. Ha minden pont, ami közel van p -hez, közeledik p -hez, akkor p -t **vonzó fixpont**nak nevezzük. Pontosabban, ha létezik olyan $\epsilon > 0$, amelyre minden $x \in B(p, \epsilon)$ -ra, $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = p$, akkor p **vonzó**.

Ha létezik olyan $\epsilon > 0$, amelyre minden $x \in B(p, \epsilon) \setminus \{p\}$ -re létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $f^n(x) \notin B(p, \epsilon)$, akkor p **taszító**. [1]

3.14. Definíció. Legyen f egy leképezés és tegyük fel, hogy p egy k -periódusú orbit. Ekkor p egy k -periódusú **periodikus vonzó** orbit, ha p az f^k vonzó fixpontja. Ha p az f^k taszító fixpontja, akkor a p az f **periodikus taszító** pályája. [1]

3.15. Állítás. Legyen f egy sima leképezés $\mathbb{R}$ -en és tegyük fel, hogy a p pont az $f(x)$ egy fixpontja. Ekkor

- Ha $|f'(p)| < 1$, akkor p vonzó
- Ha $|f'(p)| > 1$, akkor p taszító. [1]

3.16. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sima leképezés és tegyük fel, hogy p egy k -periódusú pont. A p pont k -periódusú orbitja **vonzó periodikus**, ha p az f^k leképezés egy vonzó fixpontja, és **taszító periodikus**, ha p az f^k leképezés taszító fixpontja.

A periodikus pont $p_1, p_2, \dots, p_k$ **vonzó**, ha

$$|f'(p_1) \cdot \dots \cdot f'(p_k)| < 1$$

és **taszító**, ha

$$|f'(p_1) \cdot \dots \cdot f'(p_k)| > 1. [1]$$

3.17. Definíció. Minden orbitot, ami egy vonzó periodikus pályához konvergál, **aszimptotikusan periodikus**nak nevezünk.

Az előző definícióban az alatt, hogy x pályája konvergál a p periodikus pont pályájához, azt értjük, hogy minden $\epsilon > 0$ számra tudunk mondani egy olyan N pozitív egész számot, hogy minden $n > N$ egészre $|f^n(x) - f^i(p)| < \epsilon$ a p valamilyen i -edik iteráltjára, illetve $|f^{n+k}(x) - f^{i+k}(p)| < \epsilon$ minden $k > 0$ pozitív egészre. Ami röviden azt jelenti, hogy nem csak, hogy megközelíti p valamelyik iteráltját, hanem ott is marad a közelében és "követi" a p pont pályáját.

Az aszimptotikusan periodikus pont mindig közelít a periodikus pályához, de sosem éri el (mint az $\frac{1}{x}$ a végtelenben a 0-át). A következő definícióban definiáljuk azt az eseményt, amikor egy x pont valamely n egész számra egyenlő lesz egy p periodikus pont egyik iteráltjával.

3.18. Definíció. Azt az aszimptotikusan periodikus orbitot, amely pontosan ráesik egy periodikus orbitra, **végperiodikus orbit**nak nevezzük.

Kicsit egyszerűbben fogalmazva, a fenti példával élve, az x pont egy idő után "becsatlakozik" a p pályájába. Ez csak olyan függvényeknél lehetséges, ahol a függvénynél nem értelmezzük az inverz függvényt.

Tekintsük az $f(x) = 4x - 4x^2$ függvényt. Ekkor két fixpontja van ($f(0) = 0$ és $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$) és két 2-periódusú periodikus pontja ($f^2(\frac{5-\sqrt{5}}{8}) = f(\frac{5+\sqrt{5}}{8}) = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ és $f^2(\frac{5+\sqrt{5}}{8}) = f(\frac{5-\sqrt{5}}{8}) = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$). Ekkor azt fogjuk mondani, hogy ez a két pont egy 2-periódusú orbit ($\{\frac{5-\sqrt{5}}{8}, \frac{5+\sqrt{5}}{8}\}$). Emellett van legalább egy végperiodikus pontja ($f(1) = 0$ és a 0 egy fixpont).

Ha most tovább vizsgáljuk a pontokat, láthatjuk, hogy az $f'(0) = 4$ és az $f'(\frac{1}{4}) = 2$ is taszító fixpont, emellett a függvény 2-periodikus orbitja pedig periodikusan taszító ($|f'(\frac{5-\sqrt{5}}{8}) * f'(\frac{5+\sqrt{5}}{8})| = 4 > 1$).

4. Sarkovszkij tétel és annak bizonyítása

Itt főleg a Wikipédia ([6]) és egy Érintő cikk ([7]) alapján írtam, bár megtalálható benne a bizonyításról szóló cikk ([5]) néhány gondolata.

Olekszandr Sarkovszkij egy 1936-ban született ukrán matematikus, aki 1964-ben publikálta egyik leghíresebb eredményét, a Sarkovszkij tételt. Ehhez egy hosszú és bonyolult bizonyítást is írt, amely P. D. Straffin szavaival élve "Olyan sok pontsorozatot szerkeszt, hogy nyolc ábrát és a legtöbb görög betűt fel kell használni, hogy nyomon követhessük." [5]

Ezt a bizonyítást hosszú ideig próbálták lerövidíteni és egyszerűsíteni. Az utóbbi pár évben ez többeknek, több irányból megközelítve, sikerült. Például Zarka Áron szakdolgozatában van egy bizonyítás, amely az intervallumok irányából bizonyítja, amelyet Keith Burns és Boris Hasselblatt, Bau-Sen Du és Saber Elaydi bizonyításaira alapozott. Én egy hosszabb, de számomra egyszerűbb bizonyítást választottam, amit Chung-wu Ho és Charles Morris publikált 1981-ben ([5]).

4.1. A Sarkovszkij rendezés

Ez a pozitív egész számok egy rendezése, amely meglepő, újszerű sorbarendezésnek tűnhet a legtöbb ember számára, de Sarkovszkij megmutatta nekünk, hogy érdemes lehet így is vizsgálni ezeket a számokat.

Először a páratlan, 1-nél nagyobb számokat írjuk fel úgy, hogy növekvő sorrendben legyenek, majd ugyanezek a számok jönnek 2-vel megszorozva, azán 2^2 -el, és így tovább. Ha felírtuk az összes számot, ami nem 2 hatványa, akkor elkezdjük leírni a kimaradt számokat csökkenő sorrendben, tehát a végén a 2 és az 1 lesz.

Felírva ez a következőképpen néz ki:

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 3 \cdot 2 \triangleright 5 \cdot 2 \triangleright 7 \cdot 2 \triangleright \dots \triangleright 3 \cdot 2^2 \triangleright 5 \cdot 2^2 \triangleright 7 \cdot 2^2 \triangleright \dots \triangleright 3 \cdot 2^n \triangleright 5 \cdot 2^n \triangleright 7 \cdot 2^n \triangleright \dots \triangleright 2^i \triangleright \dots \triangleright 2^2 \triangleright 2^1 \triangleright 1.$$

4.2. Sarkovszkij tétel bizonyítása

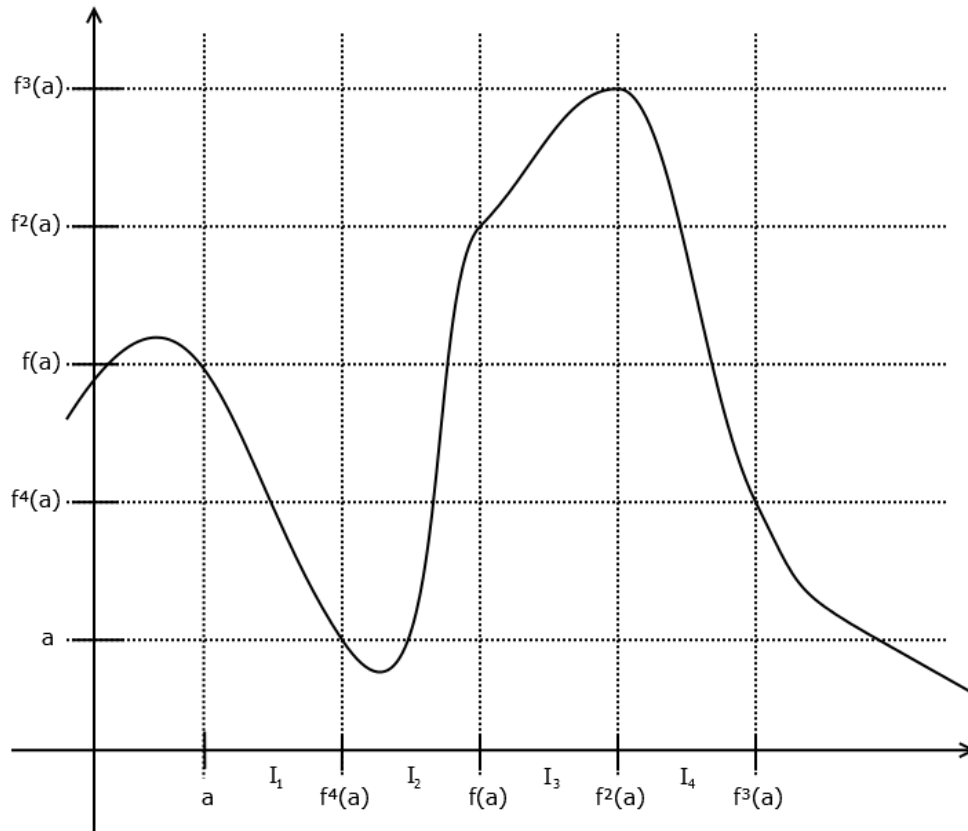
Itt főleg a [5] és a [10] cikkeket vettem alapul, kiegészítve a [7] cikkel. A tétel bizonyításához szükséges állítások végén a ■ jel lesz majd található és a Sarkovszkij tétel bizonyítása végén lesz az □ szimbólum.

A következőkben, mikor egy a számról beszélek, az, ha nincs más kikötve, az aktuális p periodikus pont pályájának a legkisebb értékét fogja jelölni (például, ha a p pont pályája 12, 1, 2, 8, 6 akkor az $a = 1$).

4.1. Tétel. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Tegyük fel, hogy f -nek van k -szerint periodikus pontja. Ha $k \triangleright h$, akkor az f függvénynek létezik h -szerint periodikus pontja.[1]

Ez lenne Sarkovszkij tétele, amely egyedül a valós számegyenesen érvényes, nagyobb dimenzióra nem.

Bizonyítás



1. ábra. Folytonos függvény egy 5-periodikus ponttal és az I_i intervallumokkal. [5] cikkben található ábra másik függvényre.

A következőkben be fogunk vezetni egy új fogalmat, a digráf fogalmát. Ez egy olyan gráf lesz, amely meg fogja mutatni a függvény adott intervallumainak egy érdekes tulajdonságát. A digráf segítségével könnyebben látható módon fogjuk tudni bizonyítani a tételt.

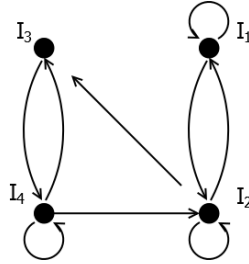
4.2. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény és legyen p pont az f függvény egy k -periodikus pontja. Legyen a pont a legkisebb érték, amelyet az $f^i(p)$ felvesz, $1 \leq i \leq k$. Ekkor csinálhatunk $k - 1$ véges intervallumot, amelyeknek a végpontjai a p pont iteráltjai. Legyenek ezek az intervallumok $I_1, I_2, \dots, I_{k-1}$, úgy, hogy a számegyenesen egymást kövessék

(mint az 1. ábrán). Ekkor legyen s_i és t_i az I_i intervallum két végpontja. Azt mondjuk, hogy az I_i intervallumból megy el az I_j intervallumba, ha az I_j intervallum az $f(s_i)$ és az $f(t_i)$ értékek közé esik.

Ekkor a függvény k -periodikus digráfja az az irányított gráf, amelynek a pontjai az $I_1, I_2, \dots, I_{k-1}$ intervallumok, irányított élei pedig az előbb említett módon keletkeznek.

Most vizsgáljuk meg az 1. ábrán látható I_1 intervallum végpontjainak az f szerinti képét. A képen látszik, hogy $I_1 = [a, f^4(a)]$, tehát $f(a) = f(a)$ és $f(f^4(a)) = a$ és láthatjuk, hogy ezek között az értékek között van az I_1 és az I_2 intervallum, hiszen $f^5(a) = a$, és emiatt tudjuk, hogy az I_1 csúcsból megy irányított él az I_1 és az I_2 csúcsokba. Most vizsgáljuk meg a többire. I_2 intervallumra $f(f^4(a)) = a$ és $f(f(a)) = f^2(a)$ tehát az I_2 csúcsból megy el az I_1 , az I_2 és az I_3 csúcsokba. I_3 intervallumra $f(f(a)) = f^2(a)$ és $f(f^2(a)) = f^3(a)$ tehát az I_3 csúcsból megy el az I_4 csúcsba. I_4 intervallumra $f(f^2(a)) = f^3(a)$ és $f(f^3(a)) = f^4(a)$ tehát az I_4 csúcsból megy el az I_2 , az I_3 és az I_4 csúcsokba.

Ekkor legyen az f függvény p -szerinti digráfja: 2. ábra, ahol a gráf csúcsai az intervallumok, és egy irányított él pontosan akkor megy az I_i csúcsból az I_k csúcsba, ha $f(s_i)$ és a $f(t_i)$ érté közé esik az I_k intervallum.



2. ábra. A fenti függvény 5-periodikus pontjának a digráfja. [10] cikkben található ábra másik függvényre.

4.3. Definíció. A digráfban akkor beszélünk **hurokról**, ha van olyan intervallum, hogy $f(s_i)$ és az $f(t_i)$ érték közé esik az I_i intervallum, így az az irányított él, ami abba a csúcsba mutat, amelyből kiindul, egy hurkot képez.

4.4. Definíció. Egy digráfon belül, ha végig tudunk menni az irányított éleken úgy, hogy abba a csúcsba érjünk vissza, amelyben kezdtünk, akkor ezt az utat **körnek** nevezzük. Amennyiben ez a kör nem csupán egy kisebb hosszúságú kör ismétlődéséből áll, akkor azt **nemismétlődő körnek** nevezzük.

Néhány példa a könnyebb megértés érdekében. A következő intervallumsorozatot körnek nevezzük: $I_1 I_2 I_3 I_4 I_2 I_1$, $I_1 I_2 I_3 I_4 I_3 I_4 I_2 I_1$, $I_2 I_2 I_1 I_2$, $I_2 I_3 I_4 I_2$, $I_3 I_4 I_3 I_4 I_3$, $I_3 I_4 I_3 I_4 I_3$, $I_4 I_4 I_4 I_4 I_4$ és az utolsó kettő kivételével ezek a körök nemismétlődő körök. Bár az ötödik

$(I_3I_4I_3I_4I_3)$ és a hatodik $(I_3I_4I_3I_4I_3)$ példa elég hasonlóknak tűnhet, az ötödik nem áll fenn egyedül egy szakaszosan ismétlődő intervallumsorozattól, hiszen van benne egy plusz I_4 intervallum, míg a hatodikban kétszer van az I_3I_4 intervallumsorozat és más nincs.

4.5. Definíció. Amennyiben egy körben ugyanaz a csúcs kétszer szerepel, akkor az lebontható két **alkörre**.

Például $I_3I_4I_2I_3I_4I_3$ kört le lehet bontani az $I_3I_4I_3$ és az $I_4I_2I_3I_4$ körökre.

4.6. Állítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ha az f függvény egy k -periódusú digráfjára igaz, hogy létezik m -hosszú nemismétlődő köre, akkor létezik az f függvénynek m -periódusú pontja.

Bizonyítás

A 4.6. Állítás bizonyításához feltesszük, hogy a következő két lemma igaz.

4.7. Lemma. Tegyük fel, hogy I és J két zárt intervallum, f folytonos függvény és $J \subset f(I)$. Ekkor létezik egy $Q \subset I$ zárt intervallum, amire igaz, hogy $f(Q) = J$.

4.8. Lemma. Tegyük fel, hogy I egy zárt intervallum, f folytonos függvény és $I \subset f(I)$. Ekkor az f függvénynek létezik fixpontja az I intervallumon belül.

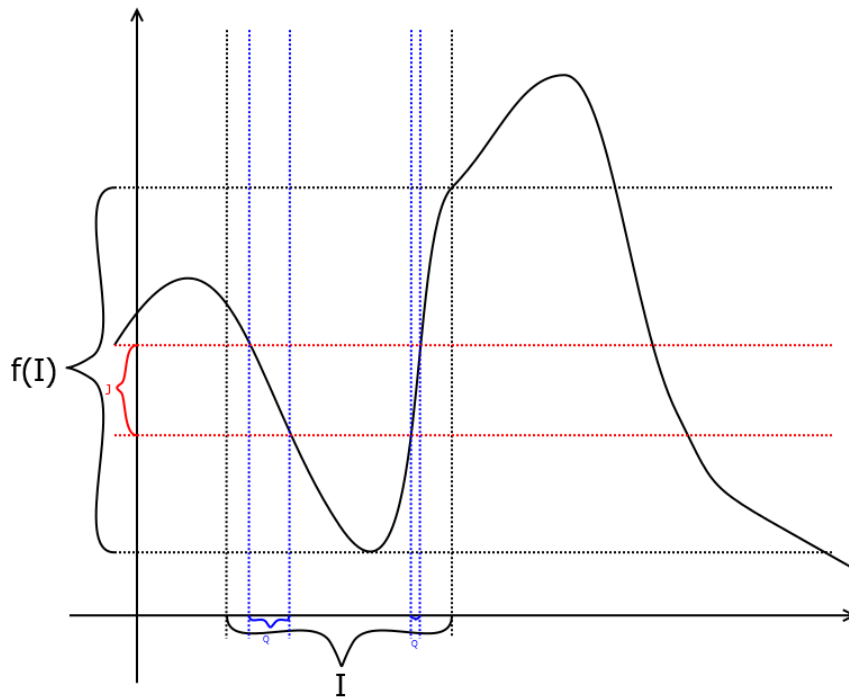
A 4.7. Lemma könnyen látható a 3. ábra segítségével, elég megvizsgálunk, hogy a függvény milyen értékekre veszi fel a J intervallum végpontjait, majd mindkét végpontra kiválasztani egy értéket, amelyet tartalmaz az I intervallum.

A 4.8. Lemma, ami a Brouwer-féle fixponttétel, gond nélkül bizonyítható egy átalakítással és a Bolzano-tétel segítségével.[8]

Ahhoz, hogy bizonyítsuk a 4.6. Állítást, tegyük fel, hogy van egy nemismétlődő zárt intervallumsorozatunk $I^0, I^1, I^2, \dots, I^m = I^0$ (a számozás azt mutatja meg, hogy a kör milyen csúcsokat érint, például, ha a k -adik él mentén az I_j csúcsba érkezünk, akkor $I^k = I_j$), amelyre $I^{i+1} \subset f(I^i)$. Azt szeretnénk belátni, hogy az f függvénynek létezik m szerint periodikus pontja. Nézzük meg a következő diagramot:

$$\begin{array}{ccc} I^0 & \xrightarrow{f} & f(I^0) \\ & & \cup \\ & & I^1 \end{array}$$

(A nyíl ebben a kontextusban az I_0 intervallumból az $f(I_0)$ -nál képébe mutat.) Ha felhasználjuk a 4.7. Lemmát, akkor tudunk találni egy Q_1 halmazt, amelyre $f(Q_1) = I^1$, így:



3. ábra. 4.7. Lemma bizonyítása. [13] szakdolgozatban találtam a képet, majd átszerkesztettem.

$$\begin{array}{ccc}
 I^0 & \xrightarrow{f} & f(I^0) \\
 \cup & & \cup \\
 Q_1 & \xrightarrow{f} & I^1
 \end{array}$$

Sőt, a 4.7. Lemmát és az $I^0, I^1, \dots, I^m$ definícióját figyelembe véve a következő diagramot generálhatjuk:

$$\begin{array}{ccccccc}
I^0 & \xrightarrow{f} & & f(I^0) & & & \\
\cup & & & \cup & & & \\
Q_1 & \xrightarrow{f} & I^1 & \xrightarrow{f} & f(I^1) & & \\
\cup & & & & \cup & & \\
Q_2 & \xrightarrow{f^2} & & I^2 & \xrightarrow{f} & f(I^2) & \\
\cup & & & & & \cup & \\
\cdot & & & & & \cdot & \\
\cdot & & & & & \cdot & \\
\cdot & & & & & \cdot & \\
Q_{m-1} & \xrightarrow{f^{m-1}} & & I^{m-1} & \xrightarrow{f} & f(I^{m-1}) & \\
\cup & & & & & \cup & \\
Q_m & \xrightarrow{f^m} & & I^m = I^0 & & &
\end{array}$$

Hiszen, ha $f(Q_1) = I^1$, $f^2(Q_2) = I^2$ és $I^2 \subset f(I^1)$ akkor $I^2 = f^2(Q_2) \subset f^2(Q_1) = f(f(Q_1)) = f(I^1)$, tehát $Q_2 \subset Q_1$. Ezt is tovább tudjuk vinni, így jön ki a bal oldali oszlop.

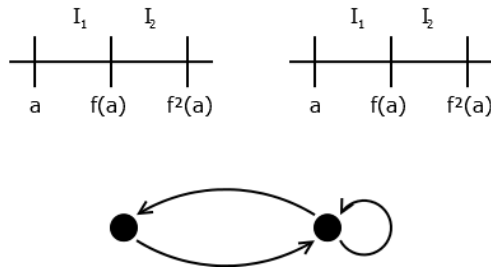
Ekkor ha ezt az oszlopot és az alsó sort megnézzük, láthatjuk, hogy $Q_m \subset I^0 = f^m(Q_m)$. Tehát a 4.8. Lemma alapján az f^m függvénynek van fixpontja Q_m -en belül. Mivel az intervallumok sorozata nemismétlődő, tudjuk bizonyítani, hogy ez a fixpont az f függvény m -periodikus pontja (és nem kisebb) a Brouwer-féle fixponttétel alapján, hiszen tudjuk, hogy az f^m függvény az I^0 intervallumon önmagára képezi, tehát van az f^m -nek fixpontja. Ez még nem zárja ki, hogy ez a fixpont nem p -periódusú pontja a függvénynek ($1 \leq p < m$). Ebben fog nekünk segíteni, hogy az elején kikötöttük, hogy ez a kör nemismétlődő. A 4.4. Definíció azt mondja, hogy nem állhat egy rövidebb kör ismétlődéséből. Emiatt, ha ennek a fixpontnak p -periódusa lenne, akkor ugyanaz a p darab intervallum ismétlődne. Bár találhatunk ilyen fixpontját is az f^m függvénynek, kell, hogy legyen olyan pontja is, amely sorban végigmegy $I^0 I^1 I^2 \dots I^m$ intervallumokon, tehát ez egy m -periodikus pont. ■

4.9. Állítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ha f -nek létezik egy $k > 1$ páratlan periodikus pontja, akkor f -nek létezik h -periodikus pontja minden h -ra, ahol $h \geq k - 1$.

Bizonyítás

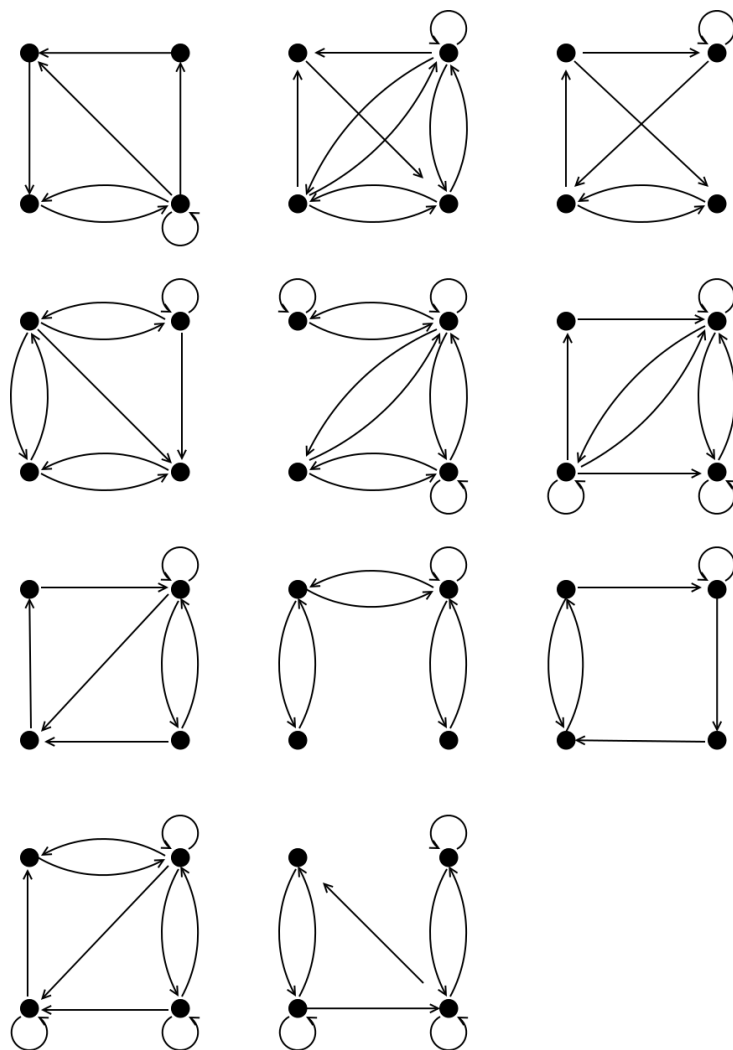
Először azt fogjuk belátni, hogy minden $k > 1$ esetén a k -periodikus pont digráfjának létezik k hosszú köre. Ehhez vegyünk az előző bizonyítás jelölését, ahol az $I^0 I^1 \dots$ intervallumokat használtuk. Legyen $I_1 := I^0$, aminek az egyik végpontja a , a legkisebb iterált. Legyen I^n , $n \geq 1$ egyenlő egy olyan I_i intervallummal, aminek az egyik végpontja $f^n(a)$ és $I^n \subset f(I^{n-1})$. Ezzel a felépítéssel az $I^k = I^0$ egyenlőséget kapjuk, tehát kapunk egy k hosszú kört. Ez egy egyértelmű intervallumsorozatot ad, hiszen egyedül két intervallumnak lehet megegyező végpontja, ezután meg csak az egyik irányban lehet a másik keresett végpont, emellett mikor eljutunk $f^k(a)$ -ba, az egyenlő lesz a -val, ami egyedül az $I^0 = I_1$ intervallum végpontja, ezzel bebiztosítva, hogy visszaérünk a kiinduló pontba. (Például a 1. ábránál az I_2 lenne az az intervallum, amelynek az egyik végpontja $f(x)$ és amit tartalmaz $f(I_1)$. A felsorolás az eredeti intervallumjelölésekkel a következőképpen néz ki: $I_1 I_2 I_3 I_4 I_2 I_1$.)

Mivel összesen csak $k - 1$ darab csúcsunk van, ezért legalább az egyik csúcsnak ismétlődnie kell ebben a k körben, és ennél az ismétlődésnél le lehet bontani ezt a k kört két kisebb alkörre. (A fenti példánkban az I_2 intervallum az, amelynél le tudjuk bontani, tehát marad az $I_1 I_2 I_1$ és az $I_2 I_3 I_4 I_2$, így ezzel kaptunk egy 2 és egy 3 hosszú kört.) Mivel az ismételt intervallumnak csak két végpontja van, ezért maximum kétszer tud csak feltűnni az eredeti k körben, (itt nem szoktuk belevenni az utolsó csúcsot, tehát, bár a fenti hosszabbik körben kétszer jelenik meg az I_2 intervallum, az utolsó elem sosem számít) tehát csak egyszer tud megjelenni a két kisebb körben, amelyek emiatt nem lehetnek ismétlődő körök. Továbbá, ha k páratlan, akkor az egyik kisebb körnek is páratlannak kell lennie.



4. ábra. A 3-periódusú digráf. [10] cikkben található ábra.

A 4.9. Állítás most már könnyen bizonyítható teljes indukció segítségével. A 4. ábra és az 5. ábra alapján láthatjuk $k = 3$ és $k = 5$ esetekre az igazságát, hiszen $h = k - 1$ esetén ki tudjuk hagyni a hurkot, amely minden digráfon megtalálható, vagy tudunk rajta egy kört mutatni, amely a hurok segítségével $k - 1$ hosszú. Az ennél hosszabb körökre pedig csinálunk egy nem 1 hosszú kört, amely egy olyan csúccsal kezdődik, amelynek van hurka, és elé tudjuk venni a hurkot annyiszor, hogy az elérje a megfelelő hosszúságot. Ezzel a módszerrel kapunk egy megfelelő hosszúságú nemismétlődő kört.



5. ábra. Az összes 5-periodikus digráf. [10] cikkben található ábra átgondolva.

Tegyük fel, hogy ez az állítás igaz minden 1 és k közötti páratlan számra. Ha az f függvénynek létezik k -szerint periodikus pontja, akkor a k -szerinti digráfnak létezik k hosszú köre, és ezt a kört le lehet bontani két kisebb körre, amelyek nemismétlődők és amelyek közül az egyik páratlan hosszú. Ha ez egy 1 hosszú kör (hurok), akkor a hurok segítségével tudunk csinálni belőle egy $m \geq k-1$ hosszú kört úgy, hogy annyszor megyünk végig a hurkon ahányszor kell, hogy elérjük ezt az m hosszú kört. Ha ez nem egy 1 hosszú kör, akkor a 4.6. Állítás alapján a kisebb páratlan periódusú lesz az új k , azt is leosztjuk két kisebb körre. Ha a páratlan kör 1 hosszú, akkor kész vagyunk, ha nem, akkor az lesz az új k . Ezt a lépést ismételve el kell, hogy jussunk egy 1 hosszú körhöz, amelyen azután annyszor megyünk végig, ahányszor kell, hogy megkapjuk a h hosszú kört. ■

4.10. Lemma. *Egy folytonos függvény k -periodusú digráfja mindig tartalmaz egy k -hosszú kört, amelyben valamely csúcsa pontosan kétszer ismétlődik.*

Bizonyítás

Ennek a lemmának mindkét állítását beláttuk az előző bizonyításban, először bizonyítottuk, hogy $k > 1$ esetén a k -periódusú digráfnak létezik k hosszú köre és definiáltunk is egy ilyen kört, majd a második bekezdésben beláttuk, hogy mivel csak $k - 1$ csúcsunk van, az egyiknek ismétlődnie kell, de minden intervallum pontosan kétszer ismétlődhet, mert végpontokhoz definiáltuk a kört és egy intervallumnak csak két végpontja lehet. ■

4.11. Állítás. *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ha f -nek létezik egy k -periodikus pontja, ahol $k = 2n + 1$ és $n \geq 1$ egész, akkor f -nek létezik h -periodikus pontja minden páros h -ra.*

Bizonyítás

Vegyük először az $n = 1$ esetet. Ekkor 3-periodikus pontokról beszélhetünk. Ezt először Li és Yorke publikálta 1975 decemberében a The American Mathematical Monthly folyóiratban. Mi egy kicsit más szemszögből fogjuk megközelíteni.

Amennyiben 3-periodikus pontokról beszélünk, ha kikötjük, hogy az a pont a legkisebb, akkor összesen kétféle sorrendben lehetnek az iteráltak, amelyek a 4. ábrán láthatóak.

A 4.6. Állítás alapján tudjuk, hogy ha tudunk egy e hosszú nemismétlődő kört mutatni ebben a digráfban, akkor van a függvénynek e -periodikus pontja is. A digráfon lehet látni, hogy tudunk egy 2 hosszú kört leírni az I_1 és I_2 intervallumok segítségével. A három eset triviális. A háromnál nagyobb esetre úgy tudunk a legegyszerűbben nemismétlődő kört mutatni, hogy végigmegyünk a jobb oldali csúcsnál lévő hurkon $(e - 1)$ -szer, majd átmegyünk a bal oldali csúcsba és vissza a másikba. Így a következő intervallumsorozatot fogjuk kapni: $I_0 I_0 I_0 \dots I_0 I_1 I_0$ amelyben pontosan $(e - 1)$ -szer fog szerepelni az I^0 csúcs. Tudjuk, hogy ez az intervallumsorozat nemismétlődő, hiszen egy olyan pont pályáját írja le, amely $(e - 1)$ -szer egy intervallumban van, majd átlép a másikba. Ezzel be is láttuk az $n = 1$ esetet.

Tehát vegyük azokat az eseteket, ahol $n > 1$. Először készítsünk egy $2n + 1$ periódusú digráfot az f függvényre. A 4.10. Lemmából és a 4.8. Állítás bizonyításából következik, hogy a digráfnak van $2n + 1$ hosszú köre, amelyet fel lehet bontani két kisebb körre, amelyek közül az egyik páratlan hosszú. Ha ez a páratlan hosszú kör nem hurok, azaz nem egy 1 hosszú kör, akkor teljes indukcióval belátható az állítás úgy, hogy ezt a rövidebb páratlan kört választjuk meg $k = 2n + 1$ -nek. Ha van 1-nél hosszabb páratlan hosszú alköre, akkor újból k -t választunk addig, amíg nem kapunk egy hurkot vagy vissza nem érünk az $n = 1$ esetbe, amelyet már beláttunk.

Tehát feltehetjük, hogy ez a $2n + 1$ hosszú kör egy 1 hosszú és egy $2n$ hosszú körre bomlik fel. Legyen I_m az a csúcs, amelynél szét tudjuk bontani a két kisebb kört (amely a $I_1 I_2 I_3 I_4 I_1$ példában az I_4 csúcs) és legyen $I^1 = I_m$, emellett kezdjük a $2n$ kört I^1 -el,

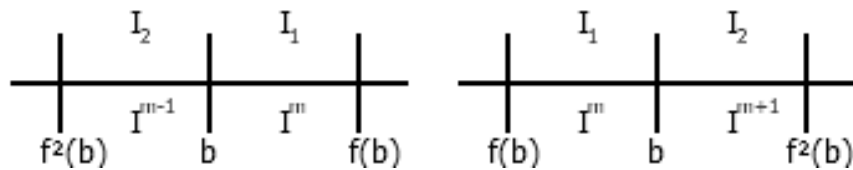
tehát a következőképpen fog kinézni: $I^1 I^2 \dots I^{2n} I^1$. (A példában úgy nézne ki a két kör, hogy $I_4 I_4$ 1 hosszú kör és $I_1 I_2 I_3 I_4 I_1$ 4 hosszú kör, majd a páros kör kiinduló pontját elcsúsztatva a $I_4 I_1 I_2 I_3 I_4$ azonos kört kapjuk.)

Feltehetjük, hogy ez a $2n$ kör nem tartalmaz megfelelő alkört, amelynek a hossza nagyobb mint 1 és tartalmazza az I^1 csúcsot, hiszen akkor megválaszthatnánk ezt az alkört, mint nemismétlődő kört, majd hozzáadhatnánk vagy levehetnénk a fent említett hurkot, hogy megkaphassuk a megfelelő hosszúságú nemismétlődő páratlan hosszúságú kört, (amelynek a hossza $(2n + 1)$ és 1 között van), ami lehetne az új k , és ekkor lehetne azzal bizonyítani teljes indukció segítségével.

Következésképpen feltehetjük, hogy a $(2n + 1)$ -es digráfon belül egy I^i ($1 < i < 2n$) csúcs nem mutathat egy I^k csúcsba, ahol $k > i + 1$ vagy $k = 1$, különben átugorhatnánk néhány csúcsot megalkotván egy olyan alkört, amelynek a hossza nagyobb mint 1 és tartalmazza az I^1 csúcsot. Hasonló okokból, az 1 hosszú kör (I^1), az I^1 csúcs egyedül önmagába és az I^2 csúcsba mutathat.

Legyen I^1 továbbra is egyenlő I_m , ahol az I_m a számegyenesen az m -edik véges intervallumot jelenti. Mivel I^1 csak önmagába és I^2 -be mutat, I^2 -nek egy olyan intervallumnak kell lennie, amely az I_m mellett foglal helyet, továbbá az f függvénynek I^1 egyik végpontját I^1 másik végpontjába kell iterálnia, azt pedig I^2 valamelyik végpontjába. Legyen b az I^1 intervallum egyik végpontja úgy, hogy az I^1 intervallumnak $f(b)$ ugyanúgy végpontja lesz. Mivel a b pont $2n + 1$ periódusú, $f(b) \neq b$. Ekkor két lehetőség áll fenn:

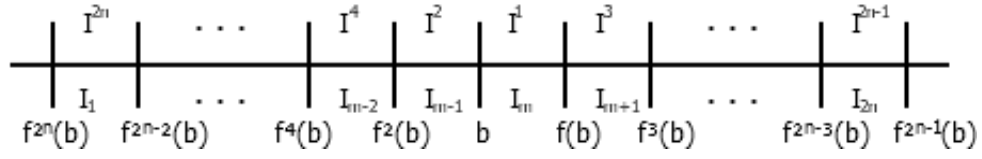
- $I^1 = [b, f(b)]$, és ebben az esetben, $I^2 = I_{m-1} = [f^2(b), b]$
- $I^1 = [f(b), b]$, és $I^2 = I_{m+1} = [b, f^2(b)]$.



6. ábra. A két lehetséges intervallum sorrend. [5] cikkben található ábra részletezve.

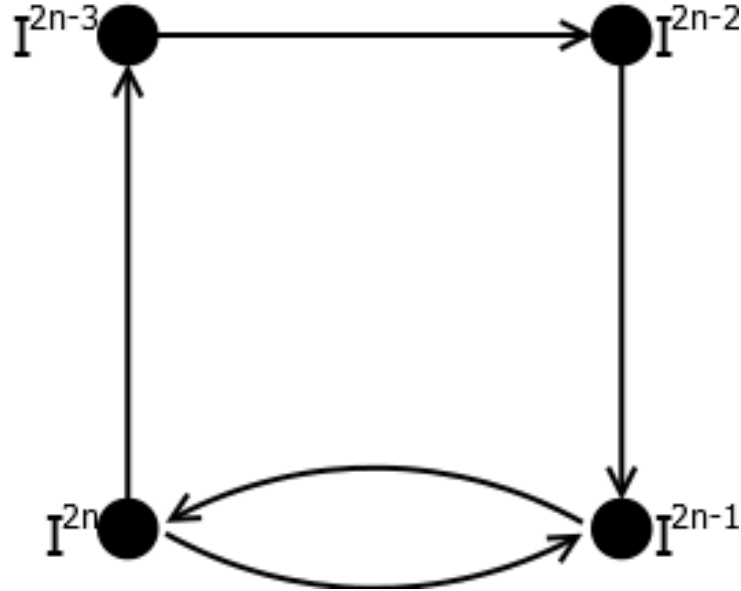
Mivel a 6. ábrán látható intervallumsorrendek szimmetrikusak, elég, ha csak az első esetet vizsgáljuk.

Vegyük figyelembe, hogy $f^3(b) > f(b)$, hiszen ellenkező esetben $f^3(b) < f^2(b)$ eset állna fenn, ami azt jelentené, hogy I^2 intervallumból mutatna nyíl I^1 -be, amit kikötöttünk, hogy nem lehetséges, ezért beláthatjuk, hogy az I^3 intervallum az I^1 jobb oldalán helyezkedik el és $I^3 = [f(b), f^3(b)]$. Hasonlóan $f^4(b) < f^2(b)$ és $I^4 = [f^4(b), f^2(b)]$. Tovább folytatva ezt az elvet megkapjuk, hogy minden I^i intervallum, ahol $1 \leq i \leq 2n$, a 7. ábrán látható módon fogja követni egymást



7. ábra. A 4.11. Állításban felírt intervallum sorozat a valós számegeyenesen. [5] cikkben található ábra.

ahol $f^{2n+1}(b) = b$ és I^{2n} intervallumból mutat nyíl $I^1, I^3, \dots, I^{2n-1}$ intervallumokba. Továbbá a $(2n+1)$ -periodikus digráfnak tartalmaznia kell a 8. ábrán látható algráfot az alap feltevése miatt, miszerint $f(I^i) \supset I^{i+1}$ és amiatt, mert $f(I^{2n}) = f([f^{2n}(b), f^{2n-2}(b)]) = f([f^{2n-3}(b), f^{2n-1}(b)])$, tehát $f(I^{2n})$ tartalmaz minden I^i intervallumot, amelyre i páratlan.



8. ábra. A 4.11. Állítás bizonyításában leírt digráf részgráfja. [5] cikkben található ábra.

Ebből minden páros periódus belátható úgy, hogy 2-re az $I^{2n} I^{2n-1} I^{2n}$ kör, a 4-periodikus pontra $I^{2n} I^{2n-3} I^{2n-2} I^{2n-1} I^{2n}$ kör, és minden nagyobb páros számra végig tudunk úgy menni, hogy ha a szám osztható 4-el, akkor egyszer végigmegyünk az $I^{2n} I^{2n-1} I^{2n}$ körön, majd $I^{2n} I^{2n-3} I^{2n-2} I^{2n-1} I^{2n}$ körön annyiszor, hogy 2 híján meglegyen, majd újra a 2 hosszú körön, ha nem osztható 4-el, akkor annyiszor megyünk végig a 4 hosszú körön, hogy 2 híján meglegyen, majd végigmegyünk a 2 hosszú körön. ■

4.12. Állítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ha f -nek létezik k -periodikus pontja bármilyen k egészre, akkor létezik 1-periodikus pontja azaz fixpontja. Továbbá, ha van olyan k -periodikus pontja, ahol $k > 1$, akkor van 2-periodikus pontja.

Bizonyítás

Először vizsgáljuk meg az első állítást. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény és legyen a az f függvény egy k -periodikus pontja (itt most az a pont nem feltétlenül a legkisebb iterált). Tegyük fel, hogy $f(a) > a$ és vegyük a előrefele vett orbitját: $(a, f(a), f^2(a), \dots, f^k(a))$, ahol a feltevésből tudjuk, hogy $f^k(a) = a$. Ekkor létezik egy olyan $b = f^i(a)$ pont, amire $f(b) < b$ igaz, különben a sorozat folyamatosan növekedne, és nem térne vissza az a pontba. Ekkor a Bolzano-tétel segítségével (amit az $f(x) - x$ függvényre alkalmazunk) tudhatjuk, hogy kell, hogy legyen egy olyan c az a és a b között, hogy $f(c) = c$. A szimmetria miatt ez ugyanúgy igaz abban az esetben is, ahol $f(a) < a$.

Most vizsgáljuk meg a második állítást, miszerint ha $k > 1$, akkor létezik az f -nek 2-periodikus pontja. Az állítás triviális a $k = 2$ esetben, tehát tegyük fel, hogy $k \geq 3$. A 4.10. Lemma alapján tudhatjuk, hogy az f függvény k -periodusú digráfja tartalmaz egy k hosszú kört, amelyet le lehet bontani két nemismétlődő alkörre, mint az előző bizonyításban is látható volt, és amelyek közül legalább az egyik több mint 1 hosszú. Most vegyük ezek közül a rövidebb, nem 1 hosszú kört. Ha a kör hossza 2, akkor megvagyunk. Ha nem, akkor a kisebb kört felírjuk újra $I^1 I^2 \dots$ alakban intervallumsorozatba és kettéosztjuk. Ezt addig csináljuk, amíg nem kapunk egy 2 hosszú kört. Legrosszabb esetben minden felosztásban lesz egy hurok, ami miatt $k - 2$ -szer kell ezt végigcsinálnunk, de végül el fogunk jutni a 2 hosszú körbe. ■

4.13. Állítás. *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ha h megelőzi k -t a Sarkovszkij rendezésben, és f -nek van h -periódusú pontja, akkor létezik k -periódusú pontja is.*

Bizonyítás

Az állítást be tudjuk látni standard érvekkel f megfelelő iteráltjai mellett. Az egyszerűség kedvéért bontsuk különböző esetekre.

Először legyen $h = (2m + 1) \cdot 2^s$ és $k = (2n + 1) \cdot 2^t$, ahol m, n, s, t nemnegatív egész számok és (1) $s < t$ és $m > 0$ vagy (2) $s = t$ és $0 < m < n$. Vegyük figyelembe a 4.11. és a 4.9. Állításokat egy új $g := f^{2^s}$ függvényre és erre a két esetre. Ekkor találhatunk egy x pontot, ami a g függvény $((2n + 1) \cdot 2^{t-s})$ -periodikus pontja, hiszen azt tudjuk, hogy a g függvénynek van $(2m + 1)$ -periodikus pontja ($g^{2m+1} = f^{(2m+1) \cdot 2^s}$) ezért kell, hogy legyen $((2n + 1) \cdot 2^{t-s})$ -periodikus pontja is, mert az (1) esetben $2m + 1$ páratlan és $(2n + 1) \cdot 2^{t-s}$ páros, így ez a 4.11. Állításból következik és a (2) esetben $(2m + 1)2^{s-t} = 2m + 1 > (2n + 1) - 1 = 2n$ (hiszen $s = t$), amit pedig a 4.9. Állítás igazol. Ezek után könnyen belátható, hogy az x pont az f függvény $((2n + 1) \cdot 2^t)$ -periodikus pontja, hiszen

$$f^{(2n+1) \cdot 2^t}(x) = g^{\frac{(2n+1) \cdot 2^t}{2^s}}(x) = g^{(2n+1) \cdot 2^{t-s}}$$

ami a feltevésünk volt az x pont keresésénél.

Ezek után vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor $h = (2m + 1) \cdot 2^s$ és $k = 2^t$, ahol m nemnegatív és s, t pozitív egész számok úgy, hogy (a) $m > 0$ vagy (b) $m = 0$ és $s \geq t$. Feltehetjük, hogy az (a) esetben is $s \geq t$, hiszen ellenkező esetben az (1) esetet kapnánk vissza az előző bekezdésből. Most vegyük figyelembe a 4.12. Állítást egy új $g = f^{2^{t-1}}$ függvényre. Ekkor belátható, hogy mindkét esetben lesz a g függvénynek 2-periódusú pontja, mert tudjuk, hogy van $(2m + 1) \cdot \frac{2^s}{2^{t-1}} = (2m + 1) \cdot 2^{s+1-t}$ -periodikus pontja, ami nagyobb mint 1, így a 4.12. Állítás igazolja, emiatt $x_0 = g^2(x_0) = f^{2^{t-1} \cdot 2}(x_0) = f^{2^t}(x_0)$.

A felső két bekezdés és az, hogy bármely periodikus pont létezéséből következik, hogy van 1-periodikus pont bizonyítja a 4.13. Állítást. ■

4.14. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény és legyen x_0 az f függvény egy k -periodikus pontja. Azt mondjuk, hogy f k -periódusú digráf x_0 -ra **hűséges**, ha a digráf minden I_j csúcsára léteznek olyan I_j szakaszokra irányuló $I^1, I^2, I^3, \dots, I^n$ csúcsok, hogy $f(I_j) = \cup_{i=1}^n I^i$.

Talán a legegyszerűbb a digráfok szempontjából nézni ezt a definíciót. Tehát azt mondja ki, hogy ha veszünk egy I_j csúcsot és azokat az $I^1, I^2, \dots, I^n$ csúcsokat, amelyekbe az I_i csúcsból megy irányított él, akkor az $I^1, I^2, \dots, I^n$ intervallumok uniója kiadja az I_i intervallum f -szerinti teljes képét és nem úgy, hogy például $f(I_j) = (\cup_{i=1}^n I^i) \cup \{c\}$ úgy, hogy $c \notin \cup_{i=1}^n I^i$.

4.15. Állítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény és legyen x_0 az f egy k -periodikus pontja. Osszuk fel a valós számegyenes x_0 orbitjának pontjaival (véges számú halmaz). Ekkor legyenek $I_1, I_2, I_3, \dots, I_{k-1}$ azok a véges intervallumok, amelyeket a k iterált pontjaival kapunk a számegyenesen. Tegyük fel, hogy ez a k -periodusú digráf hűséges. Ekkor, ha az f függvénynek létezik p szerinti periodikus pontja az $\cup_{i=1}^n I_i$ halmazban, akkor a k -periodikus digráf tartalmaz egy p hosszú kört.

Bizonyítás

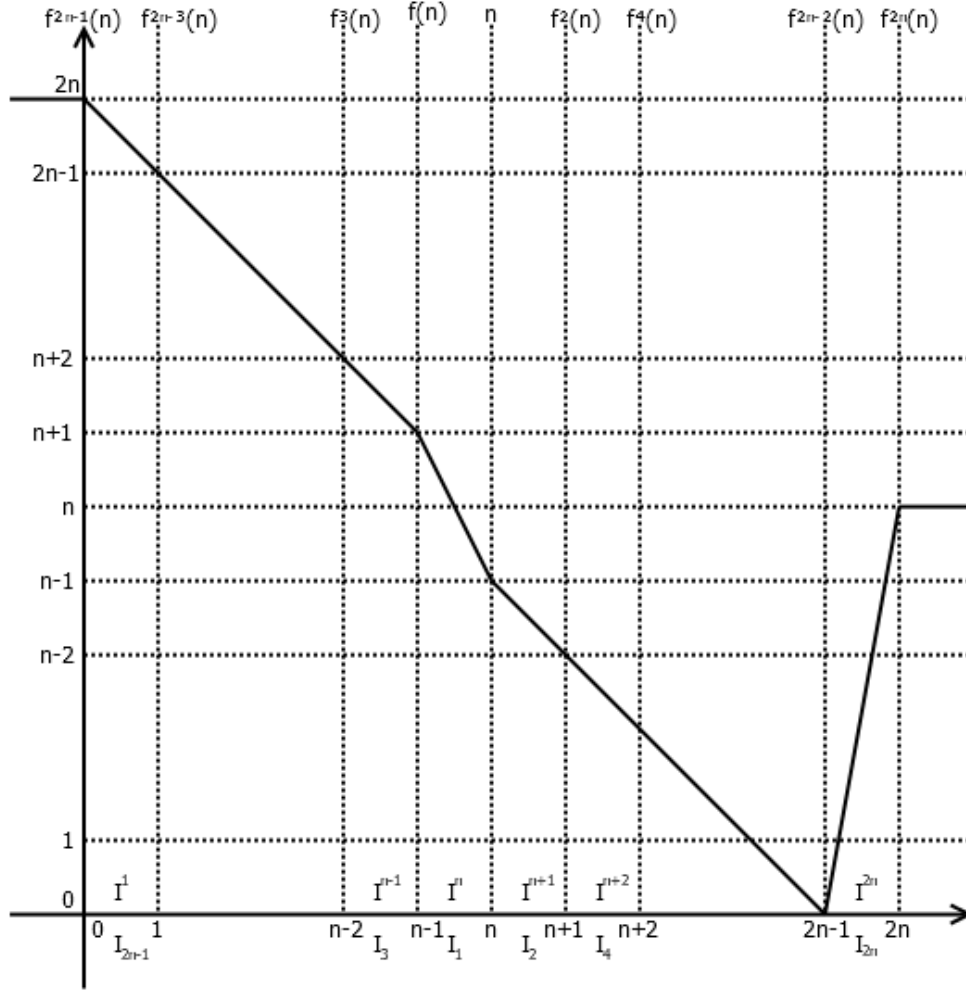
Legyen $b \in I_i$, valamilyen i -re, és legyen b az f függvény egy p -periodikus pontja. Legyen egy másik intervallumsorozat J_j és $J_0 = I_i$. Mivel $f(I_j) = \cup_{i=1}^n I^i$ létezik olyan intervallum J_1 amire $f(b) \in J_1$. Ha folytatjuk ezt, akkor kaphatunk egy $J_2, \dots, J_p$ sorozatot, amire $f(J_i) \subset J_{i+1}$ és $f^i(b) \in J_i$ minden i -re. Emiatt $J_p = J_0$, tehát van p hosszú kör a digráfban. ■

4.16. Megjegyzés. Az előző állításban kapott p hosszú kör lehet ismétlődő kör. Ha azonban megköveteljük, hogy az f függvény minden I_i intervallumon, $i = 1, 2, \dots, k - 1$, monoton legyen, akkor nem állhat össze a p hosszú kör teljes egészében egy 1 hosszú körből, amelyet többször ismétlünk $p > 1$ esetén.

4.17. Állítás. Minden $n \geq 2$ esetén létezik egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelynek létezik $(2n + 1)$ -periodikus pontja, és nincs $(2m + 1)$ -periodikus pontja minden $1 \leq m < n$ esetén.

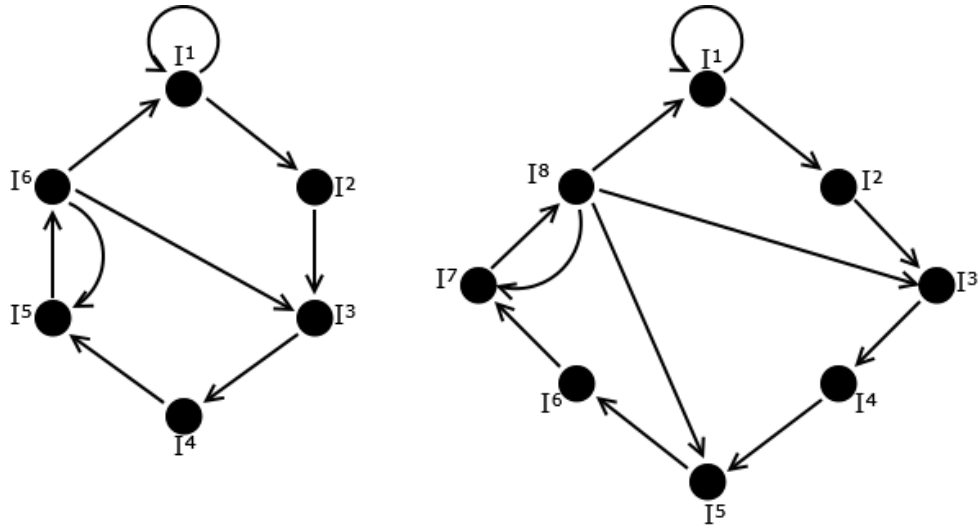
Bizonyítás

Legyen f egy szakaszonként lineáris függvény és legyen $f(n) = n - 1, f^2(n) = n + 1, f^3(n) = n - 2, f^4(n) = n + 2, \dots, f^{2i}(n) = n + i, f^{2i+1}(n) = n - (i + 1), \dots, f^{2n-1}(n) = 0, f^{2n}(n) = 2n$ és $f^{2n+1}(n) = n$ ($0 < i < n$). Így n egy $(2n + 1)$ -periodikus pontja a függvénynek, amely a 9. ábrán látható módon fog kinézni.



9. ábra. A 4.17. Állítás bizonyítását segítő ábra. [5] cikkben látható ábra.

Legyenek $I^1, I^2, \dots, I^{2n}$ úgy, hogy $I^1 = [f(n), n], I^3 = [f^3(n), f(n)], \dots, I^{i+1} = [f^{i+1}(n), f^{i-1}(n)], \dots, I^{2n-1} = [f^{2n-1}(n), f^{2n-3}(n)]$ és $I^2 = [n, f^2(n)], I^4 = [f^2(n), f^4(n)], \dots, I^{2i} = [f^{2i-2}(n), f^{2i}(n)], \dots, I^{2n} = [f^{2n-2}(n), f^{2n}(n)]$, ekkor a hozzátartozó $2n + 1$ digráfban az I^1 intervallumból csak az I^1 és az I^2 intervallumokba vezet nyíl. Minden $1 < i < 2n$ -re az I^i intervallumból egyedül az I^{i+1} intervallumba visz nyíl és az I^{2n} intervallumból csak az I^{2k-1} intervallumokba, ahol $1 \leq k \leq n$. A digráfok $n = 3$ és $n = 4$ esetei a 10. ábrán találhatók.



10. ábra. Az $n = 3$ és az $n = 4$ esetek. [5] cikkben látható ábra.

Észrevehetjük, hogy a I^1 intervallumnál lévő hurkon vagy annak ismétlése nélkül azoknak a köröknek, amelyeknek a hossza kisebb mint $2n + 1$ a digráfon, páros a hosszuk. Tehát a bizonyítás befejezhető a 4.15. Állítás és 4.16. Megjegyzés segítségével, hiszen a megjegyzésből kiderül, hogy mivel monoton a függvény minden $I_1, I_2, \dots, I_{2n}$ esetén, ezért nem állhat össze az I^1 intervallumnál lévő hurokból egyedül, hisz $2m + 1 > 1$, és az állítás bár csak annyit mond ki, hogy ha van p -periodikus pont, akkor van kör a digráfon, de könnyen be tudjuk látni, hogy ha nincs az ábrán kör, akkor nincs periodikus pont sem, hiszen ha $f^{2n+1}(I_i) = I^1 \cup I^2 \cup \dots \cup I^n$ a definíció szerint, és ha $f^{2n+1}(I_i) = I^1 \cup I^2 \cup \dots \cup I^n \not\subseteq I_i$ akkor nem lehet olyan pont az I_i intervallumban, ami pontosan $(2n + 1)$ lépésben visszajut az intervallumba, hiszen egymásba nem lógó intervallumaink vannak. ■

4.18. Definíció. Tegyük fel, hogy $h : A \rightarrow A$ és $f : B \rightarrow B$. Ekkor f és h **topologikusan konjugáltak**, ha létezik $g : A \rightarrow B$ homeomorfizmus, hogy $g(h(x)) = f(g(x))$. [2]

4.19. Állítás. Legyenek h és k pozitív egész számok úgy, hogy h megelőzi k -t a Sarkovszkij rendezésben ($h \triangleright k$). Ekkor létezik olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelynek van k -periodikus pontja, de nincs h -periodikus pontja.

Bizonyítás

A bizonyításhoz a 4.17. Állítást fogjuk tovább vinni, úgy, hogy "négyzetre emeljük". Tegyük fel, hogy $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ folytonos függvény, aminek van egy $(2n + 1)$ -periodikus pontja az $[a, b]$ intervallumon és nincs $(2m + 1)$ -periodikus pontja, ahol $1 \leq m < n$. Legyen $[c, d]$ egy olyan intervallum, amely diszjunkt az $[a, b]$ intervallumtól, emellett tegyük fel, hogy $b < c$ és legyen $g : [a, b] \rightarrow [c, d]$ egy tetszőleges homeomorfizmus. Ezután definiáljunk egy harmadik függvényt, $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ami:

$$r(x) = \begin{cases} g \circ f(x) & \text{ha } x \in [a, b] \\ g^{-1} & \text{ha } x \in [c, d] \\ a & \text{ha } x \in [b, c] \\ \text{konstans} & \text{ha } x \in (-\infty, a] \cup [d, +\infty) \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy $r^2(x) = f(x)$, ha $x \in [a, b]$, hiszen $r(r([a, b])) = r([c, d]) = [a, b]$ és emiatt $r(r(x)) = r(g(f(x))) = g^{-1}(g(f(x))) = f(x)$, amennyiben $x \in [a, b]$, és $r^2(x) = g(f(g^{-1}(x)))$, ha $x \in [c, d]$ hasonló logikával, $r^2([c, d]) = r([a, b]) = [c, d]$, tehát $r(r(x)) = r(g^{-1}(x)) = g(f(g^{-1}(x)))$, amennyiben $x \in [c, d]$. De a topologikusan konjugált függvények periodikus pontjainak a rendszere ugyanolyan struktúrájú. Az r függvénynek van $(2n+1) \cdot 2$ -periodikus pontja, de nincs $(2m+1) \cdot 2$ periodikus pontja $1 \leq m < n$ -re. Továbbá az r függvénynek nincs $(2j+1)$ -periodikus pontja $j \geq 1$ esetén az $[a, b]$ és $[c, d]$ intervallumok páratlan iteráltnál rossz intervallumba kerülnek. Amennyiben tovább folytatjuk ezeket a lépéseket egy új r függvénnyel olyan függvényeket kaphatunk, amelyeknek van $(2n+1) \cdot 2^t$ -periodikus pontjuk, és nincs $(2m+1) \cdot 2^s$ -periodikus pontjuk, ahol $s < t$ vagy $s = t$ és $1 \leq m < n$.

Könnyű létrehozni olyan függvényt, amelynek van fixpontja egy zárt intervallumon, de nincs periodikus pontja 1-nél nagyobb periódusra (például az $f(x) = x^2$ függvény, amelynek a fixpontjai az 1 és a 0, és $f^2(x) - x = x^4 - x = x(x^3 - 1)$ amelynek csak az 1-ben és a 0-ban van fixpontja, így a Sarkovszkij rendezés alapján tudjuk, hogy más periodikus pontja sincs, ha nincs 2-periodikus pontja). Ezek után ismételve a korábbi lépéseket kaphatunk példákat minden k és h párosra a Sarkovszkij rendezésben, amire a 4.19. Állítás igaz. Ezzel befejezhető a 4.19. Állítás bizonyítása, és ezzel a Sarkovszkij tétel bizonyítása. ■□

5. Periodikus pont keresési módszerek

Ehhez a fejezethez főleg a [11] könyvet és a [12] Wikipédia cikket használtam fel.

Sajnos elég kevés megbízható gyors fix és periodikus pont keresési módszer van. Szerencsénk lehet, ha a függvény egyszerű, például másod- vagy harmadfokú, mert arra van megoldóképlet, de afölött ritkán lehet egyszerű módszerekkel periodikus pontot találni.

Vegyünk egy egyszerű példát, legyen $f(x) = x^2 - 2$ egy folytonos $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény. Ekkor fixpontot a következőképpen tudunk keresni:

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 - 2 = x \\x^2 - x - 2 &= 0\end{aligned}$$

és ezek után egyszerűen a másodfokú egyenlet megoldóképletével kifejezhetőek a gyökök, amelyek: $x_1 = 2$ és $x_2 = -1$.

A $f^2(x) = (x^2 - 2)^2 - 2 = x^4 - 4x^2 + 2$ ami már nehezebbnek tűnik, hiszen a negyedfokú megoldóképletünk meglehetősen komplikált, tehát egyszerűbb valamely más módszert használni. Azt viszont tudjuk, hogy ami az f függvény fixpontja az a f^2 függvénynek is fixpontja, emiatt $f^2(x) - x$ gyöke a $f(x) - x$. Tehát elég a következőt kiszámolni:

$$\frac{f^2(x) - x}{f(x) - x} = \frac{x^4 - 4x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2} = x^2 + x - 1 = 0$$

amelyet meg tudunk oldani másodfokú egyenlet megoldóképletével, így $x_{21} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ és $x_{22} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

A 3-periodikus pontok már sokkal bonyolultabbak, hiszen, ha kiszámoljuk, akkor $f^3(x) = x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 2$ emellett, ha leosztunk, mint az f^2 -nél, akkor is hatodfokú egyenlet fog kijönni, amelyet nem tudunk kiszámolni ($x^6 + x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 7x^2 + x - 1 = 0$).

Ekkor kezdetünk el gondolkodni olyan módszereken, amelyek segítenek nekünk kiszámolni vagy legalább megközelíteni, hogy mely x_0 pontra kapunk periodikus pontot.

A következőkben feltesszük, hogy az $I = [a, b]$ intervallumra, amelyen vizsgálódunk, igaz, hogy $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$. Amennyiben ez nem igaz, vizsgáljuk a $-f(x)$ függvényt. Tegyük fel, hogy az intervallumban pontosan egy zérushelye van a függvénynek.

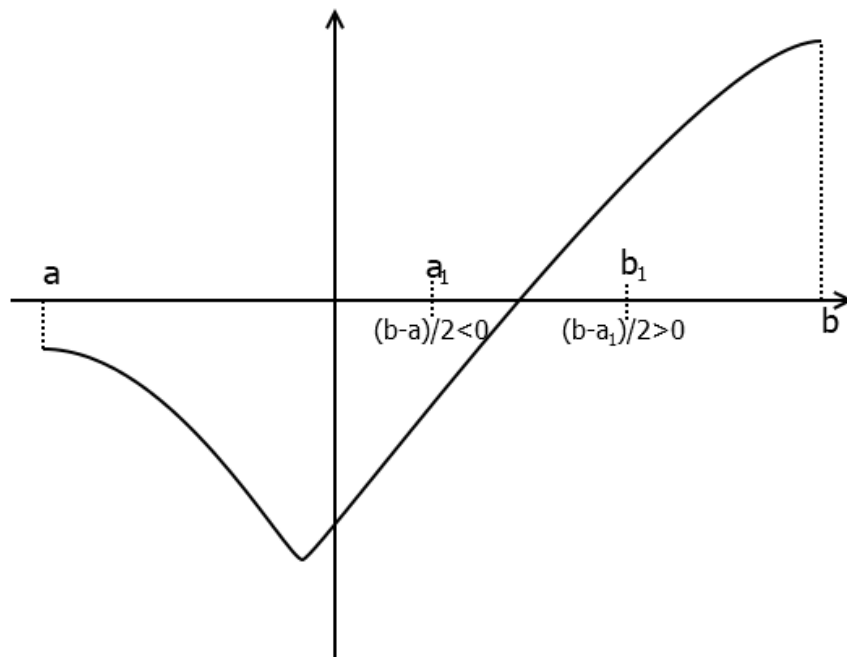
A következő módszerekhez számítógépes programokat használunk, amelyek segítenek megbecsülni a keresett értéket.

5.1. Intervallumfelezési módszer

Az intervallumfelezési módszerben, ahogy a neve is arra utal, egy intervallumot felezünk újra és újra amíg meg nem találjuk, vagy elég közel nem érünk a fixponthoz.

Ehhez arra van szükség elsősorban, hogy feltegyük, hogy $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$. Ha ez nem igaz, akkor a zérushelyet a $-f(x)$ függvényre keressük. Ezután megnézzük, hogy az $f(\frac{a+b}{2})$ értéke pozitív vagy negatív. Amennyiben pozitív, ez az $\frac{a+b}{2}$ érték lesz az új b , ha pedig negatív, akkor az új a , majd pedig újra megvizsgáljuk az $f(\frac{a+b}{2})$ értéket mint a 11. ábrán látható. Ezt addig csináljuk, amíg nem kapunk 0-át vagy amíg nem lesz a hibahatáron (epszilon környezetén) belül.

Mivel sok program lebegőpontos számokat használ, ezért érdekesebb az $\frac{a+b}{2}$ helyett a $a + \frac{a-b}{2}$ felezést használni, mert nem biztos, hogy az $\frac{a+b}{2}$ az a és a b szám közé fog esni.

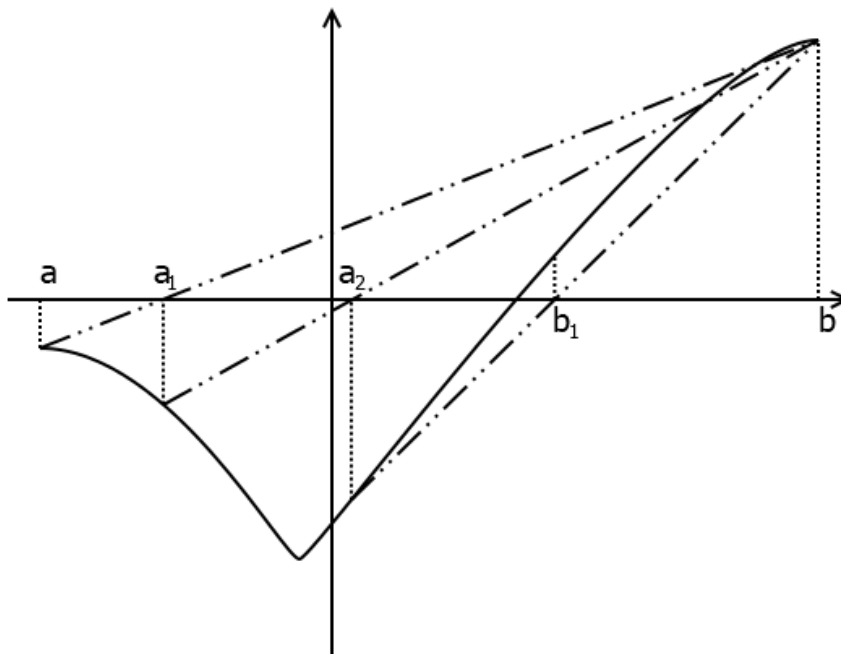


11. ábra. Az intervallumfelezési módszer képpel illusztrálva. Ebben a példában láthatjuk, hogy $f(a + \frac{b-a}{2}) < 0$, tehát ez lesz az új a amelyet az egyszerűség kedvéért a_1 -nek jelölünk. Ezután megnézzük, hogy mennyi az értéke $f(a_1 + \frac{b-a_1}{2})$ -nek. Látjuk, hogy ez nagyobb mint 0, tehát ez lesz az új b -nk, ami ismét egyszerűség kedvéért b_1 . Ezt tovább folytatva kapunk egy közelítő értéket a zérushelyre. [11] könyvben található ábra másik függvényre.

5.2. Húrmódszer

Az intervallumfelezési módszerhez hasonlóan a húrmódszernél is az $[a, b]$ intervallum két végpontját fogjuk újradefiniálni, itt viszont nem felezni fogjuk az intervallumot, hanem az $f(a)$ és $f(b)$ pontok közé fogunk egy egyenest húzni, és megnézni, hogy ez az egyenes hol metszi az x tengelyt. Tegyük fel, hogy ez az egyenes egy c pontban metszi az x tengelyt. Ekkor ha $f(c) < 0$ akkor ez a c pont lesz az új a , ha $f(c) > 0$ akkor az új b .

Ez a módszer is mindig fog találni az intervallumban zérushelyet, feltéve, ha van az intervallumban. A 12. ábrán látható egy példa a húrmódszerre, és tudjuk közelíteni a már említett $\frac{f^3(x)-x}{f(x)-x} = x^6 + x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 7x^2 + x - 1$ függvényen a 3-periodikus pontot megfelelő intervallumon.



12. ábra. A húrmódszer képpel illusztrálva. Itt megkeressük az $f(a)$ és az $f(b)$ pontokat összekötő egyenes zérushelyének az f szerinti képét és megnézzük, hogy ez pozitív vagy negatív. Ahogy láthatjuk a képen ez először negatív volt, ezért ez lett az új a . A következő lépésben megint negatív értéket kaptunk, ezért megint az a ponton változtattunk. A harmadik pozitív lett, ezért akkor a b értéket csökkentettük. Ezt folytatva kapunk egy közelítő értéket a zérushelyre. [11] könyvben található ábra másik függvényre.

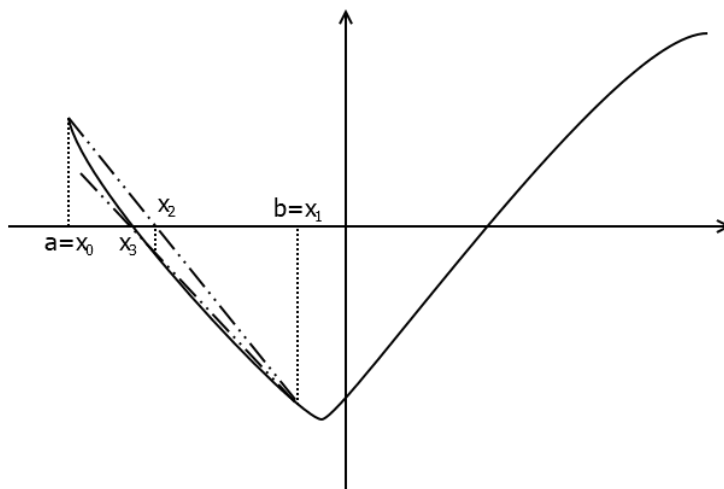
Az intervallumfelezési módszert és a húrmódszert azért szeretem, mert bár nem a leggyorsabbak, ha van, akkor mindig találunk zérushelyet az intervallumon.

5.3. Szelőmódszer

A következő módszerrel egy olyan $x_0, x_1, x_2, \dots$ sorozatot szeretnénk létrehozni, amely monoton közelít a zérushelyhez. Itt már csak az fontos, hogy $f(a) \cdot f(b) < 0$ legyen a zérushely létezése miatt. Ezt a sorozatot, hasonlóan, mint az intervallumfelezési módszerhez, akkor fejezzük be, amikor megtaláljuk a zérushelyet vagy belelépünk az epsilon környezetébe.

Bár a szelőmódszer gyorsabban találhat zérushelyet az intervallumon, nem megfelelő körülmények között ki tud lépni az intervallumból, ezzel lehetőséget adva arra, hogy ne találjuk meg a zérushelyet.

A szelőmódszer és a húrmódszer között az a különbség, hogy itt egy sorozatba "mentjük" el azokat az értékeket, ahol a két pontot összekötő egyenes metszi az x tengelyt, és mindig az utolsó két értékre illesztjük az egyenest (13. ábrán látható). Emiatt nem mindig egy x tengely feletti és egy x tengely alatti pontot kötünk össze, ami azt eredményezheti, hogy a metszéspont kikerülhet az $[a, b]$ intervallumból, ahogy ez a 14. ábrán is látható. Ez ahhoz is vezethet, hogy nem találjuk meg a zérushelyet az intervallumban.

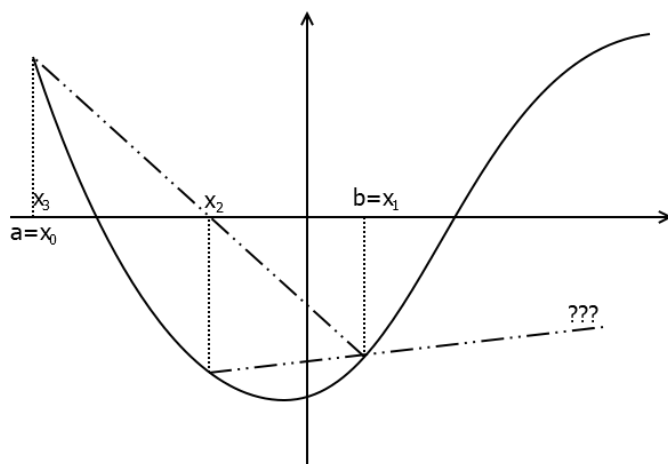


13. ábra. A szelőmódszer képpel illusztrálva. Láthatjuk, hogy az $f(a)$ és az $f(b)$ pontok összekötő egyenesének a zérushelyét keressük. Az $x_0, x_1, x_2, \dots$ sorozatban $a = x_0$ és $b = x_1$. A két pontot összekötő függvény zérushelye x_2 lesz. Ezután az $f(b) = f(x_1)$ és az $f(x_2)$ pontokat összekötő egyenes zérushelyét keressük, és így tovább. A képen látható estében az x_i értékek közelítenek a függvény zérushelyéhez. [11] könyvben található ábra másik függvényre.

5.4. Newton-módszer

Hasonlóan a szelőmódszerhez, most is egy $x_0, x_1, x_2, \dots$ sorozatot szeretnénk, amely monoton közelít a zérushelyhez. Ezt a módszert először Newton írta le 1671-ben, majd Joseph Raphson egyszerűsítette 1690-es cikkében, emiatt híresült el, mint Newton-Raphson-módszer, amelyet mi csak Newton-módszernek fogunk mondani. A ma is ismert változatát Thomas Simpsonnak köszönhetjük.

Ami ezt a módszert megkülönbözteti a fenn emített módszerektől, az az, hogy nem két pont között húzunk egyenest, hanem egy pontban húzunk érintőt. Ehhez szükségünk



14. ábra. A szelőmódszer, amikor kilépünk az $[a, b]$ intervallumból. Ezen a képen látható, hogy a szelőmódszer nem mindig találja meg az értéket. Az $f(x_1)$ és az $f(x_2)$ pontokat összekötő egyenes kilép az $[a, b]$ intervallumból, és ezek után is folytathatja a távolodást a zérushelytől. [11] könyvben található ábra.

lesz a derivált függvény értékére abban a pontban, emellett arra, hogy ez az érték ne legyen 0.

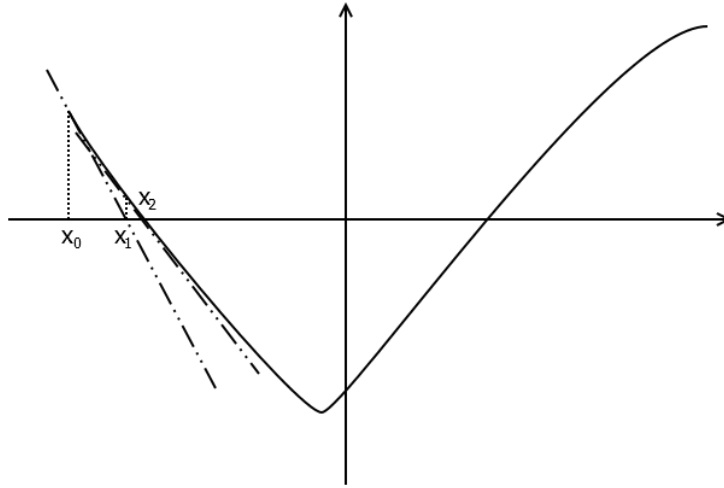
5.5. Hogyan keressünk megfelelő intervallumot?

Ezt a kérdést számítógépes függvény kirajzolással vagy a GeoGebra honlapjával nem nehéz megválaszolni. Én ebben a részben analóg módon kiszámolható megoldást szeretnék nyújtani a $\frac{f^3(x)-x}{f(x)-x} = x^6 + x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 7x^2 + x - 1$ függvényre, amihez a teljes függvényvizsgálatot fogjuk segítségül hívni. Ennek a módszernek az alkalmazásával azt is elérhetjük, hogy a Newton-módszernél előre tudhassuk, hogy a derivált függvény hol 0.

Ahhoz, hogy könnyen megtudhassuk, hogy a függvény hol metszi az x -tengelyt, nagyjából fel kell rajzolnunk a függvényt. Ehhez először érdemes megnézni az értelmezési tartományt. Ezután a teljes függvényvizsgálatban az lenne a kérdés, hogy hol nulla a függvényérték, de azt egy magasabb fokú függvény esetében nem mindig tudhatjuk. Az én módszerem erre az lenne, hogy deriváljuk a függvényt, és annak megnézzük a zérushelyeit, amelyből következtethetünk a függvény monotonitására. Amennyiben ezt nem tudjuk kiszámolni, a függvényt ismét deriváljuk. Ezt egészen addig csináljuk, amíg meg nem kapunk egy olyan függvényt, amelynek a gyökeit már meg tudjuk találni, például egy harmadfokú függvényt.

Ez a következőképpen fog kinézni:

$$g(x) = x^6 + x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 7x^2 + x - 1 \quad (1)$$



15. ábra. A Newton-módszer képpel illusztrálva. Ennél a módszernél nem intervallumon keresünk. Itt az $f(x_0)$ ponthoz húzott érintő zérushelyét keressük, ez lesz az x_1 érték. Ezután az $f(x_1)$ pont érintőjének a zérushelyét keressük. Ezekkel az $x_0, x_1, \dots$ értékekkel közelítjük a zérushelyet. [11] cikkben látható ábra másik függvényre.

$$g'(x) = 6x^5 + 5x^4 - 20x^3 - 9x^2 + 14x + 1 \quad (2)$$

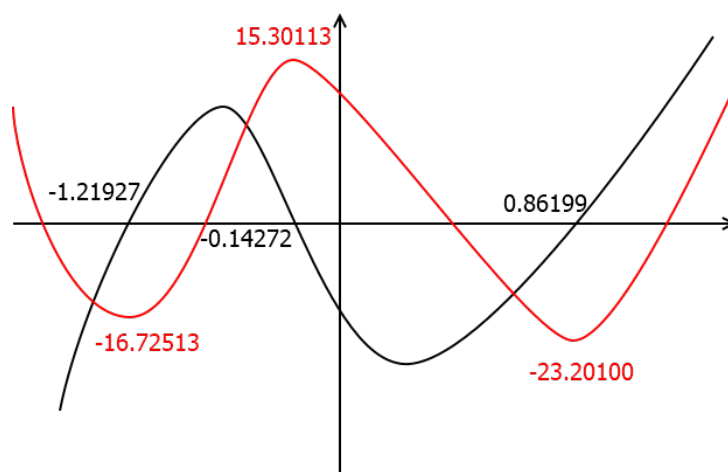
$$g''(x) = 30x^4 + 20x^3 - 60x^2 - 18x + 14 \quad (3)$$

$$g'''(x) = 120x^3 + 60x^2 - 120x - 18 \quad (4)$$

Amennyiben kiszámoljuk a harmadfokú függvény zérushelyeit, az $x_1 = 0.861987600747134, x_2 = 0.14272237076591518, x_3 = 1.2192652299812197$ eredményt kapjuk. Ekkor fel tudjuk vázlatosan rajzolni a harmadfokú függvényt és a negyedfokú függvényt is, miután megvizsgáltuk monotonitás szempontjából a $g'''(x)$ segítségével megkapott értékekkel. Ezt láthatjuk a 16. ábrán.

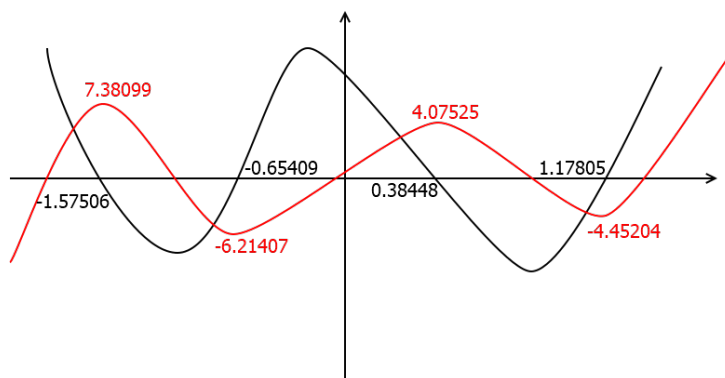
Ezek után kevés számolással fogunk tudni mondani megfelelő intervallumokat, ahol a $g''(x)$ negyedfokú függvény zérushelyeit kereshetjük a fent említett módszerek egyikével. Csupán két értéket kell találni ehhez, egy -1.21927 -nél kisebb számot, ahol a $g''(x) > 0$ és egy 0.86199 -nál nagyobb értéket, ahol $g''(x) > 0$.

A következő intervallumokon fogok zérushelyeket keresni: $[-2, -1.22], [-1.22, -0.14], [-0.14, 0.86]$ és $[0.86, 1.5]$ intervallumfelezési módszerrel 200 lépésben és 0.0001 hibahatárral. Erre a következő eredményeket kaptam sorrendben, kerekítve: $-1.57506, -0.65409, 0.38448$ és 1.17805 . Az általam írt számítógépes programban az első és a harmadik intervallumnál a függvény negatívját vizsgáltam, hiszen ettől a zérushely nem változik és megmarad az $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$ feltétel.



16. ábra. A $g'''(x)$ fekete és a $g''(x)$ grafikonjai piros színnel jelezve. A fekete számok a $g'''(x)$ függvény zérushelyei, a piros számok a $g''(x)$ függvény szélsőértékei elnagyolt ábrázolással.

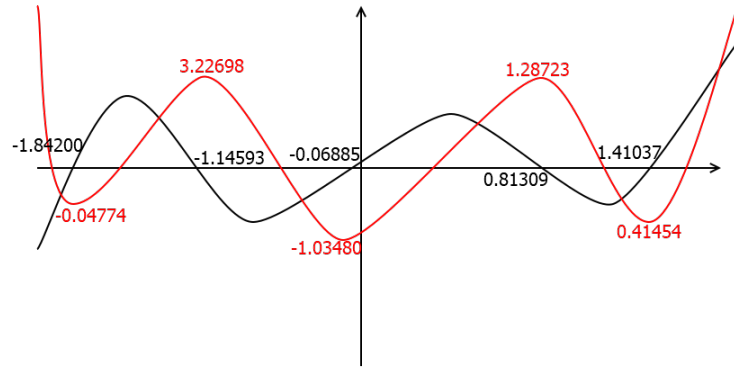
Ekkor ismét fel tudjuk rajzolni a következő közelítő függvényt a negyedfokú függvény mellé, amelyek a 7. ábrán lesznek láthatóak.



17. ábra. A $g''(x)$ fekete és a $g'(x)$ grafikonjai piros színnel jelezve. A fekete számok a $g''(x)$ függvény zérushelyei, a piros számok a $g'(x)$ függvény szélsőértékei elnagyolt ábrázolással.

Ekkor meg tudjuk becsülni, hogy mely intervallumokon tudjuk a $g'(x)$ függvény zérushelyeit keresni. Én a következő intervallumokat választottam: $[-2, -1.58]$, $[-1.58, -0.65]$, $[-0.65, 0.38]$, $[0.38, 1.18]$ és $[1.18, 2]$. Itt most a húrmódszert használom a zérushelyek keresésére és a következő eredményeket kaptam kerekítve: -1.84200, -1.14593, -0.06885, 0.81309 és 1.41037. Ennek az elnagyolt képe a 18. ábrán látható.

Mivel minket a legjobban a $g(x) = \frac{f^3(x)-x}{f(x)-x} = x^6 + x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 7x^2 + x - 1$ függvény érdekel, ezért, hogy minél pontosabb eredményt kapjunk, a zérushelyeket először a szelőmódszerrel közelítjük, majd a Newton-módszerrel. Ezt azért is érdemes csinálni, mert a Newton-módszernél minél közelebb van a kezdőérték a zérushelyhez annál gyorsabban



18. ábra. A $g'(x)$ fekete és a $g(x)$ grafikonjai piros színnel jelezve. A fekete számok a $g'(x)$ függvény zérushelyei, a piros számok a $g(x)$ függvény szélsőértékei elnagyolt ábrázolással.

konvergál hozzá. A következő intervallumokat fogjuk ehhez felhasználni: $[-2, -1.84]$, $[-1.84, -1.15]$, $[-1.15, -0.07]$, $[-0.07, 0.81]$, $[0.81, 1.41]$ és $[1.41, 2]$. A következő eredményeket kaptam kerekítve: -1.87939, -1.80194, -0.44504, 0.34730, 1.24698 és 1.53209.

Ezek után már csak ki kell számolnunk, hogy mely 3-3 pont alkot egy-egy orbitot. Ezt meg tudjuk nézni az $f(x) = x^2 - 2$ függvénybe való behelyettesítéssel:

$$f^3(-1.87939) = f^2((-1.87939)^2 - 2) \approx f^2(1.53209) \approx f(0.34730) \approx -1.87939$$

és

$$f^3(-1.80194) \approx f^2(1.24698) \approx f(-0.44504) \approx -1.80194.$$

6. $Q_c(x) = x^2 + c$ függvénycsalád

Ehhez a részhez a [4] cikket használtam fel.

A most következő fejezet olyan szempontból lesz érdekes a számunkra, hogy eddig azt néztük meg, hogy egy adott függvénynek van-e periodikus pontja és ha van, azt hogy lehet kiszámolni, itt viszont úgy fogunk tudni megadni a $Q_c(x)$ függvénycsaládban függvényt, hogy annak legyen periodikus pontja, úgy, hogy azt is fogjuk tudni, hogy mennyi. Ehhez a c konstanszt fogjuk szabályozni.

Ha megfigyeljük, az előző fejezetben vett $f(x) = x^2 - 2$ függvény is a $Q_c(x)$ függvénycsaládba tartozik, ahol a $c = -2$.

6.1. Állítás. *Ha a Q_c kvadratikus leképezés c konstansát fel lehet írni $c = \lambda - \lambda^2$ alakban, akkor és csak akkor Q_c függvénynek létezik pontosan két fixpontja, amelyek λ és $1 - \lambda$. Ezek a fixpontok különbözőek, ha $\lambda \neq \frac{1}{2}$. A λ és a $Q_{\lambda - \lambda^2}$ függvény közötti hozzárendelés egyértelmű hozzárendelést biztosít a $\lambda \geq \frac{1}{2}$ valós számok és az olyan Q_c függvények között, amelyeknek van valós fixpontja.*

Bizonyítás

Az állítás könnyen igazolható behelyettesítéssel és a másodfokú egyenlet megoldóképletével. Először is vizsgáljuk meg a $Q_c(x) - x = 0$ egyenletet, amelynek a gyökei lesznek a $Q_c(x)$ fixpontjai. A függvény a következő: $x^2 + c - x = 0$. Ebből könnyen ki tudjuk fejezni a c konstanszt: $c = x - x^2$. Tehát olyan c értékekre lehet fixpontja a függvénynek, amelyek felírhatóak $\lambda - \lambda^2$ alakban. Ha az egyenletre a másodfokú egyenlet megoldóképletét használjuk, akkor a diszkrimináns $1 - 4c$. Ahhoz, hogy ez valós szám legyen az kell, hogy $1 \geq 4c$, tehát $\frac{1}{4} \geq c$. Amennyiben $c = \frac{1}{4}$ akkor az egyenletnek egy gyöke van és ilyenkor $c = \frac{1}{4} = \lambda - \lambda^2$, amiből következik, hogy $\lambda = \frac{1}{2}$.

Ahhoz, hogy egyértelműen fel tudjuk írni a fixpontokat talán a legegyszerűbb, ha a $c = \lambda - \lambda^2$ segítségével írjuk fel az egyenletet: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ kis átrendezéssel könnyen látható az egyenlet egyik gyöke, $x^2 - \lambda^2 - x + \lambda = 0$, amely a λ lesz. Mivel ismerjük az egyenlet egyik gyökét, ezért tudjuk, hogy le tudunk osztani $(x - \lambda)$ -val. Ebből az $x - (1 - \lambda) = 0$ egyenletet fogjuk kapni, tehát a függvény két fixpontja λ és $1 - \lambda$, amelyből azt is láthatjuk, hogy csak akkor van két különböző gyöke az egyenletnek, ha $\lambda \neq \frac{1}{2}$. ■

Az előző fejezetben vett példában $c = -2$, ami tényleg felírható $\lambda - \lambda^2 = 2 - 2^2 = -1 - (-1)^2 = -2$ és a fixpontok tényleg λ és $1 - \lambda$ attól függetlenül, hogy melyiket jelöljük ki λ -nak, $1 - 2 = -1$ és $1 - (-1) = 2$.

6.2. Állítás. Ha a Q_c leképezés c konstansát fel lehet írni $c = -1 - \mu - \mu^2$ alakban, ahol $\mu \in \mathbb{R}$ és $\mu \neq \frac{1}{2}$, akkor a Q_c függvénynek létezik egy 2-periódusú orbitja, ami $\{\mu, -1 - \mu\}$. A μ és a $Q_{-1-\mu-\mu^2}$ közötti hozzárendelés egyértelmű hozzárendelést biztosít a $\mu > -\frac{1}{2}$ valós számok és azon Q_c függvények között, amelyeknek van 2-periódusú orbitjuk, aminek a pontjai különbözőek.

Bizonyítás

Az 6.2. Állítás bizonyítása elég hasonló lesz az 6.1. Állítás bizonyításához.

Most is először vizsgáljuk meg a $Q_c^2(x) - x = 0$ egyenletet. Ennek az egyenletnek a gyökei a függvény lehetséges 2-periódusú pontjai lesznek. Lehetséges azért, mert ennek az egyenletnek gyökei a függvény fixpontjai. Emiatt biztosan le tudunk osztani $Q_c(x) - x$ -el. Tehát amit valójában vizsgálni fogunk az a

$$\frac{Q_c^2(x) - x}{Q_c(x) - x} = \frac{Q_c(x^2 + c) - x}{x^2 + c - x} = \frac{x^4 + 2cx^2 - x + c^2 + c}{x^2 + c - x}$$

amiből polinomosztással megkapható:

$$x^2 + x + c + 1.$$

Tehát ebből tudjuk, hogy

$$(x^2 + c - x) \cdot (x^2 + x + c + 1) = 0$$

és ekkor ha kizárjuk a fixpontokat, akkor tudjuk, hogy a szorzat első tagja nem lehet nulla ($x^2 + c - x \neq 0$), tehát azzal leoszthatunk, és számunkra csak az $x^2 + x + c + 1 = 0$ marad, amelyből könnyen kifejezhető a $c = -x^2 - x - 1$. Ebből tudjuk, hogy akkor van 2-periodikus pontja a függvénynek, ha c felírható $c = -\mu^2 - \mu - 1$ alakban. Amennyiben felírjuk a másodfokú egyenletünket, láthatjuk, hogy a diszkrimináns $1 - 4 \cdot (c + 1)$, ami akkor nem negatív, ha $c \leq -\frac{3}{4}$. Abban az esetben, ha $c = -\frac{3}{4}$, az egyenletnek csak egy gyöke van, ami: $-\frac{1}{2}$. Ekkor ha tekintetbe vesszük az előző állítást, akkor láthatjuk, hogy ez egy fixpontja lesz a $Q_{-\frac{3}{4}}(x) = x^2 - \frac{3}{4}$ függvénynek és ahogy azt már beláttuk a $c = -\frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}^2 = \lambda - \lambda^2$ egyenlőség fennáll. Ebből láthatjuk, hogy akkor van a függvénynek 2-periodikus pontja, ha c felírható $-\mu^2 - \mu - 1$ alakban és $c < -\frac{3}{4}$.

Ezek után, ha a $c = -\mu^2 - \mu - 1$ -et visszahelyettesítjük az egyenletbe ($x^2 + x - \mu^2 - \mu - 1 + 1 = 0$) akkor láthatjuk, hogy az $x = \mu$ megoldás gyöke az egyenletnek. Ha leosztunk $x - \mu$ -vel, akkor azt kapjuk, hogy $x + \mu + 1 = 0$, tehát a második gyök $x = -\mu - 1$. ■

Ismét vehetjük a fent említett példát, ahol c felírható $-1 - \mu - \mu^2 = -1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}^2 = -1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}^2 = -2$ alakban és a 2-periodikus pontok $\mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ és $-1 - \mu = -1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ vagy $\mu = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ és $-1 - \mu = -1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, tehát itt sem számít, hogy melyik lesz a μ .

6.3. Állítás. *A Q_c függvénynek létezik racionális fixpontja és racionális 2-periódusú orbitja is, akkor és csak akkor, ha $c = -\frac{3}{4} - (\frac{X}{Y})^2$ alakba írható, ahol X és Y tagjai a Pitagoraszai számhármasonak. Tehát $X^2 + Y^2 = Z^2$, ahol Z is egy pozitív egész szám. Ebben az esetben a fix pontok a következők: $\frac{1}{2} \pm \frac{Z}{Y}$, és a 2-periódusú pontok: $-\frac{1}{2} \pm \frac{X}{Y}$.*

Bizonyítás

Egyszerű belátni, hogy a $Q_c(x)$ függvénynek akkor és csak akkor van fix és 2-periodikus pontja, ha a c konstans felírható $\lambda - \lambda^2$ és $-\mu^2 - \mu - 1$ alakban is. Bár tudjuk, hogy a 2-periodikus pont létezéséből következik a fixpont, ettől most tekintsünk el. Tehát ez azt jelenti, hogy

$$\lambda - \lambda^2 = -\mu^2 - \mu - 1.$$

Ekkor teljes négyzetté alakítással a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} -\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} &= -\left(\mu + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \\ \left(\mu + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 &= \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Mivel a fix és a 2-periodikus pontok is racionálisak, az alapfeltevésből, ezért a törtet közös nevezőre tudjuk hozni úgy, hogy egész számok legyenek a nevezőben és a számlálóban is, ami miatt be lehet helyettesíteni a $\frac{2\mu+1}{2}$ helyére $\frac{X}{Y}$ és a $\frac{2\lambda-1}{2}$ helyére $\frac{Z}{Y}$ törtet, melyekre

$$\left(\frac{X}{Y}\right)^2 + 1 = \left(\frac{Z}{Y}\right)^2$$

érték jön ki, amelyre, amennyiben beszorzunk Y^2 -el, akkor a már jól ismert Pitagoraszai számhármast kapjuk.

$$X^2 + Y^2 = Z^2$$

Ekkor a fixpontok $\frac{1}{2} \pm \frac{Z}{Y} = \frac{1}{2} \pm (\lambda - \frac{1}{2})$ tehát λ és $1 - \lambda$ és a 2-periodikus pontok $-\frac{1}{2} \pm \frac{X}{Y} = -\frac{1}{2} \pm (\mu + \frac{1}{2})$ tehát μ és $-\mu - 1$ ahogy azt már az 6.1. Állításban és az 6.2. Állításban beláttuk. ■

6.4. Következmény. *A teljes lista az összes példából, ahol Q_c -nek létezik racionális fix és racionális 2-periodikus pontja is, a 6.3. Állításból kapott és $m > n > 0$ egész számokból, ahol m és n relatív prímek és egyik sem páros úgy, hogy*

$$X = m^2 - n^2, Y = 2mn, \quad \text{és} \quad Z = m^2 + n^2 \quad (5)$$

vagy

$$X = 2mn, Y = m^2 - n^2, \quad \text{és} \quad Z = m^2 + n^2 \quad (6)$$

6.1. Q_c függvény 3-periódusú orbitja

Itt az lenne a kérdés, hogy létezik-e olyan x_0 , hogy $Q_c^3(x_0) = Q_c(Q_c(Q_c(x_0))) = x_0$, és ki kell zárunk, hogy $Q_c(x_0) = x_0$, azért, hogy valódi 3-periodikus pont legyen.

Sarkovszkij tétele alapján, ha létezik olyan x_0 , hogy $Q_c^3(x_0) = x_0$, akkor kell, hogy legyen legalább egy x_f fixpontja, ami miatt le tudunk osztani $Q_c(x_0) - x_0$ -al.

Olyan x_0 -t keresünk, ami kielégíti a

$$\frac{Q_c(Q_c(Q_c(x_0))) - x_0}{Q_c(x_0) - x_0} = 0$$

egyenletet, amelyet ha felbontunk és egyszerűsítünk, akkor

$$x_0^6 + x_0^5 + (3c + 1)x_0^4 + (2c + 1)x_0^3 + (3c^2 + 3c + 1)x_0^2 + (c + 1)^2x + (c^3 + 2c^2 + c + 1) = 0$$

egyenletet kapjuk.

6.5. Állítás. *Valamely γ valós számra, amire igaz, hogy $\gamma \neq 0, \gamma \neq -1$, és $\gamma^2 + \gamma + 1 \neq 0$ legyen*

$$c = -\frac{\gamma^6 + 2\gamma^5 + 4\gamma^4 + 8\gamma^3 + 9\gamma^2 + 4\gamma + 1}{4\gamma^2(\gamma + 1)^2} \quad (7)$$

$$x_1 = \frac{\gamma^3 + 2\gamma^2 + \gamma + 1}{2\gamma(\gamma + 1)} \quad (8)$$

$$x_2 = \frac{\gamma^3 - \gamma - 1}{2\gamma(\gamma + 1)} \quad (9)$$

$$x_3 = -\frac{\gamma^3 + 2\gamma^2 + 3\gamma + 1}{2\gamma(\gamma + 1)}. \quad (10)$$

Ekkor:

1. Q_c függvénynek van 3-periódusú orbitja, ami $\{x_1, x_2, x_3\}$, úgy, hogy $x_2 = Q_c(x_1)$, $x_3 = Q_c(x_2)$, $x_1 = Q_c(x_3)$ és ez a három valós szám különböző. Továbbá $Q_c(x)$ függvény minden 3-periódusú orbitját le lehet írni a fent látható módon.
2. A c , x_1 , x_2 és x_3 számokra adott formula egy injektív hozzárendelés a valós $\gamma > 0$ és a Q_c függvény valós 3-periódusú orbitjai között.
3. A három pont az orbitban akkor és csak akkor racionális, ha γ maga is racionális szám.

Bizonyítás

Először is az, hogy $\gamma \neq 0$ és $\gamma \neq -1$ azért kell, hogy a nevező ne legyen 0, és az, hogy $\gamma^2 + \gamma + 1 \neq 0$ azért kell mert különben

$$x_1 = \frac{\gamma^3 + 2\gamma^2 + \gamma + 1 - 2 \cdot (\gamma^2 + \gamma + 1)}{2\gamma(\gamma + 1)} = \frac{\gamma^3 - \gamma - 1}{2\gamma(\gamma + 1)} = x_2$$

és ezzel a feltétellel kizártuk, hogy egyenlőek legyenek.

1. pont kimondja, hogy ez a három pont különböző és azt, hogy ezek a függvény 3-periodikus pontjai. Azt, hogy $Q_c^3(x_1) = Q_c^2(x_2) = Q_c(x_3) = x_1$ egyszerű behelyettesítéssel bizonyítható. Az érdekesebb kérdés az, hogy hogyan számoljuk ki ezeket a számokat.

Legyen a_1, a_2, a_3 a függvény egy 3-periodikus orbitja. Ekkor $a_2 = Q_c(a_1) = a_1^2 + c$ amiből kifejezhető, hogy $c = a_2 - a_1^2$, emellett $a_3 = Q_c(a_2) = a_2^2 + a_2 - a_1^2$ és $a_1 = Q_c(a_3) = a_1^4 + a_2^4 - 2a_1^2a_2^2 + 2a_2^3 - 2a_1^2a_2 + a_2^2 - a_1^2 + a_2$. Amennyiben 0-ra rendezzük, a következőt kapjuk:

$$a_1^4 + a_2^4 - 2a_1^2a_2^2 + 2a_2^3 - 2a_1^2a_2 + a_2^2 - a_1^2 + a_2 - a_1 = 0$$

Könnyen látható, hogy a fenti egyenlet igaz, ha $a_1 = a_2$. Emiatt ki tudunk emelni $a_2 - a_1$ -et polinom osztással.

$$(a_2 - a_1) \cdot (a_2^3 - a_1^3 + a_1a_2^2 - a_1^2a_2 + 2a_2^2 + 2a_1a_2 + a_1 + a_2 + 1) = 0$$

Mivel három különböző pontot keresünk, kizárhatjuk, hogy $a_2 - a_1 = 0$, tehát le tudunk vele osztani. Majd átalakításokkal a következőt kapjuk:

$$(a_1 + a_2)^3 + (2 - 2a_1)(a_1 + a_2)^2 + (1 - 2a_1)(a_1 + a_2) + 1 = 0.$$

Ekkor, ha azt mondjuk, hogy $\gamma = a_1 + a_2$ akkor a következő egyszerűsített egyenletet kapjuk:

$$\gamma^3 + 2\gamma^2 - 2a_1\gamma^2 + \gamma - 2a_1\gamma + 1 = 0$$

amelyből könnyen kiemelhető a_1 :

$$\begin{aligned} \gamma^3 + 2\gamma^2 + \gamma + 1 &= 2a_1\gamma^2 + 2a_1\gamma \\ \gamma^3 + 2\gamma^2 + \gamma + 1 &= 2\gamma(\gamma + 1)a_1 \\ \frac{\gamma^3 + 2\gamma^2 + \gamma + 1}{2\gamma(\gamma + 1)} &= a_1 \end{aligned}$$

Így, hogy x_1 már megvan, ki tudjuk számolni az x_2 értékét.

$$\begin{aligned} x_2 = a_2 = a_1 + a_2 - a_1 = \gamma - a_1 &= \frac{2\gamma^2(\gamma + 1)}{2\gamma(\gamma + 1)} - \frac{\gamma^3 + 2\gamma^2 + \gamma + 1}{2\gamma(\gamma + 1)} = \\ &= \frac{\gamma^3 - \gamma - 1}{2\gamma(\gamma + 1)} \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy $c = x_2 - x_1^2$, tehát

$$c = \frac{\gamma^3 - \gamma - 1}{2\gamma(\gamma + 1)} - \left(\frac{\gamma^3 + 2\gamma^2 + \gamma + 1}{2\gamma(\gamma + 1)} \right)^2 = \frac{\gamma^6 + 2\gamma^5 + 4\gamma^4 + 8\gamma^3 + 9\gamma^2 + 4\gamma + 1}{4\gamma^2(\gamma + 1)^2}$$

és ebből már kiszámítható $x_3 = a_3 = Q_c(a_2)$.

A 2. pont bizonyításához figyelembe vesszük, hogy x_1, x_2, x_3 és c valós számok, tehát $\gamma = x_1 + x_2$ is valós. Ahhoz, hogy igazoljuk azt a feltevést, hogy $\gamma > 0$ használjuk fel az x_i számokat a következőképpen:

$$x_1 + x_2 = \gamma, \quad x_2 + x_3 = -\frac{\gamma + 1}{\gamma} \quad \text{és} \quad x_1 + x_3 = -\frac{1}{\gamma + 1}$$

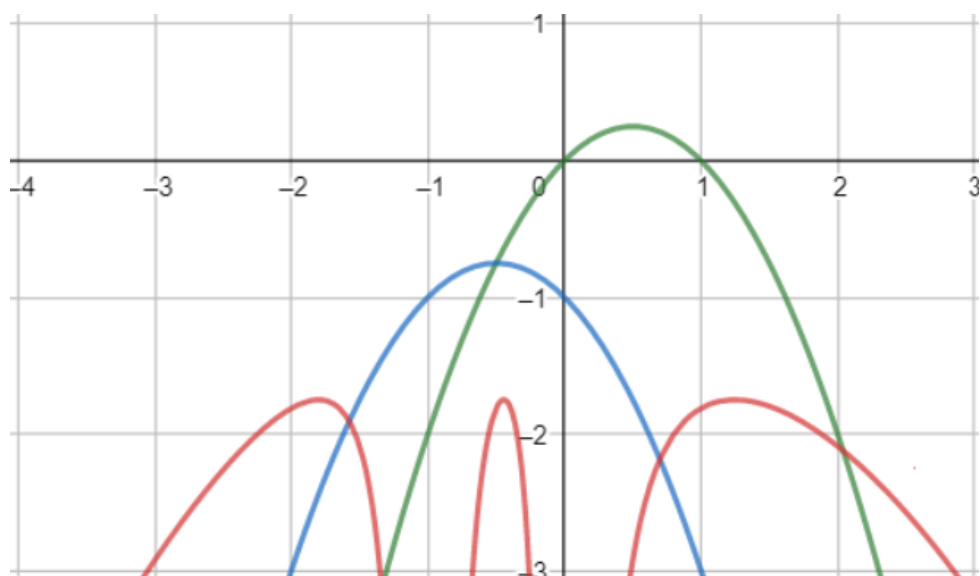
A fenti egyenletekből látható, hogy a három egyenlet közül csak egynek lehet a jobb oldala pozitív (amennyiben nem rendezzük át az egyenletet). Pontosítva $x_1 + x_2 > 0$ akkor és csak akkor, ha $\gamma > 0$, $x_2 + x_3 > 0$ akkor és csak akkor, ha $-1 < \gamma < 0$ és $x_1 + x_3 > 0$ akkor és csak akkor, ha $\gamma < -1$. Meg kell jegyezni, hogy két különböző valós γ_1 és γ_2 más 3-periodikus pontokhoz tartozik, hiszen $\gamma = x_1 + x_2$, akkor is, ha ugyanaz a c .

Végezetül a 3. pontnál, amennyiben γ racionális, akkor a képletek alapján minden x_i és c is racionális, emellett, ha az x_i pontok racionálisak akkor $\gamma = x_1 + x_2$ is racionális. ■

γ	c	x_1	x_2	x_3
$\frac{1}{4}$	$-\frac{270532}{78125}$	$\frac{139063}{78125}$	$-\frac{123438}{78125}$	$-\frac{189063}{78125}$
$\frac{1}{3}$	$-\frac{2689}{576}$	$\frac{43}{24}$	$-\frac{35}{24}$	$-\frac{61}{24}$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{421}{144}$	$\frac{17}{12}$	$-\frac{11}{12}$	$-\frac{25}{12}$
1	$-\frac{29}{16}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{4}$
$\frac{2}{3}$	$-\frac{8149}{3600}$	$\frac{77}{60}$	$-\frac{37}{60}$	$-\frac{113}{60}$
2	$-\frac{301}{144}$	$\frac{19}{12}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{23}{12}$
$\frac{3}{4}$	$-\frac{1435570}{459375}$	$\frac{329688}{459375}$	$-\frac{132813}{459375}$	$-\frac{479688}{459375}$
$\frac{3}{2}$	$-\frac{6469}{3600}$	$\frac{83}{60}$	$\frac{7}{60}$	$-\frac{107}{60}$
3	$-\frac{1849}{576}$	$\frac{49}{24}$	$\frac{23}{42}$	$-\frac{55}{24}$
$\frac{4}{3}$	$-\frac{49561}{28224}$	$\frac{223}{168}$	$\frac{1}{168}$	$-\frac{295}{168}$
4	$-\frac{7841}{1600}$	$\frac{101}{200}$	$\frac{59}{200}$	$-\frac{109}{200}$

A táblázat azt mutatja meg, hogy különböző γ -ákra milyen 3-periodikus pontok vannak. [4] cikkben látható táblázat kicsit kibővíve.

6.6. Következmény. *A Q_c függvénynek két 3-periódusú orbitja van, amelyek akkor és csak akkor állnak három különböző valós számból, ha $c < -\frac{7}{4}$. Ha $c = -\frac{7}{4}$, akkor Q_c függvénynek egy darab 3-periódusú orbitja van, ami három különböző irracionális számból áll, amelyek az $x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{4}x - \frac{1}{8} = 0$ egyenlet gyökei.*



19. ábra. Az látható, hogy milyen c -re milyen periodikus pontok lesznek. A zöld színnel rajzolt függvény a fixpontokat, a kék a 2-periodikus pontokat és a piros a 3-periodikus pontokat mutatja. Amennyiben választunk egy c konstanszt, azt egy vízszintes egyenessel ábrázolhatjuk, és az egyenes és a függvények metszéspontjában lesz(nek) a periodikus pont(ok). [4] cikkben látható ábra.

6.7. Következmény. Legyen három különböző c konstanstól függő halmaz, amelyek az olyan c értékeket tartalmazzák, amelyekre Q_c függvénynek van racionális 1, 2 vagy 3-periódusú orbitja ebben a sorrendben. Ekkor ez a három halmaz sűrű a $c \leq \frac{1}{4}$, $c \leq -\frac{3}{4}$ és $c \leq -\frac{7}{4}$ halmazokban ebben a sorrendben.

7. Összegzés

A Sarkovszkij rendezés és tétel segítségével a periodikus pontok létezése feltételeinek egy része nagyon leegyszerűsíthető a függvényekre. A tétel által tudjuk, hogy ha a függvénynek nincsen fixpontja, akkor más periodikus pontja sem lesz, ami nagyon sok időt megtakaríthat nekünk, amennyiben periodikus pontokat keresünk, emellett, ha be tudjuk bizonyítani, hogy van 3-periodikus pontja a függvénynek, akkor a tétel által tudjuk, hogy minden más periodikus pontja is van, anélkül, hogy keresnünk kellene ezeket. Ezért gondolom úgy, hogy ez az egyik legfontosabb tétel a témában.

Periodikus pontokat keresni egy bizonyos bonyolultságon felül nehéz feladat, de közelíteni sosem lehetetlen. A számítógépek korában már egész egyszerűen és egész pontosan lehet őket közelíteni, ha egy kicsit furfangosak vagyunk. Szerencsére már sok ember foglalkozott ezzel a témával mélyebben, és bár még mindig vannak homályos foltok, nagyon sok segítséget nyújthatnak nekünk a már kitalált megoldások.

Hivatkozások

- [1] CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems, Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer, James A. Yorke
Springer kiadó (2000)
- [2] Dinamikus rendszerek, Buczolich Zoltán kézirat.
- [3] Fixpont (Wikipédia, Magyar)
<https://hu.wikipedia.org/wiki/Fixpont>
- [4] Ralph Walde and Paula Russo: Rational Periodic Points of the Quadratic function $Q_c(x) = x^2 + c$
The American Mathematical Monthly 101 (1994), no. 4, 318-331
- [5] Ho, Chung Wu; Morris, Charles: A graph theoretic proof of Sharkovsky's theorem on the periodic points of continuous functions.
Pacific J. Math. 96 (1981), no. 2, 361-370.
- [6] Oleksandr Mykolayovych Sharkovsky (Wikipédia, Angol és Német)
https://en.wikipedia.org/wiki/Oleksandr_Mykolayovych_Sharkovsky
https://de.wikipedia.org/wiki/Oleksandr_Scharkowskyj
- [7] Az ukrán matematika egyik ékköve: Sarkovszkij tétele
<https://ematlap.hu/tudomany-tortenet-2022-10/1184-sarkovszkij-tetele>
- [8] Brouwer-féle fixponttétel (Wikipédia, Magyar)
https://hu.wikipedia.org/wiki/Brouwer-f%C3%A9le_fixpontt%C3%A9tel
- [9] Tien-Yien Li and James A. Yorke: Period Three Implies Chaos
The American Mathematical Monthly 82 (1975), no. 10, 985-992
- [10] Straffin, Philip D., Jr.: Periodic points of continuous functions.
Math. Mag. 51 (1978), no. 2, 99-105.
- [11] Faragó István és Horváth Róbert: Numerikus Módszerek
Typotex kiadó (2013).
- [12] Newton-módszer (Wikipédia, Magyar)
[https://hu.wikipedia.org/wiki/Newton-módszer](https://hu.wikipedia.org/wiki/Newton-m%C3%B3dszer)

[13] Intervallumleképezések periodikus pályái, Zarka Áron (szakdolgozat)

https://web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_alkmat/2022/zarka_aron.pdf

```

def f(x):
    return x**6 + x**5 - 5*x**4 - 3*x**3 + 7*x**2 + x - 1

def negf(x):
    return - x**6 - x**5 + 5*x**4 + 3*x**3 - 7*x**2 - x + 1

def fdx(x):
    return 6*x**5 + 5*x**4 - 20*x**3 - 9*x**2 + 14*x + 1

def negfdx(x):
    return - 6*x**5 - 5*x**4 + 20*x**3 + 9*x**2 - 14*x - 1

def fddx(x):
    return 30*x**4 + 20*x**3 - 60*x**2 - 18*x + 14

def negfddx(x):
    return - 30*x**4 - 20*x**3 + 60*x**2 + 18*x - 14

def fdddx(x):
    return 120*x**3 + 60*x**2 - 120*x - 18

```

```

def intervallumfelezes(a, b, k_max, toll, func):
    k = 0
    while k < k_max and b - a > toll:
        x = a + (b - a) / 2
        c = func(x)
        if c == 0:
            return x
        else:
            if c > 0:
                b = x
            else:
                a = x
        k = k + 1
    return x

print("A g'(x) függvény zérushelyei [-2, -1.22] intervallumon:")
print(intervallumfelezes(-2, -1.22, 200, 0.0001, negfddx))

print("A g'(x) függvény zérushelyei [-1.22, -0.14] intervallumon:")
print(intervallumfelezes(-1.22, -0.14, 200, 0.0001, fddx))

print("A g'(x) függvény zérushelyei [-0.14, 0.86] intervallumon:")
print(intervallumfelezes(-0.14, 0.86, 200, 0.0001, negfddx))

print("A g'(x) függvény zérushelyei [0.86, 1.5] intervallumon:")
print(intervallumfelezes(0.86, 1.5, 200, 0.0001, fddx))

```

```

A g'(x) függvény zérushelyei [-2, -1.22] intervallumon:
-1.5750561523437496
A g'(x) függvény zérushelyei [-1.22, -0.14] intervallumon:
-0.6540942382812499
A g'(x) függvény zérushelyei [-0.14, 0.86] intervallumon:
0.38447509765625
A g'(x) függvény zérushelyei [0.86, 1.5] intervallumon:
1.1780468749999997

```

```

def hurmodszer(a, b, k_max, func):
    x = b
    s = a
    for k in range(1, k_max + 1):
        xnew = x - (x - s) / (func(x) - func(s)) * func(x)
        if func(xnew) == 0:
            return xnew
        else:
            if func(xnew) * func(x) < 0:
                s = x
            x = xnew
    return xnew

print("A g'(x) függvény zérushelyei [-2, -1.58] intervallumon:")
print(hurmodszer(-2, -1.58, 200, fdx))

print("A g'(x) függvény zérushelyei [-1.58, -0.65] intervallumon:")
print(hurmodszer(-1.58, -0.65, 200, negfdx))

print("A g'(x) függvény zérushelyei [-0.65, 0.38] intervallumon:")
print(hurmodszer(-0.65, 0.38, 200, fdx))

print("A g'(x) függvény zérushelyei [0.38, 1.18] intervallumon:")
print(hurmodszer(0.38, 1.18, 200, negfdx))

print("A g'(x) függvény zérushelyei [1.18, 2] intervallumon:")
print(hurmodszer(1.18, 2, 200, fdx))

```

A $g'(x)$ függvény zérushelyei [-2, -1.58] intervallumon:
 -1.8420039857819572
 A $g'(x)$ függvény zérushelyei [-1.58, -0.65] intervallumon:
 -1.1459273798653993
 A $g'(x)$ függvény zérushelyei [-0.65, 0.38] intervallumon:
 -0.06885452150781121
 A $g'(x)$ függvény zérushelyei [0.38, 1.18] intervallumon:
 0.8130866170624403
 A $g'(x)$ függvény zérushelyei [1.18, 2] intervallumon:
 1.4103659367593935

```

def szelomodszer(a, b, k_max, func):
    x = b
    s = a
    for k in range(1, k_max + 1):
        if x==s:
            return x
        xnew = x - (x - s) / (func(x) - func(s)) * func(x)
        if func(xnew) == 0:
            return xnew
        else:
            s = x
            x = xnew
    return xnew

def newton_modszer(x0, k_max, func, funcdx):
    x = x0
    for k in range(1, k_max + 1):
        if func(x) == 0:
            return x
        if funcdx(x) == 0:
            print("Nulla a derivált érték")
            return x
        x = x - func(x) / funcdx(x)
        if func(x) == 0:
            return x
    return x

print("A g(x) függvény zérushelyei [-2, -1.84] intervallumon:")
print(newton_modszer(szelomodszer(-2, -1.84, 200, f), 200, f, fdx))

print("A g(x) függvény zérushelyei [-1.84, -1.15] intervallumon:")
print(newton_modszer(szelomodszer(-1.84, -1.15, 200, f), 200, f, fdx))

print("A g(x) függvény zérushelyei [-1.15, -0.069] intervallumon:")
print(newton_modszer(szelomodszer(-1.15, -0.069, 200, f), 200, f, fdx))

print("A g(x) függvény zérushelyei [-0.07, 0.81] intervallumon:")
print(newton_modszer(szelomodszer(-0.07, 0.81, 200, f), 200, f, fdx))

print("A g(x) függvény zérushelyei [0.81, 1.41] intervallumon:")
print(newton_modszer(szelomodszer(0.81, 1.41, 200, f), 200, f, fdx))

print("A g(x) függvény zérushelyei [1.41, 2] intervallumon:")
print(newton_modszer(szelomodszer(1.41, 2, 200, f), 200, f, fdx))

```

A $g(x)$ függvény zérushelyei $[-2, -1.84]$ intervallumon:
-1.879385241571818
A $g(x)$ függvény zérushelyei $[-1.84, -1.15]$ intervallumon:
-1.801937735804843
A $g(x)$ függvény zérushelyei $[-1.15, -0.069]$ intervallumon:
-0.4450418679126288
A $g(x)$ függvény zérushelyei $[-0.07, 0.81]$ intervallumon:
0.3472963553338607
A $g(x)$ függvény zérushelyei $[0.81, 1.41]$ intervallumon:
1.246979603717467
A $g(x)$ függvény zérushelyei $[1.41, 2]$ intervallumon:
1.5320888862379556

NYILATKOZAT

Név: Burgya Julianna Imola

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika

NEPTUN azonosító: JCZPXO

Szakedolgozat címe:

Periodikus pontok létezése

A **szakedolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2023.01.01

Burgya Julianna Imola
a hallgató aláírása