Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Őri Tünde

Állandó görbületű terek izometriái

Matematikai Elemző BSc szakdolgozat

Témavezető:

Sagmeister Ádám

Geometriai Tanszék

Budapest, 2023

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek Sagmeister Ádámnak, a téma kiválasztását, a sok segítséget, a szakdolgozatom sokszori elolvasását, nélüle nem jöhetett volna létre ez a dolgozat.
Szeretném megköszönni a családomnak és a páromnak a támogatást, hogy mindig hittek bennem.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés, jelölések **5**

2. Elméleti alapozás **7**

2.1. Csoportelmélet 7

2.2. Topológia 10

3. Állandó görbületű terek **14**

3.1. Euklideszi tér 14

3.2. Gömbi tér 16

3.3. Hiperbolikus tér 18

3.3.1. Hiperboloid modell 19

3.3.2. Cayley–Klein-modell 19

3.3.3. Poincaré-féle gömb modell 19

3.3.4. Poincaré-félsík modell 20

4. Izometriák **22**

4.0.1. Euklideszi tér 22

4.0.2. Gömbi tér 23

4.0.3. Hiperbolikus tér 23

5. Egybevágó csempékkel való lefedés **25**

5.0.1. Teljes sík fedése 26

5.0.2. Schwarz-háromszögek 29

5.0.3. Konvex lemezek fedése 33

5.0.4. Stein-probléma: 33

1. fejezet

Bevezetés, jelölések

A matematikai tanulmányaim folyamán a legjobban a geometriai terület tetszett meg nekem. Így nem volt kérdés, hogy a szakdolgozatomat ebből a területből fogom írni. Konzulensem az első megkeresés után több alternatív témakört is felvázolt nekem. Legjobban a síkok egybevágó csempékkel való lefedése tetszett, ami az (5.0.3) és az (5.0.4) alfejezetben vázolt problémák gömbi és hiperbolkus változatát Basit és Lángi felvetették az [1] cikkben, és ezek jelenleg is kutatás tárgyát képezik. Ahhoz hogy a csempézésről tudjunk beszélgetni a síkok izometriáit is át kell tekintenünk. Így lett a szakdolgozatom címe az állandó görbületű terek izometriái.
A következő fejezetek előkészítik a csempézés bevezetését, megértését.
A második fejezteben az algebrai csoportelmélettel és a topológiával foglalkozunk, ott is az alapvető definíciókat, tételeket vezetjük be, amit a későbbiekben használni is fogunk.
A harmadik fejezetben bevezetjük az állandó görbületű tereket, név szerint az euklideszi, a gömbi és a hiperbolikus teret. Bevezető definíciók mellett kitérek a metrikákra, a konvexitásra, valamint a koszinusztételre. A hiperbolikus tér modelljei is bemutatásra kerülnek ebben a fejezetben.
A negyedik fejezteben az izometriák fogalmát, valamint a különböző terekre való definíciókkal ismerkedhetünk meg.
Az ötödik fejezetben elérünk az egybevágó csempékkel való lefedéshez. Megvizsgáljuk mi történik, amikor egy teljes síkot fedünk le, valamint mikor egy konvex lemezt szeretnénk lefedni. Megismerkedhetünk a Schwarz-háromszögekkel és a Stein-problémával is.

A szakdolgozatban $0 \in \mathbb{N}$, valamint $\mathbb{N}^+$ a pozitív egész számok halmazát jelöli. A dolgozatban nagybetűvel jelölöm a pontokat, kisbetűvel a vektorokat. A skaláris szorzásra későbbiekben $\langle a, b \rangle$ jelölést használom, valamint a normára a $\|v\|$. A dolgozatban, ha testről beszélünk, mindig kommutatív testről van szó. Egy X halmaz hatványhalmazát jelölje $\mathcal{P}(X)$. Vektortér W altere $W \leq V$. $\mathcal{M}^n$ az állandó görbületű terek valamelyikét jelzi, ami lehet az euklideszi, a gömbi és a hiperbolikus. A szakdolgozatban főleg az $n = 2$ esetet nézzük.

2. fejezet

Elméleti alapozás

2.1. Csoportelmélet

Ebben az alfejezetben *Kiss Emil*[4] könyve segítségével gyűjtöttem ki azon definíciókat, tételeket, melyek a későbbiekben elengedhetetlenek lesznek, mivel az izometriák csoportot alkotnak a kompozícióval.

2.1.1. Definíció. ***Csoportnak*** *nevezünk egy* $(G, \cdot)$ *rendezett párt, ahol* G *egy nem-üres halmaz,* $(\cdot)$ *pedig egy bináris művelet a következő tulajdonságokkal:*

1. *Műveleti zártság*

   bármely két $a, b \in G$ *esetén* $a \cdot b \in G$

2. *A művelet asszociatív*

   minden $a, b, c \in G$ *elemekre* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

3. *Kétoldali egységelem létezése*

   egyértelműen létezik egy kitüntetett $e \in G$ *elem, amelyre igaz, hogy minden* $a \in G$ *elemre* $e \cdot a = a = a \cdot e$

4. *Kétoldali inverz létezése*

   minden $a \in G$ *elemhez egyértelműen létezik egy* $b = a^{-1}$ *elem, amelyre igaz, hogy* $a \cdot a^{-1} = e = a^{-1} \cdot a$*, ahol* e *a csoport fent definiált egységeleme*

2.1.2. Megjegyzés. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért G-re hivatkozunk csoportként a $\cdot$ jelölés nélkül. Legyen $g \cdot \ldots \cdot g = g^n$, ahol n darab g-t szorzok össze, valamint az $ab = a \cdot b$ jelölést fogom használni.

2.1.3. Definíció. *Egy G csoport $|G|$ **rendje** a csoport elemeinek száma. Ha ez véges, akkor G egy véges csoport. Egy $g \in G$ elem rendje pedig az a legkisebb $n \in \mathbb{N}$, amelyre $g^n = e$.*

2.1.4. Definíció. ***Komplexusnak** nevezzük egy csoport részhalmazait. A komplexusokon definiálunk egy szorzást a következőképpen: $K_1K_2 = \{k_1k_2|k_1 \in K_1, k_2 \in K_2\}$, valamint $K^{-1} = \{k^{-1}|k \in K\}$.*

Komplexusokat elemmel is szorozhatunk, ez egyelemű komplexussal való szorzást jelent: $gK = \{g\}\, K = \{gk|g \in G, k \in K\}$.

2.1.5. Definíció. *Egy G csoportnak **részcsoportja** $\emptyset \neq H \subseteq G$, ha ugyanarra a csoportműveletre és az inverzképzésre nézve is zárt, ezt $H \leq G$-vel jelöljük.*

2.1.6. Definíció. *A G csoport egy N részcsoportját akkor nevezzük **normális részcsoportnak** (vagy **normálosztónak**), ha egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak a magja.*

2.1.7. Jelölés. $N \lhd G$

2.1.8. Tétel. *A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor **normálosztó**, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$.*

2.1.9. Definíció. *Legyen G csoport, $H \leq G$ és $g \in G$. A gH halmazt bal oldali **mellékosztálynak** nevezzük. Ugyanígy a Hg halmaz jobb oldali mellékosztály.*

2.1.10. Definíció. (Faktorcsoport) *Egy G csoport N normálosztójának mellékosztályaiból alkotott csoport a $(gN)(hN) = (gh)N$ műveletre nézve, amit ${}^{G}/_{N}$-nel jelölünk.*

2.1.11. Definíció. ***Homomorfizmus** egy olyan $\varphi\colon G \to H$ leképezés, amely művelettartó, vagyis minden $a, b \in G$ elemre $\varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(ab)$.*

2.1.12. Definíció. *Egy $\varphi\colon G \to H$ homomorfizmus **izomorfizmus**, ha bijektív. G és H **izomorf**, ha létezik $\varphi\colon G \to H$ izomorfizmus (**jelölés:** $G \cong H$).*

2.1.13. Megjegyzés. A homomorfizmusok és az izomorfizmusok csoportot alkotnak a kompozícióra nézve.

2.1.14. Definíció. *Egy S halmaz* $\mathrm{Sym}(S)$ ***szimmetrikus csoportja*** *az a csoport, amely az S halmaz összes bijekcióját tartalmazza, a kompozícióra, mint csoportműveletre nézve. A szimmetrikus csoport elemei az S* ***permutációi****.*

2.1.15. Definíció. *Legyen Ω egy tetszőleges alaphalmaz. A $G \leq Sym(\Omega)$ alakú csoportokat Ω-n ható* ***transzformációcsoportoknak*** *nevezzük. Abban az esetben, ha Ω véges halmaz, akkor szokás* ***permutációscsoportokról*** *is beszélni.*

2.1.16. Példa. (Mátrixcsoportok) Legyen T test és $n \leq 1$ egész. Ekkor a T fölötti $n \times n$-es invertálható mátrixok csoportját a szorzásra általános lineáris csoportnak nevezzük, és $\mathrm{GL}(n, T)$-vel jelöljük.

Azokat a mátrixok, melyek determinánsa 1 részcsoportot alkotnak $\mathrm{GL}(n, T)$-ben. Ennek a neve speciális lineáris csoport, jele $\mathrm{SL}(n, T)$.

$O(n)$ jelöli $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$-nek az ortogonális mátrixokból álló részcsoportját.

$O(n)$ között részcsoportot alkotnak azok, melyeknek determinánsa 1, ennek jele $\mathrm{SO}(n)$ és neve speciális ortogonális csoport.

$U(n)$ a $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}$-nek az unitér mátrixokból álló részcsoportja.

$\mathrm{SU}(n)$ pedig az 1 determinánsú unitér mátrixokból álló részcsoport, melynek neve speciális unitér csoport.

A $\mathrm{GL}(n, T)$ centrum szerinti faktorcsoportját projektív általános lineáris csoportnak nevezzük, aminek a jele $\mathrm{PGL}(n, T)$.

$\mathrm{PSL}(n, T)$ jelöli az $\mathrm{SL}(n, T)$ csoportnak a centrum szerinti faktorcsoportját, ez a projektív speciális lineáris csoport.

2.1.17. Definíció. *Egy szabályos n-szög szimmetriacsoportját n-edfokú* ***diédercsoportnak*** *nevezzük, és D_n-nel jelöljük.*

2.1.18. Állítás. *I indexhalmaz tetszőleges számosságú, G_α csoport minden $\alpha \in I$-re nézve, ugyanazzal a művelettel. Ekkor $\bigcap_{\alpha \in I} G_\alpha$ csoport.*

Bizonyítás. Tetszőleges $a, b \in \bigcap G_\alpha$ esetén $ab \in \cap G_\alpha$

$e \in \bigcap G_\alpha$, mert $e \in G_\alpha \forall \alpha$

$\alpha \in \bigcap G_\alpha$, akkor $\alpha^{-1} \in \cap G_\alpha$. $\square$

2.1.19. Definíció. *Tetszőleges G csoport esetén a $H \subseteq G$ által* ***generált részcsoport*** *a legszűkebb X-et tartalmazó részcsoportja G-nek, jele: $\langle H \rangle$. Ez azt jelenti, hogy $\langle H \rangle = \bigcap_{F \subseteq H \leq G} F$. A H részhalmazt G* ***generátorrendszerének*** *nevezzük, ha $\langle H \rangle = G$.*

2.2. Topológia

Ebben az alfejezetben *Szűcs András*[8] jegyzetét használtam, hogy az alapvető topológiai fogalmakat bevezethessem.

2.2.1. Definíció. *Az (X, Ω) párt* ***topologikus térnek*** *nevezzük, ha X tetszőleges halmaz, $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$, és igazak a következő axiómák:*

1. $\emptyset \in \Omega, X \in \Omega$
2. $U_\alpha \in \Omega\, (\forall \alpha \in A)$ *esetén* $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \Omega$ *tetszőleges A indexhalmazra*
3. $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \Omega$ *esetén* $\cap_{i=1}^n U_i \in \Omega$ *bármely* $n \in \mathbb{N}^+$ *esetén.*

2.2.2. Megjegyzés. Gyakran X-et magát topologikus térnek mondjuk, melybe beleértjük, hogy X-en adott egy Ω topológia.

2.2.3. Definíció. *Az $U \subset X$ részhalmazt* ***nyíltnak*** *nevezzük, ha $U \in \Omega$. A $B \subset X$ részhalmaz* ***zárt***, *ha az $X \setminus B$ komplementer nyílt.*

2.2.4. Megjegyzés. A zárt halmazok rendszeréről (jelölés: Ω') megállapíthatjuk a következőket:

1. $\emptyset \in \Omega', X \in \Omega'$
2. $B_\alpha \in \Omega' \Leftarrow \cup_{\alpha \in A} B_\alpha \in \Omega'$ tetszőleges A indexhalmazra
3. $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \Omega' \Leftarrow \cap_{i=1}^n B_i \in \Omega'$

A nyílt halmazok rendszere tehát tetszőleges unióra, és véges metszetre „zárt”, míg a zárt halmazok rendszere véges unióra és tetszőleges metszetre zárt.

2.2.5. Definíció. *Legyen $x \in X$. Az x pont* ***környezetének*** *mondjuk az $U \subset X$ halmazt, ha létezik V nyílt halmaz, melyre $x \in V \subset U$.*
Legyen $A \subset X$. Az A ***belső részén*** *értjük (**jelölés:** $\mathrm{int}A$), az A-ban fekvő nyílt halmazok unióját. Az $x \in A$ az A* ***belső pontja***, *ha $x \in \mathrm{int}A$*

2.2.6. Definíció. *Ha X topologikus tér, akkor egy $a\colon \mathbb{N} \to X$ leképezést* ***sorozatnak*** *nevezzük. Az $n \in \mathbb{N}$ szám képét jelöljük a_n-nel, magát a sorozatot pedig (a_n)-nel.*
Az (a_n) X-beli sorozat az $x_0 \in X$ ponthoz ***konvergál***, *($\lim a_n = x_0$ vagy $a_n \to x_0$), ha x_0 minden U környezetére létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $n \geq n_0$ esetén $a_n \in U$. Ilyenkor x_0 a sorozat* ***határértéke***. *Ha egy sorozatnak létezik határértéke, akkor* ***konvergens***, *különben divergens.*

2.2.7. Definíció. *Az X topologikus tér* ***Hausdorff-tér***, *ha minden $a \neq b, a, b \in X$-nek létezik U_a és U_b környezete úgy, hogy $a \in U_a$, $b \in U_b$ és $U_a \cap U_b = \emptyset$.*

2.2.8. Állítás. *Hausdorff-térben egy sorozatnak legfeljebb egy határértéke van.*

Bizonyítás. Indirekt bizonyítjuk.

Tegyük fel, hogy egy sorozatnak a és b is határértéke, valamint $a \neq b$. Ekkor léteznek olyan U_a és U_b környezetek, melyek metszete üres. Mivel mindkettő határértéke a sorozatnak, így léteznie kell n_{a_0} és n_{b_0} küszöbindexeknek, hogy ha n nagyobb mindkettőnél, akkor a sorozat n-edik eleme U_a-ban és U_b-ben is benne van, ez pedig ellentmondás. □

2.2.9. Definíció. *Legyen $A \subset X$, és $\Omega_A = \{V \subset A | V = A \cap U$ valamely $U \in \Omega$ -ra $\}$. (A, Ω_A) egy topologikus tér. Ezt a teret X* ***alterének*** *nevezzük.*

2.2.10. Definíció. *Az X topologikus tér* ***összefüggő***, *ha részhalmazai közül csak X-re és az üreshalmazra teljesül, hogy mind zárt, mind nyílt. Egy topologikus tér részhalmaza összefüggő, ha az altértopológiában összefüggő.*

2.2.11. Definíció. *Egy X topologikus tér* ***fedése*** *egy olyan $H \subset P(X)$ halmazrendszer, melyre igaz, hogy minden $x \in X$-re létezik olyan $A \in H$, melyre $x \in A$. Egy fedés nyílt/zárt, ha elemei nyíltak/zártak.*

2.2.12. Definíció. *Az $x \in X$ pont az $A \subset X$ halmaz **torlódási pontja**, ha x minden környezete tartalmazza A végtelen sok pontját.*

Legyen X egy topologikus tér. Tekintsük a következő tulajdonságokat:

1. X minden nyílt fedéséből kiválasztható véges részfedés;
2. Ha X-ben adottak az F_α zárt halmazok, melyek közül bármely véges sok metszete nem üres, akkor $\cap F_\alpha \neq \emptyset$;
3. X minden megszámlálható nyílt fedéséből kiválasztható véges fedés;
4. Ha X-ben adott megszámlálható sok F_i zárt halmaz, melyek közül bármely véges sok metszete nem üres, akkor $\cap F_i \neq \emptyset$;
5. **Cantor-tulajdonság:** nem-üres, zárt halmazok $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ csökkenő sorozatára $\cap F_i \neq \emptyset$;
6. Minden végtelen halmaznak van torlódási pontja;
7. Minden X-beli sorozatnak létezik konvergens részsorozata.

2.2.13. Definíció. *Az X tér **kompakt**, ha teljesül rá az 1. tulajdonság. Az X tér **megszámlálhatóan kompakt**, ha teljesül rá a 3. tulajdonság. Az X tér **sorozatkompakt**, ha teljesül rá a 7. tulajdonság.*

2.2.14. Definíció. *Egy $\Sigma \subset \Omega$ halmazrendszer az (X, Ω) tér **bázisa**, ha minden nyílt halmaz előáll Σ-beliek uniójaként.*

2.2.15. Definíció. *Legyen (X, Ω) topologikus tér. A $\Sigma' \subset \Omega$ halmazrendszer **előbázis**, ha Σ'-beli halmazokból képzett véges metszetek bázist alkotnak.*

2.2.16. Definíció. *Legyenek (X, Ω) és (Y, τ) topológikus terek. Egy $f\colon X \to Y$ leképezésről azt mondjuk, hogy **folytonos**, ha minden Y-beli nyílt halmaz ősképe X-ben nyílt.*

2.2.17. Állítás. *A folytonosság ekvivalens definíciójához jutunk, ha a következő valamelyikét követeljük meg:*

1. *Létezik egy bázis Y-ban, melynek minden elemének ősképe nyílt;*

2. *Létezik egy előbázis Y-ban, melynek minden elemének ősképe nyílt;*

3. *Minden Y-beli zárt halmaz őse zárt.*

2.2.18. Definíció. *Ha f egy folytonos bijekció és f^{-1} is folytonos, akkor f-et* ***homeomorfizmusnak*** *nevezzük. Az X tér* ***homeomorf*** *az Y térrel, ha létezik $f\colon X \to Y$ homeomorfizmus.*

2.2.19. Definíció. *Legyen (X, p) egy metrikus tér. Az X halmazon a $p\colon X \times X \to [0; \infty)$ függvény egy* ***metrika****, ha*

1. $p(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $p(x, y) = p(y, x)$ *minden* $x, y \in X$ *esetén*
3. $p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z)$ *minden* $x, y, z \in X$ *esetén.*

2.2.20. Definíció. (Belső pont) *$K \subseteq X$ halmaz, ahol (X, d) metrikus tér. A z középpontú r sugarú zárt gömböt $B(z, r) = \{y \in X\colon d(z, y) \leq r\}$ jelöli. K-nak y a* ***belső pontja****, ha létezik $r > 0$, hogy $B(y, r) \subseteq K$.*

2.2.21. Jelölés. $\mathrm{int}K$: K belső pontjainak halmaza.

2.2.22. Definíció. *K* ***határa*** *: $\partial K = K \setminus \mathrm{int}K$.*

3. fejezet

Állandó görbületű terek

Ettől a fejezettől *Kurusa Árpád*[5], valamint *Moussong Gábor*[7] könyvét vettem alapul.

3.1. Euklideszi tér

3.1.1. Definíció. *A (V, B) párt **euklideszi vektortérnek** nevezzük, ha V véges dimenziós valós vektortér, és $B\colon V \times V \to \mathbb{R}$ pozitív definit szimmetrikus bilineáris függvény.*

3.1.2. Megjegyzés. Ezt a függvényt V-beli skaláris szorzásnak nevezzük, és az $u, v \in V$ vektorokon felvett értékeket $B(u, v)$ helyett inkább uv-vel jelöljük.

3.1.3. Megjegyzés. Az $\mathbb{R}^n$ koordinátateret az $xy = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ skaláris szorzat automatikusan euklideszi vektortérré teszi, ezt nevezzük standart n-dimenziós euklideszi vektortérnek, ahol $x = (x_1, \ldots, x_n)$ és $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

3.1.4. Definíció. *$A, B \subseteq V$ **Minkovski-összege** $A + B = \{a + b\colon a \in A, b \in B\}$, $A + b = A + \{b\}$.*

3.1.5. Definíció. (Affin altér) *$W \leq V$ és $v \in V$ esetén **affin altéren** $W + v$-t értjük.*

3.1.6. Definíció. *A v **normája** (vagy **hossza**) $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Ez indukálja a szokásos euklideszi metrikát: v és w távolságát a*

$$d_{\mathbb{R}^n}(x, y) = \|v - w\| = \sqrt{(v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 + \ldots + (v_n - w_n)^2}$$

képlet adja meg.

3.1.7. Definíció. *$\mathbb{R}^n$-beli K ponthalmaz **konvex**, ha $\forall x, y \in K$-re $[x, y] \subseteq K$ ahol $[x, y]$ az x-et y-nal összekötő szakasz, azaz $[x, y]_{\mathbb{R}^n} = \{\lambda x + (1 - \lambda)y \colon \lambda \in [0, 1]\}$.*

3.1.8. Lemma. *Konvex halmazok metszete konvex.*

Bizonyítás. Ha x és y benne van a metszetben, akkor minden egyes halmazban is benne van. Mivel minden halmaz konvex, ezért minden halmaz tartalmazza az $[x, y]$-t, így a metszetük is. □

3.1.9. Definíció. *$X \in \mathbb{R}^n$ **polárisa** $X^* = \{y \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, y\rangle \leq 1 \forall x \in X\}$ ha X konvex test, aminek O belső pontja, akkor X^* is egy O-ta belsejében tartalmazó konvex test.*

3.1.10. Állítás. (*AK* polárisa) *$(AK)^* = (A^{-1})^T(K^*)$, ha $A \in GL(n)$*

Bizonyítás.

$$(AK)^* = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, z\rangle \leq 1 \forall z \in AK\} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, Az\rangle \leq 1 \forall Az \in AK\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, z\rangle \leq 1 \forall z \in K\} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle A^T x, z\rangle \leq 1 \forall z \in K\} =$$
$$= (A^T)^{-1}(A^T x \in \mathbb{R}^n \colon \langle A^T x, z\rangle \leq 1 \forall z \in K) =$$
$$= (A^T)^{-1}(x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, z\rangle \leq 1 \forall z \in K) = (A^T)^{-1}(K^*)$$

□

3.1.11. Megjegyzés. Speciális eset, ha $A \in O(n)$ (azaz $A^T = A^{-1}$), akkor $(AK)^* = (A^{-1})^{-1}(K)^* = A(K)^*$. Tehát, az ortogonális polárisa megegyezik a poláris ortogonálisával.

3.1.12. Definíció. *Az origó csúcsú kúp félegyenesek uniójaként írható fel, tehát $X \subset \mathbb{R}^n$, melyre $\forall x \in X$-re $\forall \lambda \geq 0$-ra $\lambda x \in X$.*

3.1.13. Megjegyzés. Ha K konvex kúp, akkor K^* is az, sőt ilyenkor $K^* = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, z\rangle \leq 1 \forall z \in K\}$ ilyenkor $\langle x, z\rangle \leq \lambda \forall \lambda > 0$-ra. Tehát ebből következik, hogy $K^* = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, z\rangle \leq 0 \forall e \in K\}$.

3.2. Gömbi tér

3.2.1. Definíció. *Legyen* $\mathbb{R}^{n+1}$ *tetszőleges euklideszi vektortér,* $\dim \mathbb{R}^{n+1} = n + 1 \geq 1$. ***Gömbi térnek****, pontosabban* n*-dimenziós gömbi térnek nevezzük* $\mathbb{R}^{n+1}$ *egységgömbjét, azaz az* $\mathbb{S}^n = \{a \in \mathbb{R}^{n+1} \colon ||a|| = 1\}$ *halmazt.*

3.2.2. Definíció. *Ha* $U \leq \mathbb{R}^{n+1}$ *tetszőleges* $(k+1)$*-dimenziós lineáris altér, akkor az* $\mathbb{S}^n \cap U$ *halmaz maga is* k*-dimenziós gömbi tér. Az* $\mathbb{S}^n$ *gömbi tér így keletkező részhalmazait* k*-dimenziós* ***gömbi altereknek*** *nevezzük* $(0 \leq k \leq n)$.

3.2.3. Definíció. *Ha* x *és* y *két különböző és nem átellenes pont az* $\mathbb{S}^n$ *gömbi térben, akkor egyértelműen létezik olyan* K ***főkör*** $\mathbb{S}^n$*-ben (azaz* $1 \dim$ *altér), amely* x*-et és* y*-t tartalmazza. Ennek a főkörnek a rövidebbik ívét tekintjük az* x, y *végpontú* $[x, y]_{\mathbb{S}^n}$ *geodetikus szakasznak. A* K *főkör* x*-beli érintővektorai között el tudjuk különíteni a* y *irányába mutató vektorokat a többitől: egy* u *irányvektorról akkor mondjuk, hogy* y *felé mutat, ha* $y = \lambda x + \mu u$*, ahol* $\mu > 0$*. Ennek alapján egy gömbi szakasz végpontjaiban egyértelműen tudunk a másik végpont irányába egységnyi irányvektorokat felvenni.*

3.2.4. Definíció. *A* ***gömbi metrikát*** $x, y \in S^n$ *pontos esetén* $d_{\mathbb{S}^n} = \arccos\langle x, y\rangle$ *adja meg, ahol* $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ *az euklideszi skaláris szorzat* $\mathbb{R}^{n+1}$*-ben. Ez nem más, mint az* x *és* y *pontok szöge.*

3.2.5. Lemma. (Koszinusztétel) *Legyenek a gömbi háromszögön* x, y, z *csúcsok. A csúcsok közti hosszak pedig* a, b, c*, valamint a* c *oldallal szemben* γ *szög. Ekkor a koszinusztétel a következő:*

$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \cos(\gamma)$$

Derékszögű háromszögben, ahol $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$ *a következőképpen néz ki:*
$0 = -\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos c$ *(addíciós azonosság)*
$\cos c = \cot\alpha \cdot \cot\beta$

3.2.6. Állítás. $d_{\mathbb{S}^n}$ *metrika.*

Bizonyítás. A következő három tulajdonságot kell belátnunk:

1. $d_{\mathbb{S}^n}(x, y) \leq 0$

2. szimmetria $d_{\mathbb{S}^n}(x,y) = d_{\mathbb{S}^n}(y,x)$

3. $d_{\mathbb{S}^n}(x,y) \leq d_{\mathbb{S}^n}(y,z) + d_{\mathbb{S}^n}(z,x) \forall x,y,z \in \mathbb{S}^n$

Legyenek az oldalak a következők:
$c = d_{\mathbb{S}^n}(x,y)$
$a = d_{\mathbb{S}^n}(y,z)$
$b = d_{\mathbb{S}^n}(z,x)$

1. $d_{\mathbb{S}^n}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \langle x,y\rangle = 1 \Leftrightarrow \cos((x,O,y)$ által bezárt szög$) = 1 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow (x,O,y)$ által bezárt szög $= 0 \Leftrightarrow x = y$

2. $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

3. Koszinusztételt alulról becsüljük, azaz

$$\cos(c) \geq \cos(a)\cdot\cos(b) - \sin(a)\cdot\sin(b) = \cos(a+b),$$

   mivel az arccos függvény szigorúan monoton csökkenő és $\cos(\gamma) \geq -1$, ezért $c \leq a+b$.

□

3.2.7. Megjegyzés. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\cos(\gamma) = -1$, tehát $\gamma = \pi$, ami azt jelenti, hogy $z \in [x,y]_{\mathbb{S}^n}$.

3.2.8. Definíció. *Egy $\mathbb{S}^n$-beli X halmaz* ***konvex****, ha része egy nyílt félgömbnek és $\forall x,y \in X$-re $[x,y]_{\mathbb{S}^n} \subseteq X$.*

3.2.9. Definíció. *Egy A halmazrendszert* ***metszetzártnak*** *nevezünk, ha bármely két A-beli halmaz metszete is A-beli.*

3.2.10. Definíció. *Bármely ponthalmaz* ***konvex burka*** *a halmazból vett véges pontrendszerek konvex kombinációiból áll.*

3.2.11. Definíció. ***Gömbi sokszög****: Véges sok $\mathbb{S}^2$-beli (nyílt félgömbön lévő) pont konvex burka.*

3.3. Hiperbolikus tér

3.3.1. Definíció. *A **hiperbolikus tér** azon $\mathbb{R}^{n+1}$-beli $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ pontok halmaza, melyre $x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2 = 1$ és $x_0 \geq 1$. $\mathbb{H}^n$ jelölje az n-dimenziós hiperbolikus geometria alapterét.*

3.3.2. Definíció. *Legyen $\mathcal{B}\colon \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, ahol $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ és $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$, ekkor $(x, y) \mapsto x_0y_0 - x_1y_1 - \ldots - x_ny_n$.*

3.3.3. Definíció. (Hiperbolikus távolság) *x és y között a következő: $d_{\mathbb{H}^n} = \operatorname{arcosh}(\mathbb{B}(x, y))$.*

3.3.4. Lemma. (Koszinusztétel) *Legyenek a hiperbolikus téren a háromszögek csúcsai x, y, z. A csúcsok közti hosszak pedig a, b, c, valamint a c oldallal szemben γ szög. Ekkor a koszinusztétel a következő:*

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cdot \cosh(b) - \sinh(a) \cdot \sinh(b) \cdot \cos(\gamma)$$

Derékszögű háromszögben, ahol $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$ a következőképpen néznek ki:
$0 = -\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cosh c$ *(addíciós azonosság)*
$\cosh c = \cot\alpha \cdot \cot\beta$

3.3.5. Állítás. *$d_{\mathbb{H}^n}$ metrika.*

Bizonyítás. A következő három tulajdonságot kell belátnunk:

1. $d_{\mathbb{H}^n}(x, y) \leq 0, d_{\mathbb{H}^n}(x, y) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = y$
2. $d_{\mathbb{H}^n}(x, y) = d_{\mathbb{H}^n}(y, x)$
3. háromszög-egyenlőtlenség: $\forall x, y, z \in \mathbb{H}^n$-re $d_{\mathbb{H}^n}(x, y) \leq d_{\mathbb{H}^n}(y, z) + d_{\mathbb{H}^n}(z, x)$

Legyenek az oldalak a következők:
$c = d_{\mathbb{H}^n}(x, y) = \operatorname{arcosh}(\mathcal{B}(x, y))$
$a = d_{\mathbb{H}^n}(y, z) = \operatorname{arcosh}(\mathcal{B}(y, z))$
$b = d_{\mathbb{H}^n}(z, x) = \operatorname{arcosh}(\mathcal{B}(z, x))$

1. $(x, y \in \mathbb{H}^n \operatorname{arcosh}(\mathcal{B}(x, y)) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = y$

2. $\mathcal{B}(x,y) = \mathcal{B}(y,x)$-ből következik. ($B$ definíciójából)

3. $\cosh(c) \leq \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b) = \cosh(a+b)$ Mivel a cosh szigorúan monoton növekvő függvény a pozitív félegyenesen, ezért $c \leq a+b$

□

3.3.6. Megjegyzés. Egyenlőség akkor és csak akkor fordulhat elő, ha $\cos(\gamma) = -1$.

3.3.1. Hiperboloid modell

3.3.7. Definíció. *A hiperboloid modell felírható a következőképpen:* $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathcal{B}(x,x) = 1, x_0 \geq 1\}$.

3.3.2. Cayley–Klein-modell

3.3.8. Definíció. *Legyen a* $q \in Q(\mathbb{R}^{n+1})$ *kvadratikus alak a* $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1}^2$ *formulával definiálva. Ekkor az* $\mathbb{R}^n = P(\mathbb{R}^{n+1})$ *jelölés melett* $K = \mathbb{S}^{n-1}$ *az* $\mathbb{R}^n$ *euklideszi tér origó körüli egységgömbje,* X *az egységgömb belseje. Ebben a speciális esetben a projektív modellt Cayley–Klein-féle modellnek nevezzük.*

3.3.9. Definíció. *Tetszőleges* $A, B \in X$ *pontokra* A *és* B *hiperbolikus távolságán a*

$$d_{\mathbb{H}^n}(A,B) = \begin{cases} 0, & \text{ha } A = B \\ 1/2|\ln(UVAB)|, & \text{ha } A \neq B \text{ és } U, V = \langle A, B\rangle \cap K \end{cases},$$

ahol U *és* V *az* A, B *egyenes két metszéspontjai* K*-val és az* $UVAB$ *4 kollineáris pont kettős viszonyát jelenti.*

3.3.3. Poincaré-féle gömb modell

3.3.10. Definíció. (Möbius-transzformáció) $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, $z \to \dfrac{az+b}{cz+d}$, *ahol* $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *és* $ad - bc \neq 0$.

3.3.11. Megjegyzés. $UVAB$ kociklikus pontok kettősviszonyán $(U'V'A'B')$ kettősviszont értjük, ahol $UVABA$ kört $U'V'A'B$ egyenesbe képeztük egy Möbius-transzformációval. Möbius-transzformáció kettősviszonytartó.

3.3.12. Definíció. *Tekintsük az origó középpontó egységgömböt az x és y tengelyek síkjába képező, $(0,-1,0)$ középpontú sztereografikus projekciót. A szereografikus projekció szögtartása és körtartása miatt a félgömböt határoló kört merőlegesen metsző körök az x és z tengelyek síkjának origó középpontú egységkörét merőlegesen metsző körökre illeszkedő pontokba, illetve ugyanezen kör átmérőibe mennek át.*

3.3.13. Definíció. *Tetszőleges $A, B \in X$ pontokra definiáljuk a modellbeli távolságot a*

$$d_{\mathbb{H}^n}(A,B) = \begin{cases} 0, & haA = B \\ |ln(UVAB)|, & haA \neq B \end{cases}$$

formulával, ahol az $A \neq B$ esetben az U és V pontokat az A-n és B-n áthaladó K-t merőlegesen metsző kör vagy egyenes metszi ki K-ból. $(UVAB)$ pedig a négy pont köri kettősviszonyát jelöli.

3.3.4. Poincaré-félsík modell

Ebben az alfejezetben *Ilyas Khan*[2] jegyzetét vettem segítségül.

3.3.14. Definíció. *Tekintsük az origó középpontú egységgömböt az x és y tengelyek síkjába képező, $(0,0,1)$ középpontú sztereografikus projekciót. A szereografikus projekció szögtartása és körtartása miatt a félgömböt határoló kört merőlegesen metsző körök képei az x és y tengelyek síkjának x tengely által határolt felső félsíkjában fekvő, x tengelyre illeszkedő középpontú félkörök, illetve ugyanezen fésíkban fekvő y tengellyel párhuzamos félegyenesek.*

Egy $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ alakú Möbius-transzformáció inverze

$$f^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a},$$

például $\dfrac{z-i}{-z-i}$ a felső félsíkot az egységkörbe képzi;
$\dfrac{-iz+i}{z+1}$ a Poincaré-körmodellt a felső félsík modellbe képzi.

3.3.15. Definíció. *Tekintsük azokat az* $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ *alakú Möbius-transzformációkat, melyekre* $ad - bc = 1$*. Ez a felső félsíkot a felső félsíkba viszi. Ezek csoportot alkotnak:* $\mathrm{PSL}(2)$*.*

4. fejezet

Izometriák

Ebben a fejezetben *Kurusa Árpád*[5] és *Moussong Gábor*[7] könyvének segítségével dolgoztam.

4.0.1. Definíció. *Legyenek (X, d_X) és (Y, d_Y) metrikus terek, ekkor a $\phi\colon X \to Y$ függvény **izometria**, ha bijektív, és minden $a, b \in X$-re $d_X(a, b) = d_Y(\phi(a), \phi(b))$, azaz ϕ **távolságtartó**.*

4.0.2. Megjegyzés. Ha X rögzített metikus tér, akkor az X-et saját magába képező izometriák csoportot alkotnak a kompozíció műveletre nézve. Ezt a csoportot X izometriacsoportjának nevezzük, és $\mathrm{Iso}(X)$-szel jelöljük.

4.0.1. Euklideszi tér

Az euklideszi tér izometriái $\mathbb{R}^2$-ben a következők: identitás, tükrözés, eltolás, forgatás és csúsztatva tükrözés.
Az euklideszi tér izometriái $\mathbb{R}^3$-ben a következők: identitás, tükrözés, eltolás, forgatás, csúsztatva tükrözés, forgatva tükrözés és csavarmozgás.

4.0.3. Tétel. *Egy euklideszi tér izometriái pontosan azok az affinitások, amelyeknek a linearizáltja ortogonális.*

4.0.4. Lemma. *Legyen E egy $n\,\mathrm{dim}$ euklideszi vektortér, $j \in \mathrm{Iso}(E)$ fixen hagy $n+1$ általános helyzetű pontot. Ekkor $j = \mathrm{id}_E$.*

4.0.5. Állítás. *Az euklideszi tér bármely izometriája szögtartó.*

Bizonyítás. Az izometriák linearizáltja ortogonális, ezért a vektorok szögét megtartja. Mivel a szögeket vektorok szögén definiáljuk, ezért szögtartóak. □

4.0.6. Tétel. $\mathbb{R}$ *tetszőleges izometriája előáll legfeljebb* $n+1$ *hipersíkra való tükrözés kompozíciójaként.*

4.0.2. Gömbi tér

4.0.7. Definíció. *A gömbfelület egy gömbfelületre való leképezését* ***gömbi izometriának*** *nevezzük, ha tartja a gömbi távolságot.*

4.0.8. Lemma. *Minden gömbi izometria egy olyan térizometria megszorítása a gömbfelületre, mely fixen hagyja a gömb középpontját.*

4.0.9. Definíció. *Minden* $\mathbb{S}^n$*-beli izometria kiterjeszthető* $\mathbb{R}^{n+1}$*-beli izometriává, ennek* O *fixpontja lesz.*

4.0.10. Megjegyzés. A gömbi konvex halmazok megegyeznek a konvex kúpok metszetei valamely $\mathbb{S}^n$-beli nyílt félgömbbel.

4.0.11. Definíció. $K \subset \mathbb{S}^n$ *konvex test, akkor* $K^\circ = \{x \in \mathbb{S}^n : \langle x, z \rangle \leq 0 \forall z \in K\}$.

4.0.12. Példa. Ha $K = B_{\mathbb{S}^n}(x, r)$, ekkor $K^\circ = B_{\mathbb{S}^n}(-x, \pi - r)$, ahol $r \in (0, \pi)$.

4.0.13. Állítás. *Ha* $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *izometria, akkor* $(gK)^\circ = g(K^\circ)$.

4.0.3. Hiperbolikus tér

A hiperbolikus tér izometriái $\mathbb{H}^2$-ben a követketők: identitás, tükrözés párhuzamos áthelyezés, eltolás, forgatás és csúsztatva tükrözés.
A hiperbolikus tér izometriái $\mathbb{H}^3$-ben a következők: identitás,síktükrözés, eltolás, párhuzamos áthelyezés, forgatás, csúsztatva tükrözés, forgatva tükrözés és csavarmozgás.

4.0.14. Definíció. *Legyen* $f \in \mathrm{Iso}(\mathbb{H}^n)$*. Azt mondjuk, hogy* f *elliptikus ha van fixpontja* $\mathbb{H}^n$*-ben. Ha* f*-nek nincs* $\mathbb{H}^n$*-ben fixpontja, és pontosan egy, illetve pontosan két fixpontja van a* $\partial\mathbb{H}^n$ *ideális határon, akkor* f*-et parabolikus, illetve hiperbolikus izometriáknak nevezzük.*

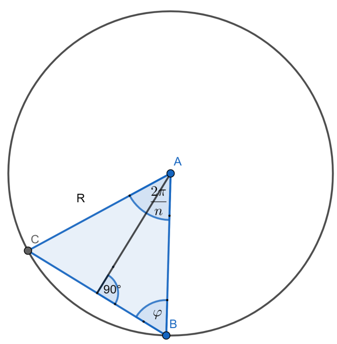
4.0.15. Tétel. *A hiperbolikus tér bármely izometriája elliptikus, parabolikus vagy hiperbolikus.*

5. fejezet

Egybevágó csempékkel való lefedés

Topológikus körlemezen valamely állandó görbületű sík egységkörrel homeomorf részét értjük. A továbbiakban egybevágó topológikus körlemezekkel való csempézéseket vizsgálunk. Kéf fő részt fogunk megvizsgálni. Az első esetben a teljes sík lefedésével fogunk foglalkozni, ezek után pedig egy-egy kitüntetett konvex lemez lefedését vizsgáljuk.
Ebben a fejezetben *Kurusa Árpád, Lángi Zsolt, Vígh Viktor*[6] és *Bushra Basit, Lángi Zsolt*[1] cikkei alapján dolgoztam.

5.0.1. Definíció. (Szabályos sokszög $\mathcal{M}^2$-ben) *Olyan sokszög, melynek minden oldala és minden belső szöge egyenlő.*



Háromszögek különböző tereken :

1. $\mathbb{S}^2$

   belső szögek összege : $\alpha + \beta + \gamma > \pi$

   területe : $\alpha + \beta + \gamma - \pi$

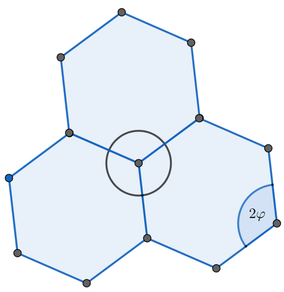
2. $\mathbb{H}^2$

   belső szögek összege : $\alpha + \beta + \gamma < \pi$

   területe : $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$

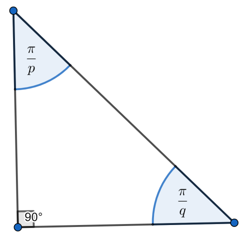
5.0.1. Teljes sík fedése

5.0.2. Definíció. *Szabályos p-szög esetén ha fedik a síkot, akkor minden csúcsnál q darab ilyen egybevágó szabályos p-szög van.*



Tehát a feladatunk, $\mathcal{M}^2$ fedése egybevágó csempékkel, ahol a csempék szabályos p-szögek, és bármely két csempe belsejének üres a metszete.

5.0.3. Definíció. $\mathcal{M}^2 = \bigcup_k A_k$, *ahol A_i és A_j egybevágó szabályos p-szögek, melyekre* $\mathrm{int}A_i \cap \mathrm{int}A_j = \emptyset$, *ha $i \neq j$. Ekkor a szabályos p-szögek egy $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}$ szögű háromszöget generálnak, és a (p, q) párt* ***Schläfli-szimbólumának*** *nevezzük.*



$$q(2\varphi) = 2\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{q}$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{p} + \frac{\pi}{q} \begin{cases} = \pi, & \text{ha } \mathcal{M}^2 = \mathbb{R}^2 \\ > \pi, & \text{ha } \mathcal{M}^2 = \mathbb{S}^2 \\ < \pi, & \text{ha } \mathcal{M}^2 = \mathbb{H}^2 \end{cases}$$

Átrendezve: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \begin{cases} = \frac{1}{2} \\ > \frac{1}{2} \\ < \frac{1}{2} \end{cases}$

p és q egész számok.

1. $\mathbb{R}^2$:

   $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2p + 2q = pq$

   Diofantoszi egyenletet megoldjuk:

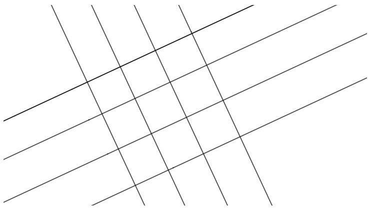
   $pq - 2p - 2q + 4 = 4$

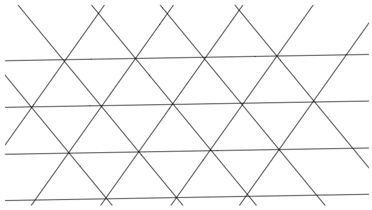
   $(p-2)(q-2) = 4$

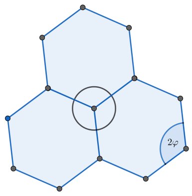
   Tudjuk, hogy pozitív egész számokat keresünk, ahol p és q egyaránt legalább 3.

   Így a megoldáspárok a következők lehetnek: $2 \cdot 2, 1 \cdot 4, 4 \cdot 1$

   Tehát, (p, q) a csempézés Schläfli-szimbóluma: $(4, 4)$ négyzetparketta, $(3, 6)$ háromszögparketta, $(6, 3)$ hatszögparketta







Nincs más csempézés Euklideszi síkban szabályos szögekkel.

2. $\mathbb{S}^2$:
   $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2p + 2q > pq \Leftrightarrow (p-2)(q-2) < 4$
   A megoldások $1, 2, 3$ lehetnek.

   Így a csempézés Schläfli-szimbóluma: $1 : (3,3), 2 : (4,3), (3,4), 3 : (5,3), (3,5)$. Azaz tetraéder, kocka, oktaéder, dodekaéder valamint ikozaéder.

3. $\mathbb{H}^2$:
   $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2p + 2q < pq \Leftrightarrow (p-2)(q-2) > 4$
   Végtelen sok megoldása van. Az eddig felsorolt Schläfli-szimbólumon kívül minden más megoldás.

   Például $(3, 7)$, ami csupa derékszögű ötszögbet ad.

   Így a megoldáshalmazt felírhatjuk a következőképpen:

   $\{(p, q) \in \mathbb{N}^2 : p \geq 3, q \geq 3\} \setminus \{(3,6), (6,3), (4,4), (3,3), (4,3), (3,4), (5,3), (3,5)\}$

5.0.4. Tétel. *Pontosan ezek a lehetséges csempézések szabályos sokszögek esetén.*

Mi a helyzet a nem szabályos sokszögekkel?

Nézzük meg egybevágó háromszögekre: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

5.0.2. Schwarz-háromszögek

Ebben az alfejezetben *John Milnor*[3] jegyzetét vettem segítségül.

5.0.5. Definíció. *Schwarz-háromszögek:* $\alpha = \frac{\pi}{p}$, $\beta = \frac{\pi}{q}$, $\gamma = \frac{\pi}{r}$, *ahol* $p, q, r \in \mathbb{N}$.

5.0.6. Megjegyzés. A szabályos sokszögkkel való lefedés egyúttal az $r = 2$ esetet is megoldja.

5.0.7. Jelölés. A csempézés szimbóluma: $[p, q, r]$

5.0.8. Megjegyzés. Speciális eset, ha $r = 2$, akkor $[p, q]$.

$$\alpha + \beta + \gamma \begin{cases} = \pi \text{ ha } \mathcal{M}^2 = \mathbb{R}^2 \\ > \pi \text{ ha } \mathcal{M}^2 = \mathbb{S}^2 \\ < \pi \text{ ha } \mathcal{M}^2 = \mathbb{H}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \begin{cases} = 1 \\ > 1 \\ < 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1 \tag{5.1}$$

Tegyük fel, hogy $p \leq q \leq r$, tehát $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} \geq \frac{1}{r}$, amiből az következik, hogy $p \leq 3$

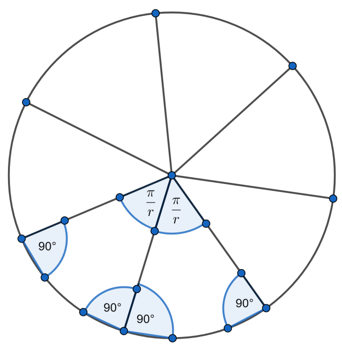
1. Ha $p = 2 : \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq \frac{1}{2}$, valamint tudjuk, hogy $q \leq 4$
   (a) Ha $q = 2$, akkor r bármi lehet, tehát $[2, 2, r]$
   (b) Ha $q = 3$, akkor $\frac{1}{r} \geq \frac{1}{6}$, tehát $r \leq 6$. Azaz a megoldások $[2, 3, 3], [2, 3, 4], [2, 3, 5], [2, 3, 6]$
   (c) Ha $q = 4$, akkor $\frac{1}{r} \geq \frac{1}{4}$, tehát $r \leq 4$. Itt egy megoldásunk lesz a $[2, 4, 4]$, mivel $q = 4 \leq 4$.
2. Ha $p = 3$, ekkor $3 \leq q \leq r$
   $1 \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$
   Tehát a megoldásunk a $[3, 3, 3]$

Összegezve a Schwarz-háromszögek:

1. $\mathbb{R}^2$:
   (a) $[2, 3, 6]$ fél szabályos háromszög
   (b) $[2, 4, 4]$ egyenlőszárú derékszögű háromszög
   (c) $[3, 3, 3]$ szabályos háromszög
2. $\mathbb{S}^2$:
   (a) $[2, 2, r]$
   (b) $[2, 3, 3]$
   (c) $[2, 3, 4]$
   (d) $[2, 3, 5]$
3. $\mathbb{H}^2$: minden más, ami nem elégíti ki az (5.1) egyenlőtlenséget

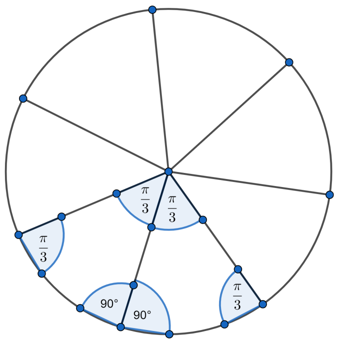
Nézzük meg az $\mathbb{S}^2$-beli Schwarz-háromszögeket kicsit részletesebben:

1. $[2, 2, r]$



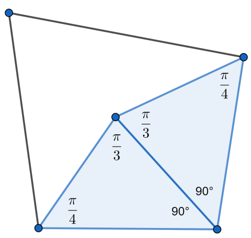
Egy félgömböt le tudunk fedni ezekkel a háromszögekkel. Ugyanígy a fégömb másik oldalát is lefedjük, tehát az egész $\mathbb{S}^2$-t is le tudjuk fedni.

2. $[2,3,3]$



6 darab háromszög $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} = 90°\right)$ kell egy teljesszög felépítéséhez.Látjuk, ha két háromszöget összeillesztünk, úgy minden szögünk nagysága $\frac{2\pi}{3}$ lesz. Ekkor le tudjuk fedni a gömböt, valamint ezek a szabályos tetraéder lapjainak a vetületei.

3. $[2,3,4]$



Hasonlóan az előzőkhöz, a háromszögeket kiegészítjük az ábrán látható módon, hogy derékszögű háromszögeket kapjunk. Így le lehet fedni a az $\mathbb{S}^2$-ent. Ezek a szabályos oktaéder éleinek a vetületei.

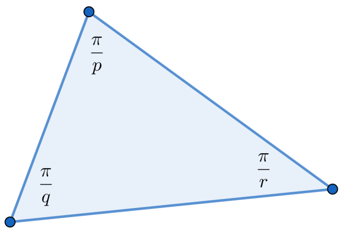
4. $[2,3,5]$ Hasonlóan az előzőkhök, a háromszögeket összeillesztjük úgy, hogy minden szöge $\frac{2\pi}{5}$ legyen. Így le tudjuk fedni a gömböt, és ezek az ikozaéder éleinek a vetületei lesznek.

5.0.9. Definíció. *$\mathcal{M}^2 = \cup_k A_k$ csempézés, ahol $A_i \cong A_j \forall(i,j), \mathrm{int}A_j \cap \mathrm{int}A_j = \emptyset$ (belsejük diszjunkt), ha $i \neq j$ akkor azok az izometriák, amik minden i-re A_j-be viszik.*

5.0.10. Definíció. *Ezek* $\mathrm{Iso}(\mathcal{M}^2)$ *egy részcsoportját (csempézés szimmetriacsoportja) adják a kompozícióval.*

5.0.11. Definíció. ***(Schwarz-csoport)***
Egy Schwarz-háromszög általi csempézés szimmetriacsoportja.

Schwarz-háromszögekből indulunk ki.



Legyen g_1, g_2, g_3 az oldalegyenesekre való tükrözés. Ekkor $\langle g_1, g_2, g_3 \rangle \leq \mathrm{Iso}(\mathcal{M}^2)$.
Jelölje $\phi \in \mathrm{Iso}(\mathcal{M}^2)$, $n \in \mathbb{N}^+$, $\phi^n = \phi \circ \ldots \circ \phi$ (n darab ϕ van, $\phi^\circ = id$, $\phi^{-1} = (\phi^{-1})^n$
Relációkkal a következő módon írható fel:

$$\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = (\sigma_1 \cdot \sigma_2)^p = (\sigma_2 \cdot \sigma_3)^q = (\sigma_3 \cdot \sigma_1)^r = e \rangle$$

Ez izomorf a Schwarz-csoporttal, ami az oldalegyenesekre való tengelyes tükrözés álltal generált izometriacsoport.

5.0.12. Tétel. *Legyen $\Sigma^*[p,q,r]$ a Schwarz-csoport, T a kiinduló Schwarz-háromszögek $\cup_{g \in \Sigma} g(T)$ egy csempézését adja $\mathcal{M}^2$-nek.*

5.0.13. Következmény. A Schwarz-csoport rendje a háromszögek száma a síkon.
$\mathcal{M}^2 = \mathbb{R}^2$ illetve $\mathcal{M}^2 = \mathbb{H}^2$ esetén ez végtelen.

$\mathbb{S}^2$-ben $\dfrac{4\pi}{\dfrac{\pi}{p}+\dfrac{\pi}{q}+\dfrac{\pi}{r}-1}$, ahol a számláló a felszín, a nevező pedig egy háromszög területe.
$\dfrac{4}{\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}-1}$ a csoport rendje, azaz 4 esetünk van.
Ezek pedig a következők: $[2,2,r],[2,3,3],[2,3,4],[2,3,5]$

5.0.14. Következmény. Az irányítástartó izometriák részcsoportja $\Sigma^*[p,q,r]$-ben:

$$\langle \sigma_1,\sigma_2,\sigma_3|\sigma_1^p=\sigma_2^q=\sigma_3^r=\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot\sigma_3=e\rangle$$

5.0.3. Konvex lemezek fedése

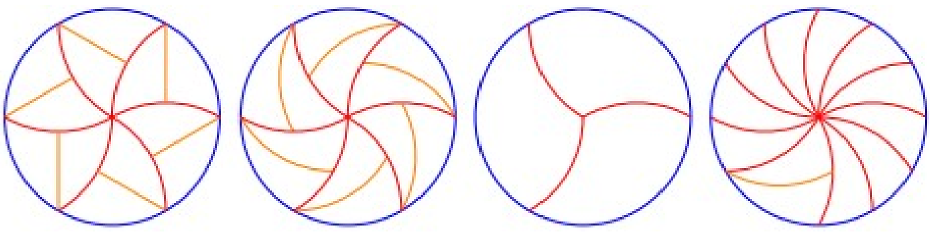
Síknak egy konvex lemezét csempézzük $\mathbb{R}^2$-ben:

1. $D=B(0,1)$ körlemez, ahol $B(0,1)=\cup_{i=1}^k A_i$, ahol $A_i\cong A_j, \mathrm{int}A_i\cap\mathrm{int}A_j=\varnothing$, ha $i\neq j$
2. szabályos n-szöget
3. téglalapot

Körlemez:
Tegyük fel, hogy az egyes csempék topologikus körlemezek, azaz A_i homeomorf $B(0,1)$-val.

5.0.15. Definíció. *∂A_i **Jordan-görbe**: $\gamma:[0,1]\to\mathcal{M}^2$ folytonos, egyszerű, zárt görbe ($\gamma(0)=\gamma(1)$) és γ injektív intervallum belsejében.*

5.0.4. Stein-probléma:



[6]

5.1. ábra.

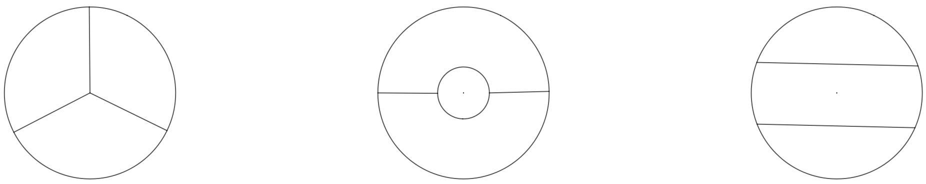
Mikor nem mindegyik csempe tartalmazza a középpontot $\mathbb{R}^n$-ben, a legkevesebb csempézés a 12 amire van konstrukció, lásd az ábrán.
Kurusa Árpád, Lángi Zsolt, Vígh Viktor[6] eredményei alapján 4-nél kisebbre nem létezhet ilyen csempézés, de arról nem tudunk semmit, hogy 4 és 11 között mi a helyzet.
Probléma:

1. Van-e olyan csempézése a körlemeznek, hogy $0 \in \mathrm{int} A_i$ valamely i-re?
   Ez továbbra is nyitott kérdés.

2. 12 a legkisebb pozitív egész szám, amely lefed és nem az összes csempe tartalmazza a középpontot?

   5.0.16. Tétel. (Kurusa–Lángi–Vígh) *Ha $k \leq 3$, akkor a csempézés mindenképp forgatás által generált.*

   Ez a következő megfigyelésen múlik: ha pontosan 3 csempe van, az topologikusan 3 típusra osztható:



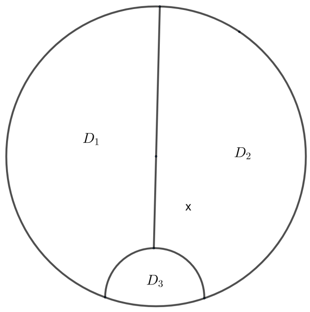
5.2. ábra. 1. típus, 2. típus, 3. típus

A későbbi használat miatt elnevezzük 1. típusnak.
Bármely kettő metszete összefüggő szakasz.

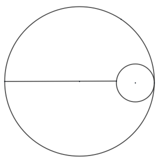
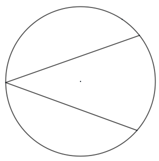
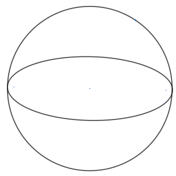
A későbbi használat miatt elnevezzük 2. típusnak.
Bármely kettő metszete 2 összefüggő komponensre esik szét.

A későbbi használat miatt elnevezzük 3. típusnak. $D_1 \subset D_3 = \emptyset$
$D_1 \subset$ D kettő összeföggő komponenes.

Nem csak így nézhetnek ki a csempézések, például a Mercedes csempézés kinézhet a következőképpen is.



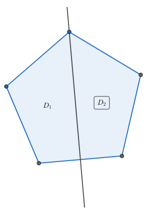
Valamint léteznek határesetek, ezekre pár példa:
2.típus-1.típus
3.típus-2.típus
1.típus-3.típus

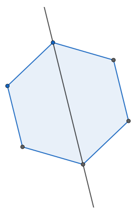
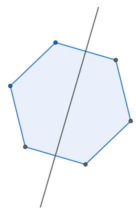




Szabályos n-szög:

Lángi–Basit: $k \leq 3$ csempék szabályos sokszögeken.

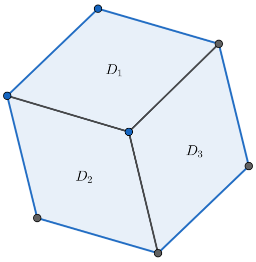
Ha $k = 2$: (szabályos sokszögek szimmetria tengelyeik)



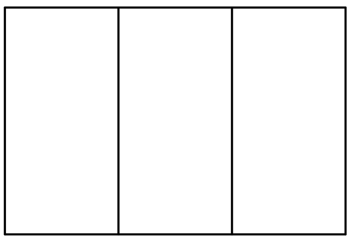



Ha $k = 3$: (forgatás által generáltak)

$3|n$



Téglalap:



5.0.17. Állítás. *Ezek a fedések vannak $\mathbb{R}^2$-ben, amik $\mathbb{S}^2$ és $\mathbb{H}^2$-ben nem működnek.*

Sejtés: Nincs csempézése 3 egybevágó csempével.

Irodalomjegyzék

[1] BUSHRA BASIT, LÁNGI ZSOLT, *On monohedral tilings of a regular polygon*, arXiv preprint arXiv:2109.14264, 2021

[2] ILYAS KHAN, *Hyperbolic geometry: Isometry groups of hyperbolic space*, 2012 (https://math.uchicago.edu/~may/REU2012/REUPapers/Khan.pdf)

[3] JOHN MILNOR, *Knots, Groups, and 3-manifolds:Papers Dedicated to the Memory of R. H. Fox*, 1975 (https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/milnbries.pdf)

[4] KISS EMIL, *Bevezetés az algebrába*, Typotex, 2007

[5] KURUSA ÁRPÁD, *Nem euklideszi geometriák*, Polygon, 2021

[6] KURUSA ÁRPÁD, LÁNGI ZSOLT, VÍGH VIKTOR, *Tiling a circular disc with congruent pieces*, Mediterranean Journal of Mathematics, 2020

[7] MOUSSONG GÁBOR, *Geometria*, Typotex, 2014

[8] SZŰCS ANDRÁS, *Topológia*, 2018

NYILATKOZAT

Név: Őri Tünde
ELTE Természettudományi Kar, szak: matematikai elemző BSC
NEPTUN azonosító: Q2LD2Q
Szakdolgozat címe: Állandó görbületű terek izometriái

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Őri Tünde

Budapest, 2023.06.01.

a hallgató aláírása