Komplex függvénytan alapjai

Koncz Flórián

Matematika BSc, elemző szakirány

Szakdolgozat

Témavezető:
Keleti Tamás

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapest, 2023.

NYILATKOZAT

Név: KONCZ FLÓRIÁN
ELTE Természettudományi Kar, szak: MATEMATIKA BSc
NEPTUN azonosító: WFYDKE
Szakdolgozat címe: Komplex függvénytan alapjai

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2023. jún. 01.

Koncz Flórián

a hallgató aláírása

Köszönetnyilvánítás

Hálás köszönettel tartozom a témavezetőmnek, Keleti Tamásnak a segítségéért és a belém fektetett idejéért. A szakértelme nélkül a szakdolgozatom nem jött volna létre.

Szeretném megköszönni a családomnak és a barátaimnak hogy türelemmel álltak hozzám a munkám során, illetve azt a rengeteg motivációt amivel támogattak.

Továbbá szeretném megköszönni az ELTE oktatóinak, hogy hozzájárultak az egyetemi tanulmányaimhoz.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Szakdolgozatomban szeretném összefoglalni a komplex függvénytan alapvető megértéséhez szükséges tudást. Először egy rövid történeti bevezetővel mutatom be azt, hogy miért lett szükség a komplex számokra, hogyan alakult a komplex számok fejlődése az idők során, illetve hogyan kezdődött a komplex analízis története és kik a nagy alakjai.

A dolgozatom első felében egy áttekintést nyújtok a komplex számokról, azok tulajdonságairól, illetve a komplex síkról és az azon értelmezett halmazokról. Ezen áttekintés javarészt ismétlés, felelevenítés de bevezetek új fogalmakat is.

A szakdolgozat második fele már a komplex függvénytan megismerését tartalmazza. Itt vizsgálom meg a komplex függvények tulajdonságait, melyek leírásához használt fogalmak számottevő része ismerős. A valós többváltozós analízis már sok dolgot megfogalmazott amelyeket a komplex analízisben felhasználunk, így gyakran megemlítem hogy több újonnan megismert tétel, definíció és megnevezés analóg a már tanult kifejezésekkel.

A dolgozatom nagy részben Elisa M. Stein és Rami Sharakchi által írt Complex Analysis tankönyve és Nagy Márton Komplex függvénytan (bevezetés) című jegyzete alapján készült, ezért a szakdolgozat szókincse és jelölései főként ezen két műből adódnak.

A szakdolgozat írása közben valószínűsítem, hogy az olvasó matematika képzést végez vagy végzett, így feltételeztem, hogy az alapvető de nem definiált utalásokat megérti és azokat ismeri.

1. fejezet

Történeti áttekintés

Ebben a fejezetben a következő forrásokat használom: [12], [2], [1], [11].

1.1. Harmadfokú egyenletek

Meglepő módon a komplex számok kialakulásához a harmadfokú egyenlet megoldásának problémája vezetett. Ekkoriban még nem léteztek a ma használatos algebrai kifejezések és alakok. Egyenleteket csakis geometriai úton képzelték el, például egy másodfokú egyenlet megoldását négyszög területeivel és azok oldalaival magyarázták. Pozitív együtthatókkal dolgoztak, így kizárólag a pozitív valós megoldásokat vették figyelembe.

Már a XI. században ismerték a harmadfokú egyenleteket. Ekkor a perzsa matematikus, Omar Khayyam talált 19 darab különböző harmadfokú egyenletet, de csak úgy, hogy azok együtthatói mind pozitívak voltak. Ezek közül néhányra tudott is megoldást mutatni, de nem tudott egy általános formulát vagy algoritmust adni a megoldásra. Más területeken, például Kínában, Indiában, Perzsiában és Görögországban már szintén ismerték a problémát, de általános megoldást ők sem tudtak felmutatni. Egy olasz matematikus, Luca Pacioli 1494-ben kiadta a Summa de arithmetica című könyvét. A könyvben írt a harmadfokú egyenletekről. Azt állította, hogy megoldhatatlanok.

Nem sokkal később Scipione Del Ferro, aki szintén olasz matematikus volt, a XVI. század elején felismert egy megoldó módszert az $x^3 + cx = d$ alakú egyenletekre, vagyis amiben nincs másodfokú tag. Ennek a módszerét azonban titokban tartotta, és csak halála előtti utolsó időben árulta el tanítványának, Antonio Maria Fiore-nak.

Később, Niccolò Fontana Tartaglia szintén rájött erre a megoldásra, de ő továbbadta azt a tudást Gerolamo Cardanonak, viszont a bizonyítást nem árulta el, de Cardanonak sikerült a módszerből kitalálnia azt. Ezen felül neki sikerült egy általános megoldást adni a harmadfokú egyenletekre. Az $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ egyenletbe az x helyére $x - \frac{b}{3a}$-t írva:

$$a\left(x - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(x - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(x - \frac{b}{3a}\right) + d = 0.$$

Felbontás után a másodfokú tagok mind kiesnek, és ami marad:

$$ax^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)x + \left(d + \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a}\right) = 0.$$

Ezt viszont már megtudta oldani, hiszen nincs benne másodfokú tag. Ám voltak olyan feladatok, amikre nem adott az akkori kor embere számára értelmes választ. Ilyen egyenlet például az $x^3 = 15x + 4$. Cardano módszere erre a feladatra az $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} +$

$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ megoldást adja. Ekkoriban ez egy olyan geometriai problámára vezetett vissza, mintha egy negatív területű négyzettel kéne számolni, ez persze számukra értelmetlen volt, mégis tudta, hogy az $x = 4$ megoldása az egyenletnek. 1545-ben Cardano kiadja a Artis Magnae című könyvét, amiben már szerepel a megoldó algoritmusa, de azok nem szerepelnek benne, ahol negatív számok négyzetgyökét kell venni, mert azokat haszontalannak tartja.

1.2. Mai használathoz vezető út

Az 1570-es években Rafael Bombelli folyatta Cardano munkáját, és elkezdte szétválasztani a geometriát és az algebrát. Az $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ egyenletben szereplő négyzetgyök alatti negatív számra nem úgy tekintett mint egy síkidom vagy test oldala. Úgy vélte, hogy egy ilyen szám nem lehet se pozitív, se negatív, hanem egy teljesen másfajta számról van szó. Ezalapján szét tudta választani azokat egy általános szám és egy újfatja szám összegére:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2 + 1\sqrt{-1}.$$
$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2 - 1\sqrt{-1}.$$

Majd ezeket összeadta, $2 + 1\sqrt{-1} + 2 - 1\sqrt{-1}$, a gyök alatti negatív számok kiejtették egymást és megkapta a már ismert $x = 4$ megoldást.

Ezek után a 17. században az algebra elkezdett alakot ölteni, François Viète létrehozta a modern jelöléseket és alakokat. René Descartes kutatásaiban sokszor használta a negatív számok négyzetgyökeit, amiket publikált és népszerűsített is. Ő találta ki a "képzetes számok" kifejezést. John Wallis volt az első, aki úgy gondolta, hogy ezeket a számokat a sík egy pontjaként lenne érdemes értelmezni. Évekkel később Leonard Euler bevezette a mai is használatos jelölést, az i-t, amit $\sqrt{-1}$-ként definiált. John Wallis ötletét továbbvitte Caspar Wessel, aki bevezetett egy új tengelyt, a valós számegyenesre merőlegesen, ennek az egysége a $\sqrt{-1}$ volt. Ezt komplex tengelynek nevezte el. Wessel a komplex számokra mint vektorokra gondolt, és be is vezette rájuk a szokásos vektorműveleteket. Ám munkája nem volt nagy hatással a kor matematikájára, hiszen csak anyanyelvén publikálta felfedezéseit.

Több matematikus is foglalkozott a a komplex számokkal és a komplex függvényekkel, de a matematika ezen területének három kiemelkedő alakja van. Az első közülük Augustin-Louis Cauchy. Nem volt megelégedve Euler $i = \sqrt{-1}$ definíciójával. Ő úgy vezette be a komplex számokat, mint az x^2+1 polinommal való maradékos osztás, vagyis $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/(X^2+1)$. A komplex analízis alapjainak lefektetése során sokszor azt próbálta másolni, amit valós analízisből ismert. A komplex integrálást a valós integrálásból adaptálta. 1826-ban már a rezidummal kapcsolatos számolásokat és kifejezéseket megalkotta és 1831-ben fogalmazta meg a ma is sokat használt Cauchy integrál formulát. Ezen felül a komplex analízis használatával sikerült olyan valós integrálokat kiszámolnia, amelyeket addig senki nem tudott megoldani. Ekkoriban sokakat foglalkoztattak a hatványsorok. 1843-ban Pierre-Alphonse Laurent egy Taylor sorhoz hasonló felbontást alkotott meg, amit Laurent sornak hívunk. Ez a Taylor sor kibővítése negatív hatványokra. Ezzel sokkal könnyebben kiszámolható a rezidum, ezáltal még hatékonyabban tudtak integrálokat megoldani.A másik nagy alakja Karl Weierstrass, akinek nyomán új algebrai kifejezések és felfedezések láttak napvilágot. Az ő nevéhez kötődik az epszilon-delta formulázás is.

Végül pedig Bernhard Riemannt említeném meg, akinek a komplex analízis témakörében elért eredményei és munkássága nem csak itt érhetőek tetten, az egész matematika több területére is hatással volt. Messzemenő ötletek születtek a Riemann-felületek koncepciójából.

A komplex analízis a 18. század közepétől folyamatosan fejlődött és bővült. Egyre több nagy eredmény és áttörés született. Cauchy alapvető ötleteit máig újradefiniálták többször is, sokkal topologikusabb szemléletet kapott a komplex analízis.

2. fejezet

Komplex számok halmaza

Az ismeretek felelevenítése céljából átismétlem a komplex számokról tanultakat. A komplex számok halmaza egy fontos algebrai struktúra, egy test. Most ezt a testet szeretném meghatározni. Ehhez kell egy alaphalmaz, majd ezen a halmazon definiálok műveleteket.

2.1. Komplex számok alakja

A komplex számok az $a+bi$ alakú kifejezések, ahol a és b valósak és i egy elképézelt szám, amelyet úgy képzelünk el, hogy $i^2 = -1$.

2.1. Definíció. A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$. Az a-t a valós, b-t a komplex szám képzetes részének nevezzük. $b = 0$ esetén nincs képzetes tag, tehát $z \in \mathbb{R}$, vagyis valós, míg ha $a = 0$, akkor tisztán képzetesnek hívjuk.

Ezen értékek jelölése: $\begin{array}{c} \mathrm{Re}(z) = a \\ \mathrm{Im}(z) = b \end{array}$

2.2. Műveletek komplex számokkal

Az összeadást és szorzás a következőképpen definiáljuk:

1. Összeadás:

$$u = z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

$$\mathrm{Re}(u) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w).$$

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(r) + \mathrm{Im}(w).$$

2. Szorzás:

Ha $z \neq w$

$$u = zw = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bdi + bci = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

$$\mathrm{Re}(u) = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(w) - \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(w).$$

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(w) + \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Re}(w).$$

Ha $z = w$:

$$u = zz = z^2 = (a + bi)(a + bi) = (a^2 - b^2) + 2abi.$$

$$\mathrm{Re}(u) = \mathrm{Re}(z)^2 - \mathrm{Im}(z)^2.$$

$$\mathrm{Im}(u) = 2\,\mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Re}(z).$$

Következésképpen az összeadás és szorzás szokásos tulajdonságai, az asszociativitás és kommutativitás és disztributivitás, megmaradnak. Ezen definíciók következménye, hogy az osztás menete:

3. Osztás:($w \neq 0$)

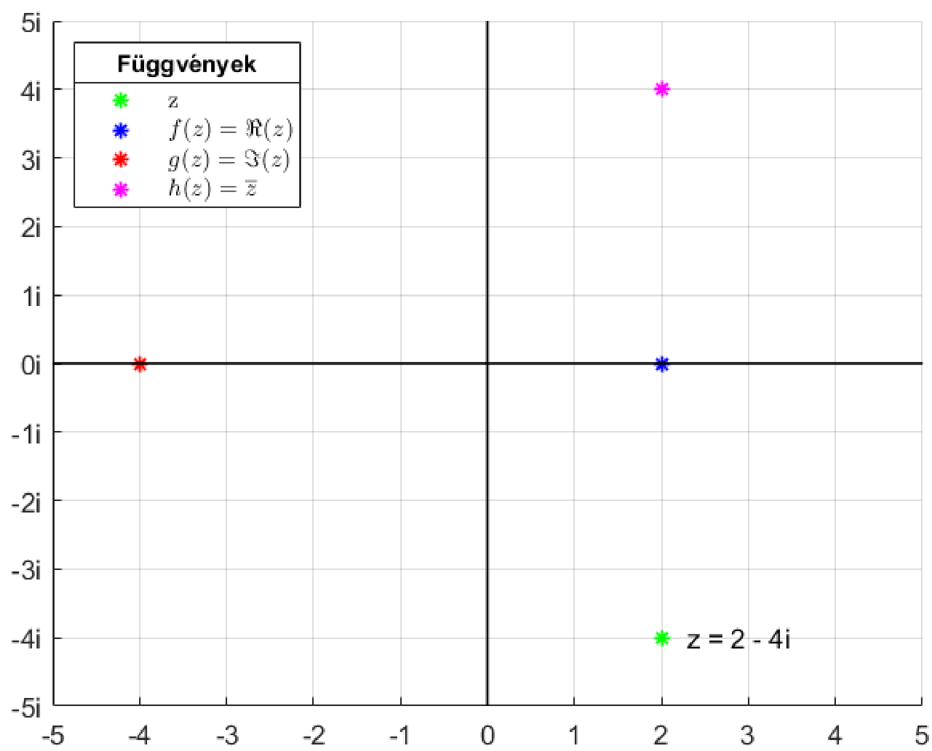
$$u = \frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2-(di)^2} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$
$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Több esteben megkönnyíti a számolást, ha definiálunk egy másik műveletet:

4. Konjugálás:

Ha $z = a + bi$, akkor a konjugáltja: $\overline{z} = a - bi$.

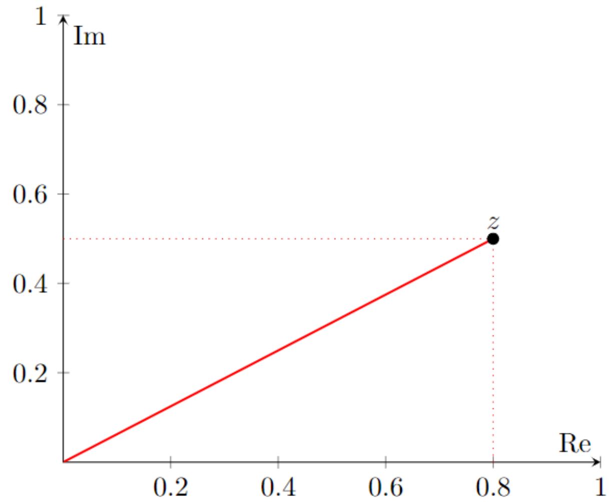
Példa:



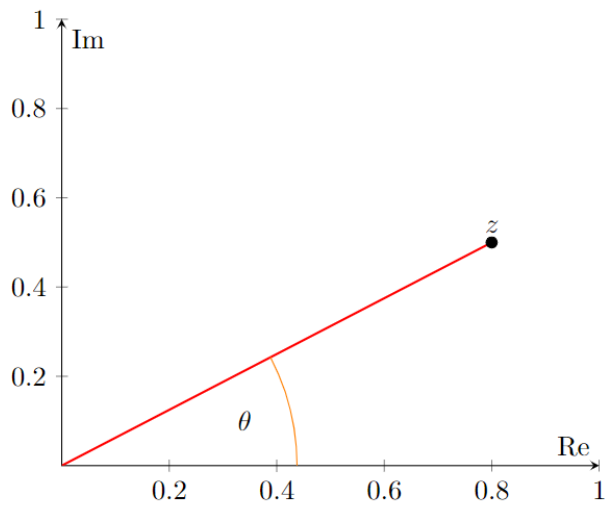
2.1. ábra. A $z = 2 - 4i$ komplex szám, valós és képzetes része, illetve konjugáltja

2.3. Komplex számok ábrázolása

A komplex számokat a komplex sík pontjaiként ábrázoljuk. Szokásos euklideszi- vagy polárkoordináta-rendszert használunk.



2.2. ábra. Euklideszi koordináta-rendszer



2.3. ábra. Polár koordináta-rendszer

2.2. Definíció. Egy $z = a + bi$ komplex szám *hosszán* az abszolútértékét értjük: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. $|z|^2 = z\overline{z}$

Ugyanazt a pontot kétféleképpen is le lehet írni. Itt θ a z-t az origóval összekötő szakasz és a valós tengely pozitív fele által bezárt szög . Ezt felismerve adódnak:

$$a = |z| \cos \theta$$

$$b = |z| \sin \theta$$

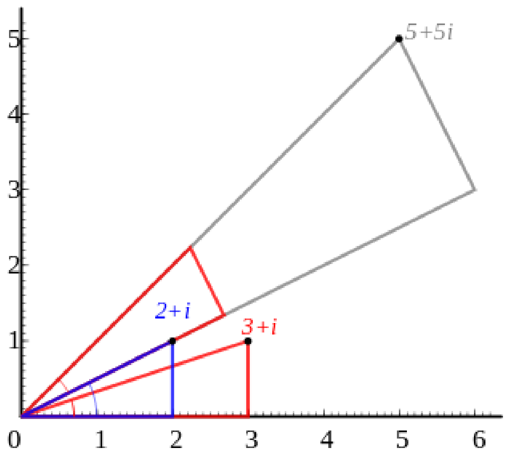
$$z = a + bi = |z| \cos \theta + |z| i \sin \theta = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

2.3. *Állítás.* Két komplex szám szorzata szemléletesen azt is jelenti, hogy a szögük összeadódik, a hosszuk összeszorzódik. Legyenek $u = |u|(\cos\theta + i\sin\theta), w = |w|(\cos\phi + i\sin\phi)$. Ekkor $u \cdot w = |u||w|(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi))$.

Bizonyítás. Definíció szerint u és w szorzata:

$$\begin{aligned} z = u \cdot w &= |u||w|(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) = \\ &= |u||w|(\cos\phi\cos\theta + i\cos\phi\sin\theta + i\cos\theta\sin\phi - \sin\phi\sin\theta) \\ &= |u||w|(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)). \end{aligned}$$

□



2.4. ábra. Komplex számok szorzása vizuálisan [13]

2.4. Komplex sorozatok és konvergencia

Nélkülözhetetlen fogalom a konvergencia, ennek a definíciója nagyon hasonló a valós számok körében megismert konvergenciafogalomhoz.

2.4. Definíció. Legyen $\{z_n\}$ egy komplex számokból álló sorozat. Azt mondjuk, hogy $\{z_n\}$ *konvergens*, és tart egy $\omega \in \mathbb{C}$ számhoz, ha:

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - \omega| = 0.$$

$$\text{Ennek jelölése: } \lim_{n\to\infty} z_n = \omega.$$

2.5. *Állítás.* Ha $n \to \infty$ esetén $z_n \to \omega \iff \mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(\omega)$ és $\mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(\omega)$.

Bizonyítás.

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - \omega| = \lim_{n\to\infty} |(\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(\omega) + i(\mathrm{Im}(z_n) - \mathrm{Im}(\omega))| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{(\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(\omega))^2 + (\mathrm{Im}(z_n) - \mathrm{Im}(\omega))^2}.$$

Ez csak akkor lehet 0, ha $\mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(\omega)$ és $\mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(\omega)$, feltéve hogy $n \to \infty$. □

2.6. Definíció. A $\{z_n\}$ komplex számokból álló sorozat *Cauchy sorozat*, ha:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, m, n > N \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

2.7. Tétel. A komplex számok halmaza teljes, vagyis minden $\{z_n\}$ Cauchy sorozat határértéke komplex szám.

Bizonyítás. Ez a valós számok halmazának teljességéből következik. Minden $\mathbb{R}$-beli Cauchy sorozat egy valós számhoz tart. Azt pedig tudjuk, hogy z valós és képzetes részei egész számok. Ekkor egy $\{z_n\}$ Cauchy sorozat tagjai $z_n = a_n + b_n i$ alakúak, de a_n és b_n egy-egy valós számhoz tartanak. Így z_n egy komplex számhoz konvegrál. $\square$

2.5. Halmazok a komplex síkon

A komplex síkon általában bármilyen alakú halmazról beszélhetünk, de gyakran körlapokat szoktunk használni a problémák megoldásában. Azért hogy ezekről pontosan tudjunk beszélni, szükségünk van az alábbi definíciókra. Ezeket már láttuk $\mathbb{R}^2$-en, most pedig kiterjesztjük a komplex síkra.

2.8. Definíció. Legyen $z_0 \in \mathbb{C}$ és $r > 0, r \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy $B(z_0, r)$ egy z_0 középpontú r sugarú *nyílt (körlap) halmaz* a komplex síkon, ha:

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

Zárt körlapról beszélünk, ha megengedjük az egyenlőséget is, azaz:

$$\overline{B(z_0, r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}.$$

$\overline{B(z_0, r)}$ *határvonala*:

$$C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

2.9. Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{C}$. Ekkor ω A egy belső pontja, ha létezik ω-nak olyan környezete, hogy az az A részhalmaza legyen:

$$\omega \text{ belső pont} \iff \exists B(\omega, r), \text{ és } B(\omega, r) \subset A.$$

Az A halmazt nyíltnak nevezzük, ha minden pontja belső pont. Az A halmazt zártnak nevezzük, ha $\mathbb{C} \setminus A$, nyílt.

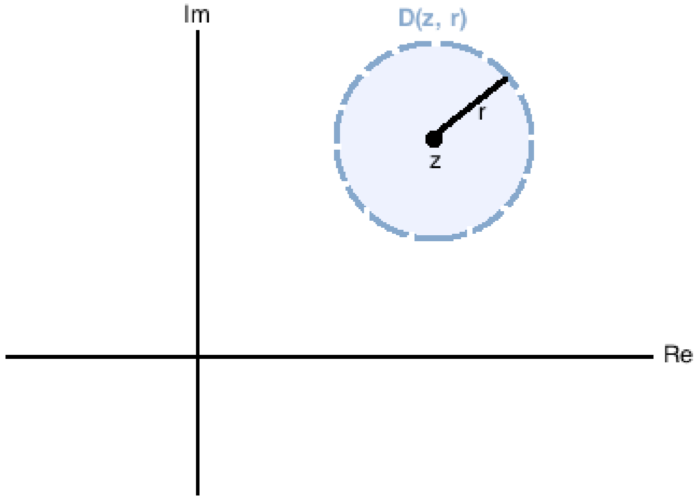
2.10. Definíció. Az A halmaz *határpontjainak* nevezzük azokat a pontokat, amikre létezik olyan $\{z_n\}$ sorozat, hogy

$$z_n \neq z \text{ és } \lim_{n \to \infty} z_n = z.$$

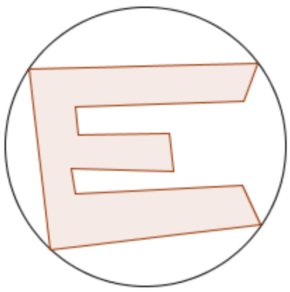
2.11. *Állítás.* [9] Egy halmaz akkor és csak akkor zárt, ha tartalmazza minden határpontját.

2.12. Definíció. Egy halmazt *korlátosnak* hívunk, ha létezik olyan $M > 0$, $M \in \mathbb{R}$, hogy minden $z \in A$-ra $|z| < M$. Vagyis az A halmazt körbe lehet keríteni valahogy keríteni. Ha korlátos, akkor betudjuk zárni egy minimális körhalmazba. Ekkor legyen az A halmaz átmérője:.

$$\text{diam}(A) = \sup_{z, w \in A} |z - w|.$$



2.5. ábra. Nyílt halmaz és határa



2.6. ábra. Korlátos halmazhoz minimális körlap [3]

2.6. Kompaktság

2.13. Definíció. Az A halmaz *nyílt fedése* olyan $\{U_\alpha\}$ (nem feltétlenül megszámlálható) nyílt halmazok rendszere, hogy

$$A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

.

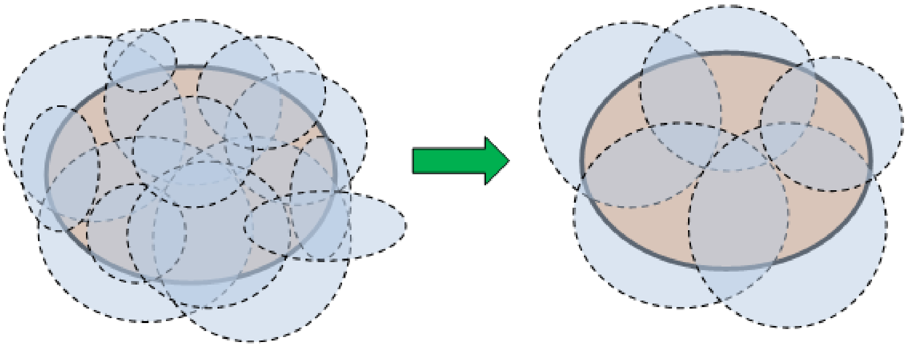
2.14. Definíció. Azt mondjuk hogy az A halmaz *kompakt*, ha minden nyílt fedésének van véges fedése.

A komplex számok halmazán tudunk mondani egy ezzel ekvivalens megfogalmazást.

2.15. *Állítás.* [9] Egy $A \subset \mathbb{C}$ halmaz pontosan akkor kompakt ha zárt és korlátos.

2.16. Tétel. Legyen $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ komplex számsík egymásba ágyazott kompakt nem üres részhalmazainak sorozata, úgy, hogy $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$, ha $n \to \infty$. Ekkor létezik egy egyértelmű $\omega \in \mathbb{C}$ pont, amelyre $\omega \in A_n$ minden n-re.

Bizonyítás. Legyen $\{z_n\}$ egy olyan sorozat, hogy $z_n \in A_n$. Így z_n egy Cauchy sorozat, hiszen feltettük a halmazokról, hogy $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$. Tudjuk emellett, hogy minden



2.7. ábra. Nyílt fedés és véges nyílt fedés [6]

Cauchy sorozatnak van határértéke, konvergens, ez a határérték $n \to \infty$ esetén legyen ω. Mivel A_n minden n-re zárt, így $\omega \in A_n$.

Megmutatjuk, hogy egyetlen olyan pont van, amely az összes A_n-nek eleme. Ennek belátásához tegyük fel, hogy ω' és ω is tart benne van minden A_n-ben, ahol $\omega' \neq \omega$. Ekkor tudjuk, hogy $|\omega - \omega'| > 0$. De ez ellentmondás, hiszen azt tettük fel, hogy $\mathrm{diam}(A_n) \to 0$. Tehát ez a határérték valóban egyértelmű. $\square$

Későbbeikben szintén fontos lesz az összefüggőség.

2.17. Definíció. Egy nyílt $A \in \mathbb{C}$ halmaz *összefüggő*, ha nincs két olyan nyílt A_1 és A_2 halmaz, amikre $A \cap A_1$ és $A \cap A_2$ diszjunktak és nem üresek, hogy $(A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) = A$.

3. fejezet

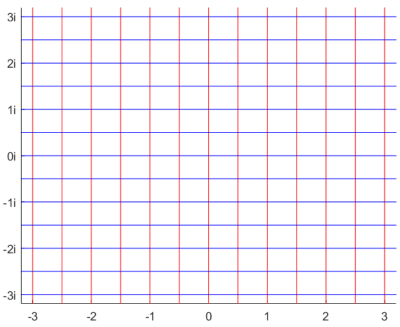
Komplex függvények

3.1. Motiváció

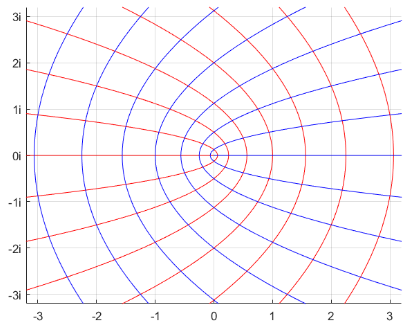
Ha komplex függvényekkel szeretnénk foglalkozni, akkor tudunk kell hogy mik is azok pontosan, hogy néznek ki illetve hogy melyiknek milyen tulajdonsága van.

3.1. Definíció. Egy f függvényt *komplex függvénynek* nevezünk, ha $A \subseteq \mathbb{C}$ és $f\colon A \mapsto \mathbb{C}$, azaz a komplex sík egy részhalmazából a komplex síkba képez.

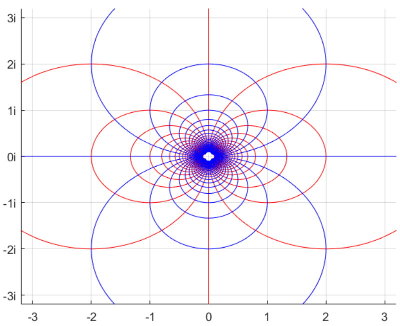
A következő árbákon az látható, hogy az alábbi függvények hogyan transzformálják át a komplex síkot. A jobb alsó ábrán szépen látszik, hogy egy konstanssal való szorzás egy forgatva nyújtásnak felel meg.



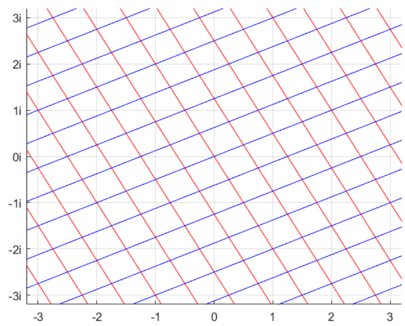
Rácsháló



$f(z) = z^2$



$f(z) = 1/z$



$f(z) = z \cdot (2 + i)$

3.1. ábra. Komplex függvények vizualizációja

3.2. Határérték és folytonosság

Az elkövetkezendő fogalmak és jelölések megegyeznek az $\mathbb{R}^2$-ben látottakkal, hiszen minden $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ komplex függvény felfogható úgy, hogy: $f(z) = f(x + yi) = u(x, y) + iv(x, y)$, ahol u és v már $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ függvények.

3.2. Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{C}$ és $z_0 \in A$ egy torlódási pont. Ekkor $f\colon A \mapsto \mathbb{C}$ függvénynek van határértéke, ezt jelölje L, ha:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \text{hogy } \forall z \in A,\ \text{ha } |z - z_0| < \delta,\ \text{akkor } |f(z) - L| < \varepsilon.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy az f-nek a z_0 pontban vett *határértéke* L. Ennek a jelölése: $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$. Ez csak akkor teljesül, ha $f(z)$ valós és képzetes része külön-külön tart L valós és képzetes részéhez: $\lim_{z \to z_0} \mathrm{Re}(f(z)) = \mathrm{Re}(L)$ és $\lim_{z \to z_0} \mathrm{Im}(f(z)) = \mathrm{Im}(L)$.

3.3. Definíció. Az f függvény *folytonos* a $z_0 \in A$ helyen, ha

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Azt mondjuk hogy f folytonos az A halmazon, ha f folytonos A minden pontjában.

A következő állításokat nem bizonyítanám, mert ezeket is láttuk már $\mathbb{R}^2$-ben.

3.4. *Állítás.* [9] Ha f és g is folytonos A-n, akkor $f \cdot g$ és $f + g$ is folytonos A-n.

Azt mondjuk, hogy f felveszi a maximumát a $z_0 \in A$ pontban, ha $\forall z$-re $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, és felveszi a minimumát $z_0 \in A$-ban, ha $\forall z$-re $|f(z)| \geq |f(z_0)|$.

3.5. *Állítás.* [9] Egy folytonos függvény egy kompakt halmazon felveszi a maximumát és a minimumát is, illetve ezen a halmazon korlátos.

3.3. Holomorf függvények

Ha már bevezettük a komplex függvényeket, érdemes megnézni ezen függvények deriváltjait, hogy néznek ki, hogyan viselkednek, feltéve hogy léteznek. Ez persze ismét analóg az $\mathbb{R}^2$-ben ismertekkel. Érdemes felidézni:

3.6. Definíció. Egy $F\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ kétváltozós függvény differenciálható a $P_0(x_0, y_0)$ pontban, ha létezik olyan J lineáris transzformáció, hogy:

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{|F(P_0 + h) - F(P_0) - Jh|}{|h|} = 0, \quad \text{ahol } h \in \mathbb{R}^2.$$

Ekkor J az F függvény P_0 pontbeli *deriváltja*.

Ezzel egyenértékű állítás a következő:

3.7. *Állítás.* [9] Egy $F\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$kétváltozós függvény differenciálható a $P_0(x_0, y_0)$ pontban, ha létezik olyan J lineáris transzformáció és $\Psi\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ függvény, hogy:

$$F(P_0 + h) - F(P_0) = Jh + |h|\Psi(h),\ \text{és } |\Psi(h)| \to 0,\ \text{ha } h \to 0.$$

Most bevezetem a komplexre értelmezett definíciót.

3.8. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz és $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$. Ekkor f *komplex differenciálható* a $z_0 \in \Omega$ pontban, ha

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

komplex határérték létezik.
Ha létezik, akkor ezt az értéket az f függvény z_0 pontbeli *deriváltjának* hívjuk. Ennek jelölése: $f'(z_0)$.

A derivált definíciójában szereplő $z - z_0$ kifejezést h-ra cserélve kapjuk meg a következő állítást.

3.9. *Állítás.* [9] Legyen $\Omega \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz és $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$. Ekkor:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0).$$

3.10. *Állítás.* [9] Az f függvény pontosan akkor komplex differenciálható a $z_0 \in \Omega$ pontban, ha létezik egy olyan K komplex szám, amire teljesül, hogy:

$$f(z_0 + h) - f(z_0) - Kh = h\Psi(h), \text{ ahol } \lim_{h \to 0} \Psi(h) = 0.$$

Ekkor $K = f'(z_0)$.

Ez nagyon hasonlít a valós kétváltozós differenciáláshoz, méghozzá olyannyira, hogy a valós függvényekre használt differenciálási szabályok itt is érvényesek. Azonban nem minden működik ugyanúgy. A valós $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ differenciáláshoz képest a komplex differenciálás esetén azok a lineáris transzformációk jók, amik egy komplex számmal való szorzást jelentenek, vagyis forgatva nyújtások, tehát ilyen alakúak:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{ahol } a = d \text{ és } b = -c.$$

Emiatt a komplex differenciánhatóság egy sokkal erősebb állítás, nem is teljesül sok egyszerű függvényre.

1. *Megjegyzés.* A komplex differenciálható függvényeket hívjuk még holomorfnak, regulárisnak vagy analitikusnak.

3.11. Definíció. Az f függvény *holomorf* Ω-n, ha Ω minden pontjában holomorf.
Ha egy függvény az egész komplex síkon holomorf, akkor azt *egésznek* nevezzük.

A holomorfizmus annyira erős tulajdonság, hogy egy holomorf függvény analitikus is, vagyis az értelmezési tartományának minden pontjában előállítja a Taylor-sora. A másik roppant erős tulajdonságuk, hogy a holomorf függvények végtelen sokszor differenciálhatóak.

Példák:

1. $f(z) = z^2$. Ekkor a definíciót felhasználva $f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(z_0+h)^2 - z_0^2}{h}$ $=$
   $= \lim_{h \to 0} \frac{z_0^2 + 2z_0h + h^2 - z_0^2}{h} = \lim_{h \to 0}(2z_0 + h) = 2z_0$.

2. $f(z) = \frac{1}{z}$. Definícióval $f'(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z_0) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z_0 - z}{zz_0(z - z_0)} =$
   $= \lim_{z \to z_0} -\frac{1}{zz_0} = -\frac{1}{z_0^2}$

3.4. Cauchy-Riemann egyenletek

Láttuk hogy hogyan kell kiszámolni egy komplex függvény deriváltját, ha az létezik. Ekkor persze felmerül a kérdés: Honnan tudjuk hogy deriválható-e egy függvény? Hogy erre választ kapjunk, először egy más irányból kell megközelítenünk a problémát.

Minden f függvényhez társítsunk két valós függvényt, u-t és v-t, amelyek a valós és képzetes részeket jelentik:

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y).$$

Tegyük fel, hogy f differenciálható egy $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban, azaz:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{f(x+yi) - f(x_0+iy_0)}{(x+iy) - (x_0+iy_0)} =$$

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{u(x,y) + iv(x,y) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)}{(x+iy) - (x_0+iy_0)}.$$

Ebből következik, hogy bármely irányból közelítjük z_0-t, a határérték értéke nem változik.

Először vízszintesen, az x tengellyel párhuzamosan közelítjük meg a pontot, tehát az x szerint (ekkor $y = y_0$, hiszen az nem változik):

$$f'(z_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x,y_0) + iv(x,y_0) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)}{x - x_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Ezután függőleges irányban, az y tengellyel párhuzamosan, tehát az y szerint (ekkor $x = x_0$, hiszen az nem változik):

$$f'(z_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0,y) + iv(x_0,y) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)}{iy - iy_0} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Tehát az alábbi egyenlőtlenségek teljesülnek ($\frac{1}{i} = -i$ átírás után):

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = -i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Tudjuk, hogy két komplex szám akkor és csak akkor egyenlő, ha a valós és a képzetes részeik is egyenlőek. Tehát:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{és} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.12}$$

Ezt a két egyenletet hívjuk a Cauchy-Riemann egyenleteknek.

3.13. Tétel. Tegyük fel, hogy $f = u + iv, \Omega$ nyílt halmazon értelmezett komplex értékű függvény. Ha u és v folytonosan differenciálhatóak és kielégítik a Cauchy-Riemann egyenleteket Ω-n, akkor f holomorf Ω-n.

Bizonyítás. Legyen $h = h_1 + ih_2,\ h \in \Omega$. Ekkor a (3.10) állítást felhasználva:

$$\mathrm{Re}(f(z+h)) - \mathrm{Re}(f(z)) = u(x+h_1, y+h_2) - u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}h_2 + |h|\Psi_1(h)$$

és

$$\mathrm{Im}(f(z+h)) - \mathrm{Im}(f(z)) = v(x+h_1, y+h_2) - v(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}h_1 + \frac{\partial v}{\partial y}h_2 + |h|\Psi_2(h),$$

ahol $\Psi_1(h)$ és$\Psi_2(h)$ tartanak 0-hoz, ha h tart 0-hoz. A (3.12) Cauchy-Riemann egyenleteket felhasználva :

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= \frac{\partial u}{\partial x}h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}h_2 + |h|\Psi_1(h) + i\frac{\partial v}{\partial x}h_1 + i\frac{\partial v}{\partial y}h_2 + i|h|\Psi_2(h) = \\ &\overset{(3.12)}{=} \frac{\partial u}{\partial x}h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}h_2 + |h|\Psi_1(h) - i\frac{\partial u}{\partial y}h_1 + i\frac{\partial u}{\partial x}h_2 + i|h|\Psi_2(h) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(h_1 + ih_2) - i\frac{\partial u}{\partial y}(h_1 + ih_2) + |h|\Psi_1(h) + i|h|\Psi_2(h) = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)(h_1 + ih_2) + |h|\Psi(h), \end{aligned}$$

ahol $\Psi(h) = \Psi_1(h) + i\Psi_2(h)$. Ez pontosan az amit a (3.10) állítás alapján szerettünk volna, hiszen $\Psi(h) \to 0$, ha $h \to 0$. □

3.5. Hatványsorok

A későbbiekben nagyon fontos szerepük lesz hatványsoroknak, ugyanis belátható, hogy minden komplex differenciálható függvény felírható hatványsor alakban. Persze ezeket a definíciókat már láttuk valósak körében, ismétlés céljából viszont érdemes újra megfogalmazni dolgokat.

3.14. Definíció. *Hatványsoroknak* nevezzük azokat a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

alakú végtelen összegeket, ahol $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ számsorozat. Az x_0 a hatványsor középpontja. Ez a sorozat lehet valós és komplex számsorozat is, de jelen esetben számunkra a komplex lesz a fontos.

Alapvető kérdés, hogy mennyi egy ilyen hatványsornak az összege, konvergál-e valahova, vagy hogy divergens-e a hatványsor. Az derül ki, hogy az számít, hogy milyen halmazon vizsgáljuk az adott hatványsort. A mértani sort ismerjük (később belátjuk):

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \begin{cases} \frac{1}{1-z}, & \text{ha } |z| < 1 \\ \text{nem konvergál}, & \text{ha } |z| \geq 1. \end{cases}$$

Na de miért pont az 1?

3.15. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hatványsor *abszolút konvergens*, ha $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ sor konvergens.

Azt a tartományt ahol a hatványsor konvegens, konvergenciatartománynak nevezzük. A valós $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ mértani sornál ez a tartomány $(-1, 1)$ intervallum.

3.16. Tétel. [15] Ha egy sor abszolút konvergens, akkor konvergens.

3.17. Tétel. Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| z^n$ hatványsor. Ekkor létezik olyan $0 \leq R \leq \infty$, hogy:

Ha $|z| < R$, akkor a sor abszolút konvergens .

Ha $|z| > R$, akkor a sor divergens.

Ha bevezetjük a következőket, miszerint:

$$\frac{1}{0} = \infty \quad \text{és} \quad \frac{1}{\infty} = 0,$$

akkor az R számról elmondhatjuk, hogy

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Bizonyítás. Legyen R a tétel képletének megfelelő, és legyen $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Ekkor ha $|z| < R$:

$$1 = L \cdot R \xRightarrow{|z|<R} 1 > L \cdot |z|.$$

Ekkor tudunk olyan kicsi pozitív ε-t mondani, amire az alábbi teljesül:

$$1 > (L + \varepsilon) \cdot |z|.$$

Legyen $r = (L + \varepsilon) \cdot |z|$. A $\limsup$ tulajdonsága miatt $L + \varepsilon \geq \sqrt[n]{|a_n|}$ elég nagy n-re. Így továbbírva az egyenlőtlenséget:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z| \leq (L + \varepsilon) \cdot |z|. \xRightarrow{n.\text{hatvány}} |a_n| \cdot |z|^n \leq (L + \varepsilon)^n \cdot |z|^n = r^n$$

Ha a tagok összegét vesszük, akkor:

$$\sum_n |a_n| \cdot |z|^n \leq \sum_n r^n.$$

De $r < 1$, és tudjuk hogy ekkor a mértani sor konvergens, tehát $\sum_n r^n$ konvergens, amiből a majorizációs elv miatt következik, hogy $\sum_n |a_n| \cdot |z|^n$ szintén konvergens.

□

Könnyen tudunk olyan hatványsorokat mondani, amelyek a teljes komplex síkon konvergensek. Valósak között már láttuk, hogy a sin, cos és az e^x függvények hatványsorai az egész valós számegyenesen konvergensek, tehát a konvergencia sugár mind a három esetében végtelen. A konvergenciasugár nem változik meg, ha kiterjesztjük a komplex síkra, így a komplex hatványsoruk az egész komplex síkon konvergens:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \cos(z) \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(z).$$

Ezek a komplex szinusz és a komplex koszinusz függvények definíciói. De talán a legfontosabb az a komplex exponenciális függvény, vagyis az e^z.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} = \frac{z^n}{n!}.$$

3.18. *Állítás.* A komplex $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ mértani sor pontosan a $B(0,1)$ nyílt körlapon konvergens.

Bizonyítás. Legyen $S_n = \sum_{i=0}^{n} z^i$. Ekkor $S_n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n$. Most szorozzuk meg mindkét oldalt z-vel, tehát $zS_n = z + z^2 + \ldots + z^{n+1}$. Ezután az első egyenletből vonjuk ki a másodikat: $S_n - zS_n = S_n(1-z) = 1 - z^{n+1}$. Most átrendezzük az egyenletet: $S_n = \frac{1}{1-z}(1 - z^{n+1})$, $z \neq 1$. A végtelen sor definíciója miatt határértéket veszünk:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-z}(1 - z^{n+1}) = \frac{1}{1-z} \lim_{n\to\infty} (1 - z^{n+1}).$$

Ez pedig konvergens, ha $|z| < 1$, a limesz értéke 1, így a sorösszeg $S_n = \frac{1}{1-z}$, $z \neq 1$.

Most belátjuk, hogy máshol nem konvergens. A konvegrenciához szükséges, hogy a tagokból álló sorozat 0-hoz tartson. Ha $|z| \geq 1$, akkor a $\lim_{n\to\infty} z^n \neq 0$. Ezért a komplex $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ mértani sor konvergenciatartománya a $B(0,1)$ nyílt körlap.

□

3.19. Tétel. Legyen $\sum a_n z^n$ olyan hatványsor, ami a konvergenciatartományán egy holomorf f függvényt definiál. Ekkor f' egy olyan hatványsor, amely az eredeti sor tagonkénti deriváltja és f' konvergenciasugara megegyezik f konvergenciasugarával:

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

Bizonyítás. (Csak a konvergeciasugárra vonatkozó részt bizonyítom.)

Legyenek R_f és $R_{f'}$ rendre f és f' konvergenciasugarai. Cauchy-Hadamard formulát és a $\limsup n^{\frac{1}{n}} = 1$ észrevételt felhasználva látjuk, hogy

$$\frac{1}{R_{f'}} = \limsup_{n\to\infty} |na_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R_f}.$$

Vagyis a két hatványsor konvergenciasugara megegyezik.

□

Innen már mutatható egy nagyon érdekes összefüggés, amit leggyakrabban Euler formulájának hívnak.

3.20. *Állítás.* $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$.

Bizonyítás. Hatványsorokat fogunk alkalmazni. Tudjuk az exponenciális függvény Taylor-sorát és azt hogy a sora az egész komplex síkon konvergens. Első lépésként legyen $z = i\varphi$:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} = \frac{z^n}{n!} = e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} = \frac{(i\varphi)^n}{n!}.$$

Ezután felbontjuk, hogy tényezőkre, majd elvégezzük a tagok hatványozását:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = 1 + i\varphi + \frac{i^2\varphi^2}{2!} + \frac{i^3\varphi^3}{3!} + \frac{i^4\varphi^4}{4!} + \frac{i^5\varphi^5}{5!} + \ldots = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \ldots =$$

Következő lépésben szétválasztjuk a valós és képzetes tagokat és azokból kiemeljük i-t:

$$= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots\right) + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots\right) =$$

Innen visszaalakítjuk zárt formába az összegeket külön külön:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ez a két összeg pontosan a $\cos\varphi$ és $\sin\varphi$ hatványsorai. Vagyis:

$$e^z = e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

□

3.21. *Következmény.* A komplex számokra egy új alakot kapunk. Legyenek z, u, w komplex számok és φ, α, β a valós tengely pozitív felével bezárt szögeik, ekkor:

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$.

Ha $z = i\pi$, akkor $e^{i\pi} = -1 \Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0$. Ez a híres Euler formula.

Két komplex szám szorzata pedig: $u \cdot w = |u||w|e^{\alpha+\beta}$. Itt is látszik, hogy a hossz szorzódik, a szögek pedig összeadódnak.

A (3.19) tételnek vagy egy nagyon fontos következménye, mégpedig az, hogy egy hatványsor végtelen sokszor differenciálható a konvergenciatartományán, és a magasabb deriváltjai is mind olyan hatványsorok, amelyeket az eredeti sor tagonkénti deriválásából kapunk meg.

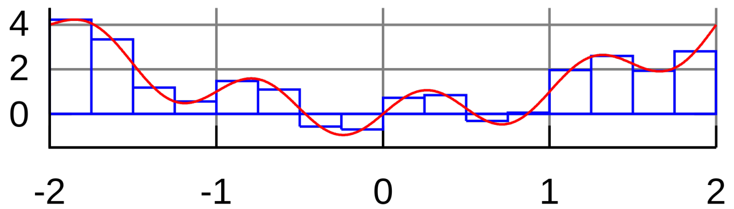
Eddig csak olyan hatványsort elmítettem, amely 0 középpontú, viszont a nem 0 középpontú hatványsorokat könnyen átalakíthatjuk olyan alakba, amire a tétel már igaz. Legyen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, így a konvergenciatartomány középpontja z_0. Ekkor legyen $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Így $z = w - w_0$ helyettesítéssel látható hogy $f(z) = g(w)$.

4. fejezet

Komplex függvények integrálása

4.1. Heurisztika

Valós függvények integrálásán olyasmire gondolunk, hogy egy függvény alatti területet szeretnénk megadni két valós szám között., Ezt úgy oldjuk meg, hogy a két végpont közötti területet részintervallumokra bontjuk, majd ezekre az intervallumokra téglalapokat állítunk, melyek olyan magasak, amekkora intervallumok valamely pontjában egy-egy felvett érték.



4.1. ábra. Valós függvény integráljának közelítése [14]

Mondhatjuk, hogy elég egyszerű dolgunk van, amikor azt mondjuk hogy integráljuk az f függvényt a-tól b-ig, hiszen csak egy irányba kell mennünk, balról jobbra.

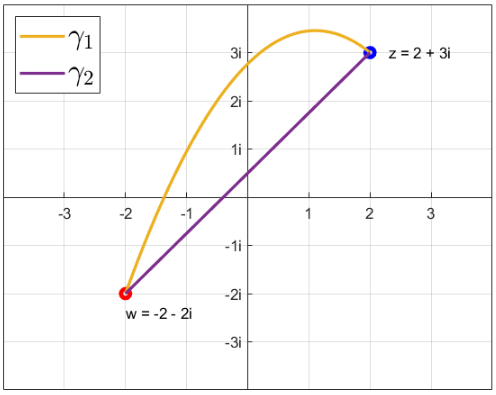
Viszont a komplex síkon ez már nem egyértelmű. Nem csak egyféleképpen tudunk eljutni a pontból b pontba, azaz nem csak egy görbe mentén tudunk integrálni, de a módszer az majdnem ugyanaz. A görbét felosztjuk kicsi részekre. A komplex számokat vektorként kezeljük, így a kicsi felosztott részek is vektorok lesznek. A valóstól eltérően itt az eltérés és a magasság szorzása helyett $(f(z)\cdot(z_n - z_{n-1}))$ két komplex szám szorzata lesz, majd ezeket összegezzük.

4.2. Komplex integrálás

Tehát ahhoz hogy egyértelmű legyen, meg kell mondanunk, hogy milyen görbén integrálunk. Ehhez először tudnunk kell mi az a görbe.

4.1. Definíció. Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ és $\gamma\colon\ [a,b] \mapsto \mathbb{C}$. Ekkor γ-t *komplex görbének* hívjuk.

A heurisztika alapján ezt a görbét részekre kell felosztanunk.



4.2. ábra. Több görbe is megengedett két komplex szám között

4.2. Definíció. Legyen $\gamma\colon\ [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ egy görbe és ennek egy F *felosztásán* a $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ pontokat értjük. A γ görbére azt mondjuk hogy *sima*, ha létezik a deriváltja és az semelyik t pontban nem 0. A két végpontban csak az egyoldali deriváltat nézzük. Ha a görbe csak $[t_j, t_{j+1}]$ intervallumonként sima, ami azt jelenti hogy valamely t_i pontban a bal és jobboldali deriváltak eltérhetnek, akkor *szakaszosan sima* görbének hívjuk.

4.3. Definíció. Legyen F a $\gamma\colon\ [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ görbe egy felosztása. A *felosztás finomságán* az $|F| = \sup\{|t_{j+1} - t_j|,\ j = 0, 1, \ldots, n-1\}$ számot értjük.

4.4. Definíció. Azokat a görbéket amik a kezdőpontjukban végződnek, vagyis $\gamma(a) = \gamma(b)$, azokat *zárt görbéknek* nevezzük.

Ahogy nem mindegy, hogy két komplex szám között milyen alakú görbén integrálunk, az sem elhanyagolható, hogy milyen irányítású a görbe.

4.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy zárt görbe *pozitív irányítású*, ha az óramutató járásával ellentétesen járjuk be a görbét és *negatív irányítású* ha az óramutató járásával megegyezően.

Példa $C(0, r)$-en:

Pozitív irányítás: $z(t) = re^{it},\ t \in [0, 2\pi]$.

Negatív irányítás: $z(t) = re^{-it},\ t \in [0, 2\pi]$.

4.6. Definíció. Két differenciálható paraméterezés, $z_1(t)$ és $z_2(t)$ *ellentétes irányítású*, ha érintővektoraik ellentétes irányúak, vagyis

$$\frac{z_1'(t)}{z_2'(t)} < 0.$$

Egy ilyen z_2 konkrét paraméterezése: $z_2(t) = z_1(b+a-t)$, ahol a és b a görbe két végpontja. Az így kapott z_2 jelölése: $z_2 = z_1^-$.

Egységesség szempontjából innentől kezdve a zárt görbéket alapvetően pozitív irányítással fogom kezelni.

Most térjünk vissza a heurisztikához. A görbe felosztásaival elvégezzük a szorzásokat és az összegzést. Legyen γ deriválható, és $\Delta\gamma(t_j) = \gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)$. Ekkor az S_n összeg:

$$S_n = \sum_{j}^{n-1} f(\gamma(t_j)) \cdot \Delta\gamma(t_j) = \sum_{j}^{n-1} f(\gamma(t_j)) \cdot (\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)) =$$
$$= \sum_{j}^{n-1} f(\gamma(t_j)) \cdot \frac{\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \cdot (t_{j+1} - t_j).$$

Ez már nagyon hasonlít a Riemann-integrál közelítésére. Ha $n \to \infty$, vagyis egyre sűrűbben veszek fel osztópontokat és a görbén és elég finom a felosztás, akkor a fenti hányados közel van $\gamma'(t_j)$-hez, így az összeg közel van egy integrál közelítő összeghez. Ezért a heurisztika alapján várható, hogy az integrál értéke:

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt.$$

Belátható, hogy az integrál értéke független γ paraméterezésétől.

4.7. Definíció. Legyen $\gamma\colon [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ görbe és F a görbe egy felosztása. Válasszunk egy $k_j \in [t_j, t_{j+1}]$ közbülső értéket minden j-re. Ezen k_j-k összességét jelölje K. Tekintsük az

$$S(f,K,F) = \sum_{j=0}^{n-1} f(k_j)(\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j))$$

közelítő összeget. Ha létezik olyan I, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy ha $|F| < \delta$, akkor bármelyik K közbülső pontokra $|S(f,K,F) - I| < \varepsilon$, akkor az f függvény integrálható a γ görbe mentén és I-t a függvény γ görbe menti *vonalintegráljának* nevezzük. Ezt az I számot $\int_\gamma f(z)dz$-vel jelöljük.

4.8. Tétel. [7] Legyen $f\colon A \mapsto \mathbb{C}$ folytonos függvény, $\gamma\colon [a,b] \mapsto A$ folytonosan differenciálható görbe. Ekkor a komplex vonalintegrál értéke:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

A szakaszosan sima görbéket szakaszonként integráljuk, majd ezeket összegezzük. Zárt görbék esetén, hogy könnyebben észrevegyük hogy zárt, más jelölés is használatos. A megszokott $\int$ helyett a $\oint$ szimbólumot is használjuk.

4.9. *Következmény.* A 4.8 tétel feltételeinek teljesülése esetén az integrálásra igazak az alábbi tulajdonságok:

Lineáris, vagyis $a, b \in \mathbb{C}$-re:

$$\int_\gamma (af(z) + bg(z))dz = a\int_\gamma f(z)dz + b\int_\gamma g(z)dz.$$

Ellentétes irányítással az integrál értéke az ellentettje lesz:

$$\int_\gamma f(z)dz = -\int_{\gamma^-} f(z)dz.$$

Fennáll a következő egyenlőtlenség :

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \sup_{z\in\gamma}|f(z)| \cdot \int_a^b |\gamma'(t)|dt. \tag{4.10}$$

Az első két állítás világosan következik a tételből, ezért csak az egyenlőtlenséget bizonyítom.

Bizonyítás.

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \overset{(4.8\text{ tétel})}{=} \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|\,dt =$$
$$= \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt \leq \sup_{z\in\gamma}|f(z)| \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

□

4.11. *Állítás.* [5] Egy differenciálható görbe hosszát jelölje length(γ). Ekkor length(γ) = $\int_a^b |\gamma'(t)|dt$.

Valós integrálásnál mindig igyekszünk arra törekedni, hogy megtaláljuk a megfelelő primitívfüggvényt annak érdekében, hogy a Newton-Leibniz formulát alkalmazva leegyszerűsítsük a számolásunkat. A komplex függvényeknél sincs ez másképp.

4.12. Definíció. Legyen $A \subseteq \mathbb{C}$ nyílt halmaz, és $f\colon A \mapsto \mathbb{C}$. Ekkor az $F\colon A \mapsto \mathbb{C}$ függvényt f *primitív függvényének* hívjuk, ha $F' = f$.

Most már kimondhatjuk a tételt, amit gyakran a komplex Newton-Leibniz formulának is hívnak.

4.13. Tétel. Legyen $f\colon A \mapsto \mathbb{C}$ komplex differenciálható függvény és $\gamma\colon [a,b] \mapsto A$ görbe. Ha F primitív függvénye f-nek, akkor:

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Bizonyítás. Először felírjuk definíció szerint:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt =$$

Tudjuk a láncszabályt alkalmazni: $F'(\gamma(t))\gamma'(t) = (F(\gamma(t)))'$.

$$= \int_a^b (F(\gamma(t)))'dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

□

Ez egy nagyon erős tulajdonság, ami sokban megkönnyíti a későbbi számolásokat, emellett van egy roppant erős következménye, amit több alkalommal is kifogunk használni.

4.14. *Következmény.* Ha γ egy zárt görbe és f-nek van primitív függvénye A-n, akkor:

$$\int_\gamma f(z)dz = \oint_\gamma f(z)dz = 0.$$

Ez abből következik, hogy a görbe kezdő és végpontja megegyezik.

Példák:

1. Legyen $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f = \frac{1}{z^2}$, a görbe pedig az egységkör, $\gamma(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ és tudjuk, hogy a primitív függvény $F = -\frac{1}{z}$. Ekkor az integrál:

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(2\pi)) - F(\gamma(0)) = F(e^{2\pi i}) - F(e^{0i}) = F(1) - F(1) = 0.$$

2. Vegyük előző görbét, de most más függvénnyel, legyen $f = \frac{1}{z}$. Ekkor:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}(e^{it})'dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}dt = \int_0^{2\pi} idt = i\,[t]_0^{2\pi} = 2\pi i.$$

   Ez nem 0, ami azt jelenti, hogy az $f = \frac{1}{z}$ függvénynek ezen a tartományon nincs primitív függvénye.

Láttuk, hogy ha egy $f\colon A \mapsto \mathbb{C}$ holomorf, akkor minden γ zárt görbén, amely benne van A-ban, az integrál értéke 0 lesz. Ez visszafelé is igaz.

4.15. Tétel. [9] Legyen A egy nyílt összefüggő halmaz és $f\colon A \mapsto \mathbb{C}$ holomorf függvény és γ zárt görbe A-ban. Ha minden A beli γ-ra $\int_\gamma f(z)dz = 0$, akkor f-nek van primitív-függvénye.

4.3. Cauchy-tétel

Eddig általános alakú görbéket és köröket említettem, ám persze nem csak ezek vannak. Ahhoz hogy a legfontosabb és legerősebb tételeket belássuk, másfajta speciális görbéket kell használnunk, amelyek nem triviálisak. Ilyen egy háromszög alakú zárt görbe.

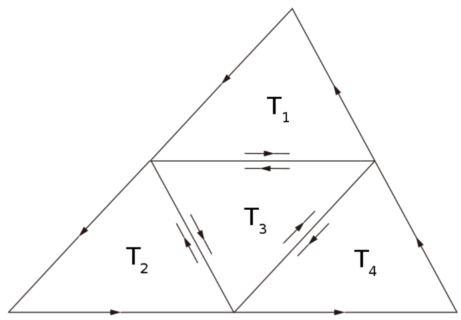
4.16. Tétel (Goursat-tétel)**.** Legyen $A \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz, $f\colon A \mapsto \mathbb{C}$ holomorf függvény és $T^{(0)}\colon\ [a, b] \mapsto A$ egy olyan háromszög alakú zárt görbe, amelynek lezártja benne van A-ban. Ekkor

$$\int_{T^{(0)}} f(z)dz = 0.$$

Bizonyítás. Az az alap ötlet, hogy ha ugyanazon görbén integrálunk egyik, azután ellentétes irányban, majd ezeket összeadjuk, akkor pont kiejtik egymást, az érték 0 lesz. Felbontjuk a háromszöget 4 kisebb háromszögre úgy hogy az oldalak felezőpontjait összekötjük. A belső háromszög oldalait is irányítjuk, oda, majd vissza, hogy az eredeti integrál ne változzon.

Így felírhatjuk a következő összefüggést, miszerint az eredeti integrál felbontható a kisebb háromszögeken vett integrálok összegére:

$$\int_{T^{(0)}} f(z)dz = \int_{T_1} f(z)dz + \int_{T_2} f(z)dz + \int_{T_3} f(z)dz + \int_{T_4} f(z)dz.$$



4.3. ábra. Eredeti háromszög felosztása

Ekkor alkalmazhatjuk a háromszög egyenlőtlenséget:

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \left|\int_{T_1} f(z)dz\right| + \left|\int_{T_2} f(z)dz\right| + \left|\int_{T_3} f(z)dz\right| + \left|\int_{T_4} f(z)dz\right|.$$

Ezek az értékek már csak valós számok. Ezek közül kitudjuk választani a legnagyobbat, ezt jelölje $T^{(1)}$. Tudjuk, hogy a legnagyobb négyszerese legalább akkora mint a négy kis háromszögön vett integrál összege, így a tranzitivitást kihasználva:

$$\left|\int_{T^{(0)}} f(z)dz\right| \leq 4\left|\int_{T^{(1)}} f(z)dz\right|.$$

Ezt a felbontást iteráljuk, így egyre kisebb háromszögeket kapunk, de az egyenlőtlenséget továbbra is feltudjuk írni, hiszen . Végezzük el ezt a műveletet összesen n-szer:

$$\left|\int_{T^{(0)}} f(z)dz\right| \leq 4^n\left|\int_{T^{(n)}} f(z)dz\right|.$$

Ezek a háromszögek egymásba vannak skatulyázva és $\mathrm{diam}(T_n) \to 0$, méghozzá úgy, hogy a zárt háromszög lapok kompakt halmazok. Ezért pontosan egy olyan z_0 pont létezik, amelyik az összes T^n háromszögben benne van. Így kitudjuk használni, hogy a függvényünk holomorf, deriválható a z_0 pontban. Ez felírható a következőképpen a (3.10) állítás miatt:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \Psi(z)(z - z_0), \text{ ahol } \Psi(z) \to 0 \text{ ha } z \to z_0.$$

Ezt visszahelyettesítve a fenti egyenlőtlenségbe:

$$\left|\int_{T^{(0)}} f(z)dz\right| \leq 4^n\left|\int_{T^{(n)}} f(z)dz\right| = 4^n\left|\int_{T^{(n)}} f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \Psi(z)(z - z_0)\right| dz =$$

$$= 4^n\left|\int_{T^{(n)}} f(z_0)dz + \int_{T^{(n)}} f'(z_0)(z - z_0)dz + \int_{T^{(n)}} \Psi(z)(z - z_0)dz\right|.$$

Vegyük észre, hogy $f(z_0)$ az $f(z_0)z$ deriváltja és $f'(z_0)(z - z_0)$ az $\frac{f'(z_0)}{2}(z - z_0)^2$ deriváltja. Vagyis mindkettőnek van primitív függvénye ezért azok integráljai 0-ák, tehát:

$$\left|\int_{T^{(0)}} f(z)dz\right| \leq 4^n \left|\int_{T^{(n)}} \Psi(z)(z-z_0)dz\right|$$

Ekkor az egyenlőtlenség jobb oldalán lévő integrál értékét felülről tudjuk becsülni (4.10) miatt:

$$4^n \left|\int_{T^{(n)}} \Psi(z)(z-z_0)dz\right| \leq 4^n \sup_{z\in T^{(n)}} |\Psi(z)| \cdot \sup_{z\in T^{(n)}} |z-z_0| \cdot \text{length}\left(T^{(n)}\right).$$

Míg az eredeti görbe hossza, vagyis a háromszög kerülete length $\left(T^{(n)}\right)$ volt, amit jelöljön r, és mivel minden lépésben a felezőpontokkal bontottuk fel a háromszöget, így tudjuk, hogy a kisebb háromszög hossza pontosan a fele, ezért a $T^{(n)}$ háromszög $r2^{-n}$ hosszú. A $z-z_0$ távolsága is felülről becsülhető ugyanezzel a számmal, hiszen z mindig a háromszög határvonalán van, triviális, hogy ez a távolság kisebb vagy egyenlő mint a háromszög hossza. Tehát ami megmaradt:

$$4^n \left|\int_{T^{(n)}} \Psi(z)(z-z_0)\right| dz \leq 4^n \sup_{z\in T^{(n)}} |\Psi(z)| \cdot \frac{r^2}{(2^n)^2} = r^2 \sup_{z\in T^{(n)}} |\Psi(z)|.$$

Tudjuk, hogy $|\Psi(z)| < \varepsilon$, ha $|z-z_0| < \delta$. Ha n elég nagy, akkor $|z-z_0| < \text{diam}(T_n) < \delta$. Persze ε bármilyen kicsi lehet, ezért $n \to \infty$ esetén

$$\left|\int_{T^{(0)}} f(z)dz\right| \leq r^2 \sup_{z\in T^{(n)}} |\Psi(z)| \to 0.$$

□

4.17. *Következmény.* Legyen f holomorf az A nyílt halmazon és legyen R egy téglalap alakú zárt görbe úgy, hogy a körvonala és a belseje is A-ban van. Ekkor $\int_R f(z)dz = 0$, hiszen a téglalapot feltudjuk osztani két ellentétes irányítású háromszögre, azokon pedig tudjuk, hogy az integrál értéke 0.

A következő tétel a Cauchy-tétel bizonyításának az egyik alappillére.

4.18. Tétel. Ha f holomorf a $B(z_0, r)$ nyílt körlapon, akkor létezik primitív függvénye ugyanezen a halmazon.

Bizonyítás. Legyen $f\colon B(z_0, r) \mapsto \mathbb{C}$ holomorf függvény. Jelölje $\int_{\gamma_z} f(\omega)d\omega$ vonalintegrál értékét $F(z)$, ahol $z \in B(z_0, r)$ és γ_z a z_0-t és z-t összekötő egyenes szakasz. Azt szeretnénk belátni, hogy $F'(z) = f(z)$. Ehhez tekintsük a

$$K(\tilde{z}, z) = \left|\frac{F(\tilde{z}) - F(z)}{\tilde{z} - z} - f(z)\right| \tag{4.19}$$

kifejezést. Erről a különbségről fogjuk belátni, hogy 0-hoz tart, ha $\tilde{z}$ tart z-hez:

$$K(\tilde{z}, z) = \left|\frac{F(\tilde{z}) - F(z) - f(z)(\tilde{z} - z)}{\tilde{z} - z}\right| = \left|\frac{1}{\tilde{z} - z}\right| |F(\tilde{z}) - F(z) - f(z)(\tilde{z} - z)|.$$

Most átírjuk az F-eket a definíciójuk szerint:

$$K(\tilde{z}, z) = \left|\frac{1}{\tilde{z} - z}\right| \left|\int_{\gamma_{\tilde{z}}} f(\omega)d\omega - \int_{\gamma_z} f(\omega)d\omega - f(z)(\tilde{z} - z)\right|. \tag{4.20}$$

Vegyük észre, hogy tudunk készíteni egy háromszöget a $0, z, \tilde{z}$ pontokkal úgy, hogy a zárt háromszöglap benne van a $B(z_0, r)$ körlap belsejében. Legyen $\gamma_{z,\tilde{z}}$ a $z \to \tilde{z}$ irányítású szakasz. A Goursat-tétel felhasználásával megkapjuk, hogy:

$$\int_{\gamma_{\tilde{z}}} f(\omega)d\omega + \int_{\gamma_{z,\tilde{z}}^-} f(\omega)d\omega + \int_{\gamma_z^-} f(\omega)d\omega = 0.$$

Ezt átírva kapjuk:

$$\int_{\gamma_{\tilde{z}}} f(\omega)d\omega - \int_{\gamma_z} f(\omega)d\omega = \int_{\gamma_{z,\tilde{z}}} f(\omega)d\omega.$$

Emellett vegyük észre, hogy $(\tilde{z} - z) = \int_{\gamma_{z,\tilde{z}}} 1d\omega$, ezért

$$f(z)(\tilde{z} - z) = f(z)\int_{\gamma_{z,\tilde{z}}} 1d\omega = \int_{\gamma_{z,\tilde{z}}} f(z)d\omega.$$

Ezeket behelyettesítjük a fenti (4.20) abszolút értékes felírásba, majd összevonjuk közös integrál alá:

$$K(\tilde{z}, z) = \left|\frac{1}{\tilde{z} - z}\right| \left|\int_{\gamma_{z,\tilde{z}}} f(\omega)d\omega - \int_{\gamma_{z,\tilde{z}}} f(z)d\omega\right| = \left|\frac{1}{\tilde{z} - z}\right| \left|\int_{\gamma_{z,\tilde{z}}} (f(\omega) - f(z))\, d\omega\right|$$

A kapott kifejezést (4.10) miatt már felülről tudjuk becsülni, ahol tudunk egyszerűsíteni $\gamma_{z,\tilde{z}}$ hosszával, hiszen az pont $|\tilde{z} - z|$:

$$K(\tilde{z}, z) \le \left|\frac{1}{\tilde{z} - z}\right| \sup_{\omega \in \gamma_{z,\tilde{z}}} |f(\omega) - f(z)| \cdot \text{length}\,(\gamma_{z,\tilde{z}}) = \sup_{\omega \in \gamma_{z,\tilde{z}}} |f(\omega) - f(z)|\,. \tag{4.21}$$

Ekkor $|f(\omega) - f(z)| < \varepsilon$ ha $|\omega - z| < \delta$, hiszen ha $|\tilde{z} - z|$ elég kicsi, akkor $|\omega - z| < \text{diam}(\gamma_{z,\tilde{z}}) < \delta$. Az ε bármilyen kicsi lehet. Ezért ha $\tilde{z} \to z$, akkor (4.21) tart 0-hoz. Ez azt jelenti akkor, hogy az (4.19) kifejezés tart 0-hoz ha $\tilde{z}$ tart z-hez, vagyis $F'(z) = f$. □

Most következzen a komplex analízis egyik legalapvetőbb tétele.

4.22. Tétel (Cauchy-tétel körlapon)**.** Legyen f egy $B(z_0, r)$ nyílt körlapon holomorf függvény és γ egy $B(z_0, r)$-beli zárt görbe. Ekkor :

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Bizonyítás. Mivel f holomorf, ezért (4.18) tétel miatt van primitív függvénye, így a (4.14) következményből adódik. □

Összegzés

Szakdolgozatomban a komplex függvénytan alapjait dolgoztam fel, de természetesen ez csak a jéghegy csúcsa. Az általam említett tételeknek vannak általánosabb megfogalmazásaik is és léteznek mélyebb tételek, amelyekkel sokkal általánosabb dolgokat tudunk megmagyarázni és kiszámolni. Ilyen például a rezidum-tétel és Cauchy integrál formula, ám ezek elég mély megértésére sajnos nem maradt időm.

Irodalomjegyzék

[1] Tóth András. Komplex számok (bsc szakdolgozat). https://web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_alkmat/2010/toth_andras.pdf, 2010.

[2] Juan Carlos Ponce Campuzano. Complex analysis: A visual and interactive introduction. https://complex-analysis.com/content/brief_history.html, 2019-2023.

[3] Stack Exchange. Minimális körlap ábra. https://math.stackexchange.com/questions/1490014/circumscribed-circle-of-compact-set.

[4] Alexander Kupers. Lectures on complex analysis. https://www.utsc.utoronto.ca/people/kupers/wp-content/uploads/sites/50/2020/12/complex-analysis-2019.pdf, 2019.

[5] Serge Lang. *Complex Analysis*. Springer, fourth edition, 1998.

[6] Mathematics and such. Nyílt fedés ábra. https://mathstrek.blog/2013/02/26/topology-more-on-compact-spaces/.

[7] Nagy Márton. Komplex függvénytan (bevezetés) -vázlatok. http://nmarci.web.elte.hu/dirs/jegyzetek/Complex.pdf, 2021.

[8] The Bright Side of Mathematics. Complex analysis - videó és pdf változat. https://www.youtube.com/@brightsideofmaths.

[9] Elias M. Stein, Remi Shakarchi. *Complex Analysis*. Princeton University Press, 2007.

[10] Keleti Tamás. Fejezetek analízisből órai jegyzete.

[11] Kusz Emese Tünde. A számfogalom kialakulása - komplex számok (bsc szakdolgozat). https://docplayer.hu/38411647-A-szamfogalom-kialakulasa-komplex-szamok.html, 2015.

[12] Veritasium. How imaginary numbers were invented - videó. https://www.youtube.com/watch?v=cUzklzVXJwo&ab_channel=Veritasium.

[13] Wikipédia. https://en.wikipedia.org/wiki/Complex_number.

[14] Wikipédia. https://hu.wikipedia.org/wiki/Numerikus_integr%C3%A1l%C3%A1s.

[15] Gémes Margit, Szentmiklóssy Zoltán. *Bevezetés a matematikába jegyzet és példatár kémia BsC-s hallgatók számára*. Eötvös Loránd Tudományegyetem, 2016.