Szakdolgozat

Csendi Balázs

matematikatanár – történelem és állampolgári ismeretek tanára

osztatlan tanárszak

2023.

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
Természettudományi Kar

Szakdolgozat

Versenyfeladatok a közoktatásban

Témavezető:
Fried Katalin Dr.

Készítette:
Csendi Balázs
matematikatanár – történelem és állampolgári ismeretek tanára
osztatlan tanárszak

2023.

Eredetiségi nyilatkozat

Alulírott Csendi Balázs (B1M64B) ezennel kijelentem és aláírásommal megerősítem, hogy az ELTE matematikatanár - történelem és állampolgári ismeretek tanára osztatlan tanári mesterszakján írt jelen diplomamunkám saját szellemi termékem, melyet korábban más szakon még nem nyújtottam be szakdolgozatként, és amelybe mások munkáját (könyv, tanulmány, kézirat, internetes forrás, személyes közlés stb.) idézőjel és pontos hivatkozások nélkül nem építettem be.

Budapest, 2023.04.28.

Csendi Balázs

....

a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A versenyfeladatok a közoktatásban egy szinte végtelen, kimeríthetetlennek tűnő téma, melyről sokféle céllal, megközelítéssel lehetne írni. A konkrét témára és megközelítésre számomra az adta a motivációt, amikor az összefüggő tanítási gyakorlatomat egy vidéki gimnázium 9. évfolyamos speciális matematika tagozatos csoportjánál végeztem. Itt az első megtartandó órámon meglepetésként ért, hogy a talpponti háromszög minimális kerületiségét kellett feldolgoznunk, ugyanis én nem ismertem ezt a tételt és annak bizonyítását (mint később utánanéztem, a Bevezetés a geometriába tárgy gyakorlati feladatsorán ugyan szerepelt, de csak csillagos, kiegészítő feladatként). Emiatt készülés közben kellett ismerkednem a feladatokkal. Később megtudtam, hogy a számomra addig ismeretlen hegyesszögű háromszög talpponti háromszöge a későbbiekben többször is újra elő fog kerülni más tulajdonságai miatt. Ez vezetett arra, hogy ezeket szakdolgozati témaként érdemes lehet tárgyalni.

Ezek az ismeretek a geometria tárgyalásának egymástól különböző részeiben (pl. tengelyes tükrözés, húrnégyszögek, koszinusz-tétel) kerülnek elő, a célom a dolgozat első részben a legfontosabbakat összegyűjtsem. Már itt meg kell jegyezni, hogy a tárgyalt ismeretek a speciális matematika tagozat tantervéhez kapcsolódnak, ott elvárás a megjelenésük, de próbáltam megjegyzéseket tenni, hogy melyek azok a részek, amelyek más képzési formák esetében is hasznosíthatóak. De egy normál tantervű csoportban is felmerülhet az igény egyes tanulók részéről szakkörökre, a dolgozatban tárgyaltak ezkre is megfelelőek lehetnek.

Emellett, mivel döntő többségben speciális matematika tagozatról kerülnek ki a legjobb versenyzők matematikából, ezért az ott történő tanítás egyik fontos kérdése, hogy az adott témakör ismeretei hogyan jelenhetnek meg versenyfeladatokban. (Az egy másik, tárgyalható kérdés lenne, hogy magának a versenyfelkészítésnek mi a helyszíne, mennyire kell az azt segítő feladatokat a tanítási órákra bevinni, esetleg csak a szakkörökön van helye.) Ez adja meg a kapcsolatot a kiírt címmel. A szakdolgozat második részében ugyanis olyan versenyfeladatokat és megoldásaikat ismertetek, melyekben megjelenik a talpponti háromszög, annak valamilyen tulajdonságát fel kell használni. A feladatok változó nehézségűek, éppen ezért a felhasználási lehetőségeikre az egyes feladatoknál térek ki.

A talpponti háromszögekről szóló ismeretek egyes részei megtalálhatóak szoktak lenni az elemi geometriai tételeket gyűjtő munkákban, például az általam is használt [1] könyvben. Mivel rengeteg érdekes dolgot el lehet mondani róla, a talpponti háromszögek a KöMaL-ban is időnként visszatérő témája matematikai cikkeknek, már a legelső éveiben is szólt róla szakmai cikk [2].

2. A talpponti háromszög néhány tulajdonsága

2.1. A hegyesszögű háromszögbe írható minimális kerületű háromszög

Tétel: Egy hegyesszögű háromszögbe írható háromszögek közül a minimális kerületű a talpponti háromszög, vagyis az a háromszög, melynek csúcsai a magasságok talppontjai.

Ez az a tétel, amely esetében a tanulók először találkozhatnak a talpponti háromszöggel; a 9. osztályban szereplő egybevágósági transzformációk témaköre az, ahol leginkább indokolt a megjelenése, de kötelező elemként a 2020-as kerettantervek alapján csak a speciális matematika tagozat oktatásának képezi részét. Ez érthető, mert tárgyalása közben több korábbi ismeret felidézése szükséges, és a megjelenő bizonyítási módszer is nehezebb, meghaladja azt a szintet, amelynek feldolgozása a legtöbb tanulótól elvárt. Igaz, hogy a háromszög-egyenlőtlenségek ismerete már általános iskolában megjelenik, de ez már annak egy nehezebb alkalmazása. Geometriai szélsőérték-feladatok megoldása nem elvárás 9. osztályban. A kialakult bizonyítási igény mellett absztraktabb matematikai gondolkodás is szükséges. Egyes részfeladatok esetében már annak észrevétele is nehézséget okozhat, hogy mi az, ami bizonyításra szorul. Olyan, mozgatáson alapuló bizonyítási módszer is megjelenik, mellyel alacsonyabb évfolyamon feltehetően még nem találkoztak a tanulók. Így a továbbiakban leírtak legnagyobb része speciális matematika tagozaton kívül csak egy kifejezetten jó csoportban vagy szakkörön tárgyalható az 1. feladat kivételével, melynek bemutatása egy általános csoportban is indokolt.

A fentebb kimondott tételt közvetlenül bizonyítani még a legjobb tanulóknak is túl nagy feladat lenne, így azt fokozatosan kell felépíteni. Ez a hosszabb tárgyalás a nehézség mellett abból a szempontból is indokoltnak tűnik, mert a konkrét tételre a későbbiekben nem épül tananyag. Azért szerepelhet mégis a tárgyalása, hogy a bizonyítási módszerekkel kapcsolatos ismereteiket mélyítsék a tanulók.

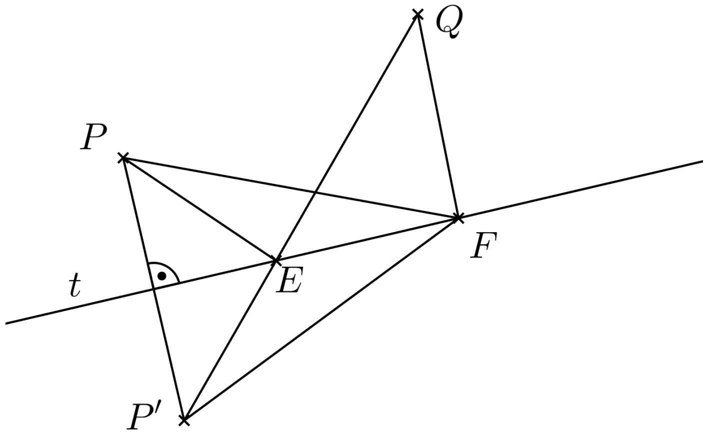
Az első, közismert feladat adja az alapját a toviábbiakban alkalmazásra kerülő bizonyítási elvnek, emiatt ezzel az egyszerű esettel lehet kezdeni a témakör felépítést. A feladatot most csak matematikai megfolgalmazásban közlöm, de a feladatgyűjtemények gyakran be szokták öltöztetni valamilyen valóságot utánzó problémába (pl. két falut ellátó transzformátorállomást kell építeni a főútra, vagy a sivatagban kitérőt kell tenni a teve megitatása miatt egy egyenes folyónál).

1. feladat: Adott egy t egyenes ugyanazon oldalán két pont, P és Q. Melyik a t

egyenesnek az az E pontja, mellyel a két adott pontot összekötve az összekötő szakaszok hosszának összege minimális?

Ezt az feladatot még tovább lehet egyszerűsíteni, melynek megbeszélése lehet a kiindulási pont: mi történik, ha P és Q az egyenesnek különböző oldalán van. Ekkor nyilvánvaló, hogy a két pontot összekötő szakasz metszeni fogja a t egyenest és ez a metszéspont lesz a megfelelő E pont, mert két pont között a legrövidebb út az egyenes, amin rajta van E.

Abban az esetben, amikor a két pont azonos oldalán vannak az egyenesnek, az őket összekötő szakasz már nem fogja metszeni a t-t, ez okozza a nehézséget, ami miatt egy új ötlet kell. Amennyiben sikerülne találni egy olyan P' pontot a t egyenes másik oldalán, amelyre teljesül, hogy ugyanolyan távolságra van a t összes pontjától, mint P, akkor az előző esetre visszavezettük a feladatot. És ilyen pont van, amelyet a P pont t-re történő tengelyes tükrözésével kapunk, ugyanis a tengelyes tükrözés távolságtartó tulajdonságú, valamint a tengely minden pontjának a képe önmaga.



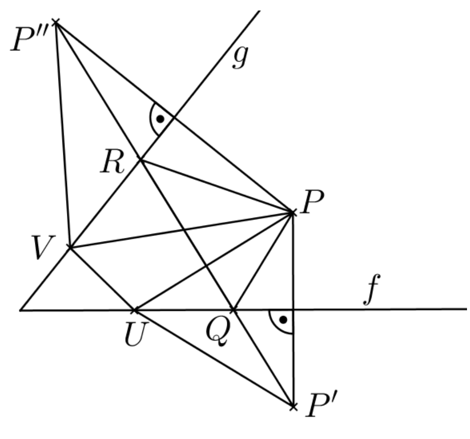
1. ábra.

Ennek a megoldásnak egy matematikailag precízebb leírása a következő lehet: tükrözzük a P pontot a t egyenesre, így kapjuk a P' pontot. Ezt kössük össze Q-val. Ahol ez metszi a t egyenest, az lesz a megfelelő E pont. A tengelyes tükrözés miatt $PE = P'E$, azaz a $PE + EQ$ távolságösszeg megegyezik a $P'Q$ szakasz hosszával. Ha a t egyenesen veszünk egy E-től különböző pontot (ezt jelölje F), akkor $PF = P'F$ is teljesül, ami miatt $PF + FQ = P'F + FQ$. Ez az összeg pedig nagyobb lesz $P'Q$-nál, mert a P' és Q pontok között a legrövidebb út az egyenes (vagy matematikailag pontosabb megfogalmazással a $P'FQ_\triangle$-ben felírt háromszög-egyenlőtlenség miatt a $P'Q$ oldal rövidebb a mások kettő hosszának összegétől).

2. feladat: Egy hegyesszög szárai között adott egy P pont. Keressük meg azon Q és R pontokat, melyek illeszkednek egy-egy szögszárra és a $PQRP$ törtöttvonal hossza a legrövidebb.

Ennek a feladatnak az előzőhöz képest vett nehézségét az adja, hogy a töröttvonal zárt és csak egy pontja adott. Emiatt nem lászik, hogyan tudnánk arra az előző feladatban is használt, 9. osztályban egyedüliként ismert geometriai minimumra vonatkozó összefüggésre hivatkozni, hogy két pont között a legrövidebb út az egyenes, nem egyértelmű, hogy ez a feladat hogyan kapcsolódik az előzőhöz. Először azzal lehet segíteni, hogy az egyik pontot (ez legyen R) rögzítjük az egyik szögszárra. Ekkor a töröttvonalból az RP szaksz állandó, nem kell vele fogalkozni, és észre lehet venni, hogy ezzel a feladat az előzőre egyszerűsödött le. A P pontot tükrözve az R-et nem tartalmazó szögszárra, a $P'R$ szaksz metszi ki a Q pontot, a PQR töröttvonal hossza pedig megegyezik a $P'QR$ töröttvonal (valójában szakasz) hosszával. Hasonló a helyzet, ha most a Q pont rögzített, ekkor a $P''Q$ fogja kimetszeni R-t, ahol P''-t P-nek a másik szögszárra való tükrözésével kaptuk.

Ezekből már észre lehet venni, hogy a keresett $PQRP$ töröttvonal hossza bármilyen Q és R pontok mellett megegyezik a $P'QRP''$ törtöttvonal hosszával, ismét a tengelyes tükrözés tulajdonságai miatt. Ezzel sikerült megoldani azt a nehézséget, hogy csak a P pont ismert, a két tükrözéssel a zárt töröttvonalnak sikerült egy nyíltat megfeleltetni úgy, hogy a hossza ne változzon. A nyílt töröttvonalra pedig már lehet azt mondani, hogy akkor a legrövidebb, ha a P' és P'' vépgpontok között nincs törés, azaz a Q és R pontok rajta vannak a $P'P''$ szakaszon.



2. ábra.

Ugyanenzt matematikailag pontosabb is leírhatjuk: tükrözzük a P pontot a két szögszárra, a képpontok legyenek P' és P''. Vegyük észre, hogy az f szögszáron egy tetszőleges U pontot kiválasztva $PU = P'U$, hasonlóan a g egyenes egy V pontjára

$PV = P''V$. Azaz a $PUVP$ töröttvonal hossza megegyezik a $P'UVP''$ töröttvonal hosszával. Utóbbi akkor a legrövidebb, ha az U és V pontok rajta vannak a $P'P''$ egyenesen. Tehát $P'P''$ metszéspontjai a szögszárakkal adják a keresett Q és R pontokat.

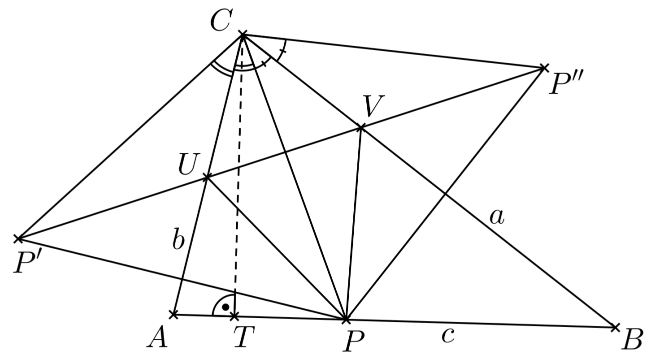
Az első két feladatnál leírt megoldási stratégiák között ki kell emelni egy lényeges különbséget: az első esetében a konkrét megoldást megsejtettük, abból indultunk ki, majd azt hasonlítottuk össze egy általános esettel. Utóbbinál ez fordítva történt, először az általános esetet vizsgáltuk, onnan jutottunk el a megoldásig. Általában elmondható, hogy ez a szerencsésebb gondolkodási módszer, mert egyértelműbb, hogy mi kell a tényleges bizonyításhoz. Az első esetében megvan a veszélye annak, hogy a tanuló érzésére megtalálta a megoldást (ami persze egy nehezebb problémánál nem mindig egyszerű feladat), de azt már nem indokolja meg azzal, hogy egy általános esettel összehasonlítja. Ez a veszély nem áll fenn, ha már kiinduláskor egy általános esetet figyelünk. Ennek a gondolkodásnak, az összehasonlítással történő bizonyítás igényének a kialakítása tűnik számomra a legfontosabbnak a témakör tárgyalásakor. Tanárként ezt azzal is lehet segíteni, hogy amennyiben a feladatot ábrázoljuk a tanulóknak a táblán, azon mi is egy általános esetet tüntetünk fel.

3. feladat: Egy hegyesszögű háromszög egyik oldalán tűzzünk ki egy pontot. Keressük meg azt a beírt háromszöget, melynek egyik csúcsa az adott pont és a kerülete minimális.

Bár az előző feladat után új matematikai tartalommal nem bír ez a feladat, mégis érdemes lehet feladani a diákoknak. Ennek a megoldása ugyanaz, mint ami az előzőé volt, hiszen ahhoz képest csak egy további, P ponton átmenő szakasz lett behúzva, ami nem befolyásolja a megoldást. Azonban egy 9. osztályos tanuló számára ez nem feltétlenül egyértelmű. Ennek észrevételét nehezítheti, ha a vizuális megjelenítés is eltér, például a táblán úgy ábrázoljuk, hogy a P pont a háromszög egy eltérő helyzetű oldalán helyezkedik el, ezzel rejtve a tényt, hogy csak egy további szakasz került a feladatba.

4. feladat: Egy ABC hegyesszögű háromszögben a c oldal minden pontja esetén megszerkesztjük a legkisebb kerületű beírt háromszöget. A c oldal melyik pontja esetén lesz a kapott háromszög kerülete minimális?

Az előzőekben már meghatároztuk, hogy a legkisebb kerületű háromszöget minden $P \in c$ $(P \neq A, B)$ pont esetén úgy kapjuk meg, hogy tükrözzük azt a háromszög b és a oldalaira, majd a kapott P', P'' pontokat összekötő szakasz ki fogja metszeni b-ből és a-ból a keresett U, V pontokat. Azt is tudjuk, hogy a PUV háromszög kerülete a



3. ábra.

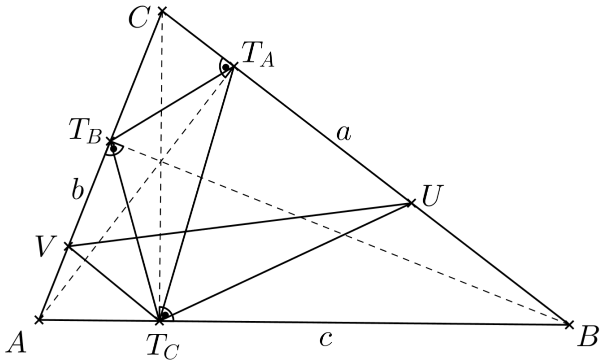
tengelyes tükrözés tulajdonságai miatt megegyezik a $P'P''$ szakasz hosszával, tehát elég ezen $P'P''$ szakaszok hosszait összehasonlítani az összes lehetséges P pontra.

Mivel a P', P'' pontokat tengelyes tükrözéssel kaptuk, ezért $CP' = CP = CP''$ teljesül, tehát a $CP'P''_{\triangle}$ egyenlő szárú. Figyeljük meg, hogy ennek a háromszögnek a szögeit vagy oldalait hogyan tudjuk változtatni, hogy a kérdéses $P'P''$ alapjának a hossza változzon, az a lehető legrövidebb legyen. Először nézzük az alappal szemközti szöget, aminek csökkentésével az alap is rövidebb lenne. A tengelyes tükrözés szögtartó tulajdonsága miatt $P'CA\sphericalangle = PCA\sphericalangle$, hasonlóan P"$CB\sphericalangle = BCP\sphericalangle$, azaz $P'CP$"$\sphericalangle = 2 \cdot BCA\sphericalangle$. Tehát a $CP'P''_{\triangle}$ alappal szemközti szöge állandó, nem függ a P pont megválasztásától. Az alapot még úgy is lehet csökkenteni, hogy az egyenlő szárú háromszög szárait, azaz CP'-t és CP''-t csökkentjük. A szárak mgegyeznek a CP szakasz hosszával, ami már nem állandó, P mozgatásával változik, tehát CP-t kell minimálisnak választani. Ez akkor teljesül, ha P éppen az $ABC_{\triangle}$ C-ből induló magasságvonalának talppontja.

Ennek a feladatnak a megoldása a legnehezbb lépés a bizonyítást segítő feladatok sorában. Itt ugyanis nem volt elég a tengelyes tükrözést és a háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazni, hanem egy alakzat hosszának változását is figyelni kellett más adatok függvényében. Ezzel a gondolkodási, bizonyítási módszerrel korábban még feltehetően nem találkozott egy 9. osztályos diák, így annak feldolgozása nehezebb. Ami könnyítheti ezt, az a dinamikus geometriai szoftverek alkalmazása: egy jól elkészített GeoGebra ábra segíthet megfigyeltetni a tanulókkal, hogyan változnak az egyes adatok. A P mozgatásával $P'P''$ hosszának változását figyelve azt is meg lehet sejtetni, hogy a keresett válasz a magasság talppontja lesz. (Utóbbihoz érdemes lehet számszerűen kiíratni a programmal a $P'P''$ szakasz hosszát, mert nincsennek jelentős különbségek egy háromszög egy oldalának összes pontja esetén meghatározott minimális kerületű beírt háromszögek kerületei között.)

Ezek után már be lehet bizonyítani a dolgozat elején kimondott, de itt is megismételt tételt.

Tétel: Egy hegyesszögű háromszögbe írható háromszögek közül a minimális kerületű a talpponti háromszög, vagyis az a háromszög, melynek csúcsai a magasságok talppontjai.



4. ábra.

Bizonyítás: Az előző feladatban azt láttuk be, hogy az $ABC_{\triangle}$-nek a c oldalán mozgatva egy pontot, a T_C magasságtalppont esetén lesz a minimális a beírt háromszög kerülete, melynek másik két csúcsát jelölje U és V. Azt kell belátni, hogy erre két pontra teljesül, hogy $U = T_A$ és $V = T_B$, azaz ezek a csúcsok a másik két magasság talppontjai lesznek.

Ez igazolható a következő módon: tegyük fel, hogy a b oldalon nem teljesül, hogy $V = T_B$. Ha az előző feladat eredményét alkalmazzuk a b oldal pontjaira, akkor tudjuk, hogy T_B ponton át szerkszthető a b oldalon a legkisebb kerületű háromszög. Ennek a T_B-ből szerkesztett háromszögnek a kerülete tehát kisebb kell, hogy legyen mint, a T_CUV háromszög kerülete. Ha ennek a T_B-ból szerkesztett háromszögnek a c oldalon levő csúcsa viszont nem T_C lenne, akkor az ellentmondana annak, hogy azon az oldalon abból a csúcsból indul ki a minimális kerületű háromszög. Hasonló logika alapján látható, hogy a harmadik csúcsra is teljesülnie kell $U = T_A$-nak.

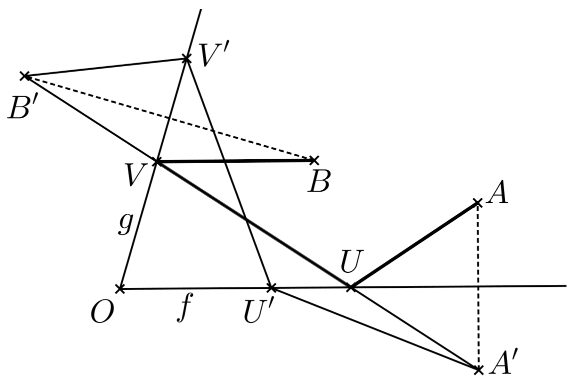
A bizonyítás nehézségét az adja, hogy fel kell ismerni, hogy mi az, ami bizonyításra szorul. Egy 9. osztályos tanuló számára elégnek tűnhet annyit mondani, hogy külön-külön minden oldal esetén a magasságok talppontjait véve lesz a minimális a beírt háromszög kerülete, tehát az egész háromszögben a talpponti háromszögé lesz az. Ez viszont hibás érvelés, ennyiből csak annyit lehet megállapítani, hogy a három beírt háromszög közül lesz valamelyik. A feladat valójában annak a megmutatása, hogy a három háromszög ugyanaz. Ennek a fentebbi bizonyítása nem geometriai, hanem logikai úton zajlott, egy indirekt feltétellel láttuk be, hogy amennyiben nem esnének egybe, akkor lenne olyan oldal, amelyen nem a talppontból szerkeszthető a minimális kerületű háromszög, ezzel ellentmondva a 4. feladatnak.

A tételben és bizonyításában szerepet kapott, hogy hegyesszögű háromszögről van szó, hiszen tompaszögű háromszög esetén csak egy magasságnak a talppontja esik a háromszögön belülre, így ugyan a talppontok által meghatározott háromszögről ott is lehet beszélni, de az biztosan nem a minimális kerületú beírt háromszög, hiszen nem is beírt háromszög. Tompaszögű háromszög esetében belátható, hogy nem létezik minimális kerületű beírt háromszög, igaz tetszőlegesen közelíthető. Derékszögű háromszög esetében pedig a talpponti háromszög elfajult, hiszen két csúcsa is egy pontba esik, ekkor sem létezik legkisebb kerületű beírt háromszög.

Érdekességként még meg lehet említeni, hogy a fenti, mindössze két tengelyes tükrözést tartalmazó bizonyítás Fejér Lipóttól származik [3]. Korábban is ismert volt a tétel, de sokkal bonyolultabb zajlott a bizonyítása, több tengelyes tükrözést alkalmazva, erre mutat példát a [2] cikk. Még a később írt [1] könyvben is egy öt tükrözésből álló, a talpponti háromszög más tulajdonságát is felhasználó bizonyítás szerepel. A dolgozat későbbi részében fog szerepelni egy másik, nem a tengelyes tükrözésen alapuló bizonyítása is a tételnek.

A témakörhöz lássunk még egy feladatot. Ez ugyan nem tartozik szorosan a fentebb kimondott tételhez, de tárgyalását az indokolja, hogy a matematika tanítása szempontjából az eddigiek legfontosabb eleméhez, a tengelyes tükrözéssel összefüggő minimális út feladatok megoldásához kapcsolható. A következő feladat logikailag leginkább a 2. feladat utánra lenne beilleszthető, de nehézségi szintje sokkal meghaladja azt.

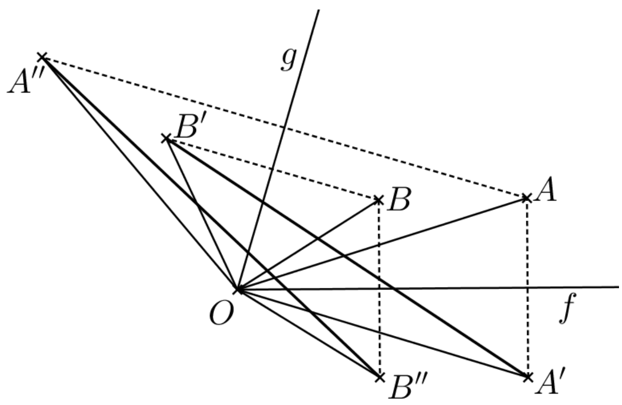
5. feladat: Egy hegyesszög szárait jelölje f és g, ezek között helyezkednek el az A és B pontok. Szerkesszük meg az A és B közötti legrövidebb töröttvonalat, ha annak érintenie kell a két szögszárat is.



5. ábra.

Egy olyan tanuló számára, aki megértette a 2. feladat megoldását, nem kell, hogy nagyobb nehézséget okozzon a következő gondolatmenet levezetése. Tükrözzük az A és B pontokat az f és g szögszárakra, a képpontokat jelölje A' és B'. Teljesül az f egyenes egy tetszőleges U' pontjára, hogy $AU' = A'U'$, hasonlóan a g egyenes bármely V' pontjára $BV' = B'V'$. Így az $AU' + U'V' + V'B$ töröttvonal hossza megegyezik az $A'U' + U'V' + V'B'$ töröttvonaléval. Ez utóbbi akkor a legrövidebb, ha mind a négy pont egy egyenesre esik, azaz az $A'B'$ egyenes metszi ki f-ből és g-ből a keresett U, V pontokat.

Bár ez a levezetés szükséges a feladat megoldásához, de nem elégséges. Az elején volt ugyanis egy nem eléggé átgondolt lépés, amikor egy-egy szögszárra tükröztük a két pontot: azt ugyanis kétféleképpen is meg lehet tenni. A feladat rajzban történő ábrázolása után természetesnek tűnik, hogy mindkét pontot a „közelebbi" szögszárra tükrözzük, mivel minimális utat kell meghatározni, de ezt bizonyítani kell annak tisztázásával együtt, hogy mit is jelent ebben az esetben a közelebbiség (látni fogjuk, hogy nem a szögszáraktól való távolsághoz van köze).

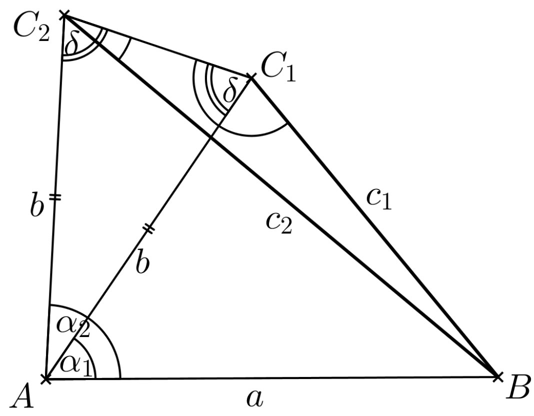


6. ábra.

A 6. ábra jelölései szerint legyenek az egyik tükrözéssel kapott képpontok A' és B', a másik szerint A'' és B''. Felhasználhatjuk azt a már levezetett igaz megállapítást, hogy az $A'B'$ és $A''B''$ egyenesek metszik ki a szögszárakból a keresett pontokat és a töröttvonalak hossza megegyezik ezeknek a szakaszoknak a hosszával. Ennek észrevételével a feladat $A'B'$ és $A''B''$ szakaszok összehasonlítására egyszerűsödött.

A tengelyes tükrözés távolságtartása miatt $OA = OA' = OA''$ és $OB = OB' = OB''$. Az $OA'B'_{\triangle}$ és az $OA''B''_{\triangle}$ tehát két olyan háromszög, melyeknek két-két oldala egyenlő hosszúságú. Be fogjuk látni, hogy két háromszög közül az összehasonlítandó harmadik oldalak, $A'B'$ és $A''B''$ közül az a hosszabb, amellyel szemben nagyobb szög van.

Ez az állítás (ha két háromszög megegyezik két oldalban, akkor a harmadik oldal abban a háromszögben nagyobb, amelyben a két oldal nagyobb szöget zár be) önálló feladatként is elképzelhető, amikor 9. osztályban a háromszög oldalai és szögei közötti összefüggésről van szó, nehézsége alapján ez is inkább egy jobb képességű vagy tagozatos csoportok számára megfelelő feladat. Maga az állítás könnyebben bizonyítható lenne, ha a szöggel szemközti oldalra felírnánk egy koszinusz-tételt, majd átalakítások után utalnánk a $\cos x$ függvény szigorú monoton csökkenésére a $[0, \pi]$ intervallumon. Viszont a témakört 9. osztályban szeretnénk tárgyalni, amikor még nincsennek szögfüggvények, így egy csak elemi eszközöket alkalmazó bizonyítást kell adni.



7. ábra.

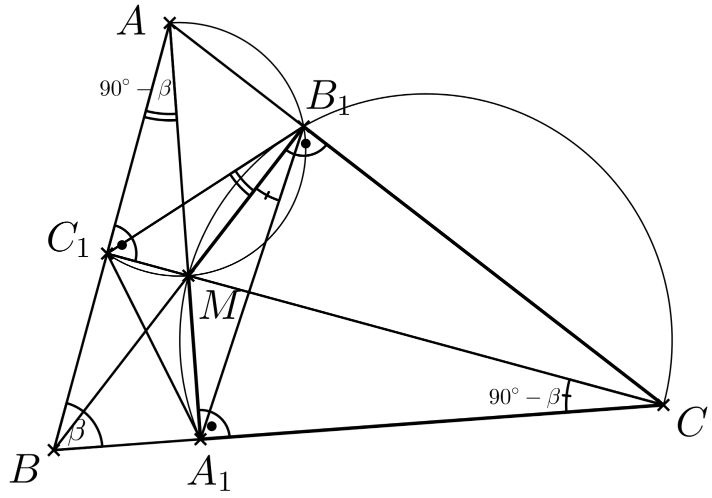
Segít, ha úgy ábrázoljuk az adatokat, hogy legyen közöttük közös adat. A 7. ábra szerint az egyik oldal, az $AB = a$ közös, valamint teljesüljön $AC_1 = AC_2 = b$. Legyen $\alpha_1 = BAC_1\sphericalangle$ és $\alpha_2 = BAC_2\sphericalangle$, ahol $\alpha_1 < \alpha_2$ teljesül. A feladat szerint így az α_1-gyel szemközti $BC_1 = c_1$ és α_2-vel szemközti $BC_2 = c_2$ oldalakra kell belátni, hogy $c_1 < c_2$. A c_1 és c_2 oldalakként szerepelnek a BC_1C_2 háromszögben, ami arra vezet, hogy abban keressünk összefüggést a háromszög oldalai között. Az $AC_1C_{2\triangle}$ egyenlő szárú, mert két oldala is b hosszúságú, ezért $AC_1C_2\sphericalangle = C_1C_2A\sphericalangle = \delta$ is igaz. Ez a $BC_1C_{2\triangle}$ szögeire nézve azt jelenti, hogy $C_1C_2B\sphericalangle < \delta$ és $BC_1C_2\sphericalangle > \delta$, ami miatt teljesül, hogy $BC_1C_2\sphericalangle > C_1C_2B\sphericalangle$. Felhasználva a $BC_1C_{2\triangle}$-ben azt, hogy nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van a bizonyítandó $c_2 > c_1$ összefüggést kapjuk.

A 6. ábrára visszatérve ez azt fogja jelenteni, hogy a két tükrözés közül abban az esetben lesz kisebb a képpontokat összekötő szakasz hossza, amikor az $OA'B'\sphericalangle$ kisebb. Ez pedig az A és B pontokra nézve azt fogja jelenti (a tengelyes tükrözés szögtartásából levezethetően), hogy az AOB előjeles szög előjele határozza meg a keresett tükrözést: Ha $AOB\sphericalangle$ pozitív, akkor A-t az f, B-t pedig a g szögszárra tükrözzük, ha negatív, akkor fordítva. Amennyiben O, A és B egy egyenesre esnének, mindkét tükrözés ugyanolyan hosszúságú töröttvonalat eredményez.

2.2. A talpponti háromszög szögfelezői

Egy másik témakör, amikor megjelenhet az oktatásban a talpponti háromszög, az a kerületi szögek tétele és húrnégyszögek, amely a 2020-as kerettanterv alapján már csak az emelt szintű és tagozatos oktatásnak képezi részét, jellemzően 10. osztályban jelenik meg. A következő állítás a speciális matematika tagozaton szereplő bizonyítások között egy könnyebbnek nevezhető.

Állítás: Hegyesszögű háromszög esetén a talpponti háromszög belső szögfelezői az eredeti háromszög magasságai, külső szögfelezői pedig az eredeti háromszög oldalai.



8. ábra.

Bizonyítás: A 8. ábra jelöléseit felhasználva A_1CB_1M négyszög húrnégyszög, mert A_1-nél és B_1-nél is derékszög van, így a szemben levő szögeinek összege 180°. Az A_1M ívhez tartozó kerületi szögek az $A_1CM\sphericalangle$ és az $A_1B_1M\sphericalangle$, így ezek egyenlő nagyságúak, ami az eredeti háromszög B-nél levő szögét β-val jelölve $(90° - \beta)$-t jelent a C_1BC derékszögű háromszög miatt.

Hasonlóan B_1AC_1M is húrnégyszög, a C_1M ívhez tartozó $C_1AM\sphericalangle$ és $C_1B_1M\sphericalangle$ egyező nagyságúak, ami az A_1AB derékszögű háromszög miatt szintén $(90° - \beta)$-t jelent. Azaz $C_1B_1B\sphericalangle = 90° - \beta = BB_1A_1\sphericalangle$ és pont azt szerettük volna belátni, hogy a B csúcshoz tartozó magasság felezi a talpponti háromszög B_1-nél levő belső szögét.

Tudjuk, hogy egy szög belső és külső szögfelezője 90°-ot zárnak be, így a talpponti háromszög B_1-nél levő szögének a külső szögfelezője a BB_1 magassággal 90°-ot bezáró AC oldal lesz, ami az állítás második fele volt.

Bár ezt az állítást ki lehet mondani, majd a fenti módon bizonyítani, akár fel is lehet fedeztetni a tanulókkal. Először ábrázolunk egy hegyesszögű háromszöget, behúzzuk a magasságait, és megjelenítjük a talpponti háromszögét a 8. ábrához hasonlóan. Ebben lehet kerestetni húrnégyszögeket, a két derékszög miatt könnyen látható, hogy két talppont, a harmadik csúcs és a magasságpont húrnégyszöget fog meghatározni (ilyen volt az A_1CB_1M négyszög), amelynek az ábrán még az átlói is jelölve vannak. Ezt követően lehet keresni azonos ívhez tartozó kerületi szögeket, összesen négy pár van belőle. Ebből két szögpár méretét meg is lehet határozni az eredeti háromszög szögei segítségével (a γ szögnek a C csúcshoz tartozó magassága által kettéosztott két részét), ehhez csak észre kell venni a derékszögű háromszögeket. Ugyanezt elvégezve az elején talált másik két húrnégyszögben fel lehet fedezni, hogy az eredeti háromszög magasságvonalai felezik a talpponti háromszög szögeit.

Következmények: A talpponti háromszög által az eredeti háromszögből levágott háromszögek hasonlóak az eredeti háromszöghöz. (Azaz $AC_1B_{1\triangle} \sim BA_1C_{1\triangle} \sim CB_1A_{1\triangle} \sim ABC_{\triangle}$, a 8. ábra jelöléseivel.)

Ez a későbbi versenyfeladatok megoldásánál hasznosnak bizonyuló állítás következik az előzőekből, ugyanis $C_1B_1A\sphericalangle = \beta$, hiszen $C_1B_1B\sphericalangle = 90° - \beta$ volt. Hasonlóan $AC_1B_1\sphericalangle = \gamma(= BCA\sphericalangle)$. Tehát az $ABC_{\triangle}$ és az $AC_1B_{1\triangle}$ hasonlóak, mert mindhárom szögük megegyezik, ugyanez igaz a másik két levágott háromszögre is.

A hasonlóság arányát is meg lehet adni, ehhez viszont már ismerni kell hegyesszögű háromszögekben a szögfüggvényeket, ami nem feltétlenül igaz a húrnégyszögek 10. osztályban történő tárgyalásakor, így erre később kell visszatérni. A hasonlóság miatt fel lehet írni a megfelelő oldalak arányát, majd egy átszorzás után észre kell venni, hogy az eredeti háromszög két csúcsa és az egyikhez tartozó magasságtalppont által meghatározott derékszögű háromszög két oldalának az aránya szerepel, ami pont a hegyesszögek megfelelő szögfüggvényének a definíciója. Ugyanez képlettel leírva az $ABC_{\triangle}$ és $AB_1C_{1\triangle}$ hasonlóságából kiindulva:

$$\frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{BC}{AB} \implies B_1C_1 = BC \cdot \frac{AB_1}{AB} = BC \cdot \cos\alpha$$

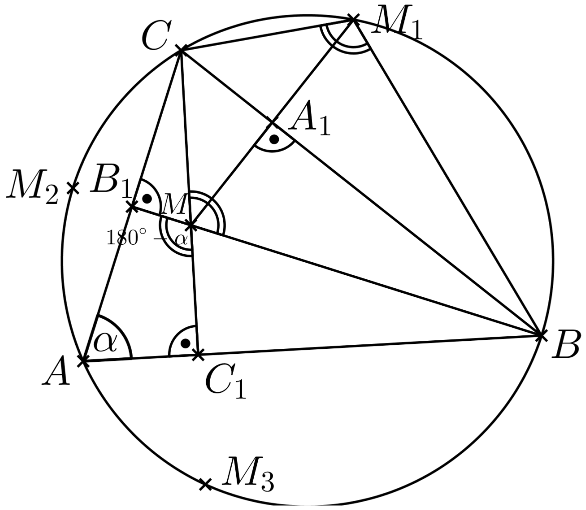
Azt, hogy a talpponti háromszög oldalai kifejezhetőek az eredeti háromszög oldalaival és szögeivel, megkaphatjuk a hasonlóság észrevétele nélkül is, a koszinusz-tétel segítségével. Éppen ezért van olyan tankönyv, amely ezt a feladatot a trigonometrikus összefüggések alkalmazásánál adja fel. [7]

Egy másik következményt is érdemes megemlíteni. Mivel B_1 magasságtalppont, ezért $CB_1B\sphericalangle = 90°$, valamint a BB_1C_1 szög $(90° - \beta)$ nagyságú. Emiatt a BCB_1C_1 négyszögben a szemközti szögek összege $\beta + 90° + (90° - \beta)) = 180°$, azaz két csúcs és a hozzájuk tartozó magasságtalppontok által meghatározott négyszögek is húrnégyszögek.

2.3. A talpponti háromszög köré írható köre

A következő állítás a tankönyvek egy részében is megtalálható kidolgozott példaként [6], még az egyik jelenleg érvényben levő tankönyvben is szerepel [8], az emelt szintű kiegészítésben.

Állítás: Egy hegyesszögű háromszög magasságpontját tükrözve az oldalakra, a képpontok rajta lesznek a háromszög köré írható körén.



9. ábra.

Bizonyítás: Használjuk a 9. ábra jelöléseit. Az M magasságpont tükörképe a BC egyenesre (ami megegyezik az A_1 magasságtalppontra való tükrözéssel kapott képével) legyen M_1, erről kéne belátni, hogy az $ABC_\triangle$ köré írt körén van. Ez teljesülne, ha az ABM_1C négyszögben az A-nál és M_1-nél levő szögek összege 180° lenne, mert akkor ez a négyszög húrnégyszög lenne, köré írt köre megegyezne az $ABC_\triangle$ köré írt körével.

AC_1MB_1 négyszög húrnégyszög, szemközti szögeinek összege 180°, ezért $C_1MB_1\sphericalangle = 180° - \alpha$. C_1MB_1 és BMC szögek csúcsszögek, így egyező nagyságúak. A $BM_1C\sphericalangle$ a $BMC\sphericalangle$ tengelyes tükörképe, így ezek nagysága is megegyezik. Tehát $BM_1C\sphericalangle = 180° - \alpha$, azaz teljesül, hogy az ABM_1C négyszög szemközti szögeinek összege 180°.

Következmény: A talpponti háromszög köré írható körének sugara az $ABC_\triangle$ köré írható kör sugarának a fele, mert az MM_1 szakasz felezőpontja A_1, az MM_2 szakaszé B_1 és az MM_3 szakaszé C_1. Emiatt egy M középpontú, $\lambda = 2$ arányú nagyítás az egyik kört a másikba viszi.

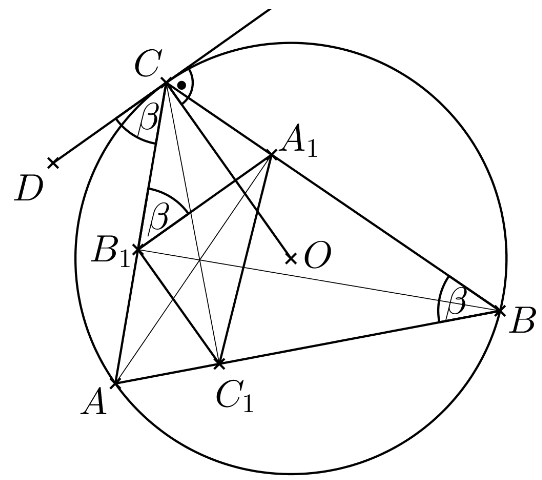
Egy háromszög talpponti háromszögének köré írható köre egy nevezetes alakzat, az eredeti háromszög Feuerbach-köre. Ez amellett, hogy átmegy a magasságok talppontjain, a $\lambda = 2$ nagyítás miatt a csúcsokat az M magasságponttal összekötő szakaszok felezőpontjain is átmegy. Azt is be lehet látni, hogy még az oldalak felezőpontjain is átmegy (emiatt a kilenc pont miatt nevezik kilencpontos körnek is). Szintén a nagyításból következik, hogy a Feuerbach-kör középpontja (nem szabályos háromszög esetében) a háromszög köré írható kör O középpontjának és az M magasságpontjának a felezőpontja (azaz rajta van a háromszög Euler-egyenesén).

A Feuerbach-kör szerepel a tagozatos tantervben, a fentebb leírtak az egyik lehetséges tárgyalási helye. De a húrnégyszögeket használó bizonyítás mellett a létezését másképp is be lehet látni például a vektorok tárgyalásakor is szerepelhet.

2.4. Egy újabb területképlet

Egy háromszög területének sokféle kiszámíátsát ismerjük, különböző adatokból meghatározva azt, most a hegyesszögű háromszögek esetében lássunk egy újabb területképletet, mely a talpponti háromszög kerületét használja fel. Ehhez először be kell látni egy másik állítást, amelynek ismerete önmagában is hasznos lehet.

Állítás: Az ABC hegyesszögű háromszög magasságainak talppontjai legyenek A_1, B_1 és C_1. Ekkor teljesül, hogy $A_1B_1 \perp OC$, ahol O az ABC háromszög köré írható körének középpontja. (Hasonlóan igaz, hogy $B_1C_1 \perp OA$ és $C_1A_1 \perp OB$.)



10. ábra.

Bizonyítás: Ismerünk egy OC-re merőleges egyenest, a köré írt körnek a C-beli érintőjét, így azt húzzuk be, mert segíteni tudja a bizonyítást (az érintőnek legyen egy pontja D a 10. ábra szerint elhelyezkedve). $DCA\sphericalangle$ az AC ívhez tartozó érintő szárú kerületi szög, β pedig ugyanehhez az ívhez tartozó kerületi szög, így a kerületi szögek tétele alapján a kettő megegyező nagyságú. Ugyanakkor korábban azt is láttuk, hogy a talppnti háromszög által levágott $CB_1A_{1\triangle}$ hasonló az eredeti háromszöghöz, ahol $CB_1A_1\sphericalangle = \beta$. Emiatt $DCA\sphericalangle$ és $CB_1A_1\sphericalangle$ váltószögek és $CD \parallel B_1A_1$. Mivel a CD érintő merőleges OC-re, a B_1A_1 is merőleges az OC-re.

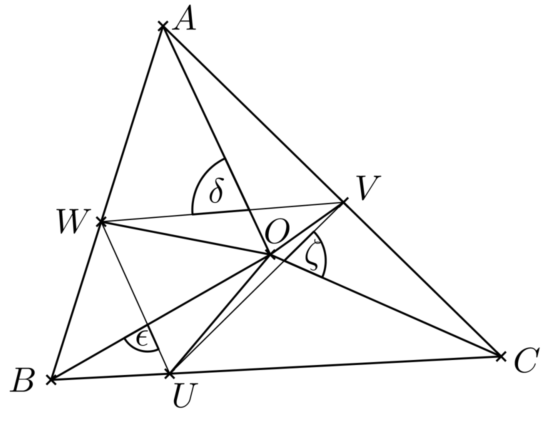
Állítás: Az ABC háromszög területére fennáll $T = R \cdot s$, ahol R az $ABC_\triangle$ köré írt körének sugara, s pedig a talpponti háromszög kerületének a fele.

Bizonyítás: Az $ABC_\triangle$-et a köré írható körének O középpontja és az A_1, B_1, C_1 magasságtalppontok segítségével három négyszögre tudjuk felosztani, a háromszög területét a négyszögek területeinek összegeként meg tudjuk adni. A CB_1OA_1, AB_1OC_1 és BA_1OC_1 négyszögek átlói a talpponti háromszög oldalai valamint az eredeti háromszög csúcsait O-val összekötő szakaszok. Ezekről az előző állításban láttuk be, hogy merőlegesek egymásra. Amennyiben egy négyszög átlói egymásra merőlegesek, akkor területét ki tudjuk számolni úgy, mint az átlók szorzatának a fele. Így felírva a négyszögek területét pont a bizonyítandó állításhoz jutunk (felhasználva, hogy $OA = OB = OC = R$):

$$T_{ABC} = T_{CB_1OA_1} + T_{AB_1OC_1} + T_{BA_1OC_1} = \frac{OC \cdot B_1A_1}{2} + \frac{OA \cdot B_1C_1}{2} + \frac{OB \cdot A_1C_1}{2} =$$

$$= R \cdot \frac{A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1}{2} = R \cdot s$$

Ennek az összefüggésnek az ismeretével lehet adni egy másik bizonyítást arra a korábban már szereplő tételre, hogy egy hegyesszögű háromszögbe írható minimális kerületű háromszög a talpponti háromszög. Az új bizonyítás hasonlítani fog az előző állításáéra, ismételten a háromszög területét három darab négyszög területének összegére fogjuk felbontani.



11. ábra.

Legyen az ABC hegyesszögű háromszög köré írt körének középpontja O, sugara R, UVW pedig egy beírt háromszög, melynek oldalai az AO, BO, CO egyeneseket a δ ϵ, ζ szögekben metszi a 11. ábra szerint. Az $ABC_{\triangle}$ területe felbontható három négyszög területére, $T_{ABC} = T_{BUOW} + T_{CVOU} + T_{AWOV}$. Egy általános négyszög területe felírható, mint $\frac{ef}{2} \cdot \sin\rho$, ahol e és f az átlók hossza, ρ pedig az általuk bezárt szög. Ezt alkalmazva a három négyszögre a $T_{ABC} = \frac{R \cdot VW \cdot \sin\delta}{2} + \frac{R \cdot WU \cdot \sin\epsilon}{2} + \frac{R \cdot UV \cdot \sin\zeta}{2}$ összefüggést kapjuk, amelyből $\frac{R}{2}$-t kiemelve $\frac{R}{2} \cdot (VW \cdot \sin\delta + WU \cdot \sin\epsilon + UV \cdot \sin\zeta)$ következik. Felhasználva, hogy amennyiben α egy háromszög egyik szöge, akkor $0 < \sin\alpha \leq 1$ teljesül, a zárójelben levő összeg nem csökken, ha a szinuszos szorzókat elhagyjuk. Ebből az következik, hogy $T_{ABC} \leq \frac{R}{2} \cdot (VW + WU + UV)$, itt pedig a zárójelben pont az UVW beírt háromszög kerülete szerepel.

A korábbiakban levezetett új területképletet ($T = \frac{R}{2} \cdot k_{A_1B_1C_1}$, ahol $A_1B_1C_1$ a talpponti háromszög) behelyettesítve az egyenlőtlenségbe kapjuk, hogy $\frac{R}{2} \cdot k_{A_1B_1C_1} \leq \frac{R}{2} \cdot k_{UVW} \implies k_{A_1B_1C_1} \leq k_{UVW}$. Ezzel beláttuk, hogy a talpponti háromszög minimális kerületű beírt háromszög.

Bár ennek a bizonyításnak a leírása rövidebb volt, nem lehet azt állítani, hogy megértése könnyebb. Több előismeretet feltételez, használtunk szögfüggvényeket és az általános négyzet területét is. A szinusz elhagyásával járó becslés elvégzése sem számít könnyű lépésnek. Az eddigiekkel a legnagyobb probléma pedig az, hogy ez még nem teljes bizonyítás. Először a könnyebben kezelhető probléma, hogy tárgyalni kell azt is, mi történik, ha a háromszög felbontásakor nincs három négyszög, azaz például a W, O, U pontok egy egyenesre esnek (a területre ekkor is fenn fog állni az $\frac{R \cdot WU \cdot sin\epsilon}{2}$ képlet, ami után a bizonyítás ugyanúgy folytatható). Másodszor a nagyobb baj az, hogy valójában még ezzel a kiegészítéssel sem kaptuk meg a kívánt eredményt. Azt ugyan beláttuk, hogy a talpponti háromszög minimális kerületű beírt háromszög, de ebből nem következik, hogy nincs másik, amelynek ugyanakkora a kerülete. Ez az állítás igaz, következhet abból, hogy a szinuszos tagok elhagyásakor a becslés éles, ha nem mindhárom szinusz értéke 1, ami akkor áll fenn, ha az $UVW_{\triangle}$ oldalai merőlegesek az OA, OB, OC szakaszokra. Azt már láttuk, hogy a talpponti háromszög esetében ez igaz, de még azt is be kell látni, hogy nincs más ilyen beírt háromszög.

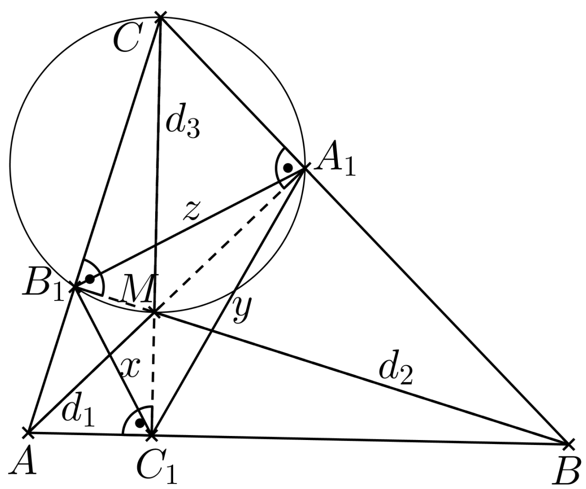
Ezt a bizonyítást tehát csak magasabb évfolyamon lehet feldolgozni, mint a tengelyes tükrözést használót, és így is nehezebb. Ennek ellenére egy szép példája egy tételnek két jelentősen különböző bizonyítására, tagozaton akár fel is dolgozható mindkettő. És azt az észrevételt, hogy a talpponti háromszög oldalai merőlegesek a csúcsokat a köré írt kör középpontjával összekötő szakaszra fogjuk használni feladatmegoldásban. [3]

3. Feladatok a talpponti háromszögre

A hegyesszögű háromszög talpponti háromszögének néhány tulajdonságának áttekintése után nézzünk pár versenyfeladatot, melyek megoldása közben ezket fel lehet használni. Ezek megfelelő példák lehetnek az alkalmazásokra, hogy az állítások ne csak önmagukba szerepeljenek. A bemutatott öt feladat különböző nehézségű, melyek más-más céllal lehet alkalmazni: az első akár egy jobb, nem tagozatos tanulócsoportban óráján is felhasználható, a második-harmadikhoz már kell bevezetés a talpponti háromszög megfelelő tulajdonságáról, így inkább egy szakköri/speciális matematika tagozatos órai feladatként lehet működőképes. Az utolsó kettő kifejezetten nehéz feladatok, melyekkel csak a matematikából magasabb szinten versenyző tanulóknak lehet érdemes dolgozni; jól illusztrálják, hogy milyen szintű feladatmegoldási készség elvárt az ország legjobb versenyzőitől.

3.1. 1. feladat

Legyen d_1, d_2, d_3 egy hegyesszögű háromszög magasságpontját a csúcsokkal összekötő három szakasz. Igazoljuk, hogy $d_1 + d_2 + d_3 > k$, ahol k a magasságok talppontjai által meghatározott háromszög kerületét jelöli. *(VI. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny, 1997. 9. osztály)*



12. ábra.

Használjuk az ábra jelöléseit. A Thalész-tétel megfordítása miatt az A_1 és B_1 pontok rajta van az MC szakasz Thalész-körén, amelynek d_3 az átmérője.

Ennek a körnek z egy húrja, azaz $d_3 \geqslant z$ biztosan teljesül. Egyenlőség nem lehet, mert akkor z is átmérő lenne és a Thalész-tétel miatt M-nél és C-nél is derékszögnek kéne lennie. Az viszont, hogy C-nél derékszög van, ellentmond annak a feltételnek, hogy az $ABC_\triangle$ hegyesszögű. Tehát $d_3 > z$ is igaz.

Hasonlóan látható be, hogy $d_2 > y$ és $d_1 > x$, a három egyenlőtlenséget összeadva pedig a bizonyítandó $d_1 + d_2 + d_3 > x + y + z = k$ egyenlőtlenséget kapjuk.

Megjegyzés. A feladat egy 9. évfolyamos versenyfeladatként szerepelt, ezért a megoldás során csak az ezen az évfolyamon elvárható ismereteket használtuk fel. Emiatt nem lehetett felhasználni azt a korábbiakban már tárgyalt tényt, hogy CB_1MA_1 húrnégyszög, hanem két Thalész-tételre lehetett hivatkozni. Meg kell jegyezni, önmagában nem is lett volna elégséges, hogy CB_1MA_1 húrnégyszög, mivel azt is ki kellett használni, hogy a köré írt körnek d_3 egy átmérője, amelynek igazolásához mindenképp a Thalész-tétel megfordítására kell hivatkozni.

Ezt a (versenyfeladatok közt egy könnyebbnek számító) feladatot az előző bekezdésben leírtak miatt a Thalész-tétel és a húrnégyszögek feldolgozásában is fel lehet használni, akár egy jobb képességű, de nem tagozatos csoportban is. Mindkét esetben közös, hogy érdemes annak tisztázása, hogyan lehet egy ilyen összefüggést bizonyítani. Mivel nem látszik, hogy a $d_1+d_2+d_3$ összeg bármilyen formában megjelenne (pl. lenne egy háromszög, melynek ez a kerülete), ezért az egyenlőtlenséget kellene három részre szedni, és a $d_3 > z$, $d_2 > y$, $d_1 > x$ egyenlőtlenségeket külön-külön igazolni. Azért párosítottuk így az egyelőtlenségek két oldalát, mert már ránézésre látszik, hogy van esély közöttük összefüggést találni: például a d_3 és a z is a CB_1MA_1 négyszögnek átlói. Ezzel rá is irányult a figyelem egy négyszögre, amelyben egymással szemben két derékszög van: ebből évfolyamnak megfelelően látható, hogy a Thalész-tétel megfordítását vagy a húrnégyszögek tulajdonságait fel lehet használni. Előbbi esetben még az is egyértelmű, hogy d_3 a kör átmérője, ebben az esetben már csak azt kell megindokolni, hogy miért nem állhat fenn egyenlőség d_3 és z között, mely lehetséges a Thalész-tétel segítségével.

3.2. 2. feladat

Az $ABC_\triangle$ magasságainak talppontjai A_1, B_1, C_1. Az $A_1B_1C_{1\triangle}$ szögei 30°, 60° és 90°. Mekkorák az $ABC_\triangle$ szögei? *(Megyei Matematikaverseny, 2017. 11. osztály)*

A feladat az, ha ismertek a talppontok által meghatározott háromszög szögei, akkor határozzuk meg az eredeti háromszögét. A feladat nehézségének nagy részét az adja, hogy nem mondja ki, hogy az $ABC_\triangle$ hegyesszögű, emiatt fel kell ismerni, hogy három különböző esetet kell vizsgálni: az ABC háromszög lehet hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű. Ezek közül a derékszögű esetet gyorsan le lehet tudni: ekkor a három talppont közül kettő egy pontba esik, így nem keletkezik az A_1, B_1, C_1 pontokból háromszög, derékszögű megoldása tehát nincs a feladatnak.

A korábbiakban láttuk, hogy hegyesszögű háromszögek esetében a magasságok felezik a talpponti háromszög belső szögeit, ahol a félszögek $90° - \alpha$, $90° - \beta$, $90° - \gamma$ nagyságúak, ezeknek a kétszeresei lesznek a talpponti háromszög szögei. Ezt felhasználva a következő egyenleteket kell megoldani:

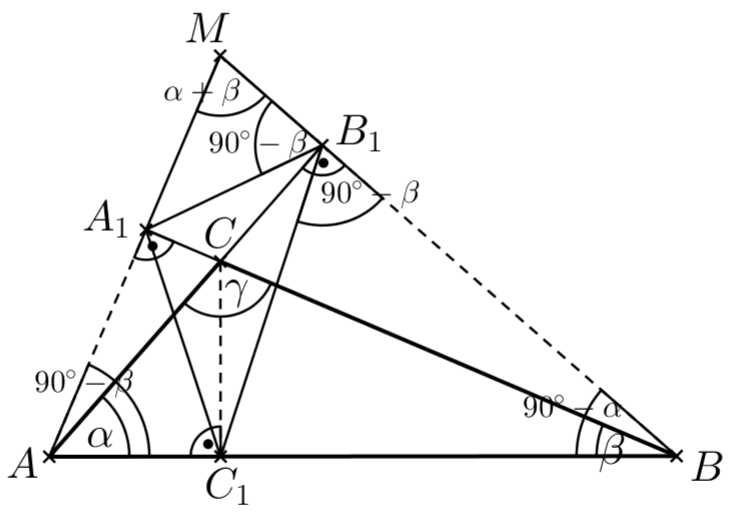
$180° - 2\alpha = 30°$

$180° - 2\beta = 60°$

$180° - 2\gamma = 90°$

Ebből a megoldás $\alpha = 75°$, $\beta = 60°$ és $\gamma = 45°$, ezek a szögek eleget is tesznek annak a feltételnek, hogy az ABC háromszög hegyesszögű legyen.

Abban az esetben, ha az ABC háromszög tompaszögű, még nem ismerünk összefüggést az eredeti háromszög és a magasságok talppontjai által alkotott háromszögnek a szögei között, így ezt most kell megvizsgálni.



13. ábra.

Használjuk a 13. ábra jelöléseit, azaz legyen az $ABC_\triangle$ tompaszögű, ahol a C csúcsnál van a tompaszög.

A hegyesszögű esethez képest az adja a különbséget, hogy az A_1 és B_1 talppontok a háromszögön kívülre fognak esni. Az ABA_1 derékszögű háromszögben az A-nál levő szög $90° - \beta$ lesz, hasonlóan az ABB_1 derékszögű háromszög B-nél levő szöge $90° - \alpha$ lesz. Jelölje M az eredeti háromszög magasságpontját, ez tompaszögű háromszög esetében a háromszögön kívülre fog esni. Ha tekintjük az ABM hegyesszögű háromszöget (hegyesszögű, mert szögeit az előzőek alapján meg tudjuk határozni, $90° - \alpha$, $90° - \beta$ és $\alpha + \beta$ nagyságúak, és mivel γ volt a tompaszög, ezért ezek mindegyike kisebb 90°-nál), a talpponti háromszöge $A_1B_1C_1$. Azt a korábbiakban már bizonyítottuk, hogy az $A_1B_1C_1$ talpponti háromszög a hegyesszögű $ABM_{\triangle}$-ből hozzá hasonló háromszögeket vág le. Emiatt fenn fog állni az ábrán is jelölt módon, hogy $A_1B_1M\sphericalangle = BB_1C_1\sphericalangle = MAB\sphericalangle = 90° - \beta$.

Ebben az esetben a talppontok által meghatározott háromszög szögeire fenn fog állni, hogy $C_1B_1A_1\sphericalangle = 2\beta$, hasonlóan $B_1A_1C_1\sphericalangle = 2\alpha$. Ahhoz, hogy a belső szögk összege 180° legyen, teljesülnie kell, hogy $A_1C_1B_1\sphericalangle = 180° - (2\alpha + 2\beta) = 180° - 2 \cdot (180° - \gamma) = 2\gamma - 180°$ (itt felhasználtuk, hogy $\alpha + \beta + \gamma = 180°$).

Tehát a feladatban megjelölt 30°, 60° és 90° értékeknek meg kell egyeznie a 2α, 2β, $2\gamma - 180°$ nagyságú szögekkel. Attól függően, hogy a $2\gamma - 180°$ melyik értéket veszi fel, három különböző megoldást kapunk, ahol a három szög: $(15°, 30°, 135°)$; $(15°, 45°, 120°)$; $(30°, 45°, 105°)$. Ezek mindegyike eleget tesz annak a feltételnek, hogy $ABC_{\triangle}$ tompaszögű. Így a feladatnak összesen összesen négy, szögeikben különböző háromszög tesz eleget, ezek közül egy hegyesszögű, három pedig tompaszögű.

Megjegyzés.A feladat egy 11. osztályos versenyfeladat volt, melynek megoldását nagyban megkönnyítette, hogy már volt előismeretünk, és hegyesszögű esetben csak egy már ismert összefüggésre kellett visszautalni. Hegyes- és tompaszögű esetre is igaz, hogy ha nem is tudjuk felidézni a konkrét összefüggést az eredeti háromszög és talpponti háromszögének szögei között, a levezetés lehetséges, ha tudjuk, hogy (hegyesszögű esetben) húrnégyszögeket kell keresni és a talpponti háromszög által levágott háromszögek hasonlóak az eredetihez. Ezen ismeretek hiányában viszont ezeket önállóan megoldani már egy nehezebb feladat, főleg versenykörülmények között. Annak észrevétele is nehézséget okozhat, hogy külön kell vizsgálni a hegyes- és tompaszögű eseteket.

Tehát az első részben leírtak ismerete megkönnyíti egy ehhez hasonló versenyfeladat megoldást. Ez a feladat a másik irányba is hasznosítható: motivációként tud szolgáni ahhoz, hogy a korábbiakban látott talpponti háromszög szögfelezőihez kapcsolódó tulajdonságot felfedezzük, ennek a feladatnak a megoldását célként lehet kitűzni a tárgyaláskor.

3.3. 3. feladat

A hegyesszögű $ABC_{\triangle}$ oldalait jelölje a, b és c, köré írt körének sugarát R. A háromszög középvonalaiból álló háromszög egybevágó a talpponti háromszöggel. Mi az értéke $\frac{a^2+b^2+c^2}{R^2}$-nek? *(https://brilliant.org/wiki/orthic-triangle/)*

Ennek a feladatnak a megoldása során is felhasználhatjuk azt, hogy a talpponti háromszög szögeit meg tudjuk határozni az eredeti háromszög α, β, γ szögeinek segítségével, a $180° - 2\alpha$, $180° - 2\beta$ és $180° - 2\gamma$ összefüggések állnak fenn. Az is ismert, hogy a középvonalakból álló háromszög hasonló az eredeti háromszöghöz, tehát szögei α, β és γ nagyságúak. A feladat feltétele szerint ennek a két háromszögnek egybevágónak kell lennie, tehát szögeik nagysága megegyezik, azaz teljesülnie kell, hogy:

$180° - 2\alpha = \gamma$

$180° - 2\beta = \beta$

$180° - 2\gamma = \alpha$

Amely egyenletekből azt kapjuk, hogy $\alpha = \beta = \gamma = 60°$, tehát a feladat feltétele csak szabályos háromszögre teljesül (látható, hogy nem kell foglalkoznunk, hogyan párosítjuk a két háromszög szögeinek egyenlőségét, mindig ezt kapnánk eredményül, hiszen az $ABC_\triangle$ szabályos, hasonlóan a talpponti háromszöghöz és a középvonalakból álló háromszöghöz).

Annak megállapítása után, hogy az $ABC_\triangle$ szabályos, már csak a szabályos háromszög oldala és köré írt körének sugar között kell összefüggést találni. Ez 11. osztályos ismeretekkel a következő módon történhet: ha O-val jelöljük az $ABC_\triangle$ köré írható körének középpontját, akkor az $OAB_\triangle$-ben egy koszinusz-tétel felírásával az $R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 120° = c^2$ összefüggést kapjuk, amiből $3R^2 = c^2 (= a^2 = b^2)$ következik.

Ezt az eredményt alacsonyabb évfolyamon, koszinusz-tétel felírása nélkül is meg lehet oldani, ha A_1-gyel egy magasságtalppontot jelölünk, amely egyben oldalfelező pont is, akkor az OA_1B derékszögű háromszögben (amelynek szögei $90°$, $60°$, $30°$) egy Pitagorasz-tétel felírásával is megkaphatjuk a $3R^2 = a^2 = b^2 = c^2$ összefüggést.

Ezeket beírva a feladatban kérdezett törtbe kapjuk meg az eredményt:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{R^2} = \frac{9R^2}{R^2} = 9.$$

Megjegyzés. Bár ez nem egy matematikaversenyen szerepelt, a nehézsége alapján elképzelhető lenne, hogy egy könnyebb feladatként ott is megjelenjen 10. vagy 11. évfolyamon (a húrnégyszögek alkalmazása miatt korábban nem lehetséges). Ebben a feladatban ismételten a talppnonti háromszög és az eredeti háromszög szögei közötti összefüggést kellett kihaszálni, emiatt a feldolgozásához kapcsolódóan hasonló megjegyzéseket lehet hozzáfűzni, mint amiket az előző feladatnál tettünk. Akár órai keretek között is elképzelhető ez a két feladat, például motivációként az előző, amely miatt le kell vezetni az első részben tárgyalt, a talpponti háromszög szögfelezőjére vonatkozó összefüggést, majd ez utóbbi feladat lehetséges, mint gyakorlófeladat, amelynek megoldása egy jobb képességű tanulótól önállóan is elvárható.

A feladathoz még azt is érdemes hozzátenni, hogy ebben a formában könnyebb volt, de lehetséges nehezíteni: ha elhagyjuk azt a feltételt, hogy az $ABC_\triangle$ hegyesszögű, ismét kell második esetként vizsgálni, hogy mi történik tompaszögű háromszögben. Már ott is meghatároztuk a talppontok által alkotott háromszög szögeit: 2α, 2β, $2\gamma - 180°$, ahol γ a tompaszög. Ezeknek a feladat szerint egyenlőknek kell lenni az eredetihez hasonló közpvonalakból álló háromszög szögeivel, azaz α-val, , β-val és γ-val. Ezt az egyenletrendszert megoldva a három szögre a $\frac{180°}{7}$, $\frac{360°}{7}$, $\frac{720°}{7}$ értékeket kapjuk, amelyek kevésbé szépek, mint hegyesszögű esetben. Ekkor is meg tudjuk határozni a $\frac{a^2+b^2+c^2}{R^2}$ tört értékét (ami 7 lesz), de ekkor már több, részben kevésbé ismert trigonometrikus azonosságot is kell alkalmazni, ami miatt ebben a formában egy már nehéz, 11–12. évfolyamos versenyfeladatként lehetne feladni.

3.4. 4. feladat

Egy tetszőleges, nem derékszögű háromszög esetén rajzoljuk meg a talpponti háromszöget, majd ennek a talpponti háromszögét, stb. (a talpponti háromszög csúcsai a három magasságvonalnak a hozzájuk tartozó oldalegyenessel való metszéspontjai). Hány olyan, páronként nem hasonló háromszög létezik, amelynek a szögei fokokban mérve egész számok, és az eljárás során előbb-utóbb az eredetihez hasonló háromszöghöz jutunk? *(OKTV III. kategória 2005/2006, döntő)*

Ismételten a talpponti háromszög szögei és az eredeti háromszög szögei közötti összefüggéseket kell használni. Jelölje H_0 az eredeti háromszöget, H_i pedig az i-edik talpponti háromszögét. Ha H_0 hegyesszögű háromszögű, a H_1 első talpponti háromszög szögei $180° - 2\alpha$, $180° - 2\beta$, $180° - 2\gamma$, ha pedig H_0 tompaszögű (ahol α a tompaszög) $2\alpha - 180°$, 2β és 2γ.

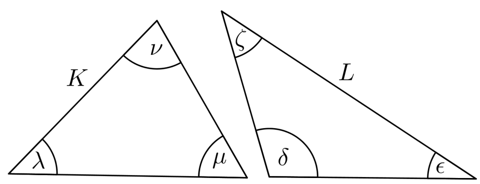
A feladat szerint az α, β, γ szögek fokban vett mértékei egész számok, emiatt a talpponti háromszög szögei is mindkét esetben egészek lesznek sőt, az is teljesülni fog, hogy kettővel oszthatóak. Ha vesszük a H_1 talpponti háromszögét, H_2-t, akkor hasonlóan látható, hogy mindegyik szöge osztható lesz 4-gyel (hiszen a szögeit úgy kaphatjuk, hogy a H_1 szögeit, melyek párosak vagy kettővel szorozzuk vagy a kétszeresüket kivonjuk 180°-ból vagy a kétszeresükből kivonunk 180°-ot, és ezen műveletek mindegyike 4-gyel osztható mértéket eredményez, hiszen a 180 is osztható 4-gyel). Ha a H_3 talpponti háromszöget vesszük, hasonlóan igaz, hogy szögei oszthatóak lesznek 4-gyel és ez igaz marad a további talpponti háromszögekre is. Tehát ahhoz, hogy az eredeti háromszög szögei és valahanyadik talpponti háromszögének szögei megegyezzenek, az α, β, γ szögeknek oszthatónak kell lenniük 4-gyel. Kivételt jelenthetne ezalól, ha már $H_1 \sim H_0$ teljesülne (hiszen H_1 szögeiről csak a 2-vel való oszthatóság szerepelt feltételként), ám az előző feladatban pont azt láttuk, hogy ezt mindössze két háromszög teljesíti, az egyik a szabályos háromszög, melynek szögei fokokban mérve oszthatóak

4-gyel, és egy tompaszögű háromszög, de annak a szögei fokban nem egészek, így itt nem ad megoldást.

Ki kell még emelni azt is, hogy az eddigi észrevételek azért is voltak szükségesek, mert ezekből látszik, hogy ha H_0 szögeinek mértéke osztható 4-gyel, akkor soha nem kaphatunk derékszögű háromszöget talpponti háromszögként, hiszen a 90 nem osztható 4-gyel. Ez pedig azért fontos, mert derékszögű háromszögnek elfajult a talpponti háromszöge, tehát nem létezne minden pozitív egész i-re a H_i talpponti háromszög.

A továbbiakban azt fogjuk belátni, hogy az a feltétel, hogy H_0 szögei 4-gyel oszthatóak nemcsak szükséges, hanem elégséges is, hogy valamely i-re $H_i \sim H_0$ teljesüljön.

Tegyük fel, hogy K és L olyan háromszögek, melyekre teljesül, hogy mindegyik szögük fokban mért mértéke egész szám és 4-gyel osztható. Talpponti háromszögeiket jelölje K' és L'. Ekkor teljesül, hogy $K' \sim L' \iff K \sim L$, azaz a talpponti háromszögek akkor és csak akkor hasonlóak, ha a kiindulási háromszögeik is hasonlóak. Az, hogy két hasonló háromszög talpponti háromszögei is hasonlóak, triviális (gondolhatunk arra, hogy a talpponti háromszögek szögeit ugyanúgy kapjuk meg).



14. ábra.

Az ekvivalencia másik irányának bizonyításához szintén azt használjuk, hogy a talpponti háromszög szögeit egyértelműen meg tudjuk határozni az eredeti háromszög szögeinek függvényében. Emiatt ha K' és L' hasonlóak, valamint K és L is hegyesszögű háromszögek voltak, akkor következik, hogy K és L szögei is egyező nagyságúak, tehát a két háromszög hasonló. Ugyanez igaz, ha K és L is tompaszögű. Tehát csak azt az esetet kell vizsgálni, amikor az egyik hegyes-, a másik tompaszögű. Legyen K hegyesszögű, L pedig tompaszögű a szögeiket jelöljük el a 14. ábra szerint ($\delta > 90°$). A K' talpponti háromszög szögei $180° - 2\lambda$, $180° - 2\mu$, $180° - 2\nu$, az L' talpponti háromszög szögei $2\delta - 180°$, $2\epsilon, 2\zeta$. Mivel K' és L' szögei a hasonlóság miatt egyenlő nagyságúak, ezért fenn fog állni, hogy 2ϵ megegyezik K' valamelyik szögével, ez legyen $180° - 2\mu$. De ekkor $2\epsilon + 2\mu = 180°$, azaz $\epsilon + \mu = 90°$. Az állítást viszont úgy fogalmaztuk meg, hogy K és L minden szögének 4-gyel kell oszthatónak lennie, tehát az összegük is biztosan osztható 4-gyel, ami viszont nem teljesül a 90-re.

A H_i talpponti háromszögek száma megszámlálhatóan végtelen, de a szögeiknek a lehetséges értékei csak véges sok lehet (mert mindegyik szög mértéke 4-gyel osztható pozitív egész, melyek összege 180°), tehát biztosan lesz olyan j és k, hogy $k > j$ és $H_j \sim H_k$. Viszont az előző levezetés miatt, ha két talpponti háromszög hasonló, akkor azok a háromszögek is hasonlóak, amiknek a talpponti háromszögeit vettük, ezt a gondolatmenetet ismételve következik, hogy ekkor $H_0 \sim H_{k-j}$ is teljesül. Ezzel pedig a szögek 4-gyel való oszthatóságát, mint elégséges feltételt is sikerült igazolni.

Mivel a feladat azt kérdezte, hogy hány darab ilyen H_0 van, így egy szükséges és elégséges feltétel megadása nem elégséges, össze is kell számolni, hogy hány, a szögek mértékében különböző háromszögre teljesül az. Tehát a $4x + 4y + 4z = 180$ egyenlet nem csak a tagok sorrendjében különböző megoldásainak számát keressük a pozitív egész számhármasok körében. Ezt 4-gyel egyszerűsítve $x + y + z = 45$ a megoldandó egyenlet. Erre a már kombinatorikai feladatra többféle megoldást is lehet adni, most egy esetszétválasztáson alapuló, logikailag meggondolható megoldást közlök táblázatos formában, amelynél feltettük, hogy $x \leq y \leq z$.

Az első oszlop tartalmazza x lehetséges értékeit, ami 1 és 15 között változhat, ettől függően $y + z = 45 - x$, aminek értékét a második oszlop tartalmazza. Ekkor minden y esetén egyértelmű a z értéke, y-t pedig az előző oszlop értékétől egyel kevesebb módon választhatjuk meg (hiszen z sem lehet 0), azaz ennyi (y, z) rendezett pár alkotható. Ekkor még nem vettük figyelembe, hogy $y \leq z$, az ilyen lehetőségek számát tartalmazza a 4. oszlop. Ám annak is teljesülnie kell, hogy $x \leq y$, így a 4. oszlopban található lehetőségek számából el kell venni azokat, ahol $x > y$, ezek száma az első oszlop-1, ezt tartalmazza az utolsó, 5. oszlop. Az utolsó oszlop értékeit összeadva, kapjuk meg a feladat kérdésére eredményül, hogy 169, egymástól jelentősen eltérő (a szögek mértékében különböző) ilyen háromszög van.

x	$y+z$	(y,z) rendezett párok száma	előző párok száma $y \leq z$ feltétel mellett	összes darab $x \leq y$ feltétellel
1	44	43	22	22
2	43	42	21	20
3	42	41	21	19
4	41	40	20	17
5	40	39	20	16
6	39	38	19	14
7	38	37	19	13
8	37	36	18	11
9	36	35	18	10
10	35	34	17	8
11	34	33	17	7
12	33	32	16	5
13	32	31	16	4
14	31	30	15	2
15	30	29	15	1

Megjegyzés. Az előzőekhez képest ez már egy sokkal összetettebb feladat volt, de ez érthető is, ha megnézzük, hol szerepelt: az OKTV csak speciális matematika tagozatos tanulóknak szóló III. kategóriájának döntőjében, tehát indokolt a versenyből a nehézség.

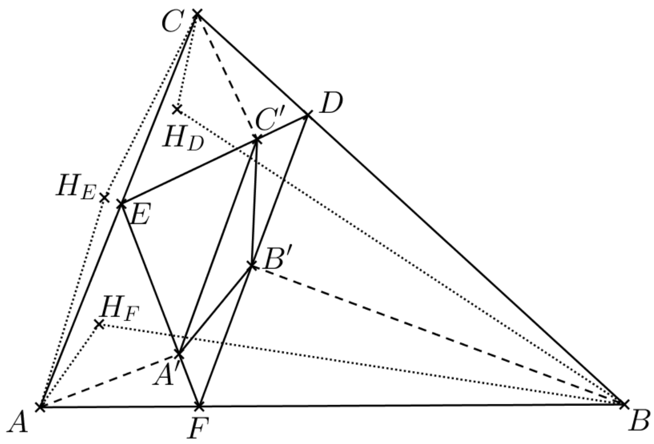
3.5. 5. feladat

Az ABC hegyesszögű háromszögben legyen D, E és F rendre az A, B és C csúcsból induló magasságvonal talppontja. Jelölje A', B' és C' rendre az A, B és C csúcsok merőleges vetületeit az EF, FD, DE egyenesekre. Továbbá legyenek a $DB'C'$, $EC'A'$ és $FA'B'$ háromszögek magasságpontjai rendre a H_D, H_E és H_F pontok. Mutassátok meg, hogy

$$H_DB^2 + H_EC^2 + H_FA^2 = H_DC^2 + H_EA^2 + H_FB^2.$$

(XVI. Dürer verseny (2022), helyi forduló, E+ kategória)

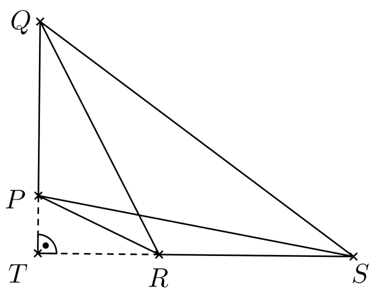
A feladatban szereplő pontokat és szakaszokat a 15. ábrán jelöltük, de ez nem segít sokat arra nézve, hogy ebben a formában átlássuk és megoldjuk. A H_D, H_E, H_F pontok származtatása összetett, nincs hozzájuk kapcsolódó, könnyen felfedezhet információnk. Amit mégis észre lehet venni, hogy amennyiben a H_D, H_E H_F pontok helyett ugyanazt a H pontot írnánk, a bizonyítandó egyenlőség mindkét oldalán ugyanaz állna. Ez



15. ábra.

adhatja az ötletet, hogy egy megfelelő H pont keresésével lehetne próbálkozni. Ehhez először egy lemmát használunk fel.

1. lemma: Az egy síkban levő, egymástól különböző P, Q, R, S pontokra teljesül, hogy $PQ \perp RS \iff PR^2 - PS^2 = QR^2 - QS^2$.



16. ábra.

Az 1. lemma bizonyításának egyik iránya. A merőlegességet feltéve, ahol a 16. ábrát használva T a PQ és RS egyenesek metszéspontja, fel lehet írni Pitagorasz-tételeket a TRP, TSP, TRQ, TSQ derékszögű háromszögekben. Ezek segítségével a bizonyítandó egyenlőség két oldala átalakítható: $PR^2 - PS^2 = (TP^2 + TR^2) - (TP^2 + TS^2) = TR^2 - TS^2$, valamint $QR^2 - QS^2 = (TQ^2 + TR^2) - (TQ^2 + TS^2) = TR^2 - TS^2$, amely igazolja a lemmának ezt az irányát. (Az ábrázolthoz képest a pontok egymáshoz képest másként is elhelyezkedhetnek, például T lehetne a PQ szakaszon, de ez nem befolyásolja a bizonyítást.)

A másik irány. A merőlegesség bizonyításához azt lehet használni, hogy két vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0. Ehhez egy tetszőleges O kezdőpontból vegyük a P, Q, R, S pontokba mutató helyvektorokat, melyeket jelölje rendre $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$.

$$PR^2 - PS^2 = QR^2 - QS^2 \iff (\mathbf{r}-\mathbf{p})^2 - (\mathbf{s}-\mathbf{p})^2 = (\mathbf{r}-\mathbf{q})^2 - (\mathbf{s}-\mathbf{q})^2$$

A négyzetre emeléseket elvégezve, egyszerűsítve, majd szorzattá alakítva a $2(\mathbf{p}-\mathbf{q})(\mathbf{s}-\mathbf{r}) = 0$ egyenlőséghez jutunk, amely pontosan akkor igaz, ha $QP \perp RS$. Ezzel pedig igazoltuk a lemma másik irányát is.

Az 1. lemma alkalmazhatósága könnyebben látszik, ha a bizonyítandó állítást 0-re rendezzük:

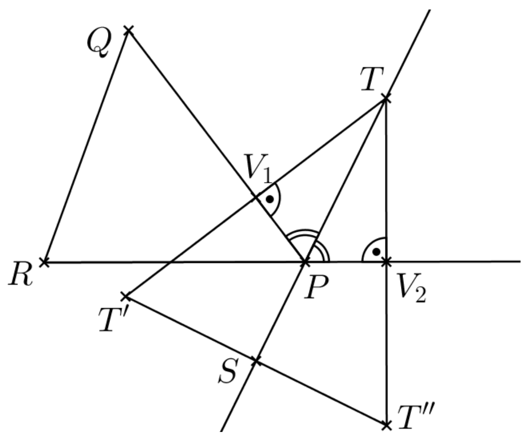
$$0 = H_DB^2 - H_DC^2 + H_EC^2 - H_EA^2 + H_FA^2 - H_FB^2$$

Amennyiben sikerülne egy H pontra belátni, hogy $HH_D \perp BC$, $HH_E \perp CA$ és $HH_F \perp AB$, akkor az 1. lemma miatt a H_D, H_E, H_F pontokat lecserélhetnénk H-ra úgy, hogy a kifejezés értéke ne változzon. Ebben az esetben pedig a tagok kiejtenék egymást, azaz valóban 0 lenne a kifejezés értéke. A továbbiakban azt fogjuk belátni, hogy az alkalmas H pont a DEF talpponti háromszög magasságpontja lesz. Szimmetriai okok miatt elég a $HH_D \perp BC$ igazolása.

A DEF talpponti háromszög és a BC oldalegyenes között már tárgyaltunk egy kapcsolatot, mely szerint a BC külső szögfelezője a $DEF_\triangle$ F-nél levő szögének. A külső szögfelező és a rá merőleges egyenesek között a következő lemma segít egy további összefüggést találni.

2. lemma: Ha egy $PQR_\triangle$ P-beli külső szögfelezőjének egy $T(\neq P)$ pontját tükrözzük a PQ és PR egyenesekre, akkor a kapott T', T'' pontokat összekötő egyenes merőleges lesz a külső szögfelezőre.

A 2. lemma bizonyítása. Legyen $TT' \cap QP = V_1$, $TT'' \cap RP = V_2$ és $T'T'' \cap PT = S$ a 17. ábrának megfelelően.



17. ábra.

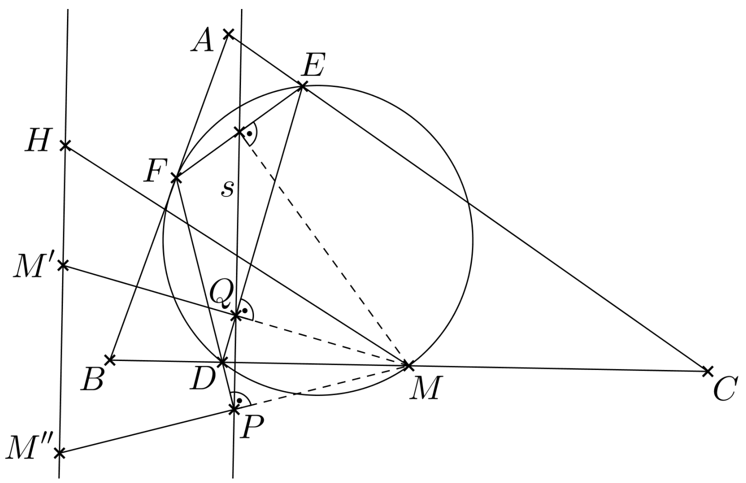
TV_1P és PV_2T derékszögű háromszögek egybevágóak, mert közös az átfogójuk, valamint $V_1PT\sphericalangle = TPV_2\sphericalangle$, hiszen PT a P-nél levő külső szögfelező. Emiatt $PTV_1\sphericalangle = V_2TP\sphericalangle$ és $TV_1 = TV_2$. A $TT'S_\triangle$-ben és a $TST''_\triangle$-ben közös a TS oldal, a T-nél levő szögek egyenlő nagyságúak az előbb leírtak miatt és $TT' = TT''$ is teljesül, mert az egyik TV_1, a másik TV_2 kétszerese. Tehát a két háromszögben megegyezik két oldal és az általuk bezárt szög, emiatt egybevágóak. $T'ST\sphericalangle = TST''\sphericalangle = 90°$, ami bizonyítandó volt.

A 2. lemma szerint amennyiben a BC oldal egy pontját a DEF talpponti háromszög DE és DF oldalaira tükrözzük, akkor a képpontokat összekötő egyenes merőleges lesz BC-re. Ha sikerülne BC-n úgy kiválasztani egy M pontot, hogy $M'M''$ egyenesén a H és H_D pontok is rajta lennének, akkor az bizonyítaná, hogy $HH_D \perp BC$. Ez a jól kiválasztott M pont a BC szakasz felezőpontja lesz, ami az első részben tárgyaltak ismeretében könnyebben megsejthető, hiszen a talpponti háromszög csúcsai és az eredeti háromszög oldalfelező pontjai között szerepelt már egy összefüggés: ugyanazon a körön (a Feuerbach-körön) rajta van mind a hat pont.

Ezzel a figyelmünk a DEF talpponti háromszögre, annak a H magasságpontjára, valamint a köré írt körén lévő M pontra irányult. A következő állítás a magasságpont és a köré írt kör egy pontja közötti összefüggésre mutat rá, melyben egy újabb geometriai fogalom fordul elő. Emiatt ennek az állításnak bizonyítása hosszabb terjedelmű lenne, ezért ez most csak közlés formájában fog szerepelni. (A bizonyítása megtalálható például [1]-ben)

Állítás: Ha veszünk egy háromszög köré írt körén egy tetszőleges pontot, akkor annak a Simson-egyenese felezi a pontot a magasságponttal összekötő szakaszt. *(Egy háromszög oldalaira nem illeszkedő pontból a háromszög oldalegyeneseire merőlegeseket tudunk állítani, az ezzel kapott talppontok általában egy háromszöget határoznak meg. Belátható viszont, hogy akkor és csak akkor, ha a kiválasztott pont a háromszög köré írt körén fekszik, a három talppont egy egyenesre fog esni. Ezt az egyenest nevezzük a ponthoz tartozó Simson-egyenesnek.)*

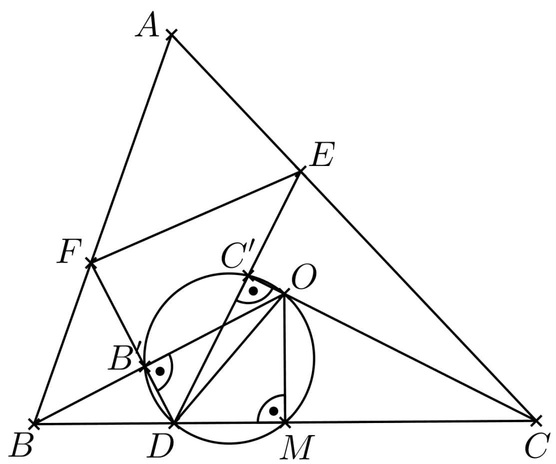
Ennek az állításnak a segítségével be tudjuk látni, hogy a H pont rajta van az $M'M''$ egyenesen, ehhez használjuk a 18. ábra jelöléseit. Az M oldalfelező pontból a DE, DF egyeneskhez húzott merőlegesek talppontjai legyenek Q és P. Mivel M a DEF háromszög köré írt körén van, ezért P és Q rajta vannak az M-hez tartozó s Simson-egyenesen. Továbbá az is igaz, hogy Q felezi MM', P pedig az MM'' szakaszokat, hiszen M' és M'' tengelyes tükörképei M-nek a DE, DF egyenesekre. Ezért egy M középpontú, $\lambda = 2$ arányú nagyítás s-t az $M'M''$ egyenesbe viszi, amin a H pontnak is rajta kell lennie, mert az előző állítás miatt a Simson-egyenes felezi az MH szakaszt.



18. ábra.

Ezzel a kettő közül az egyik pontról beláttuk, hogy rajta van $M'M''$ egyenesen.

A H_D pontról ugyanezt kellene belátni, amely a $DC'B'_{\triangle}$-nek volt a magasságpontja. Amennyiben visszatekintünk az eredeti feladatot mutató 15. ábrára, akkor látható, hogy a DB' és DF egyenes megegyezik, hasonlóan DC' és DE egyenesek. Emiatt az M-ből ezekre állított merőlegesek talppontja meg fog egyezni az előző ábrán jelölt P és Q pontokkal. Amennyiben sikerülne belátni, hogy az M pont rajta van a $DB'C'_{\triangle}$ köré írt körén, akkor annak a bizonyíátsa, hogy H_D rajta van az $M'M''$ egyenesen megegyezne azzal, ahogy a H pontról igazoltuk ugyanezt. A feladat megoldásának az utolsó lépése tehát annak belátása, hogy az M pont rajta van a $DB'C'$ körön.



19. ábra.

Mivel M oldalfelező pont és rajta van BC felezőmerőlegesén, ezért a $DMO\sphericalangle$ derékszög (ahol O az ABC háromszög köré írt körének középpontját jelöli). Emiatt tudunk mutatni egy újabb kört, amelyen M rajta lesz, a DO átmérőjű körön, ez pedig a Thalész-tétel megfordítából következik. Ezen a körön a B' és C' pontoknak is rajta kell lenniük, amely szintén a Thalész-tétel megfordításából következik, ugyanis $DBO\sphericalangle$ és $DCO\sphericalangle$ derékszögek. Ezt onnan tudjuk, hogy az első részben beláttuk azt az állítást, mely szerint a háromszög köré írt körét a csúcsokkal összekötő szakaszok merőlegesek a talpponti háromszögek oldalaira. Tehát M rajta lesz a $DB'C'$ körön. Ezzel elvégeztük a feladat megoldásának utolsó lépését is.

Megjegyzés. Ez a feladat volt legösszetettebb, melynek megoldása során szükséges volt több nehezebb összefüggés ismerete. A talpponti háromszög mellett új fogalomként megjelent a Simson-egyenes is, amely csak speciális matematika tagozaton kell, hogy szerepeljen a tananyagban. A megoldás közben használt lépések is nehezebbek voltak, amelyek megsejtése nem könnyű feladat (például annak észrevétele, hogy a $DB'C'_{\triangle}$ köré írható kör megegyezik a DO átmérőjű körrel). Ezekben segíthet egy megfelelően nagy és pontosan megszerkesztett ábra.

A feladat olyan versenyen szerepelt, ahol ezeknek a nehezebb ismereteknek a megléte elvárás. A 2022/23-as Dürer-verseny első fordulójának E+ kategóriájában adták fel, amely nehézsége meghaladja az E kategóriát, amely a speciális matematika tagozatnak szólna. E+ kategóriában csak a legjobb eredményekkel rendelkező tanulók csapatai indulnak, olyan kritériumokkal, mint OKTV III. kategória döntő vagy a Nemzetközi Matematika Diákolimpia válogatóján elért 1–24. hely. Emiatt a feladat össszetettsége a verseny nehézségéből következik. (Érdemes hozzátenni azt a megjegyzést is, hogy volt olyan csapat, amely maximális pontszámot kapott erre a feladatra.) Emiatt ez a feladat teljes egészében nem való egy tanítási órára, még egy jobb csoportban sem, de a legjobb, versenyző diákoknak szóló szakkörön érdemes lehet tárgyalni. Egy-egy részletét viszont alacsonyabb szinten is fel lehet használni. A két felhasznált lemma közül az első például szép példája volt annak, hogy a merőlegesség bizonyítása gyakran vektorok skaláris szorzata alapján történhet, még a második lemma csak a háromszögek egybevágóságának alapeseteit használta.

3.6. További feladatok

Végezetül lássunk további négy feladatot, melyek a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiákon vagy azok nemzeti válogatóversenyein szerepeltek. Ezekben szintén megjelennek valamilyen formában a talpponti háromszöghöz kapcsolódó ismeretek, tehát az eddigi feladat- és megoldásismertetést még lehetne tovább folytatni ezekkel a nehéz középiskolás versenyfeladatokkal.

1. Az A, B, C pontok által meghatározott hegyesszögű háromszögben az egyes csúcsokhoz tartozó magasságvonalak talppontjait jelölje rendre T_A T_B és T_C. A $T_AT_BT_C$ háromszög oldalfelező pontjai legyenek F_A, F_B és F_C rendre a T_BT_C, T_AT_C és T_AT_B oldalakon. Igazoljuk, hogy az F_AF_B, F_CF_A és F_BF_C egyeneseken az ABC háromszög által kimetszett szakaszok egyenlő nagyságúak. *(Magyar olimpiai válogató 2017/1.)*

2. Az ABC hegyesszögű háromszög C-ből induló magasságának talppontja legyen P, a B-ből induló magasság talppontja legyen Q. A PQ egyenes az $ABC_\triangle$ köré írt körét az X és Y pontokban metszi. Teljesül, hogy $XP = 10$, $PQ = 25$ és $QY = 15$. Ekkor az $AB \cdot AC$ szorzat felírható $m\sqrt{n}$ alakban, ahol m és n pozitív egész számok és n nem osztható egyetlen prímszám négyzetével sem. Mennyi az $m + n$ értéke? *(American Invitational Mathematics Examination II, 2019/15.)*

3. A hegyesszögű ABC háromszög A-ból, B-ből és C-ből induló belső szögfelezői rendre az A_1, B_1 ill. C_1 pontokban metszik a háromszög körülírt körét. Az AA_1 egyenest az A_0 pontban metszi a B és C-beli külső szögfelező és hasonlóan kapjuk a B_0 és C_0 pontokat. Bizonyítsuk be, hogy
   a) az $A_0B_0C_0$ háromszög területe egyenlő az $AC_1BA_1CB_1$ hatszög területének kétszeresével;
   b) az $A_0B_0C_0$ háromszög területe legalább négyzser akkora, mint az ABC háromszög területe. *(Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 1989/2.)*

4. Legyenek AH_1, BH_2, CH_3 az ABC hegyesszögű háromszög magasságai. Az ABC háromszög beírt köre a BC, CA, AB oldalakat rendre a T_1, T_2, T_3 pontokban érinti. Legyenek l_1, l_2, l_3 egyenesek rendre a H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 egyenesek tükörképei a T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2 egyeneskre. Bizonyítsuk be, hogy l_1, l_2, l_3 egy olyan háromszöget határoznak meg, amelynek csúcsai az ABC háromszög beírt körén van. *(Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 2000/6.)*

4. Összegzés

A célom a talpponti háromszöghöz kapcsolódó néhány alapvető ismeret összefoglalása, majd azokhoz kapcsolódó versenyfeladatok gyűjtése volt néhány megjegyzéssel kiegészítve, hogy mindezt a középiskolai tanításban hol és hogyan lehetne felhasználni. A leírtakat még lehetne bővíteni, mint a végén a feladatokkal meg is tettem. De a tulajdonságok sem merülnek ki a tárgyaltakban, például az is teljesül, hogy a talpponti háromszög területe legfeljebb az eredeti háromszög területének negyedrésze. Akár az alkalmazásokról is lehetett volna szó, amire egy szép példa egy KöMaL-ban megjelent cikk, amelyben a szerző egy határértéket számol ki talpponti háromszögek a segítségével. [4]

Általánosítási lehetőségeink is vannak, definiálhatjuk az általános talpponti háromszöget, melynek csúcsai egy háromszög köré írt köré írt körére nem illeszkedő P pontból az oldalakra állított merőlegesek talppontjai (ezt nevezzük elsődleges talpponti háromszögnek). Ennek az oldalaira is merőlegeseket állíthatunk a P pontból, a talppontok meghatározzák a másodlagos talpponti háromszöget, majd hasonlóan kaphatjuk a harmadlagos talpponti háromszöget. Bizonyítható, hogy az így kapott harmadlagos talpponti háromszög mindig hasonló az eredeti háromszöghöz. Ennek a tételnek az általánosítása az a tétel, mely szerint bármely n-oldalú sokszög n-edik talpponti n-szöge hasonló az eredeti n-szöghöz. [5]

Hivatkozások

[1] H.S.M. Coxeter-S.L. Greitzer: Az újra felfedezett geometria. Bp. 1977.

[2] Rátz László: A talpponti háromszög. KöMaL. 1896/december. 44-47.

[3] Olosz Ferenc: Talpponti háromszögek. Matlap. 2020/június. 197-199.

[4] Hausel Tamás: Talpponti háromszögek és konvergens sorozatok. KöMaL. 1988/december. 433-437.

[5] Reiman István-Dobos Sándor: Nemzetközi matematikai diákolimpiák (1959-2003). Bp. 2003.

[6] Kosztolányi-Kovács-Pintér-Urbán-Vincze: Sokszínű matematika 10. Szeged. 2016.

[7] Kosztolányi-Kovács-Pintér-Urbán-Vincze: Sokszínű matematika 11. Szeged. 2016.

[8] Juhász István-Orosz Gyula: Matematika 10. Debrecen. 2022.