Szakdolgozat

Török Luca
angol nyelv és kultúra tanára - matematikatanár
osztatlan tanári mesterszak

2023.

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

Szakdolgozat

A GeoGebra alkalmazása a koordinátageometria oktatásában

Témavezető:

Dr. Fried Katalin

főiskolai docens

Készítette:

Török Luca

angol nyelv és kultúra tanára – matematikatanár

osztatlan tanári mesterszak

2023.

Eredetiségi nyilatkozat

Alulírott Török Luca (név), BI8CCQ (Neptun-kód) ezennel kijelentem és aláírásommal megerősítem, hogy az ELTE angol nyelv és kultúra tanára – matematikatanár osztatlan tanári mesterszakján írt jelen diplomamunkám saját szellemi termékem, melyet korábban más szakon még nem nyújtottam be szakdolgozatként és amelybe mások munkáját (könyv, tanulmány, kézirat, internetes forrás, személyes közlés stb.) idézőjel és pontos hivatkozások nélkül nem építettem be.

Budapest, 2023.04.29.

Török Luca

....

a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A digitális eszközök bevonása a matematika oktatásba esszenciális, hiszen a diákok emelkedett ingerküszöbéhez alkalmazkodni kell, a digitális eszközök használata pedig amellett, hogy rendkívül hasznos a tananyag feldolgozásában, felkeltheti a diákok érdeklődését, és megragadhatja a figyelmüket.

Szakdolgozatom témája a GeoGebra program használata a matematika oktatásban középiskolában, ezen belül a koordinátageometria anyagrészben. A második fejezetben röviden bemutattam a szakirodalmakat, anyagokat, amelyeket használtam a dolgozat megírásához, majd a harmadik fejezetben megvizsgáltam, hogy a Nemzeti Alaptantervben hogyan épül fel a koordinátageometria témája, mi minden készíti elő, mi tartozik bele ebbe a témakörbe, illetve, hogy ez hogyan változott a 2020-as alaptantervben a 2012-eshez képest. Ezt követően a negyedik fejezetben kiemeltem azokat a szegmenseket, amikor a NAT ajánlja a digitális eszközök bevonását a tanításba, amihez remek választás a GeoGebra. Majd bemutattam példákat arra, hogy egy-egy a tantervben szereplő új fogalmat hogyan lehet bevezetni, szemléltetni a GeoGebra a segítségével. Az ötödik fejezetben kifejtettem néhány tanterven túli lehetőséget is a program bevonására: talpponti háromszögben tételek levezetése, bizonyítása, a Feuerbach-kör és Euler-egyenes bemutatása, bizonyítások levezetése, pont és egyenes távolságának kiszámítása az egyenes normálegyenletével, illetve tükrözések kompozíciója. Végezetül a hatodik fejezetben összegyűjtöttem saját tapasztalataimat a szaktárgyi tanítási gyakorlatomról és az egyéni összefüggő iskolai gyakorlatomról, amelyeken alkalmam volt koordinátageometriát tanítani, illetve kipróbálni a GeoGebrát tantermi környezetben a lehetőségeimhez mérten, valamint bemutattam néhány példa feladatot, amelyekhez felhasználtam a programot.

A témaválasztásom egyik motivációja a gimnáziumi tapasztalataim voltak, ahol sok iskolatársamnak okozott fejtörést a koordinátageometria. Már a geometriai és algebrai ismeretek összeolvadása is gondot jelentett, amit csak tetőzött, hogy nem tudták elképzelni a szóban forgó alakzatokat a koordináta-rendszerben és ezek kapcsolatát a hozzájuk tartozó egyenletekkel, koordinátákkal. Mindig hagyományos módon ábrázoltunk mindent, amit a tanár a nem négyzetrácsos táblára rajzolt fel, és sokaknak gondot jelentett átlátható, pontos ábrát készíteniük a füzetbe, amelyeknek hiánya szinten megnehezítette a megértést. A függvények témakörnél azonban előkerült a digitális ábrázolás, ami a függvénytranszformációk szemléltetésében, illetve a függvények paramétereinek megértésében segített sokat. Már ekkor szöget ütött a fejemben, hogy a koordinátageometriához is támogatást nyújthat a digitális szemléltetés, azonban magával a GeoGebra programmal csak az egyetemi tanulmányaim során ismerkedtem meg. Az egyetemen rengeteget használtam a GeoGebrát, főképp a geometriai tárgyak, ezen belül is leginkább az analitikus geometria tanulása közben, de hasznát vettem az analízis tanulmányaim során is. A programmal sokkal könnyebben észrevettem összefüggéseket, megértettem tételeket, és sok feladat megoldásában is segített. Ekkor körvonalazódott ki bennem igazán, hogy digitális eszközökön belül a GeoGebra egy nagyon jó választás lehet. A szaktárgyi tanítási gyakorlatom során koordinátageometriát tanítottam, ahol kipróbálhattam a GeoGebra ábrák hatékonyságát. Ez a szemléltetési módszer a hagyományos mellett nagyon hasznosnak bizonyult, amit később az egyéni összefüggő iskolai gyakorlatom alatt tapasztaltak is megerősítettek. Szakdolgozatomban ezért azt szeretném megmutatni, hogy a GeoGebra hogyan használható fel a koordinátageometria tananyag feldolgozása során.

2. Szakirodalmi áttekintés

Dolgozatomban felhasználtam a 2020-as, illetve 2012-es Nemzeti Alaptantervet, valamint a rájuk vonatkozó matematika kerettanterveket, amelyeket a harmadik fejezetben fejtettem ki részletesen. Továbbá Gerőcs László és Vancsó Ödön Matematika című könyvének az Euler-egyenesre vonatkozó részéből merítettem ötletet az ehhez kapcsolódó bizonyításokra a hatodik fejezetben. Valamint felhasználtam számos a tanítási gyakorlataimban is jelenlévő matematika tankönyvet, feladatgyűjteményt a példafeladatok kiválasztásához.

Emellett Papp-Varga Zsuzsanna Interaktív matematika mindenkinek GeoGebra módra című cikkét is feldolgoztam, melyben bemutatja a programot, illetve alkalmazásának az oktatásban rejlő lehetőségeit. Írása szerint a GeoGebra segítségével oly módon szemléltethetünk absztrakt fogalmakat és műveleteket, ahogy a hagyományos módszerekkel, eszközökkel nem, vagy csak nehezen lehet. Idesorolja az egész számok összeadását, törtek szorzását, lineáris függvények tulajdonságainak jelentését, a derivált függvény értelmezését. Ezen felül a szoftver lehetőséget ad a diákoknak a felfedező tanulásra, kísérletezgetésre. Segítségével megláthatják és megfogalmazhatják az összefüggéseket különféle matematikai reprezentációk között, idesorolható például alakzatok egyenlete és képe közti összefüggés.

Módszertani céloktól és tárgyi feltételektől függően a GeoGebra többféleképpen is felhasználható a matematika oktatásban. Egy számítógép és egy projektor lehetővé teszi a szemléltetést az egész osztály részére, amely interaktív tábla használatával hatékonyabb, még könnyebben követhető lehet a tanulók számára. Ha rendelkezésre áll egy gépterem, akkor a diákok önállóan, vagy akár párban, csoportban, dolgozhatnak a GeoGebrával, ahol akár mindenkinek, illetve minden párnak vagy csoportnak más-más interaktív feladatlapot készíthetünk. Ha a fent említett feltételek nem teljesülnek, a GeoGebrával készített dinamikus segédanyagok, illetve interaktív feladatlapok publikálása könnyen megvalósítható az interneten, így elérhetővé tehető a diákoknak. Azonban a cikk publikációja idejéig kapott visszajelzések alapján a hatékonyabb módja a GeoGebra alkalmazásának az interaktív táblával való használat.

A cikk kiemeli, hogy fontos, hogy olyan betűméretet, színeket, vonal stílusokat és vonal vastagságokat válasszunk, amelyek távolról is jól láthatóak, valamint, ha csúszkákat és jelölőnégyzeteket használunk, akkor azokat mindenkinek jól elérhető helyre tegyük, és lehetőleg fixáljuk, hogy később ne tudjuk sem mi, sem a diákok véletlenül elmozdítani. A jelölő négyzetek és csúszkák alá nem ajánlott objektumokat helyezni, hiszen ezek takarásban lesznek. A cikk szerzője azt is felveti, hogy az eddig említettek mellett sok minden lehet még fontos, sok mindenre oda kellhet figyelni, de ezeknek feltárásához még több kutatás szükséges.[1]

3. Koordinátageometria helye a Nemzeti Alaptantervben

Vizsgáljuk meg, hogy a koordinátageometria hol foglal helyet a 2020-as, illetve a 2012-es középiskolai alapóraszámú nemzeti alaptantervben, valamint, hogy mikor és hogyan jelenik meg már korábban is a koordináta-rendszer. A NAT-2020 és NAT-2012 egyaránt két részre bontják le a 9–12. évfolyamos középiskolai tananyagot, 9–10. évfolyamra, illetve 11–12. évfolyamra. Maga a koordinátageometria mindkét NAT-ban 11–12. évfolyamon jelenik meg.

Nézzük meg kicsit jobban először az új 2020-as nemzeti alaptantervet. A koordináta-rendszer először a „Betűs kifejezések alkalmazása egyenletmegoldás, függvényábrázolás után” témakörben jelenik meg. Itt a diákok első- és másodfokú egyenletekkel dolgoznak, ezeket függvényként is ábrázolják. Az elsőfokú egyenletnek egyértelműen megfeleltethető egy lineáris függvény, amit ábrázolva egy egyenest kapunk (itt kivételt képez az $x = c$

[1] Papp-Varga Zsuzsanna: Interaktív matematika mindenkinek GeoGebra módra

egyenlet, ahol $c \in \mathbb{R}$), a másodfokú egyenletnek pedig egyértelműen megfeleltethető értelemszerűen egy másodfokú függvény, amit ábrázolva parabolát kapunk.

Ezután az „Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek” témakörben kerül elő koordináta-rendszer, ahol az elsőfokú egyenletek mellett egyenlőtlenségeket, valamint elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszereket is oldanak meg grafikusan (és persze mérlegelvvel). Ezutóbbi már előkészíti a koordinátageometriában két egyenes metszéspontjának a meghatározását.

Ezután a témakör után a „Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek” témakörben vesszük elő a koordináta-rendszert, ahol az elsőfokúakhoz hasonlóan, másodfokú egyenletek és egyenlőtlenségek grafikus megoldásához használjuk. Itt a diákok megtanulnak teljes négyzetté alakítani, ami szintén elő fog kerülni koordinátageometriában, amikor kört kell ábrázolniuk az egyenlete alapján. Az új, 2020-as Nemzeti Alaptantervben középszinten már nem kell tudni másodfokú kétismeretlenes egyenletrendszert megoldani sem grafikusan, sem mérlegelvvel.

A következő „A függvény fogalma, függvénytulajdonságok” témakörben egyértelműen megjelenik a koordináta-rendszer, illetve ez a témakör is segít megalapozni a koordinátageometriát. A diákok ebben a témakörben végig koordináta-rendszerben dolgoznak, tanulnak a lineáris és másodfokú függvényről, a négyzetgyökfüggvényről és a fordított arányosságot leíró függvényről. Ezen kívül a diákok táblázatban megadott függvény – értékeket ábrázolnak koordináta-rendszerben, grafikonról leolvassák az alapvető tulajdonságokat (értelmezési tartomány, értékkészlet, minimum, maximum, zérushely, növekedés és csökkenés), koordináta-rendszerben ábrázolják időben változó, hétköznapi folyamatokkal kapcsolatos mérések értékeit, illetve ábrázolnak grafikonokat, amelyek a mindennapi élethez kapcsolódnak. A NAT célként jelöli meg, hogy a diák a témakör tanulása után ne csak hagyományosan tudjon függvényt ábrázolni képlet alapján, hanem digitális eszközökkel is.

A következő témakörben, a geometriai alapismeretekben, most még egyáltalán nem kerül elő a koordináta-rendszer, ennek ellenére természetesen ez a témakör a legfontosabb a koordinátageometria bevezetéséhez, hiszen az alakzatok tulajdonságait ismerni kell, és az euklideszi szerkesztések lépéseit alkalmazzuk a koordináta-rendszerben is.

A következő témakörök a háromszögek, illetve a négyszögek és sokszögek, ahol, habár a koordináta-rendszer nem jelenik meg, az itt tanultaknak is nagy szerepe van később a koordinátageometriában.

A „Transzformációk, szerkesztések” témakörben nem használunk koordináta-rendszert, azonban vektorokat igen, amelyek szintén alapul szolgálnak a koordinátageometriához.

A fentieken túl 9–10. évfolyamon elővehetjük még a koordináta-rendszert valószínűség-számításnál, amikoris diszkrét valószínűség-eloszlásokat ábrázolunk szintén hagyományos és digitális eszközökkel.

A 11–12. évfolyamon a koordinátageometria előtt is már megjelenik, a koordináta-rendszer, először a „Hatvány, gyök, exponenciális függvény, logaritmus” témakörben. A diákok ábrázolnak képlettel megadott függvényt hagyományosan és digitális eszközökkel is. Ezután az „Exponenciális folyamatok vizsgálata” témakörben is ábrázolhatunk exponenciális folyamatokat koordináta-rendszerben, digitálisan szerkesztett ábrákat is használhatunk.

Később a trigonometria témakörében sem jelenik meg a koordináta-rendszer, azonban mivel a koordinátageometriában sokat foglalkozunk a háromszögekkel, azok nevezetes vonalaival, illetve felhasználjuk a rájuk vonatkozó összefüggéseket és tételeket, ez a témakör is megalapozza a koordinátageometriát.

A koordinátageometria az utolsó előtti témakörként jelenik meg (még az ismétlés előtt) a 2020-as Nemzeti Alaptantervben. Eredményként megjelölik, hogy a tanuló ismerje az alapfogalmakat a vektorokhoz kapcsolódóan, alkalmazzon egyszerű vektorműveleteket, illetve alkalmazza őket feladatok megoldásában, tudjon pontot és vektort megadni, illetve adott feltételek mellett tudjon ponthalmazokat ábrázolni a koordináta-rendszerben, tudjon szakaszokkal és vektorokkal számításokat végezni a koordináták alapján, az egyenes egyenletét ismerje és alkalmazza, ebből tudjon következtetni az egyenesek kölcsönös helyzetére, tudja kiszámítani egyenesek metszéspontjának koordinátáit, a kör egyenletét ismerje és alkalmazza a kör a középpont koordinátái és a sugár segítségével, illetve ismerje fel a kapcsolatot a matematika különböző területei között.

Tehát tanulják a vektorok abszolút értékét (hosszát), összeadását, kivonását, skalárral való szorzását, illetve a helyvektor és a nullvektor fogalmát. Azonban az új alaptanterv szerint középszinten nem kell tanulniuk a skaláris szorzatot, így lényegesen leegyszerűsödött a témakör. Felmerült bennem a kérdés, hogy a skaláris szorzat nélkül hogyan tanulják meg a vektorok 90°-os elforgatását, ami az egyeneseknél fontos, ha szeretnénk az irányvektorból normálvektort készíteni. Valószínűleg megtanulják a szabályt, de bizonyítani nem bizonyítják középszinten.

Az egyenesekkel sokat foglalkoznak, megtanulják a normál- és irányvektoros egyenes egyenletet, az iránytangenses egyenes egyenletet, illetve megtanulnak két ponton átmenő egyenes egyenletet felírni. Ezen kívül képesek lesznek szakaszfelező merőleges egyenletének képzésére, valamint háromszögek és egyéb síkidomok oldalfelező merőlegesének egyenletének meghatározására, a háromszög nevezetes vonalainak egyenleteinek felírására, valamint két egyenes metszéspontjának koordinátának kiszámolására az egyenletek ismeretében. Emellett megismerik az egyenesek meredekségének fogalmát, és a meredekség alapján megtanulják megállapítani két egyenes merőlegességét és párhuzamosságát.

A körrel már kicsit kevesebbet foglalkoznak, mint az egyenessel. Fel kell tudniuk írni a kör egyenletét a sugár és a középpont koordinátái alapján, és tudniuk kell azt koordináta-rendszerben ábrázolni, valamint egy kör egyenletét teljes négyzetté alakítással ábrázolható formába hozni. Mivel másodfokú kétismeretlenes egyenletrendszert nem kell tudniuk megoldani, ezért két kör metszéspontjainak koordinátáit sem kell tudniuk meghatározni, viszont egyenes és kör érintőpontjának és metszéspontjainak koordinátáit megtanulják kiszámolni az egyenletek ismeretében.

Erre a témakörre az alaptanterv 14 órát javasol, ami egy elég szűk keret az új ismeretek elsajátításához, gyakorláshoz és számonkéréshez, és bizonyos esetekben ahhoz, hogy digitális eszközöket is bevonjunk a tanításba. Habár a digitális eszközök elméletileg gyorsítják a haladást, gyakran az iskola felszereltsége ezt nem teszi lehetővé a számítógépek és/vagy az internet lassúsága miatt.

A 2012-es Nemzeti Alaptanterv pár dologban különbözött a 2020-astól. Míg a 2020-as NAT a tananyagot kisebb témakörökre osztja, a 2012-es a 9–10. és a 11–12. évfolyamot ugyanarra az öt nagyobb tematikai egységre osztotta a szokásos módon: Gondolkodási és megismerési módszerek; Számtan, algebra; Összefüggések, függvények, sorozatok; Geometria; Valószínűségszámítás, statisztika.

A koordináta-rendszer ebben a NAT-ban is megjelent már jóval a koordinátageometria előtt. Míg a 2020-as NAT ajánlja az számtani-algebrai témakörben az egyenletek, egyenlőtlenségek, illetve egyenletrendszerek megoldását grafikus módon, a régebbi alaptanterv lényegesen kevesebbszer említette ebben a témakörben a függvények használatát, azaz egyetlen egyszer, a másodfokú egyenlőtlenség megoldásához rendelte a másodfokú függvény használatát eszközjellegűen. Azonban a következő tematikai egységben (Összefüggések, függvények, sorozatok) újra beemelte az anyagba az egyenletet és az egyenletrendszert, ezúttal grafikusan megoldva. Ez csak azután történt meg, hogy a függvény fogalmát és az elemi függvényeket és tulajdonságaikat felidézték. Ehhez a témához ez a NAT is gyakran ajánlotta a különböző digitális eszközök használatát.

Észrevehetjük, hogy a 2020-as alaptanterv a függvények és a koordináta-rendszer terén sokkal jobban támaszkodik az általános iskolában tanultakra, mint a 2012-es. A geometriai témakörben 9–10. évfolyamon a 2012-es alaptanterv sem foglalkozott a koordináta-rendszerrel, azonban ugyanúgy ajánlotta az informatika kapcsolódását, például az Euler-egyenes és a Feuerbach-kör bemutatása által, vagy az egybevágóságok, transzformációk, hasonlóságok digitális szemléltetésével, szerkesztésekkel. A Pitagorasz-tétel alkalmazásainál megemlítette a koordinátageometria előkészítését, fizikai példával összekapcsolva bontotta fel a vektort merőleges összetevőire. A bázisvektorok itt is előkerültek, ami szintén hozzájárul a koordinátageometria előkészítéséhez, valamint a koordináta-rendszerhez is, hiszen a tanulóknak meg kell tanulniuk vektorkoordinátákat meghatározni adott bázisrendszerben. A 2020-as NAT-hoz hasonlóan a 2012-es alaptantervben is szerepelt a koordináta-rendszer a valószínűségszámítás és statisztika egységében ugyanúgy az eloszlások ábrázolása formában.

A 11–12. évfolyamon, tehát ugyanazok a tematikai egységek voltak, mint 9–10. évfolyamban, de kibővítve, elmélyítve. A koordináta-rendszer ebben a ciklusban egyáltalán nem jelent meg a számtani-algebrai témában, az exponenciális és a logaritmus függvényekkel csak az „Összefüggések, függvények, sorozatok” tematikai egységben foglalkozott. Mivel a régebbi NAT a két kétéves ciklust öt-öt tematikai egységre tagolta, a koordinátageometria a geometriai egységbe tartozik. 2012-ben még jóval nagyobb volt a koordinátageometriai tananyag, mindamellett, ami a 2020-as NAT-ban szerepel, a régi NAT szerint a tanulóknak a tanulási folyamat végére tudniuk kellett kiszámítani két vektor skaláris szorzatát, kör adott pontjába érintőt húzni, és két kör metszéspontjainak koordinátáit megadni. Már észrevehettük, hogy a 2020-as NAT-ban nem kell tudniuk a diákoknak másodfokú kétismeretlenes egyenletrendszert megoldani az algebrai témakörben, míg a 2012-es NAT szerint még kellett, és a kör érintőjéhez és a két kör metszéspontjaihoz éppen erre van szükség.

Láthattuk, hogy a 2012-es Nemzeti Alaptantervhez képest az új, 2020-as alaptantervben kevesebb követelmény van, az igazán nagy kihívást és nagyon sok gyakorlást igénylő részek ezen a szinten kimaradtak a tananyagból. Annak ellenére, hogy a tananyag csökkent, a geometriai feladatokra szánt ajánlott órák száma tízzel nőtt a 2012-es rendszerhez képest. A 2012-esben a 9–10. évfolyamos geometriai tematikai egységre összesen hatvan órát ajánlott a NAT, míg a 2020-as ugyanezekben az évfolyamokban a geometriai témakörökre (geometriai alapismeretek (8), háromszögek (16), négyszögek és sokszögek (10), a kör és részei (10), transzformációk és szerkesztések (20)) összesen hatvannégy órát ajánl. A 11–12. évfolyamokon is több órát szán a 2020-as NAT a geometriai témakörökre: összesen negyvennyolc órát (trigonometria (14), térgeometria (20), koordinátageometria (20)). A 2012-es nemzeti alaptanterv összesen negyvennégy órát szánt a geometriai tematikai egységre, ezen belül volt a koordinátageometria is. Összességében a 2012-es NAT 9–12. évfolyamig összesen 102 órát szentelt a geometriának, ezzel szemben a 2020-as tízzel többet, 112 órát. Habár a mostani 14 óra sem ideális a koordinátageometria teljes, kellően mély és érdekfeszítő feldolgozására, azt beláthatjuk, hogy a 2012-es NAT-hoz képest ez már sokkal több idő, hiszen a régi alaptanterv szerint a tananyag több volt, az időkeret pedig kevesebb.[2][3]

4. A GeoGebra program

A GeoGebra egy magyar fordításban is elérhető, platform független, nyílt forráskódú, dinamikus matematikai program, amelyet Markus Hohenwarter készített. A projektet a Salzburg Egyetemen indította el 2001-ben, ami mára már világszerte használt program lett, valamint számos országból dolgoznak rajta fordítók és fejlesztők.[4] A programot eredetileg középiskolai oktatási segédletnek szánták, de sikerrel alkalmazzák szinte minden korosztálynál. Papp-Varga Zsuzsanna, IK oktatója (tanársegéd) szerint a legfontosabb előnye, és elterjedésének oka az, hogy pár óra alatt megtanulható és elsajátítható a használata és alap funkcióinak működése mindenki számára.[5] A GeoGebra hatására fejlesztette ki Eli Luberoff az Egyesült Államokban a Desmos programot, amely lényegében ugyanazokkal a funkciókkal rendelkezik, mint a GeoGebra.

A GeoGebra kapcsolódik a geometriához, algebrához, analízishez, illetve statisztikához is. Fontos tulajdonsága, hogy összekapcsolja az objektumok algebrai leírását és geometriai megjelenését. Ezért a GeoGebra nagyon hasznos lehet a koordinátageometria használatához, azon belül az új fogalmak bevezetéséhez, illetve feladatok megoldásához, szemléltetéséhez. A program előnye a papíron szerkesztett ábrákkal szemben, hogy a GeoGebrában megszerkesztett objektumok szabadon mozgathatóak, miközben a tőlük függő objektumok is velük együtt mozognak a geometriai kapcsolatuk alapján. Emellett, az objektumokat algebrai úton is megadhatjuk, valamint számításokat is végezhetünk velük.

Az asztali verzióban a programablak tetején megtalálhatjuk a menüt, ahol alapfunkciókat tudunk beállítani (mentés, exportálás, stb). Ez alatt találhatóak a gombok,

[2] lásd: Nemzeti Alaptanterv, 2012. és Nemzeti Alaptanterv 2020.
[3] lásd: 2012. Kerettanterv: Matematika, gimnázium és 2020. Kerettanterv: Matematika, gimnázium
[4] GeoGebra 2.5 kézikönyv. fordította: Sulik Szabolcs, 2006. 5. o.
[5] Papp-Varga Zsuzsanna

amelyekkel szerkesztéseket tudunk végezni, pontot vehetünk fel, egyenest húzhatunk, vektort, sokszögeket, szöget, ellipszist, parabolát, kört készíthetünk, valamint szerkeszthetünk felezőpontot, adott egyenessel párhuzamos vagy merőleges egyenest, tükrözhetünk, forgathatunk stb. Az objektumok mellett, mozgathatjuk a rajzlapot is, közelíthetünk és távolodhatunk. A gombok alatt jobb oldalon láthatjuk a rajzlapot, bal oldalon pedig az objektumok algebrai leírását (pontok koordinátái, egyenesek, körök egyenletei). Alul található a parancssor, ahol algebrai leírással is adhatunk meg objektumokat.

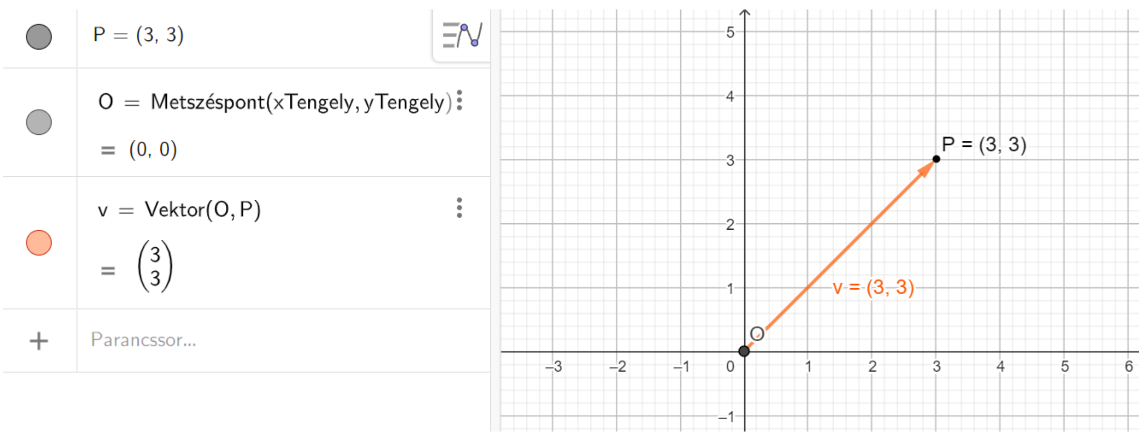
5. Új fogalmak szemléltetése a GeoGebrában

Habár láthattuk, hogy a koordináta-rendszer a 2020-as Nemzeti Alaptantervben sok témakörben nem jelenik meg, digitális eszközként a GeoGebra sok esetben hasznos lehet. A 9–10. évfolyamon a függvények témakörénél már érdemes lehet megismertetni a diákokkal a GeoGebrát, megmutatni vagy megtanítani nekik a GeoGebra egyszerűbb funkcióit. Ezt követően a geometriai alapismeretek tanításakor is hasznos lehet a GeoGebra szemléltetés céljából, végrehajthatunk vele alapszerkesztéseket (szakaszfelező merőleges, szögfelező, merőleges és párhuzamos egyenesek, szög másolása). Ehhez hasonlóan a háromszögek, illetve a négyszögek és sokszögek témánál is vázlatokat rajzolhatunk feladatokhoz, gyakorolhatjuk a szerkesztés lépéseit, megfigyelhetjük a geometriai összefüggéseket, tételeket fedezhetünk fel, valamint bizonyításokat mutathatunk be szemléletesen. Például, a Pitagorasz-tételt is szemléltethetjük GeoGebrával a derékszögű háromszög befogóira és átfogójára szerkesztett négyzetek átdarabolásával. A NAT ajánlja az egybevágósági transzformációk és egyszerű szerkesztések elvégzését digitális eszközök segítségével, amihez szintén hasznos és hatékony lehet a GeoGebra. A GeoGebrát felhasználhatjuk még a hatvány, gyök, logaritmus témakörben a függvények ábrázoláshoz, valamint trigonometria és térgeometria témakörben is. Trigonometriában használhatunk GeoGebrát szemléltetéshez, készíttethetünk a diákokkal is ábrákat a digitális eszköz segítségével. Habár az alaptanterv nem kéri, ha az idő engedi, megmutathatjuk a szinusz-, koszinusz- és tangens–függvény grafikonját koordináta-rendszerben, akár ezeknek a transzformációit is, hiszen ezek nagyon szép, látványos ábrák, illetve szépen mutatják, ezeknek a függvényeknek az értékkészleteit, értelmezési tartományait, periódusait, amit így könnyebb lehet megjegyezni. Térgeometriánál a tárgyakat, modelljeiket a kezükbe veszik, a GeoGebrával pedig szép ábrákat tudunk bevinni az órákra a testekről, amelyek látványosabbak és átláthatóbbak lehetnek, mint a táblára rajzolt testek. Emellett persze fontos, hogy a táblára is rajzoljunk, hogy a diák megtanulja, hogy hogyan kell átláthatóan ábrázolni a térben testeket.

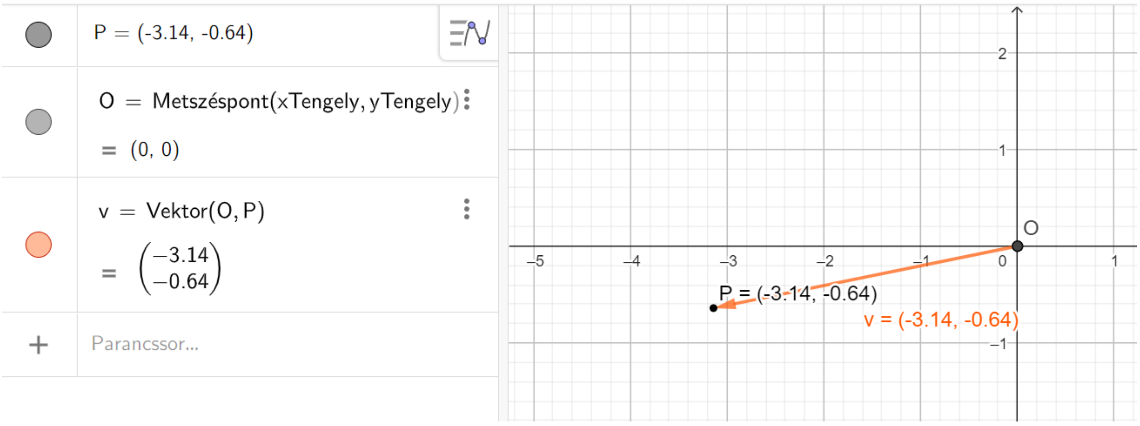
A GeoGebra mindemellett végigkísérhet minket a koordinátageometria témakörben. Rajzolhatunk vázlatokat, az egészen egyszerű feladatoktól az igazán bonyolultakig, és készíthetünk ábrákat az órán is, a diákokkal együtt. A GeoGebrában történő szerkesztések segíthetnek a diákoknak megjegyezni és megérteni az egyes szerkesztések, feladatok lépéseit, illetve vizualizálni az adott alakzatokat. Ebben a témakörben sok új fogalommal, tétellel találkoznak a tanulók, amelyek átadásához is segítséget nyújthat a digitális, akár interaktív ábra.

A 2020-as Nemzeti Alaptanterv alapján a koordinátageometria témakörben új fogalmak a következők: vektor, vektor abszolútértéke, nullvektor, ellentett vektor, helyvektor, vektorok összege, különbsége, skalárszorosa, koordinátái, valamint alakzat egyenlete, egyenes egyenlete, kör egyenlete. Ezeket mind tudjuk szemléltetni hagyományos módon a táblán is, viszont GeoGebrában látványosabb, mozgatható és mozgó ábrákat is készíthetünk, vagy találhatunk.

A diákok tanulnak szabad- és helyvektorokról, amelyekhez a GeoGebra nagy segítség lehet. Mint tudjuk, a helyvektor egy olyan vektor, amely a koordinátarendszer középpontjából indul, és egy tetszőleges P pontba mutat. A P pontba mutató $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{v}(x; y)$ vektor koordinátái megegyeznek a P pont koordinátáival, vagyis $P(x; y)$ teljesül.
A pont és a pontba mutató helyvektor kapcsolatát GeoGebrával nagyon szépen meg lehet mutatni. Felveszünk egy tetszőleges P pontot és egy abba mutató $\boldsymbol{v}$ helyvektort. Beállítjuk, hogy a pontnak és a vektornak is mutassa a program a nevét és értékét, így a pontot mozgatva láthatjuk, hogy a pont és a vektor koordinátái mindig megegyeznek, és ugyanúgy változnak. Ezen az ábrán a P pontot tudjuk tetszőlegesen mozgatni. Az alábbi képeken két különböző pozícióban láthatjuk ezt a P pontot.

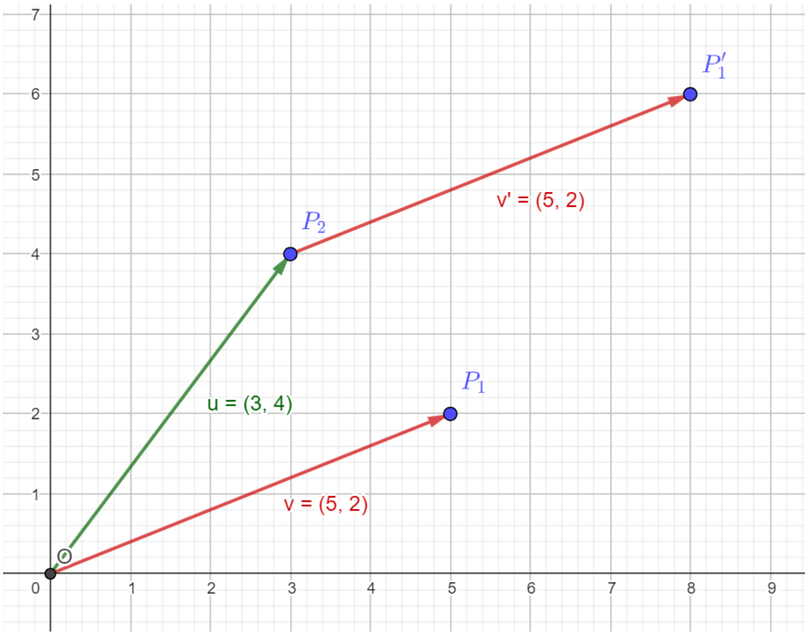


(1. ábra)



(2. ábra)

A helyvektor és szabadvektorok közti kapcsolatot is szemléltethetjük GeoGebrában. Készítünk egy $\boldsymbol{v}$ helyvektort ugyanúgy, mint korábban. Felveszünk egy tetszőleges P_2 pontot valahol a koordinátarendszerben, majd az O-ból illesztünk rá egy $\boldsymbol{u}$ vektort. Ezt követően a $\boldsymbol{v}$ vektort eltoljuk az $\boldsymbol{u}$ vektorral oly módon, hogy a P_1 pontot toljuk el, majd húzunk a P_2-ből a $P_1{}'$-be egy $\boldsymbol{v}'$ vektort. Ezt a folyamatot többször is megismételhetjük, attól függően, hogy hány szabadvektort szeretnénk prezentálni a tanulóknak, és/vagy a P_2 pont mozgatásával is szemléltethetjük, hogy végtelen sok szabadvektor van ehhez a helyvektorhoz. Emellett mozgathatjuk a P_1 pontot is, ezzel megmutatva több helyvektort. Beállíthatjuk, hogy a vektorok nevét és koordinátáit mutassa a program, így láthatják a diákok, hogy a helyvektor és a vele egyenlő szabadvektorok koordinátái megegyeznek.



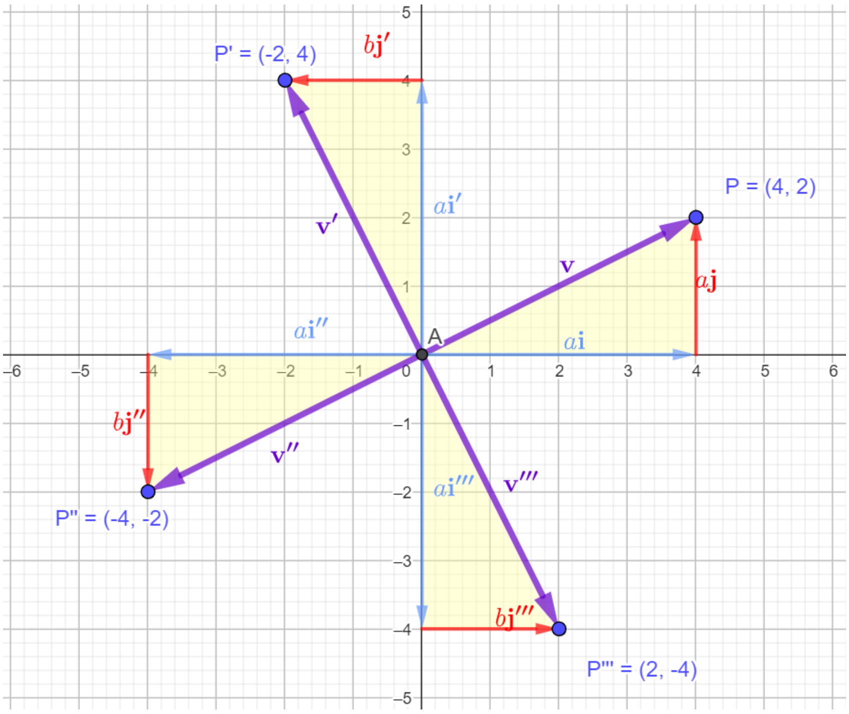
(3. ábra)

Ezt a GeoGebra ábrát meg lehet mutatni a diákoknak frontálisan, vagy interaktívtáblával akár úgy is, hogy az ujjukkal ők húzzák el a pontokat, ezzel változtatva a vektorokat. Ha ezt megmutattuk nekik a gyártás lépéseivel együtt, feladhatjuk szorgalmi feladatnak, akár plusz pontért, vagy ötösért, hogy a vektorok összegét vagy különbségét szerkesszék meg otthon, ehhez hasonlóan mozgathatóan.

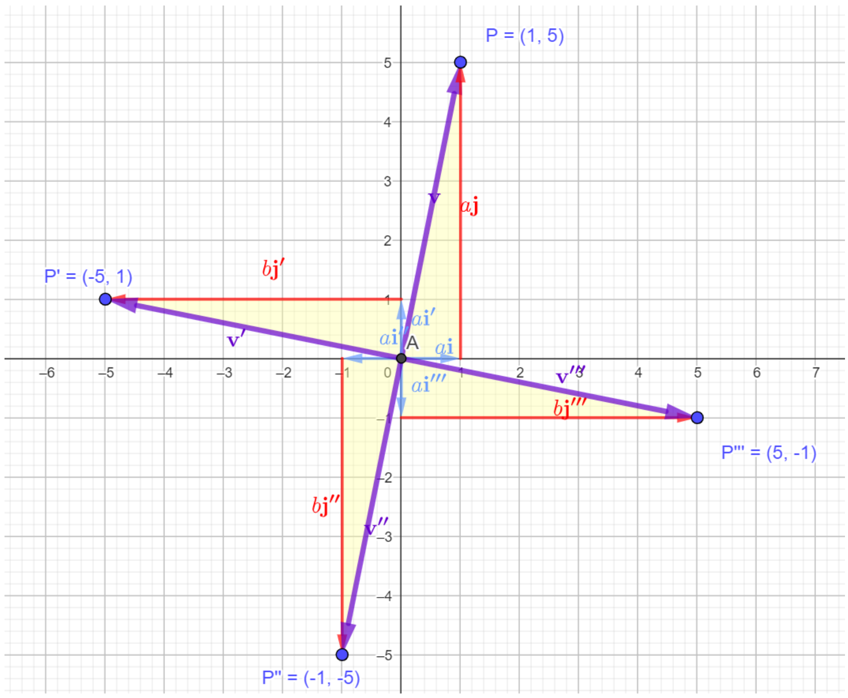
A koordinátageometriában egyenletek segítségével leírunk alakzatokat. Ez azt jelenti, hogy azok a pontok, amelyek kielégítik az adott egyenletet, alkotják az alakzatot.

A tanulók középszinten először az egyenes, majd a kör egyenletét ismerik meg. Kezdjük mi is az egyenesekkel. Azok a pontok alkotják az egyenest, amelyek kielégítik az adott egyenes egyenletét. Azok a pontok, amelyeknek koordinátái nem teljesítik az egyenletet, nincsenek rajta az egyenesen. Egy egyenest többféleképpen is meghatározhatunk: 1. egy pontjával és az irányával (irányvektor, normálvektor), 2. az egyenes két különböző pontjával, és 3. egy ponttal és irányszögével vagy iránytangensével. Tehát, ha valamelyik fenti pontból mindent tudunk az egyenesről, akkor fel tudjuk írni az egyenletét. Kezdjük a normál- és irányvektoros egyenes egyenlettel, amihez először definiáljuk, hogy mik is ezek a vektorok.

Definíció: Egy $\boldsymbol{v}$ vektort az e egyenes egyik irányvektorának mondjuk, ha $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ és $\boldsymbol{v} \parallel g$. Egy $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}$ vektort az e normálvektorának mondjuk, ha merőleges az e egyenesre. A diákok azt is megtanulják, hogy ha $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j}$ (ahol az $\boldsymbol{i}$ és a $\boldsymbol{j}$ vektor merőleges egymásra és egységhosszúságúak) az e egyenes egy irányvektora, akkor $\boldsymbol{n_1} = v_2\boldsymbol{i} - v_1\boldsymbol{j}$ és $\boldsymbol{n_2} = -v_2\boldsymbol{i} + v_1\boldsymbol{j}$ az e egyenesnek normálvektorai (hiszen $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$ teljesül). Mivel középszinten nem kell tudniuk skalárisszorzatot számolniuk, ezért ennek a bizonyítását sem kell tanulniuk. Azonban a jobb rögzülés végett készíthetünk velük „propellert” oly módon, hogy egy tetszőleges helyvektort felbontunk a merőleges összetevőire, és ezek origó körüli 90°-os forgatásával forgatjuk a vektort. Ezt érdemes hagyományos módon táblán, illetve füzetben megszerkeszteni, de GeoGebrában meg is forgathatjuk ezt a propellert, ami nagyon látványos. Az 5. ábrán az elkészült GeoGebrát láthatjuk, a 6. ábrán pedig a P pont elmozgatásával megváltoztatott $\boldsymbol{v}$ vektor forgatottjait láthatjuk. A propeller segítségével felfedeztethetjük a diákokkal a vektorok 90°-os forgatására vonatkozó szabályt. Tekintettel arra, hogy erősen csökkent a NAT szerint a geomatriai tananyag, sokkal fontosabb szerep jut a GeoGebrával való szemléltetésnek. A bizonyítások helyett megfelelő ábrákkal mutathatjuk meg az összefüggéseket.



(4. ábra)



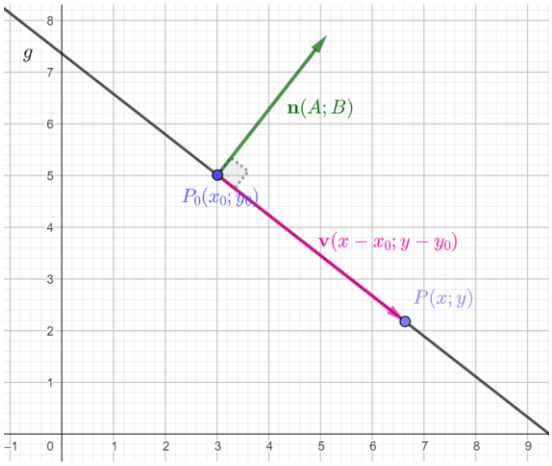
(5. ábra)

Középszinten a skaláris szorzat nem alapkövetelmény, azonban, ha a diákok fogékonyak rá, és az idő engedi, megmutathatjuk nekik a skaláris szorzatot, illetve azt követően levezethetjük nekik az egyenes normálvektoros egyenletét érdekességképpen, amihez szintén készíthetünk GeoGebra ábrát. Adott a g egyenesnek egy $P_0(x_0;\, y_0)$

fixpontja, egy $P(x; y)$ futópontja (ez a pont nem fix, mozog az egyenesen, és $\boldsymbol{n}(A;\ B)$ normálvektora (a normálvektor koordinátáit sokszor $\boldsymbol{n}(n_1;\ n_2)$-vel jelölik). Tudjuk, hogy az $\boldsymbol{n}$ normálvektor merőleges az egyenesre, vagyis a $\overrightarrow{P_0P}(x - x_0;\ y - y_0)$ vektorra is merőleges, hiszen ez a vektor illeszkedik az egyenesre. Tudjuk, hogy két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor egyenlő 0-val, ha derékszöget zárnak be. Ez azt jelenti, hogy a P futópont akkor és csak akkor van rajta a g egyenesen, ha a $\overrightarrow{P_0P}$ és az $\boldsymbol{n}$ normálvektor skaláris szorzata 0. Így felírhatjuk:

$$(x - x_0)A + (y - y_0)B = 0.$$

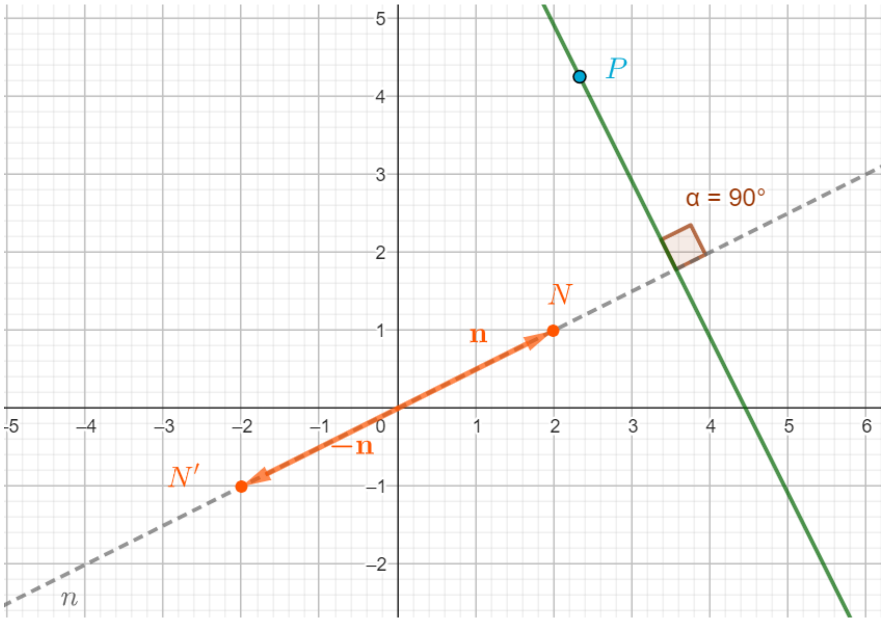
Ez kifejtve és rendezve: $Ax + By = Ax_0 + By_0$



(6. ábra)

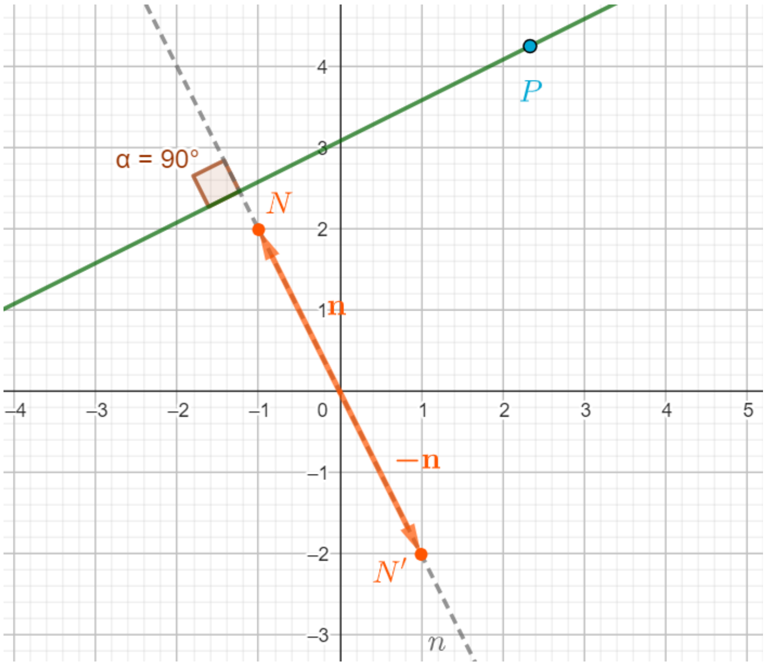
Ez a GeoGebra ábra azért lehet hasznos a hagyományos ábra mellett, mert itt a P futópontot valóban tudjuk futtatni az egyenesen, valamint a normálvektor elrejtett végpontját is futtathatjuk a szintén rejtett egyenesén, így a diákok azt is láthatják, hogy egy egyenesnek végtelen sok normálvektora van, hiszen minden skalárszorosa is normálvektor.

Emellett, és hogy hagyományos módon ábrázolunk konkrét példákat, azt is szemléltethetjük GeoGebrával, hogy hogyan határoz meg egy pont és normálvektor egy egyenest. Vegyünk fel egy tetszőleges P pontot a koordinátarendszerben, valamint egy n egyenest. Az egyenesen jelöljünk ki egy tetszőleges pontot, nevezzük N-nek. Az N pontot centrálisan tükrözzük az origóra, így megkapjuk N'-t, majd húzzunk egy vektort az origóból N-be, illetve N'-be. Ezek a vektorok lesznek az egyenesünk normálvektorai, nevezzük el őket $\boldsymbol{n}$-nek és $-\boldsymbol{n}$-nek, de az is elég, ha csak az egyiket vesszük fel. Ezután szerkesszünk egy n-re merőleges, P-n átmenő e egyenest. Azt is jelölhetjük, hogy n, vagyis a normálvektorok, valamint e derékszöget zárnak be. Az N pontot és ezzel a normálvektorokat mozgatva megmutathatjuk a diákoknak, hogy egy normálvektor egyértelműen meghatározza az egyenes irányát, és hogy a normálvektor számszorosa is normálvektor. A P pontot is mozgathatjuk, ezzel szemléltetve, hogyan változik az egyenes helye a tetszőleges pont változtatásával, az iránya azonban ugyanaz marad.

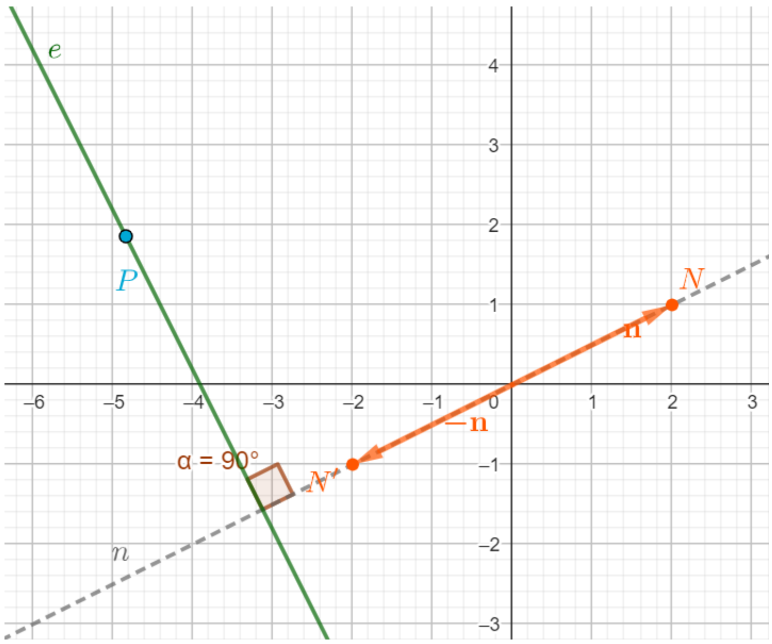


(7. ábra)

A 8. ábrán el van mozgatva a normálvektor, ezzel megváltozott az egyenes iránya. A 9. ábrán a 7. ábrához képest a P pont helyét változtattuk meg. Úgy is beállíthatjuk a programot, hogy mutassa a normálvektorok és a P pont koordinátáit, valamint az egyenes egyenletét, így még jobban nyomon tudjuk követni a változást.

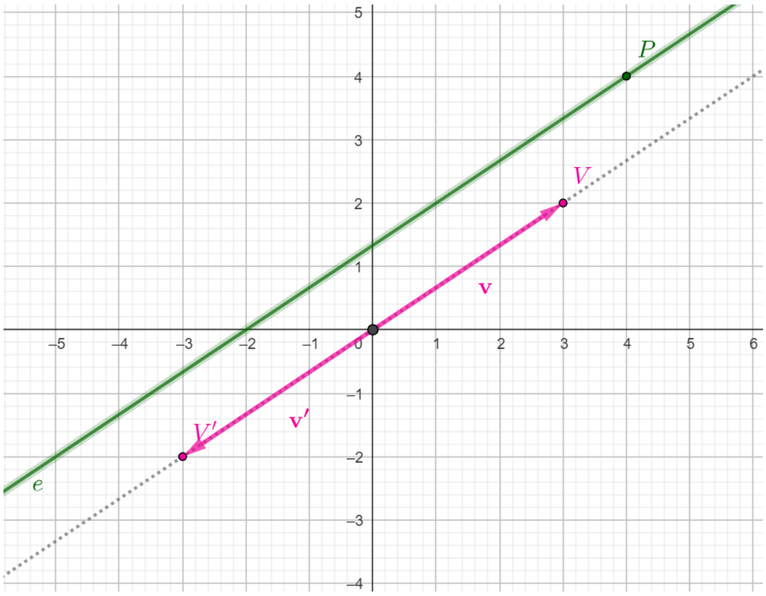


(8. ábra)



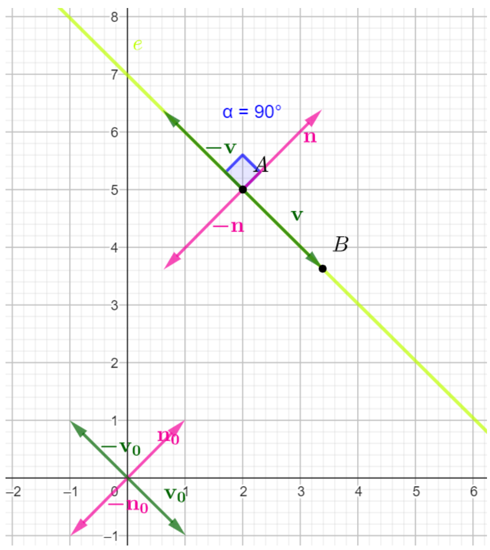
(9. ábra)

A normálvektoros egyenletből könnyen kiszámolható az irányvektoros egyenlet, hiszen az irányvektor merőleges a normálvektorra. Tehát vegyünk egy $\boldsymbol{v}(v_1;\, v_2)$ irányvektort, amiből $-90°$-os elforgatással normálvektort készítünk. Így kapjuk az $\boldsymbol{n}(v_2;\, -v_1)$ normálvektort. Ebből adódik az egyenes irányvektoros egyenlete: $v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_1y_0$. A diákoknak azonban célszerűbb az új képlet helyett azt megtanítani, hogy az irányvektorból készített normálvektorral írják fel az egyenes egyenletét a már megtanult módon. Az irányvektor és az egyenes kapcsolatának szemléltetéséhez is lehet mozgatható GeoGebra ábrát készíteni az előzőhez hasonlóan.



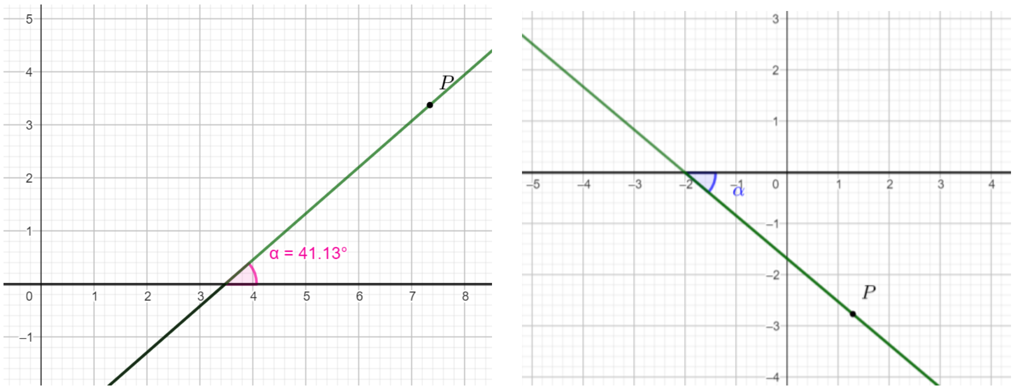
(10. ábra)

Ahogy korábban már említettem, egy egyenest meghatározhatunk két ráilleszkedő ponttal is, így fel tudjuk írni két ponton átmenő egyenes egyenletét is. Legyen $A(a_1;\ a_2)$ és $\mathrm{B}(b_1;\ b_2)$ az e egyenesre illeszkedő pontok. Ekkor az $\overrightarrow{AB}(b_1 - a_1;\ b_2 - a_2)$ vektor az egyenesnek egy irányvektora, ha a tanulók ismerik az egyenes irányvektoros egyenletét, már fel tudják írni az egyenletet, ha nem, akkor először normálvektort készítünk velük az irányvektorból, megkapjuk az $\boldsymbol{n}(b_2 - a_2;\ -(b_1 - a_1))$ vektort, amellyel már fel tudjuk írni az egyenes egyenletét: $(b_2 - a_2)(x - x_0) - (b_1 - a_1)(y - y_0) = 0$. Ezen a ponton érdemes egy olyan ábrát készíteni, amin minden eddigi meghatározó faktor látszik.



(11. ábra)

Egyenest meg lehet még határozni egy pontjával és az x tengellyel vett bezárt szögével. Ezt a szöget az egyenes irányszögének nevezzük. Hétköznapi nyelven leírva, az egyenes irányszöge, az x tengely pozitív irányával bezárt szöget jelenti. Az egyenes irányszögéről is készíthetünk mozgatható Geogebra ábrát.

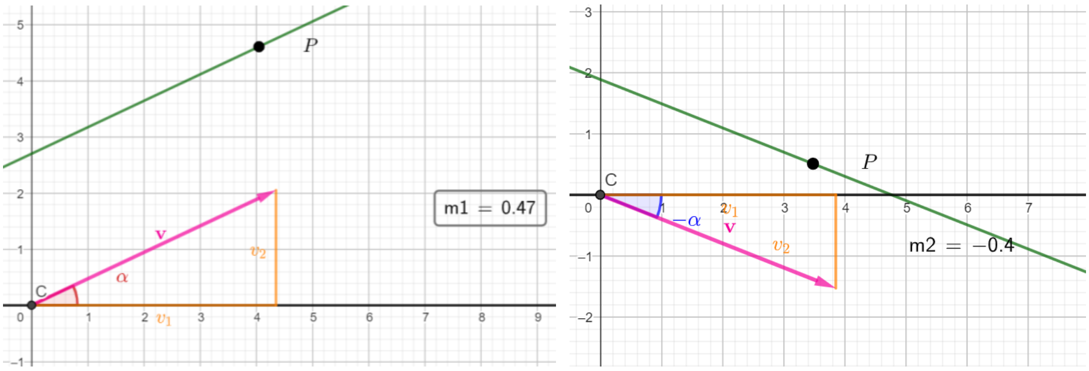


(12. ábra)

A 12. ábrán két képet láthatunk az irányszögekről a GeoGebrában. A P pont mozgatásával változtatható az egyenes, és így az irányszög. A haladó beállításoknál meg lehet adni az alakzat megjelenítésének feltételét, így a rózsaszín szög akkor látható, ha $0° \leq \alpha < 90°$, a kék pedig, ha $-90° < \alpha < 0°$.

Ezután bevezetjük az iránytangenst, illetve meredekséget. Az $m = tg\alpha$ számot mondjuk az e egyenes meredekségének (iránytangensének), feltéve, hogy e és $\boldsymbol{j}$ nem párhuzamosak.

Most már felírhatjuk az egyenes iránytangenses egyenletét is. Az $\boldsymbol{n} = m\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ ($\boldsymbol{n}(m;-1)$) vektor egy normálvektor, tehát felírható, hogy $m(x-x_0)-(y-y_0) = 0$, amiből adódik: $m(x-x_0)+y_0=0$. Az egyenletnek ezt az alakját gyakran $y = mx + b$ formában láthatjuk, ahol $b = y_0 - x_0$. Az egyenletnek eme formája nem lesz új a tanulóknak, hiszen ahhoz, hogy könnyen ábrázolni tudják az egyenest, épp ilyen formára kellett hozni az egyenletet, így alkalmazni tudták a lineáris függvény ábrázolásáról tanultakat. Jegyezzük meg, hogy ha $\boldsymbol{v}(v_1, v_2)$ irányvektora a g egyenesnek, akkor $m = \frac{v_2}{v_1}$ az egyenes meredeksége, illetve, ha $\boldsymbol{n}(n_1; n_2)$, akkor $m = -\frac{n_1}{n_2}$. Ezt is szemléltethetjük Geogebrában a következő módon:



(13. ábra)

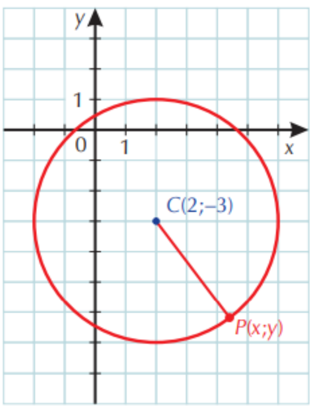
A P pontot fel és le mozgatva változik az egyenes meredeksége. Az α szög ugyanolyan feltételek mellett jelenik meg, mint az irányszög ábrájánál, m1-t a pozitív, m2-t a negatív irányszög megjelenésének feltételéhez kötöttem.

Egyenesek metszéspontjának kiszámításánál ellenőrzésképpen hasznos lehet a GeoGebra a diákoknak a házi feladathoz, illetve órára, vagy az órán a tanulókkal szemléltető ábrát lehet vele szerkeszteni egy-egy feladathoz.

Az egyenes egyenletét az adott középpontú és sugarú kör egyenlete követi.

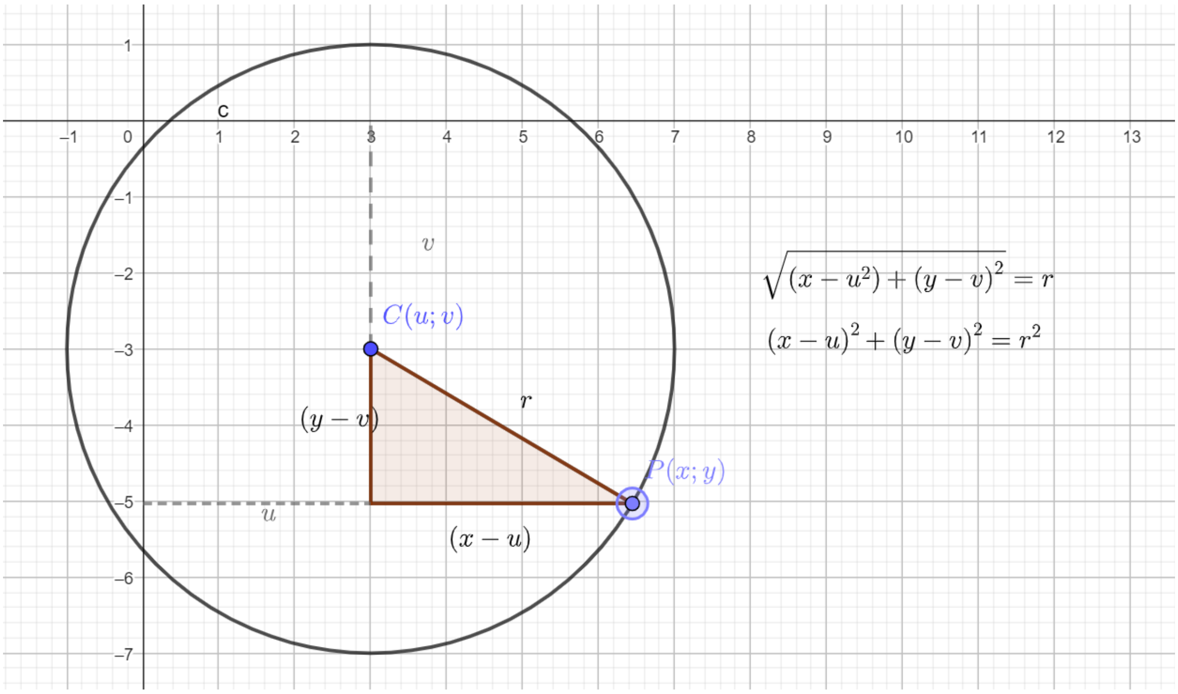
Definíció: A $C(u;v)$ középpontú, r sugarú kör egyenlete $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$.

Az Oktatási Hivatal által kiadott, a 2020-as NAT-hoz illeszkedő matematika tankönyv a következő példával vezeti be a kör egyenletét: „Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja a $C(2;-3)$ pont, és sugara 4 egység!” A tankönyv megoldást is nyújt a feladathoz, amit a következő ábrával kísér:



(14. ábra)[6]

Ezt az ábrát kiegészíthetjük egy mozgatható ábrával, amin látszik a derékszögű háromszög, amin alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt, illetve ami segít megérteni a kör általános egyenletét.



(15. ábra)

Ezen az ábrán mozgathatjuk a kör középpontját, illetve a *P* pontot a körvonalon.

Az egyeneshez hasonlóan, a körrel kapcsolatos feladatokhoz is készíthetünk GeoGebra ábrákat szemléltetésként, illetve adhatunk fel szerkesztési szorgalmi feladatokat a tanulóknak.

A fent említett példákon kívül még számos esetben lehet hasznos a GeoGebra, a vektorok tanulásánál a vektorműveleteket, konkrét feladatokat is ábrázolhatunk a programmal mind vektorokkal, egyenesekkel vagy körökkel. Magasabb szintű matematika oktatásnál még hasznosabb lehet a GeoGebra, két kör kölcsönös helyzetének bemutatásával, egy kör külső pontból húzott érintőjének megszerkesztéséhez, illetve más másodfokú görbe bemutatásához (parabola, ellipszis). Természetesen a digitális ábrák mellett legalább ugyanolyan fontos, hogy hagyományos módon ábrát készítsünk a

[6] Juhász István, Orosz Gyula, Paróczay József, Szászné dr. Simon Judit: Matematika 11. Az érthető matematika, Oktatási Hivatal, 2020., 171.o.

tanulókkal, de egy-egy GeoGebrás mozgó ábra nagyon fel tudja kelteni a tanulók érdeklődését, főleg, ha ők készíthetik el számítógéppel.

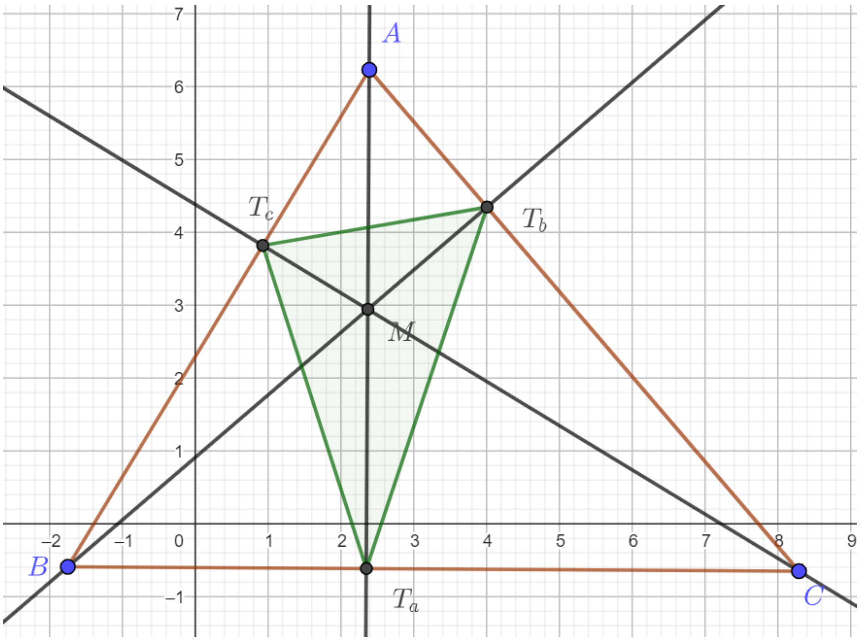
6. GeoGebra a tanterven túl

Mivel középszinten az alapóraszám nem túl magas, nehéz lehet a GeoGebrát úgy beilleszteni a tanmenetbe, hogy a diákok is kipróbálják, ők is dolgozzanak vele. Azonban matematika szakkörön, matematika tagozatos osztályban, vagy fakultáción, ahol nagyobb a heti óraszám, sok akár emeltebb szintű matematikai érdekességet bevihetünk az órára. Ezzel növeljük a diákok motivációját a matematika, illetve az új ismeretek, fogalmak felé, illetve a GeoGebra felhasználói szintű ismerete a későbbi tanulmányaikban is hasznos lehet.

Talpponti háromszög és a beírt körének középpontja

Matematika szakkör keretein belül szintén érdemes lehet foglalkozni a talpponti háromszöggel, illetve a beírt körének középpontjával. A talpponti háromszög csúcsait egy hegyesszögű háromszög magasságvonalainak talppontjai határozzák meg. A talpponti háromszög beírt körének középpontja megegyezik az eredeti háromszög magasságpontjával. Ezt a tételt a GeoGebra segítségével meg lehet sejtetni a diákokkal, majd be is tudjuk bizonyítani.

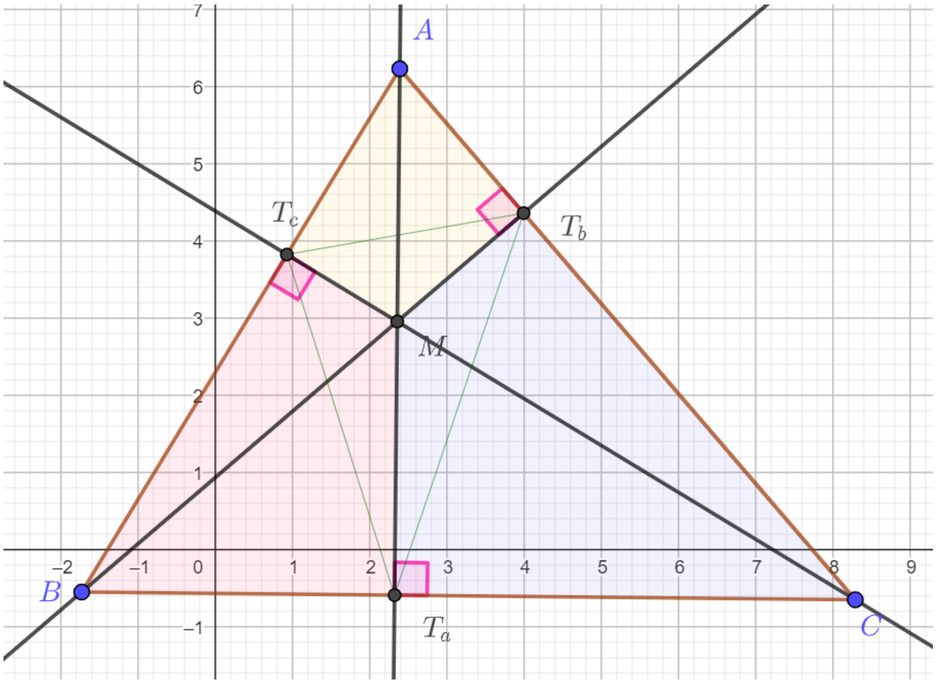
Először vegyük át a tanulókkal, hogy mi az a talpponti háromszög, és hogyan készíthetjük el GeoGebrában, majd vegyünk is fel egy háromszöget, a háromszög magasságvonalait, illetve a magasságvonalakhoz tartozó talppontokat, illetve a magasságpontot. Ezután kijelölhetjük a talpponti háromszöget.



(16. ábra)

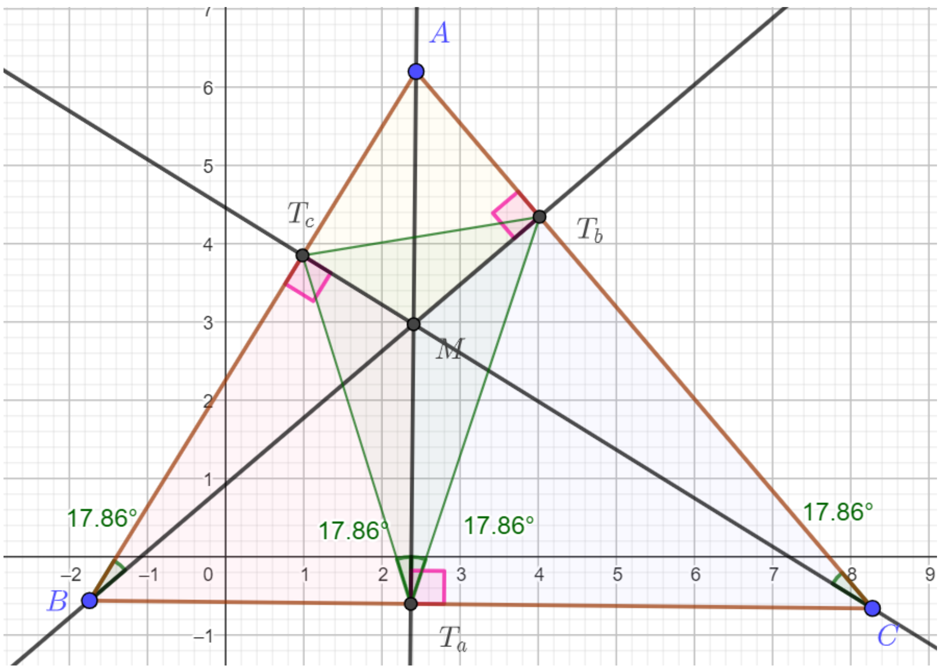
Azt szeretnénk bebizonyítani, hogy az M pont a $T_aT_bT_c$ háromszög beírt körének középpontja, vagyis a $T_aT_bT_c$ háromszög szögfelezőinek a metszéspontja. Ehhez be kell látnunk, hogy az eredeti háromszög magasságvonalai a talpponti háromszög szögfelezői.

Ahhoz, hogy ezt megtegyük, szükségünk lesz a húrnégyszög fogalmára, ezért meg kell beszélni a diákokkal, hogy mit tudunk róluk. A húrnégyszög egy olyan négyszög, amely köré kör írható, vagyis a négyszög oldalai egy kör húrjai. A húrnégyszögeknek két fontos tulajdonsága van, amelyeket fel fogunk használni: 1. a húrnégyszög egyik oldalával szemközti csúcsok egyenlő szögben látszanak, 2. a húrnégyszög szemben lévő szögeinek összege 180°. Az ABC háromszögben több húrnégyszög is fellelhető: T_aCT_bM, T_cBT_aM és T_bAT_cM húrnégyszögek, hiszen a talppontoknál a magasságvonalak és a háromszög oldalai derékszöget zárnak be, így a szemközti szögeik összege 180°.



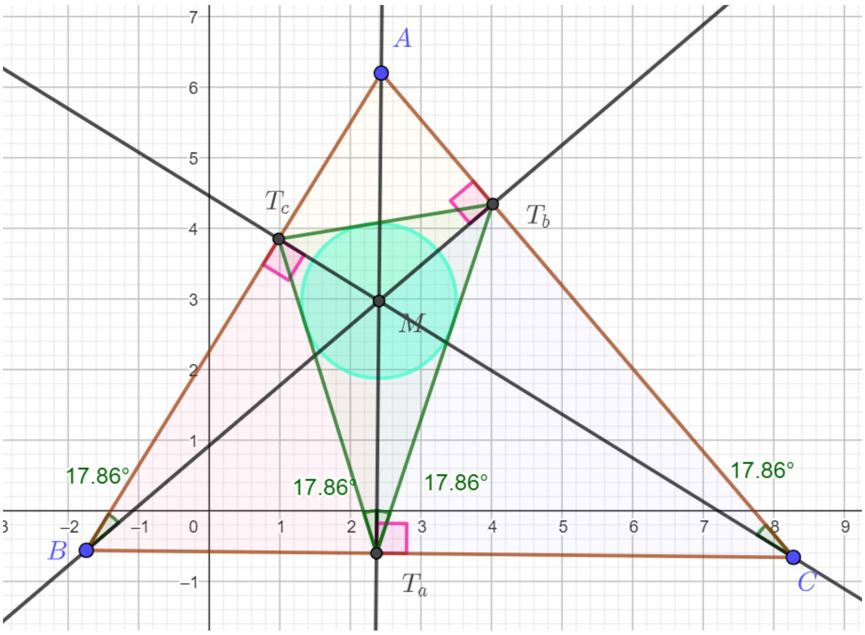
(17. ábra)

Mivel a T_aCT_bM négyszög húrnégyszög, az MT_aT_b szög egyenlő az MCT_b szöggel (1. tulajdonság). Hasonlóan, mivel T_cBT_aM egy húrnégyszög, a T_cBM szög megegyezik a T_cT_aM szöggel, ezt a GeoGebrában ellenőrizhetjük is, hogy valóban így van. De az MBA szög is egyenlő az ACT_c szöggel, vagyis az $MT_aT_c = T_bT_aT_c$ szöggel.



(18. ábra)

Ez azt jelenti, hogy az eredeti háromszög A csúcsán átmenő magasságvonal éppen a talpponti háromszög T_a csúcsánál lévő szög szögfelezője. Ugyanezt elvégezhetjük a talpponti háromszög másik kettő húrnégyszögére. Tehát az eredeti ABC háromszög magasságvonalai valóban a talpponti háromszög szögfelezői, vagyis az eredeti háromszög magasságpontja valóban a talpponti háromszög beírt körének a középpontja.



(19. ábra)

<u>A Feuerbach-kör és az Euler-egyenes:</u>

A 2012-es NAT említi a Feuerbach-kör és az Euler-egyenes bemutatását digitális eszközzel, esetünkben a GeoGebra segítségével. Valóban érdekes lehet ez a diákok számára, szép ábra készíthető, valamint számos koordinátageometriai feladatot adhatunk a témához kapcsolódóan. Érdemes lehet úgy elvégezni a szerkesztést, hogy a tanórán a diákokkal együtt dolgozunk, lépésről lépésre haladva, hogy ők vegyék észre a bizonyos pontok közti függéseket. Ez úgy lehet a leghatékonyabb, ha az iskola biztosítani tud a diákoknak egy-egy számítógépet, amin tudnak dolgozni. A lépésekkel lassan tagoltan kell haladni, segítve, hogy melyik gombot hol találják, különösen akkor, ha ezelőtt a gyerekek nem találkoztak a GeoGebrával felhasználóként. Ebben az esetben hasznos lehet először egyszerűbb szerkesztési feladatokat megoldani velük a programban, például szakaszfelező merőlegest, egy háromszög magasságvonalait, stb.

A Feuerbach-kör és az Euler-egyenes szerkesztésének lépései a következők:

1. lépés: A koordináta-rendszerben vegyünk fel egy tetszőleges $ABC\Delta$ háromszöget, ügyelve arra, hogy ne legyen sem szabályos, sem derékszögű, sem egyenlőszárú háromszög, illetve kellően nagy legyen ahhoz, hogy tovább szerkesszünk benne.
2. lépés: Szerkesszük meg az oldalak felezőpontjait, nevezzük el őket F_a, F_b, F_c-nek.
3. lépés: Szerkesszük meg a háromszög magasságvonalait, valamint vegyük fel a magasságvonalak talppontjait(T_a, T_b, T_c), illetve a magasságpontot (M).
4. lépés: Szerkesszük meg a magasságpontot és a háromszögcsúcsait összekötő szakaszok felezőpontjait: F_{MA}, F_{MB}, F_{MC}.

Ezután célszerű a magasságvonalakat láthatatlanná tenni, és megkérdezni a diákokat, hogy mit vesznek észre. Jól megsejthető, hogy ezek a pontok (a magasságponton kívül) egy körre esnek. Ezt GeoGebrában grafikusan ellenőrizzük is, kijelölünk 3 pontot, kört szerkesztünk rájuk, és észrevesszük, hogy a többi 6 pont is illeszkedik rá. Kimondjuk, hogy ez a kör a háromszög Feuerbach-köre, amely a fent említett kilenc ponton megy át. Feltehetjük a kérdést, hogy vajon hol van a Feuerbach-kör középpontja. Kis találgatás után segíthetünk nekik a szerkesztés folytatásával.

5. lépés: Megszerkesszük a háromszög köré írt körének a középpontját, illetve magát a kört: felveszünk legalább két oldalfelező merőlegest, és kijelöljük a metszéspontjukat ($O_{köré}$), majd a középpont és egy csúcs kijelölésével megszerkesztjük a köré írt kört.

Most lehet, hogy valaki megsejti, hogy a magasságpont és a köré írt kör középpontját összekötő szakasz felezőpontja lesz a Feuerbach-kör középpontja.

6. lépés: Vegyük fel a magasságpont és a köré írt kör középpontját összekötő szakasz felezőpontját, és nevezzük el O_{Feuer} -nek. Ellenőrzésképpen készíthetünk egy kört, amelynek kijelöljük az O_{Feuer} középpontját, és a 9 pontból az egyiket kerületi pontjának, és láthatjuk, hogy ez a kör megegyezik az eredeti Feuerbach-körünkkel.
7. lépés: Vegyük fel a köré írható kör és a Feuerbach-kör sugarát a középpontok és egy-egy kerületi pont kijelölésével, és kérdezzük meg a diákokat, mit vesznek észre. A köré írt kör sugara éppen kétszer akkora, mint a Feuerbach-kör sugara. Beállíthatjuk, hogy a sugaraknak az értékei is látszódjanak, így, ha a háromszög csúcsait mozgatva változnak az értékek, látjuk, hogy valóban az egyik sugár kétszerese a másiknak.

Természetesen a fenti állításokat be kell bizonyítani. Ezt nem várjuk el mindenkitől, de fakultáción vagy normál osztályban a jobbaknak feladhatjuk szorgalmi feladatnak.

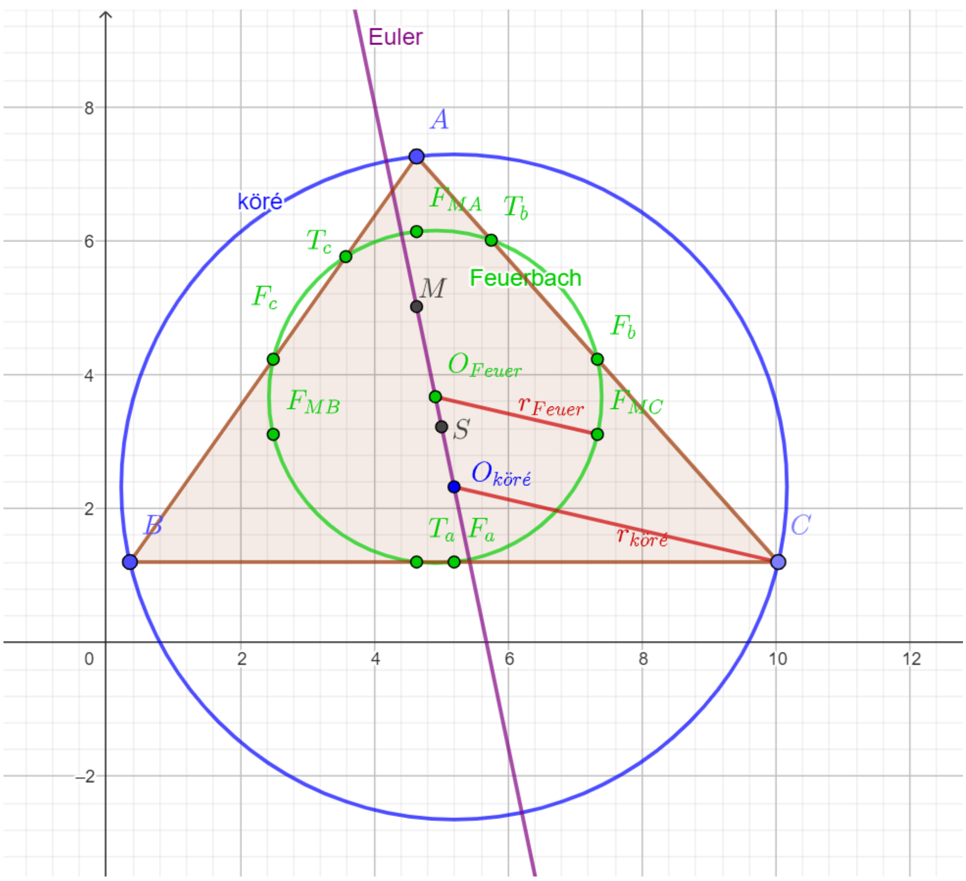
Ezt követően rátérhetünk az Euler-egyenesre.

8. lépés: Szerkesszük meg a háromszög súlypontját, (legalább) két súlyvonal segítségével.

Kérdezzük meg a tanulókat, hogy szerintük van-e valami kapcsolat a magasságpont, a Feuerbach-kör középpontja, a köré írt kör középpontja és a súlypont között. Könnyen észrevehető, hogy ezek a pontok egy egyenesre esnek.

9. lépés: A valamennyi pont közül kettő kijelölésével szerkesszük meg az Euler-egyenest.

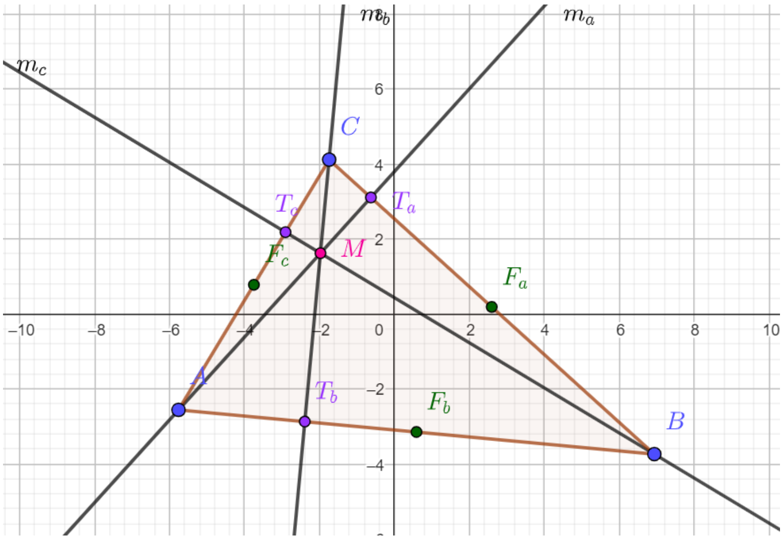
A háromszög csúcsait mozgatva láthatjuk, hogy ezek a pontok valóban mindig egy egyenesre esnek. Házi feladatként vagy szorgalmi feladatként feladhatjuk a diákoknak, hogy egy háromszög három csúcspontjából kiindulva a koordinátageometria algebrai eszközeivel írják fel a Feuerbach-kör és az Euler-egyenes egyenletét, valamint az egyenletek felírását követően ábrázolják a füzetükbe és/vagy GeoGebrában is.



(20. ábra)

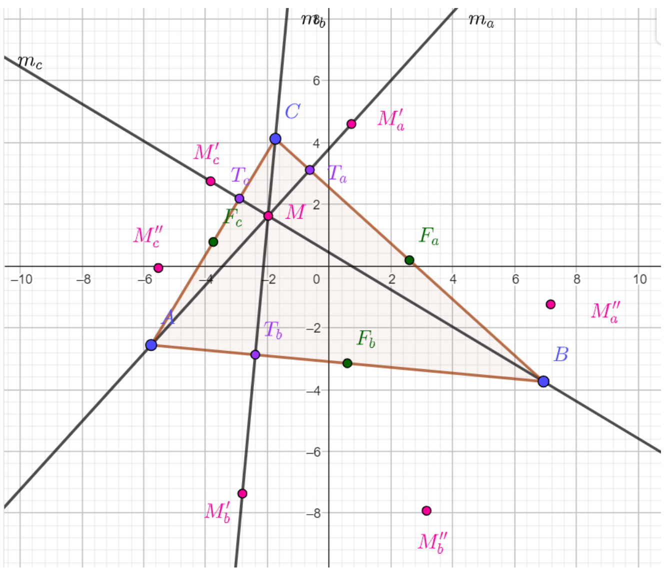
Bizonyítsuk be, hogy a magasságok talppontjai, az oldalak felező pontjai és a magasságpont és a csúcsok középpontjai valóban rajta vannak a Feuerbach-körön, illetve, hogy a köré írt kör sugara kétszer akkora, mint a Feuerbach-köré.

Szerkesszünk GeoGebrában egy általános háromszöget, majd ennek a magasságvonalait, magasságpontját, a magasságok talppontjait, illetve az oldalak felezőpontjait.



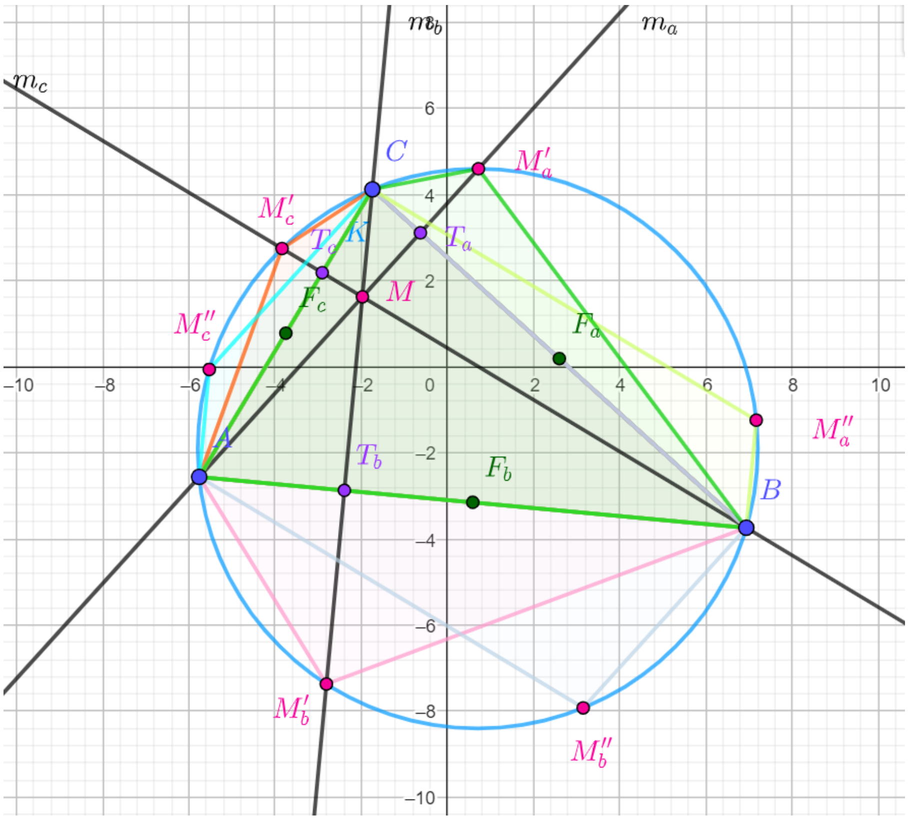
(21. ábra)

Ezt követően tükrözzük a magasságpontot a magasságok talppontjaira, így megkapva az M_a’, M_b’ és M_c’ képpontokat. Majd a magasságpontot tükrözzük az oldalak felezőpontjaira is, ezeket a képpontokat nevezzük el M_a", M_b" és M_c" -nek.



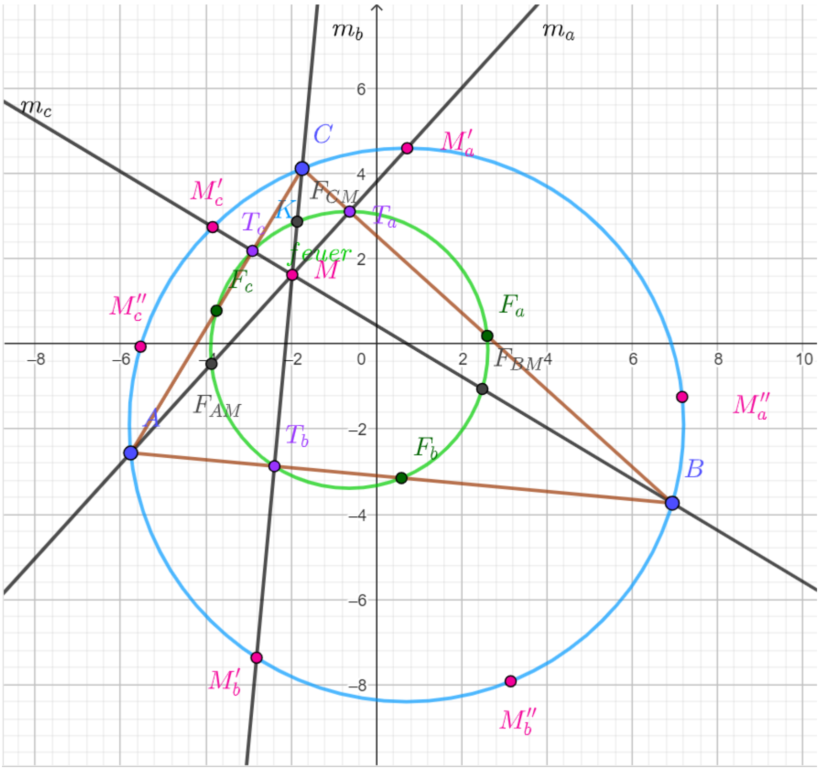
(22. ábra)

Ezek a pontok rajta vannak a háromszög köré írt körén, hiszen $ABCM_c{}'$, $ABCM_c{}''$, $AM_b{}'Bc$, $AM_b{}''BC$, $ABM_a{}'C$ és $ABM_a{}''C$ is húrnégyszög.



(23. ábra)

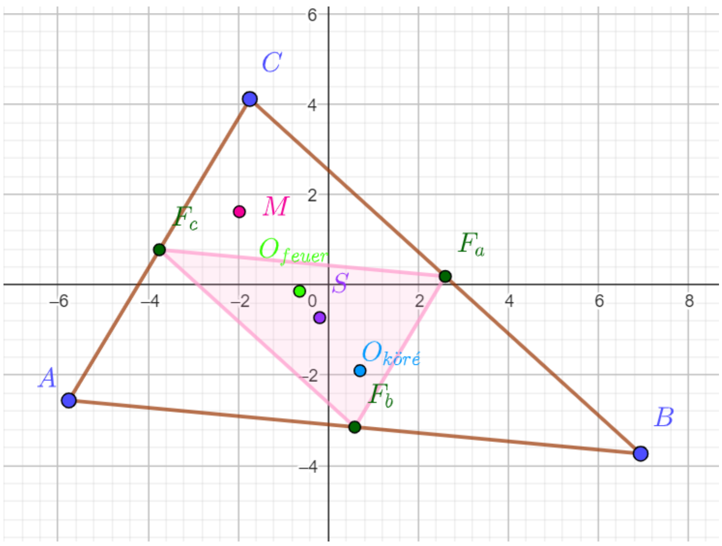
Ezután kicsinyítsük a kört a magasságpontból a felére, erre a körre illeszkedni fognak a magasságok talppontjai, és az oldalak felezőpontja. Mivel a háromszögek csúcsai rajta vannak a köré írt körön, ezért a magasságpont és a csúcsok középpontjai is rajta lesznek a felére kicsinyített körön. Mivel a felére kicsinyítettük a köré írt kört, a sugara is fele akkora lett, mint az eredeti köré volt, a centruma pedig tényleg a magasságpont és a köré írt kör centrumának középpontja. Ez a kör éppen a Feuerbach-kör.



(24. ábra)

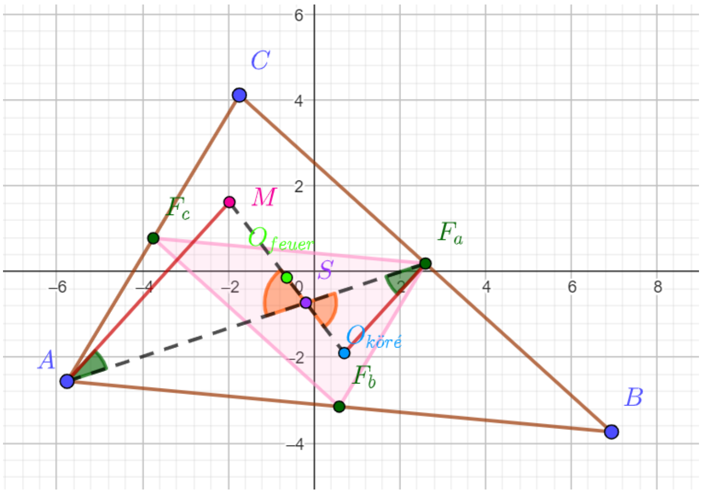
Most bizonyítsuk be, hogy a köré írt kör középpontja, a magasságpont és a súlypont (valamint a Feuerbach-kör középpontja) valóban egy egyenesre esnek.

Szerkesszük meg az ABC háromszög középvonalai által meghatározott $F_aF_bF_c$ háromszöget.



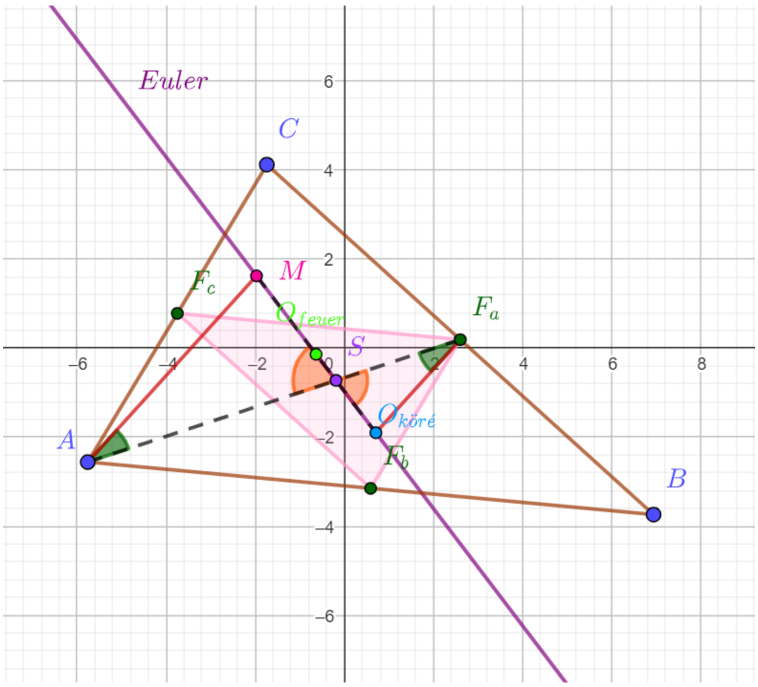
(25. ábra)

A háromszögek ½ arányban hasonlóak egymáshoz. Ez azt jelenti, hogy az $O_{köré}F_a$ szakasznak az AM szakasz felel meg, vagyis $O_{köré}F_a = \frac{1}{2}AM$. Ehhez hasonlóan $SF_c = \frac{1}{2}AS$, valamint$O_{köré}F_aS\sphericalangle = SAM\sphericalangle$. Tehát az $O_{köré}F_aS$ és az MAS háromszögek is hasonlóak, azaz $O_{köré}SF_a\sphericalangle = MSA\sphericalangle$ is teljesül.



(26. ábra)

Ez éppen azt jelenti, hogy az $O_{köré}$, S és M pontok egy egyenesre esnek. Mivel a $O_{Feuer}F = F_{O_{köré}M}$, a Feuerbach kör középpontja is rajta van az egyenesen.[7]



(27. ábra)

[7] Gerőcs László, Vancsó Ödön: Matematika, Akadémia Kiadó, 2010.

Az Euler-egyenes és a Feuerbach-kör fogalmát úgy is bevezethetjük a diákoknak, hogy megadjuk egy háromszög csúcsainak koordinátáit: $A(0;0)$, $B(10;\ 0)$ és $C(2;\ 8)$. Érdemes figyelni rá, hogy olyan koordinátákat adjunk meg, amelyekkel szép eredményeket kapunk. A feladat az, hogy a) a koordinátageometria algebrai módszereivel bizonyítsák be, hogy a háromszög súlypontja, magasságpontja, és a köré írt körének középpontja egy egyenesre esik. b) Ezt követően azt is lássák be, hogy az $F_{O_{köré}M}$ középpontú $\frac{R}{2}$ (ahol R a köré írt kör sugara) sugarú körre illeszkednek a háromszög magasságainak talppontjai, az oldalak felezőpontjai, valamint az F_{MA}, F_{MB}, F_{MC} pontok. Bizonyítás közben használják a GeoGebrát is.

A megoldás:

a)

1. Első lépésként határozzuk meg a háromszög súlypontját: $S\left(\frac{0+10+2}{3};\frac{0+0+8}{3}\right) = S\left(4;\frac{8}{3}\right)$.
2. Ezt követően számítsuk ki a magasságpont koordinátáit. Ehhez fel kell írnunk két magasságvonalnak az egyenletét, majd az egyenletrendszer megoldásával megkapjuk a magasságpont koordinátáit:

$$\overrightarrow{BC}(2-10;8-0)=(-8;8)\rightarrow\ \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{m_a}}(-1;1)$$

$$P_0=A(0;0)$$

$$m_a:-x+y=0$$

$$\overrightarrow{AC}(2-0;8-0)=(2;8)\rightarrow\ \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{m_b}}(1;4)$$

$$P_0=B(10;0)$$

$$m_b: x+4y=10$$

Az egyenletrendszer: $m_a \cap m_b = M$

$$m_a:-x+y=0$$

$$m_b: x+4y=10$$

$$m_a+m_b: 5y=10$$

$$y=2$$

$$x=2$$

$$\rightarrow\ M(2;2)$$

3. Ahhoz, hogy megkapjuk a köré írt kör középpontját, szükségünk lesz két felezőmerőleges egyenletére, majd az egyenletrendszerből megkapjuk a keresett pont koordinátáit:

$$\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{f_a}} = \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{m_a}}(-1; 1)$$

$$P_0 = F_{BC}\left(\frac{10+2}{2}; \frac{0+8}{2}\right) = (6; 4)$$

$$f_a = -x + y = -2$$

$$\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{f_b}} = \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{m_b}}(1; 4)$$

$$P_0 = F_{AC}\left(\frac{0+2}{2}; \frac{0+8}{2}\right) = (1; 4)$$

$$f_b = x + 4y = 17$$

Az egyenletrendszer: $f_a \cap f_b = O_{köré}$

$$f_a = -x + y = -2$$

$$f_b = x + 4y = 17$$

$$f_a + f_b : 5y = 15$$

$$y = 3$$

$$x = 5$$

$$\rightarrow O_{köré}(5; 3)$$

4. Válasszunk ki a háromból két pontot, és írjuk fel a rajtuk átmenő egyenes egyenletét. Érdemes olyan pontokat választani, amelyeknek a koordinátái egész számok, válasszuk most az M és $O_{köré}$ pontokat.

$$\boldsymbol{v_e} = \overrightarrow{MO_{köré}}(5-2; 3-2) = (3; 1) \rightarrow \boldsymbol{n_e}(-1; 3)$$

P_0-nak mindegy, hogy a két pontból melyiket választjuk.

$$e:\ -x + 3y = 4$$

Ellenőrizzük, hogy a súlypont illeszkedik-e erre az egyenesre. Ezt úgy tehetjük meg, hogy a pont megfelelő koordinátáit behelyettesítjük az egyenes egyenletébe:

$$-4 + 3 \cdot \frac{8}{3} \stackrel{?}{=} 4$$

A súlypont koordinátái kielégítik az egyenletet, tehát a pont illeszkedik az egyenesre.

b) Ahhoz, hogy felírjuk a kör egyenletét, szükségünk lesz a kör középpontjára és sugarára.

$$F_{O_{köré}M}\left(\frac{5+2}{2}; \frac{3+2}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$$

Ki kell számolnunk a köré írt kör sugarát, amit úgy tehetünk meg, hogy kiszámoljuk az $O_{köré}$ és az egyik csúcs távolságát.

$$\overrightarrow{AO_{köré}}(5-0;3-0)=(5;3)$$

$$\left|\overrightarrow{AO_{köré}}\right|=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}=R$$

$$r_{feuer}=\frac{R}{2}=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

Most már felírhatjuk a kör egyenletét:

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{34}{4}$$

1. Magasságok talppontjai:

Két magasságvonal egyenletét már ismerjük: $m_a:-x+y=0$ és $m_b:x+4y=10$

Határozzuk meg a harmadik magasságvonal egyenletét is:

$$\overrightarrow{AB}(10-0;0-0)=(10;0)\rightarrow\ n_{m_c}(1;0)$$

$$P_0=C(2;8)$$

$$m_c:x=2$$

Írjuk fel az a oldalegyenesének egyenletét:

$$\boldsymbol{v_a}=\boldsymbol{n_{m_a}}(-1;1)\rightarrow\ \boldsymbol{n_a}(1;1)$$

$$P_0=B(10;0)$$

$$a:x+y=10$$

$$m_a\cap a=T_a$$

$$m_a:-x+y=0$$

$$a:x+y=10$$

$$m_a+a:2y=10$$

$$y=5$$

$$x=5$$

$$\rightarrow\ T_a(5;5)$$

Helyettesítsük be a kör egyenletébe a T_a pont koordinátáit:

$$\left(5-\frac{7}{2}\right)^2+\left(5-\frac{5}{2}\right)^2 \stackrel{?}{=} \frac{34}{4}$$

Az egyenlőség teljesül így a T_a pont rajta van a körön.

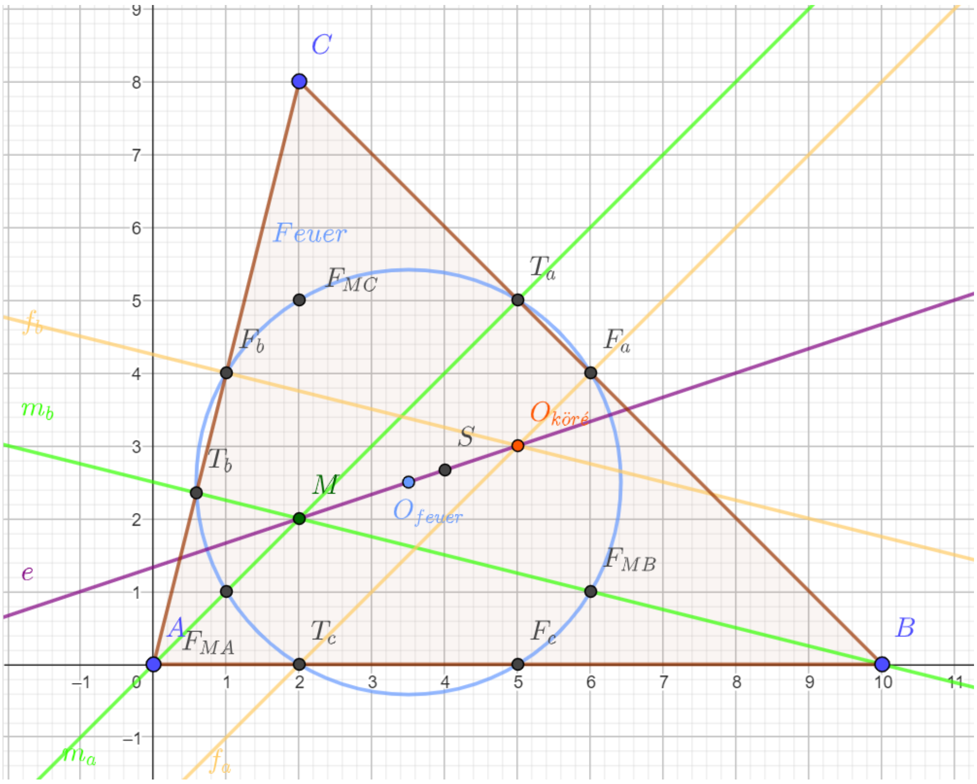
Ehhez hasonlóan kiszámítjuk a T_b és T_c talppontokat, és ezek koordinátái is ki fogják elégíteni a kör egyenletét.

2. Az oldalak felezőpontjaiból kettőt már ismerünk: $F_{BC}(6;4)$ és $F_{AC}(1;4)$.

Számítsuk ki a harmadik oldal felezőpontjának koordinátáit is: $F_{AB}(5;0)$. A felezőpontok koordinátáit behelyettesítve a kör egyenletébe láthatjuk, hogy ezek a pontok is illeszkednek a körre.

3. Határozzuk meg F_{MA}, F_{MB}, F_{MC} pontokat: $F_{MA}(1;1)$, $F_{MB}(6;1)$, $F_{MC}(4;5)$.

   Ezeknek a pontoknak a koordinátái szintén kielégítik a kör egyenletét, tehát illeszkednek a körre.



(28. ábra)

Pont és egyenes távolsága és az egyenes normálegyenlete

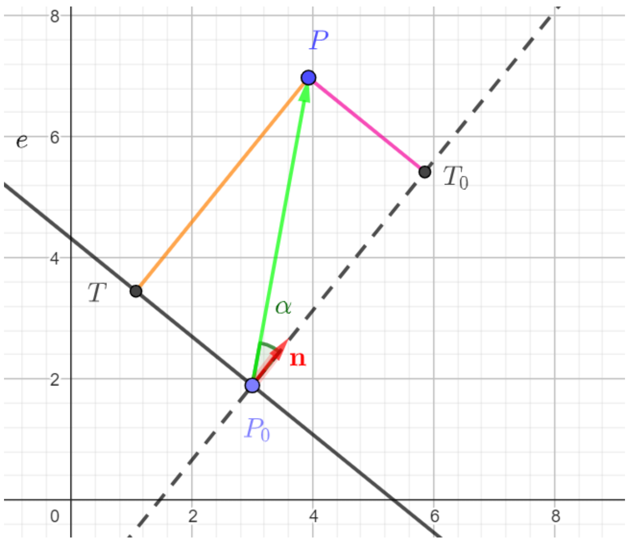
Magasabb szinten megmutathatjuk a diákoknak, hogy ha egy tetszőleges, az e egyenesre nem illeszkedő $P(x_p; y_p)$ pont koordinátáit behelyettesítjük az egyenes normálegyenletébe, megkapjuk a pont és az egyenes távolságát: $d(e, P) = \left|ax_p + by_p + c\right|$. Itt érdemes felhívni a diákok figyelmét, hogy az abszolút értéket fontos kitenni, mert a kapott érték negatív is lehet.

Ezt a tételt felvezethetjük úgy, hogy feltesszük a diákoknak a kérdést, hogy szerintük, ha az egyenes 0-ra rendezett normálvektoros egyenletébe egy olyan pont koordinátáit helyettesítjük be, amely nem illeszkedik az egyenesre, akkor van-e jelentősége annak a számnak, amit eredményül kapunk. Ezt követően megkérdezhetjük azt is, hogy ha van jelentősége, akkor vajon mire vonatkozik ez a szám? Ehhez elővehetjük a GeoGebrát, ahol különböző egyenesekkel és pontokkal kísérletezhetnek, vehetnek fel távolságokat, hosszokat, stb. Mivel egy skalárról beszélünk, ezért adódhat a gondolat, hogy valaminek az irányított hosszát, vagy valamik irányított távolságát kapjuk meg. Ez már egy jó kiindulási pont, amikor elárulhatjuk, hogy a pont és az egyenes távolságáról van szó, csak ahhoz, hogy a tényleges távolságot megkapjuk, még kell egy-két lépést tennünk. Ekkor megmutathatjuk a pont és egyenes távolságának képletét ($d(e, P) = \frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$), valamint az egyenes normálegyenletét.

Az $ax + by + c = 0$ egyenlet az egyenes normálegyenlete, ha $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$, azaz, ha az $\boldsymbol{n}(a; b)$ normálvektor egység hosszúságú. Egy tetszőleges egyenes egyenletet könnyen normalizálhatunk. Az egyenest határozza meg az $\boldsymbol{n}(A; B)$ normálvektora, illetve a $P_0(x_0; y_0)$ pontja. Ahhoz, hogy felírjuk az egyenes normálegyenletét, meg kell adnunk az egyenesnek egy egységhosszú normálvektorát, amit úgy tehetünk meg, hogy az adott normálvektort osztjuk a saját hosszával, tehát $\boldsymbol{n}'\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}; \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$. Ezt követően felírhatjuk az egyenes normálvektoros egyenletét: $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x_0 + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y_0$. Nullára rendezve: $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y - \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x_0 + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y_0\right) = 0$. Tehát egyszerűbb formában $ax + by + c = 0$, ahol $a = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $b = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ és $c = -\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x_0 + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y_0 = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$.

Bizonyítsuk be ezt a tételt GeoGebra ábrák segítségével.

Mint tudjuk, az egyenes normálvektoros egyenletét levezethetjük a skaláris szorzattal oly módon, hogy az egyenes P futópontjából és P_o fixpontjából készített vektornak vesszük a koordinátákkal számított skalárisszorzatát a normálvektorral. Most vegyük azt a $P(x_p; y_p)$ pontot, amely nincs rajta az egyenesen. Legyen T a P pont e egyenesre vonatkozó merőleges vetülete, illetve T_0 a P_0 ponton áthaladó $\boldsymbol{n}$ irányvektorú egyenesre vonatkozó merőleges vetülete. A TP távolságra vagyunk kíváncsiak, ami megegyezik a T_0P_0 távolággal.



(29. ábra)

Először tekintsük meg azt az esetet, amikor $0 < \alpha < 90°$. A $\overrightarrow{P_0P}$ és az $\boldsymbol{n}$ normálvektor koordináták szerinti skalárisszorzata:

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \boldsymbol{n} = ax_p + bx_p + c.$$

Ugyanez a skalárisszorzat a definíció szerint számolva:

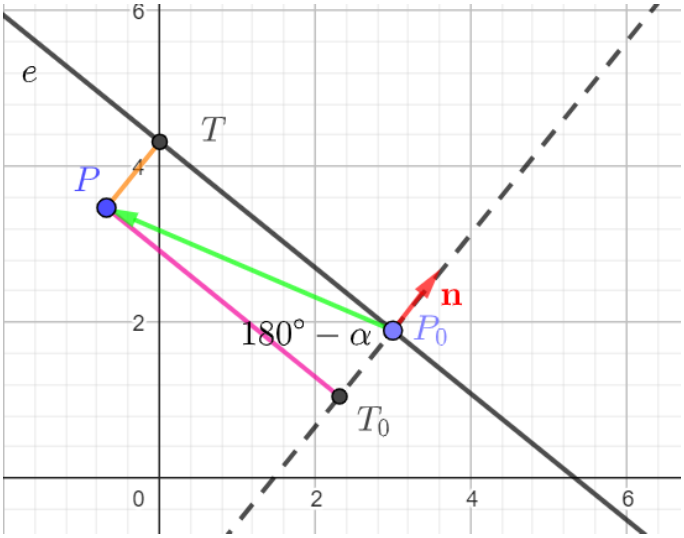
$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \boldsymbol{n} = |\overrightarrow{P_0P}| \cdot |\boldsymbol{n}| \cdot \cos\alpha.$$

Tudjuk, hogy $|\boldsymbol{n}| = 1$, illetve, hogy a P_0TP háromszögben $cos\alpha = \frac{P_0T_0}{P_0P}$. Ebből következik, hogy

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \boldsymbol{n} = |\overrightarrow{P_0P}| \cdot |\boldsymbol{n}| \cdot \cos\alpha = P_0P \cdot 1 \cdot \frac{P_0T_0}{P_0P} = P_0T_0 = PT.$$

Tehát $d(e, P) = PT = ax_p + by_p + c.$

Nézzük meg, mi történik, ha $90° < \alpha < 180°$.



(30. ábra)

A skalárisszorzat most is $\overrightarrow{P_0P} \cdot \boldsymbol{n} = \left|\overrightarrow{P_0P}\right| \cdot |\boldsymbol{n}| \cdot \cos\alpha$, tudjuk, hogy $|\boldsymbol{n}| = 1$ és $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha = \frac{P_0T_0}{P_0P}$. Ebből következik, hogy

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \boldsymbol{n} = \left|\overrightarrow{P_0P}\right| \cdot |\boldsymbol{n}| \cdot \cos\alpha = P_0P \cdot 1 \cdot -\frac{P_0T_0}{P_0P} = -P_0T_0 = -PT.$$

Tehát a skalárisszorzat megadja az e egyenes és a P pont előjeles távolságát, attól függően, hogy a P pont az egyenes által meghatározott félsíkok közül melyikben van. Észrevehetjük, hogy ha a pont abban a félsíkban helyezkedik el, amelybe az adott normálvektor mutat, akkor az előjeles távolság pozitív, amennyiben nem, akkor negatív.

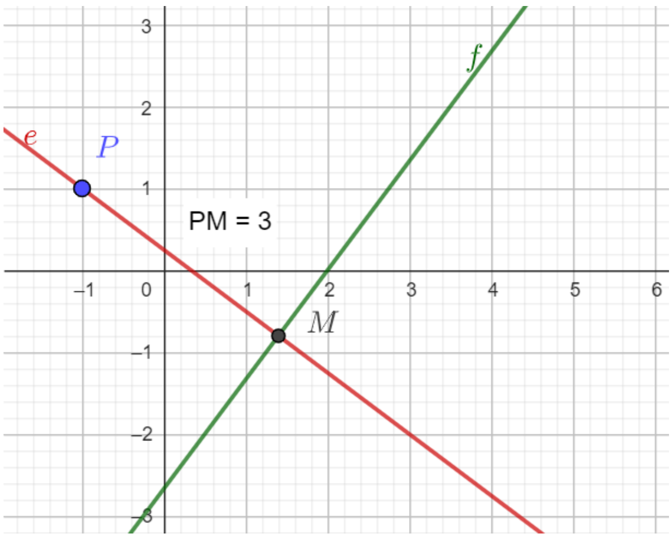
Összeségében kimondható, hogy valóban $d(e, P) = \left|ax_p + by_p + c\right|$.

Ezt felírhatjuk tetszőleges 0-ra rendezett normálvektoros egyenes egyenletre is, amikor azt kapjuk, hogy $d(e, P) = \left|\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x_p + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y_p + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$. Mivel $\sqrt{A^2 + B^2} \geq 0$, ezért kiemelhetjük az abszolút értékből, és megkapjuk a függvénytáblázatban is szereplő pont és egyenes távolság képletet: $d(e, P) = \frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Mutathatunk egy konkrét példát is, ahol megmutatjuk, hogy többféleképpen is ki lehet számolni egy pont és egy egyenes távolságát.

Vegyük az $f: 4x - 3y = 8$ egyenest és a $P(-1,1)$ pontot. Számítsuk ki az egyenes és a pont távolságát.

1. Számoljuk ki a távolságot az egyenes normálegyenletével. Ehhez először fel kell írnunk az egyenes normálegyenletét: $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{8}{5} = 0$. Majd ebbe az egyenletbe behelyettesítjük a pont koordinátáit: $\frac{4}{5} \cdot (-1) - \frac{3}{5} \cdot 1 - \frac{8}{5} = \frac{15}{5} = 3$. Tehát $d(P, f) = |3| = 3$.
2. Ugyanezt megtehetjük a négyjegyű függvénytáblázatban is szereplő képlettel is: $d(P, f) = \frac{|4\cdot(-1)-3\cdot 1-8|}{5} = 3$.
3. Ezt a távolságot akkor is ki tudjuk számolni, ha a fent említett módszereket nem ismerjük. Állítunk egy a P pontra illeszkedő f-re merőleges e egyenest: $e\colon 3x + 4y = 1$. Ezt követően kiszámítjuk az f és e egyenesek metszéspontját: $M\left(\frac{7}{5}; -\frac{4}{5}\right)$. Majd kiszámoljuk az M és P pontok távolságát: $d(M, P) = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2} = 3$.

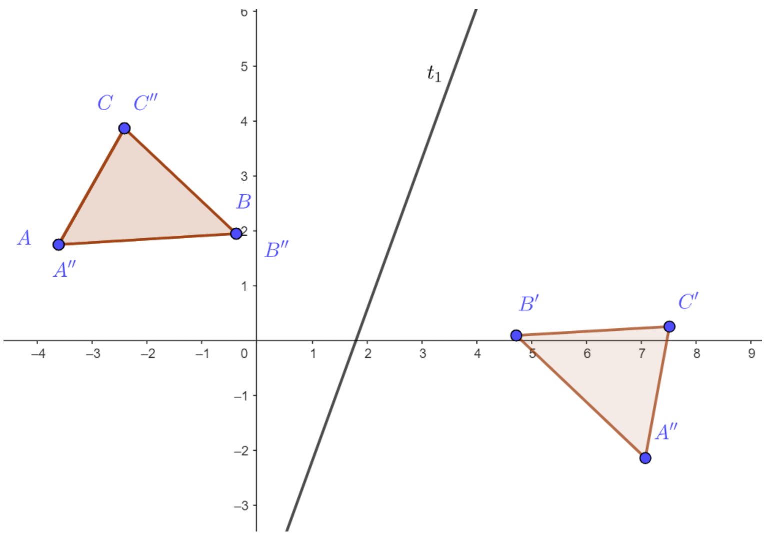


(31. ábra)

<u>Tengelyes tükrözések kompozíciója</u>

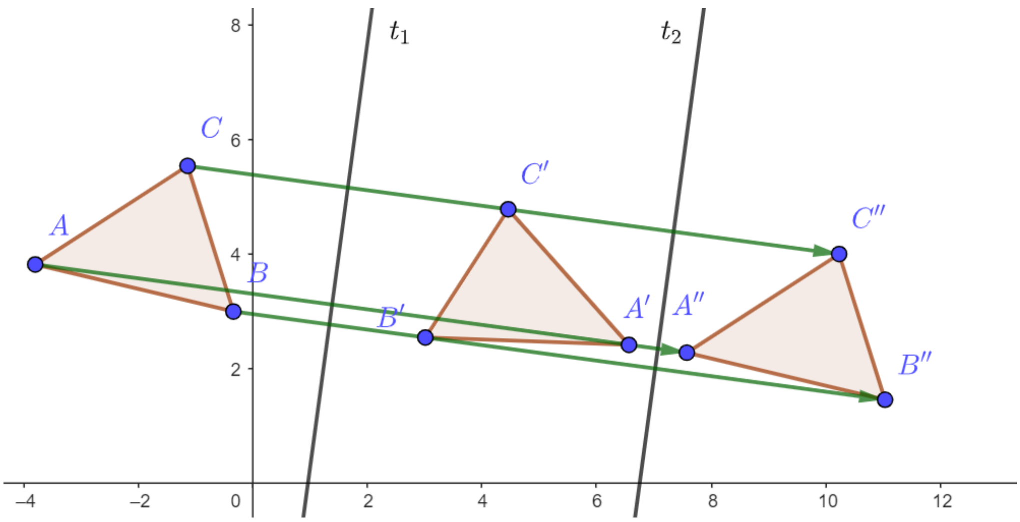
Két tengelyes tükrözés kompozícióját is feldolgozhatjuk a GeoGebra segítségével.

Megkérhetjük a diákokat, hogy a GeoGebrában vegyenek fel egy általános ABC háromszöget, és egy t_1 egyenest, ez lesz a tengely, majd a háromszöget tükrözzék kétszer az egyenesre. Figyeljék meg, hogy mi történik a háromszöggel. Az ABC háromszög visszakerült az eredeti helyére, vagyis ez egy *identitás*.

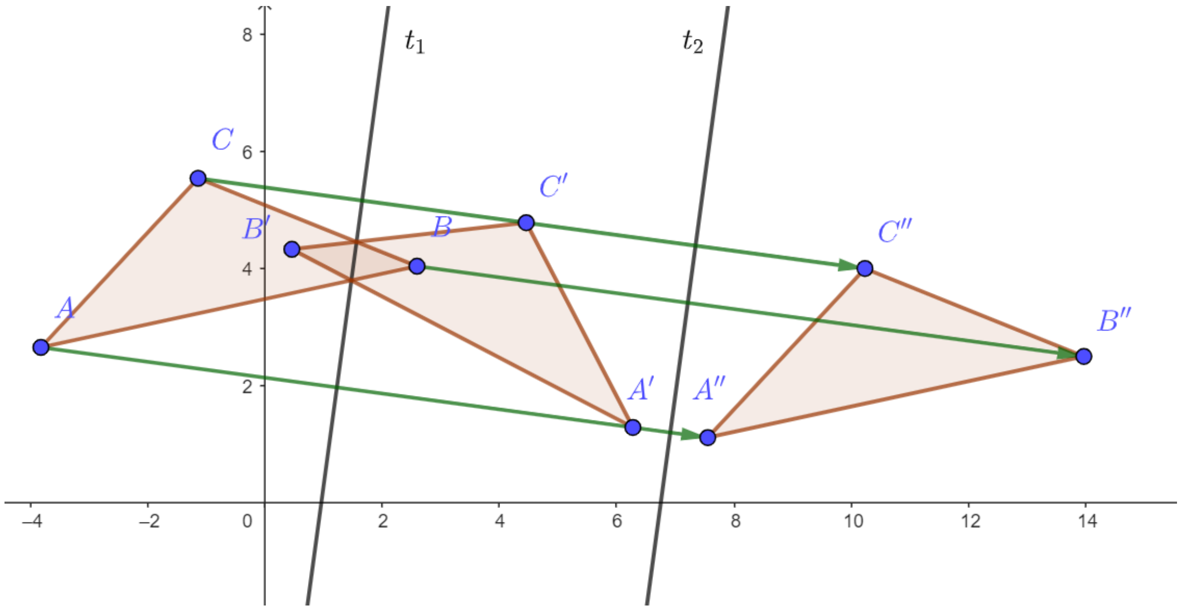


(32. ábra)

Ezután vegyenek fel még egy t_2 egyenest, ez lesz a második tükrözés tengelye, amely párhuzamos az t_1-gyel. Tükrözzék a háromszöget először t_1-re, majd t_2-re, és figyeljék meg, mi történik. A két tükrözés kompozíciója valójában egy eltolás, amely merőleges a tengelyekre, hossza pedig a t_1 és t_2 távolságának kétszerese. Ezt ellenőrizhetik úgy, hogy a diákok keresnek egy olyan vektort, amellyel eltolva a háromszöget a második tükörképét kapjuk. Majd a csúcspontok és a tengelyek mozgatásával láthatják, hogy ez valóban mindig teljesül.

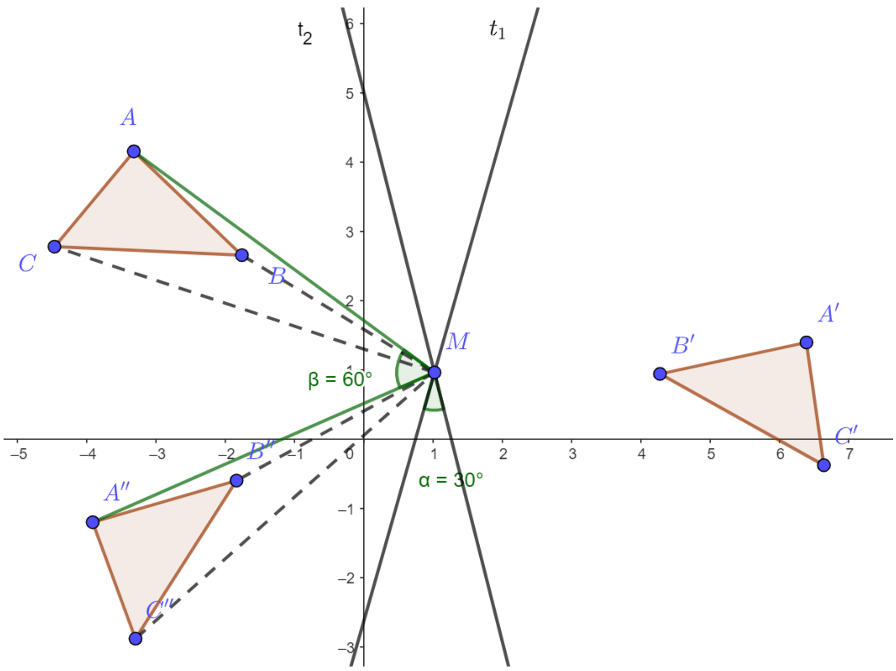


(33. ábra)



(34. ábra)

Most a t_2 egyenest úgy vegyék fel, hogy egy adott pontjában forgassák el egy adott szöggel (így metszeni fogja a t_1 egyenest), és újra tükrözzék a háromszöget először t_1 -re, majd t_2-re, és ismét figyeljék meg, hogy a tükörkép helyzete hogyan változik. Ekkor ez a kompozíció egy elforgatást ad, amelynek centruma a t_1 és t_2 tengelyek metszéspontja, szöge pedig a t_1 és t_2 hajlásszögének kétszerese. Ezt is ellenőrizhetik úgy, hogy az adott szöggel elvégzik a P pont forgatását M körül, majd a pont és a tengelyek mozgatásával megbizonyosodhatnak róla, hogy a sejtésünk valóban teljesül.



(35. ábra)

A programot a fent említett példákon kívül még számtalan fogalom és tétel bemutatásához használhatjuk különböző célokra, például emelt szinten kúpszeletek bemutatásához.

A GeoGebrával tehát segíthetünk a diákoknak észrevenni összefüggéseket, megérteni és akár bebizonyítani tételeket. Szakkörön kevésbé kötött keretek között fedezhetjük fel velük GeoGebra által nyújtott lehetőségeket, valamint egy kisebb csoporttal egyszerűbben megoldható, hogy ők maguk is kipróbálják a programmal a szerkesztést.

7. Tapasztalatok a GeoGebrával

A szaktárgyi tanítási gyakorlaton, illetve az összefüggő egyéni iskolai gyakorlaton nekem is volt már lehetőségem kipróbálni a GeoGebrát a tanórákon, valamint a hospitálásokkor megfigyelni, hogy vezetőtanárom, illetve konzulensem hogyan használja a programot szemléltetés céljából.

A szaktárgyi tanítási gyakorlaton és az összefüggő egyéni iskolai gyakorlaton egyaránt megfigyelhettem, hogy tapasztalt tanárok miként vonják be az óráikba a digitális eszközöket. Ezek között a GeoGebra is gyakran megjelent, főként konkrét feladatok szemléltetéséhez, egy-két alkalommal pedig új fogalom, tétel bevezetéséhez, bemutatásához vették elő a programban készült ábrákat. Volt szerencsém azt is megfigyelni, hogy az összefüggő egyéni iskolai gyakorlaton a konzulensem informatika órán hogyan mutatja be a GeoGebrát egy olyan csoportnak, amelynek nagy részét matematikából is tanítja. Itt egyszerűbb szerkesztéseket végeztek el háromszögben, például oldalfelező merőlegest, magasságvonalakat, magasságpontot, súlyvonalat, súlypontot, beírható és köré írható kört szerkesztettek. Ez az óramegfigyelés ráébresztett arra, hogy matematika tanárként érdemes lehet összebeszélni az adott csoport informatika tanárával, és segíteni egymás munkáját, például a GeoGebra informatika órán történő akár rövid, akár hosszabb bemutatásával.

Mindkét gyakorlatom alatt a tanításom során én magam is megpróbáltam minél többször és minél nagyobb hatékonysággal beemelni a GeoGebrát a tanóráimba. Az adott körülmények miatt azonban csak én tudtam használni a programot, a diákok nem tudtak vele velem párhuzamosan dolgozni. Ezért leginkább feladatokhoz készítettem ábrákat, illetve új fogalmak, bizonyítások szemléltetéséhez használtam.

A szaktárgyi tanítási gyakorlatomat matematikából a 2021/2022-es tanév tavaszi félévében végeztem az ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Általános Iskola és Gyakorló

Gimnáziumban. A tanított osztályom 11. évfolyamos volt, akik éppen akkor kezdtek bele a koordinátageometriába, amikor én a hospitálások mellett elkezdtem a tanítást. Összesen 15 órát tartottam, amellyel lefedtem a pontot és vektort a koordinátasíkon, osztópontot, súlypontot, távolság meghatározását, két vektor skaláris szorzatát, az egyenes egyenleteit, egyenesek metszéspontját és két egyenes párhuzamosságának és merőlegességének feltételeit.

A fent felsoroltak közül szinte mindegyik témához használtam a GeoGebrát. Az osztályterem kialakítása lehetővé tette, hogy a projektorral való vetítés közben, a hagyományos tábla teljesen szabadon maradjon, így miközben a projektorral szemléltettem, tudtam a táblára levezetéseket, megjegyzéseket, számolásokat írni. Az osztályban lévő két magántanuló miatt minden órára kellett készítenem PowerPoint bemutatót, amit a órát követően fel kellett töltenem az osztály Canvas felületébe. Az egyes feladatokhoz tartozó ábrákat ebbe a diasorba illesztettem be.

Néhány feladat, amelyeket GeoGebra segítségével (is) ábrázoltam:

Feladatok Kornai Júlia, Kovács Előd, Lövey Éva, Pálovicsné Tusnády Katalin, Schubert Mihály - Matematika a középiskolák 11. évfolyama számára, II. kötetéből:

34. oldal 1. feladat

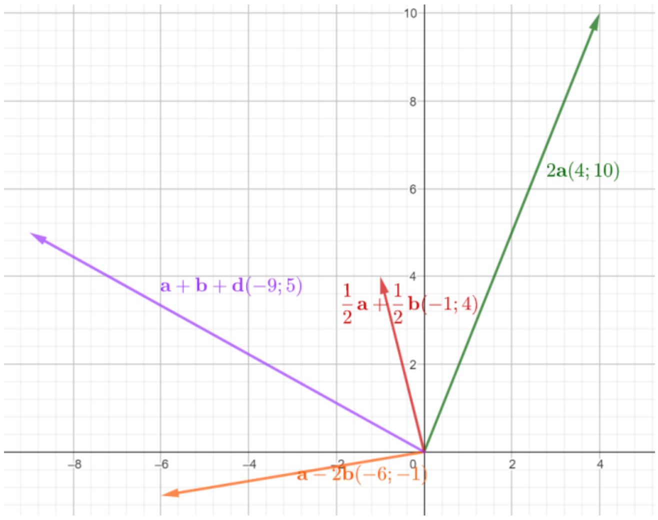
„Adottak az $\boldsymbol{a}(2;\ 5)$, $\boldsymbol{b}(-4;\ 3)$, $\boldsymbol{c}(6;\ -2)$ és $\boldsymbol{d}(-7;\ -3)$ vektorok. Ábrázold a kapott vektorokat helyvektorként a koordinátarendszerben, és add meg ezek koordinátáit is!

a) $2\boldsymbol{a}$
b) $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$
c) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$
d) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}$”[8]

Megoldás:

a) $2\boldsymbol{a}(2\cdot 2; 2\cdot 5)=(4;10)$
b) $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}(2-2\cdot(-4); 5-2\cdot 3)=(-6;-1)$
c) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}(1+(-2); 2{,}5+1{,}5)=(-1;4)$
d) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}(2+(-4)+(-7); 5+3+8-3)=(-9;5)$

[8] Kornai Júlia, Kovács Előd, Lövey Éva, Pálovicsné Tusnády Katalin, Schubert Mihály - Matematika a középiskolák 11. évfolyama számára, II. kötet, 34. o.



(36. ábra)

Ennél a feladatnál a diákok a füzetükbe ábrázolták a vektorokat, ellenőrzésképpen pedig kivetítettem a GeoGebra ábrákat. Az előre elkészített ábra lehetővé tette a gyors ellenőrzést, valamint, hogy miközben a diákok önállóan dolgoztak, körbe tudtam menni, és így betekintést nyerni a tanulók füzeteikbe, látni a gyakori hibákat, nehézségeket.

41. oldal, 6. feladat:

„Az $ABCD$ négyzetben $A(-3;1)$ és $C(7;5)$.

a) Határozd meg a másik két csúcs koordinátáit!
b) Mekkora a négyzet területe rácsegységben mérve?”[9]

Megoldás:

a) Ennek a feladatnak a megoldásához szükségünk lesz a négyzet középpontjára és forgatásra. Az K középpont az AC szakasz felezőpontja, így $K = F_{AC}(2;3)$. A $\overrightarrow{KA}(-5;-2)$ vektort fogjuk forgatni, pozitív irányú forgatással megkapjuk a $\overrightarrow{KB}$ vektort, negatív irányú forgatással pedig megkapjuk a $\overrightarrow{KD}$ pontot. $\overrightarrow{KA}_{+90°} = \overrightarrow{KB}(2;-5)$ és $\overrightarrow{KA}_{-90°} = \overrightarrow{KD}(-2;5)$. Ezt úgy is kiszámolhatjuk, hogy kiszámoljuk az egyik vektort forgatással, majd vesszük annak ellentettjét.

Ekkor $\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{OB}(4;-2)$

és $\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{OD}(0;8)$.

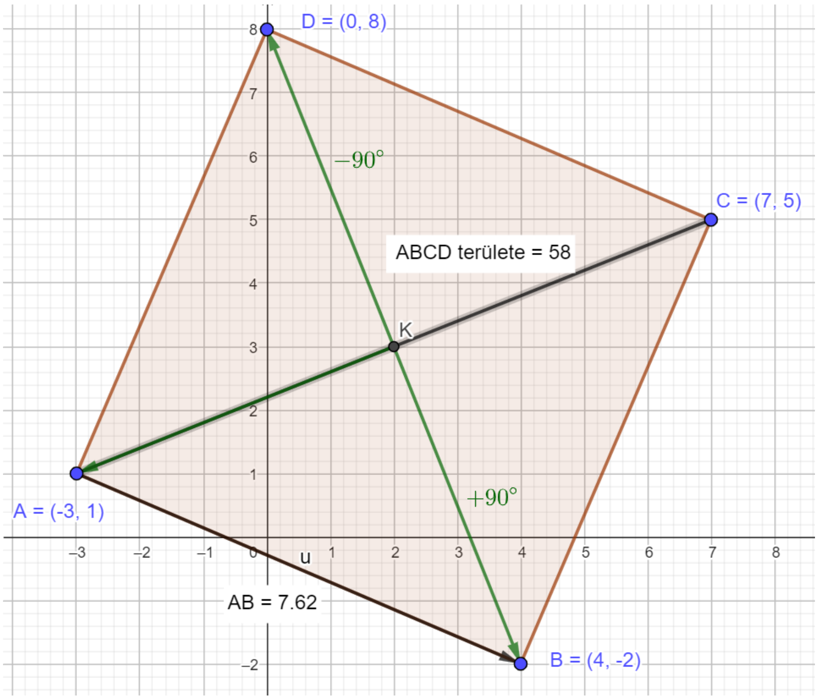
[9] Kornai Júlia, Kovács Előd, Lövey Éva, Pálovicsné Tusnády Katalin, Schubert Mihály - Matematika a középiskolák 11. évfolyama számára, II. kötet, 41.o.

Tehát $B(4;-2)$ és $D(0;8)$ a hiányzó csúcsok koordinátái.

Ennél a típusfeladatnál gyakran előfordul, hogy nem a $\overrightarrow{KA}$ vektort forgatják, hanem az $\overrightarrow{AK}$-t, és ugyanúgy számolnak tovább, így negatív lesz a négyzet körüljárási iránya.

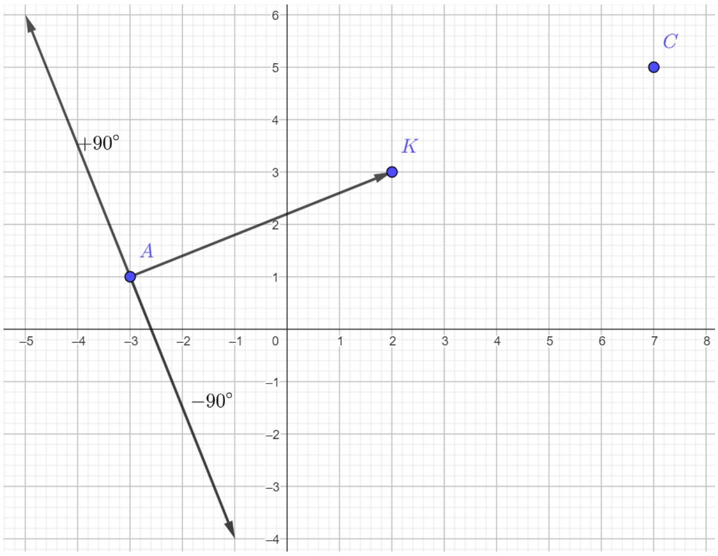
Fontos emlékeztetni a diákokat, hogy két vektor összegeként még nem a pont koordinátáit kapjuk meg, hanem a pontba mutató helyvektor koordinátáit, és ebből tudunk következtetni a pont koordinátáira.

b) Terület számításhoz ki kell számítanunk az egyik oldal hosszát: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{58}$. Majd a négyzet területe: $T = \sqrt{58}^2 = 58$ rácsnégyzet.



(37. ábra)

Ezt a feladatot hagyományos módon a táblán is ábrázoltam, hogy segítséget adjak nekik a füzetbe való szerkesztéshez, majd megmutattam a pontos GeoGebra ábrát. Az ábrán azt is megmutattam nekik, hogy mit csinál a GeoGebra program, ha a $\overrightarrow{KA}$ vektor helyett a $\overrightarrow{AK}$ vektort forgatják a K pont körül.



(38. ábra)

Ha ezeket a vektorokat adjuk hozzá a K pont helyvektorához, akkor is egy négyzetet fogunk kapni, de negatív lesz a körüljárási iránya.

55. oldal 1. feladat

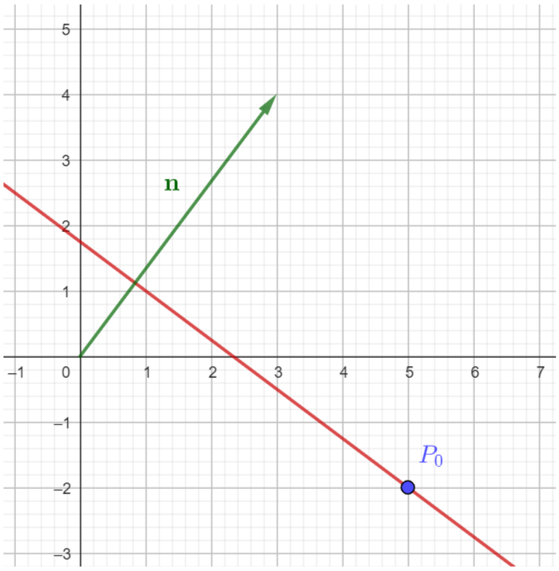
„Írd fel az egyenes egyenletét, ha

a) normálvektora $\boldsymbol{n}(3;\ 4)$, és átmegy a $P_0(5;\ -2)$ ponton;
b) nomrálvektora $\boldsymbol{n}(2;\ -5)$ és átmegy a $P_0(-3;\ 1)$ ponton;
c) normálvektora $\boldsymbol{n}(0;\ 3)$ és átmegy a $P_0(-3;-3)$ ponton;
d) normálvektora $\boldsymbol{n}(2; 5)$ és átmegy az origón;
e) irányvektora $\boldsymbol{v}(-1; 4)$, és átmegy a $(3;\ -5)$ ponton;
f) irányvektora $\boldsymbol{v}(0;\ -1)$ és átmegy a $(-4;\ 0)$ ponton!”[10]

Megoldás:

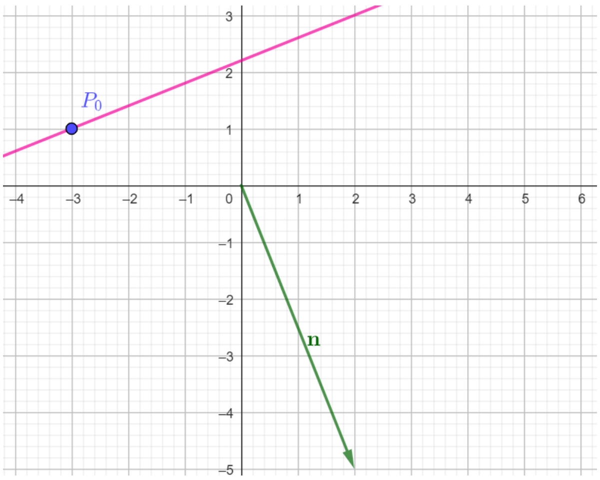
a) $3x + 4y = 7$

[10] Kornai Júlia, Kovács Előd, Lövey Éva, Pálovicsné Tusnády Katalin, Schubert Mihály - Matematika a középiskolák 11. évfolyama számára, II. kötet, 55.o.



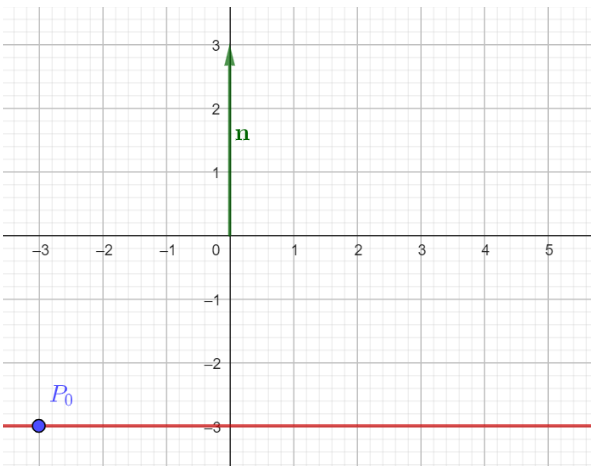
(39. ábra)

b) $2x - 5y = -11$



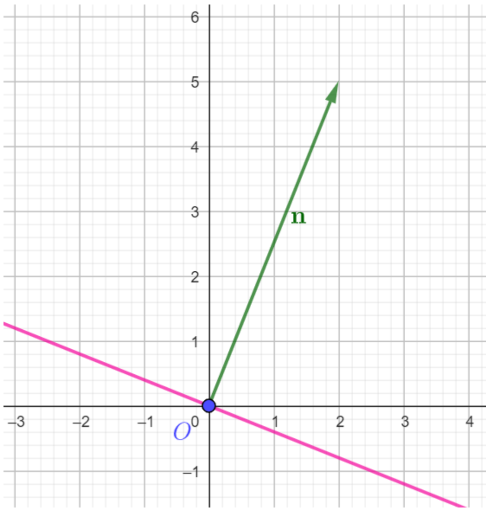
(40. ábra)

c) $3y = -9$



(41. ábra)

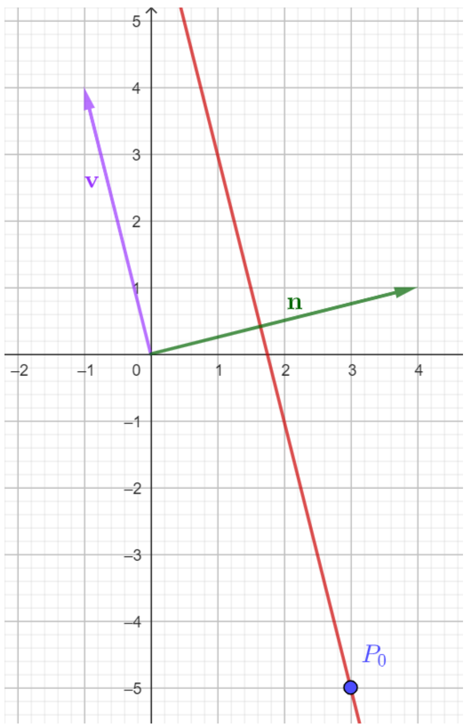
d) $2x + 5y = 0$



(42. ábra)

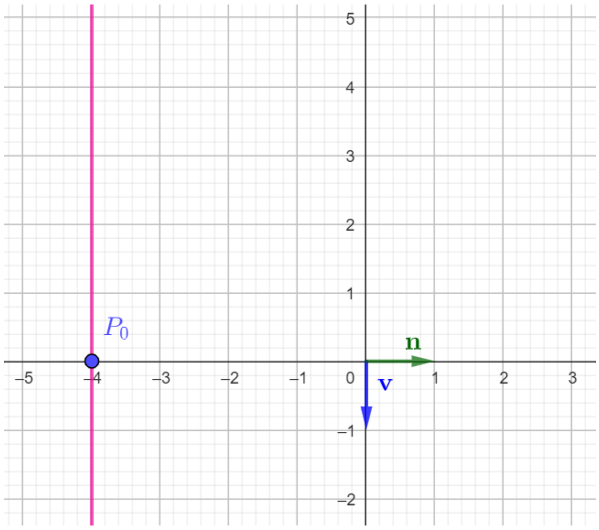
e) Azt szoktam javasolni, hogy az irányvektorból készítsünk normálvektort, és a normálvektoros egyenes egyenletet írjuk fel, így könnyebben elkerülhető, hogy belekavarodnak a tanulók az előjelekbe.

$\boldsymbol{n}(4; 1)$, $4x + y = 7$



(43. ábra)

f) $\boldsymbol{n}(1; 0)$, $x = -4$



(44. ábra)

Ehhez a feladathoz is készítettek ábrákat a füzetbe. Előzetesen átismételtük a függvény ábrázolás lépéseit, kitérve arra, hogy olyan függvény, hogy $x = c$ $(c \in \mathbb{R})$ nincs, egyenes viszont van, itt pedig már önállóan rendezték y-ra (kivéve f)-nél) az egyenleteket és ábrázolták a füzetükbe, ellenőrzésképpen kivetítettem a GeoGebra ábrákat, kérdés esetén pedig hagyományos módon is megmutattam a szerkesztés lépéseit.

A szaktárgyi tanítási gyakorlat alatt főképp időspórolás céljából használtam a GeoGebrát, ami hatásosnak bizonyult. A diákok mindig örömmel fogadták, amikor bekapcsoltuk a projektort, ellenőrzésnél jobban felkeltette a digitális ábra az érdeklődésüket, mint a hagyományos táblára rajzoltak, illetve könnyebben át is látták őket. Hamar megtanultam, hogy ha kivágott képekkel dolgozunk, fontos, hogy akkora ábrákkal készüljünk, amelyeket a hátsó padban ülők is jól látnak. A gyakorlatom végén írtak egy dolgozatot az anyagból, amit én tanítottam nekik, és az eredményeik alapján a GeoGebra és a hagyományos tábla kevert használata sikeresnek bizonyult.

Az összefüggő egyéni iskolai gyakorlatomat a VII. Kerületi Madách Imre Gimnáziumban végeztem, ahol már több lehetőségem volt bevonni a GeoGebrát a tanórákba. Itt már nem csak ellenőrzéshez, illetve gyors ábra bemutatáshoz használtam a programot, hanem új fogalmak, módszerek bevezetéséhez is. A tantermek kialakítása azonban kevésbé volt szerencsés, mint a szaktárgyi tanítási gyakorlati helyemen. A tantermekben, ahol tanítottam nem volt interaktív tábla, a vetítő vásznat pedig a tábla elé kellett lehúzni. Így ha a projektort használtam, a táblának a csak két oldalsó szárnyára tudtam írni, amit az osztály szélein ülő diákok nehezen láttak, ezért időnként a szárnyakat beljebb kellett nekik hajtani. Ennek ellenére sokszor és szívesen szemléltettem feladatokat, fogalmakat és tételeket GeoGebrával, amelyek a visszajelzések alapján hasznosnak bizonyultak.

A tanév első félévében egy 12. évfolyamos csoportnak tanítottam koordinátageometriát, majd a második félévben 11. évfolyamos csoportot tanítottam, de velük sajnos nem volt lehetőségem koordinátageometriával foglalkozni.

Néhány példa olyan feladatokra, amelyekhez alkalmaztam a GeoGebrát:

Példafeladat a GeoGebra tanórákra való bevonására Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István: Sokszínű matematika 11. tankönyvből:

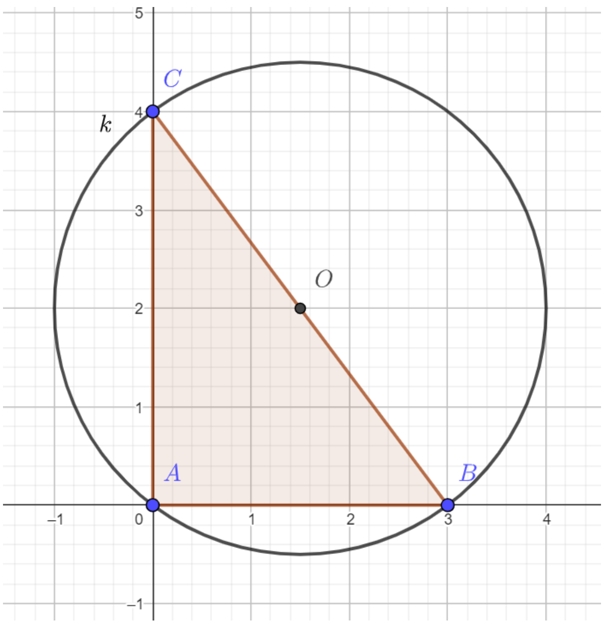
232. oldal 6. feladat

„Írjuk fel az ABC háromszög köré írt kör egyenletét, ha

a) $A(0;0)$, $B(3;0)$, $C(0;4)$;
b) $A(0;2)$, $B(2;0)$, $C(5;5)$;
c) $A(2;-3)$, $B(2;3)$, $C(-3;-2)$."[11]

Megoldás:

a) $O(1{,}5;2), r = 2{,}5$
$(x-1{,}5)^2 + (y-2)^2 = 6{,}25$



(45. ábra)

[11] Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István: Sokszínű matematika 11., Mozaik Kiadó, 2015. 232.o.

b) $\boldsymbol{n}_{f_{AC}} = \overrightarrow{AC}(5;3)$

$P_0 = F_{AC}(2{,}5;3{,}5)$

$f_{AC}: 5x + 3y = 23$

$\boldsymbol{n}_{f_{BC}} = \overrightarrow{BC}(3;5)$

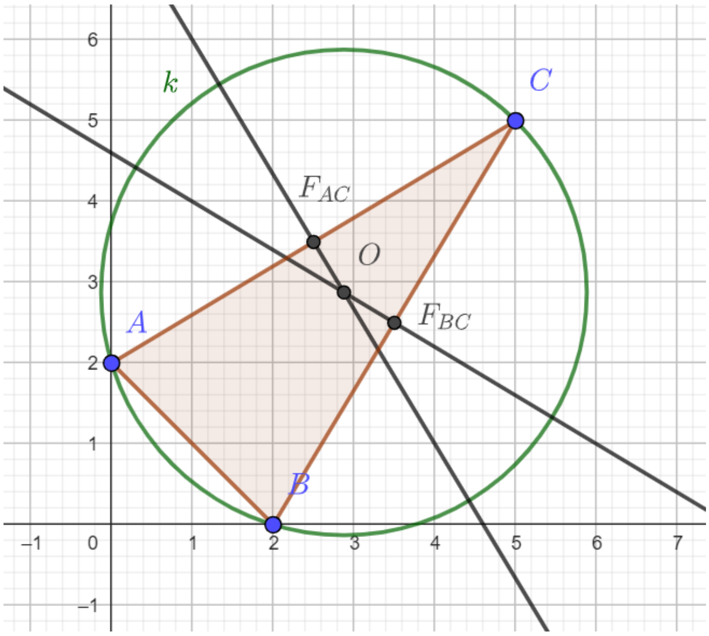
$P_0 = F_{BC}(3{,}5;2{,}5)$

$f_{BC}: 3x + 5y = 23$

$$O(2{,}88;2{,}88)$$

$$r = 3{,}01$$

$$k: (x - 2{,}88)^2 + (y - 2{,}88)^2 = 9{,}03$$



(46. ábra)

c) $\overrightarrow{AB}(0;6) \rightarrow \boldsymbol{n}_{f_{AB}}(0;1)$

$F_{AB}(2;0)$

$f_{AB}: y = 0$

$\overrightarrow{AC}(-5;5) \rightarrow \boldsymbol{n}_{f_{AC}}(-1;1)$

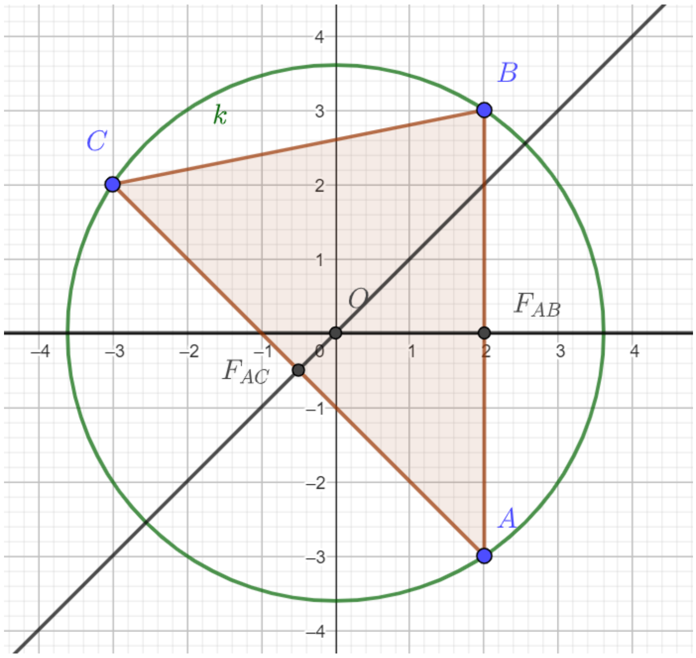
$F_{AC}(-0{,}5;-0{,}5)$

$f_{AC}: 2x + y = 0$

$$O(0;0)$$

$$r = \sqrt{13}$$

$$k: x^2 + y^2 = 13$$

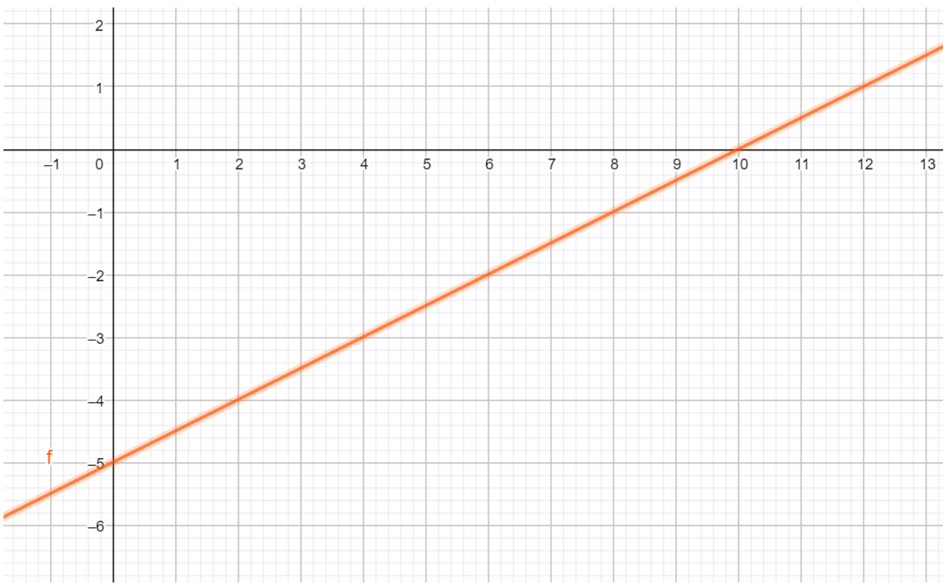


(47. ábra)

Miután a diákok már ügyesen tudtak a füzetben kört ábrázolni az egyenlet alapján, nem rajzoltam fel az egyszerűen megszerkeszthető ábrákat a táblára, hanem kivetítettem őket készen, ezzel időt spórolva, valamint lehetővé téve a munkájuk monitorozását.

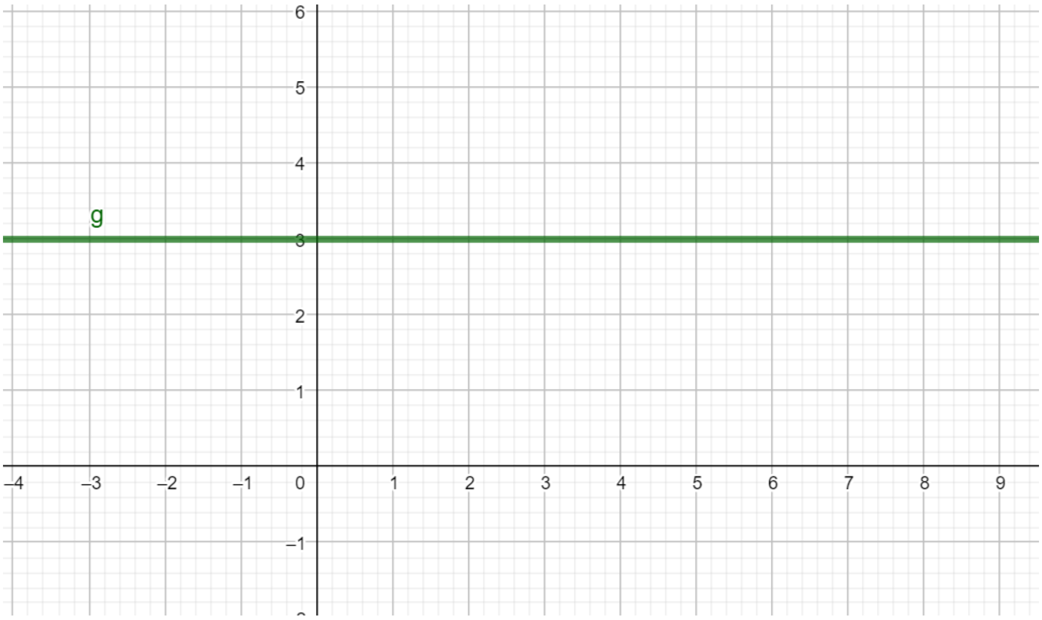
Az egyenesek ábrázolásához átismételtük a lineáris függvények ábrázolását, illetve ábrákról való függvény leolvasást. Ezutóbbihoz vittem be GeoGebra ábrákat, amelyekről le kellett olvasniuk a függvényt, illetve ábrát készíteniük a füzetükbe.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 5$



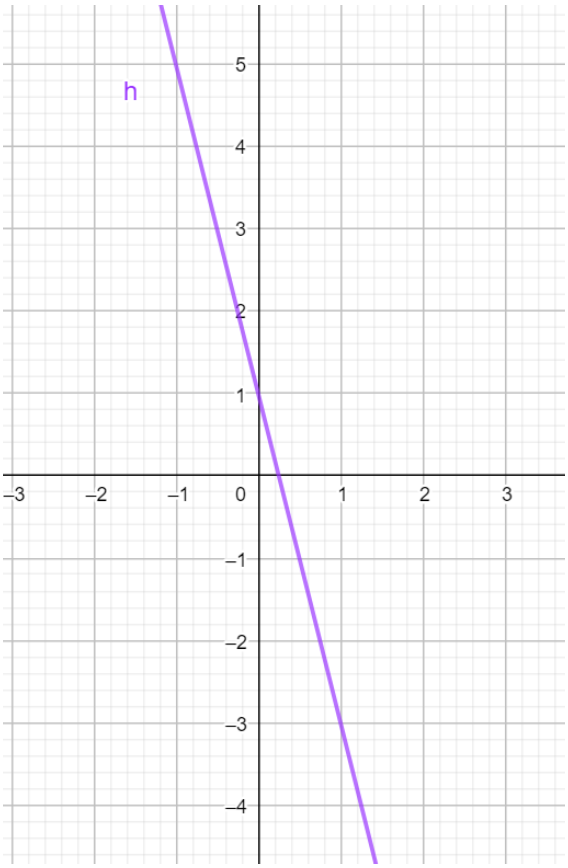
(48. ábra)

b) $g(x) = 3$



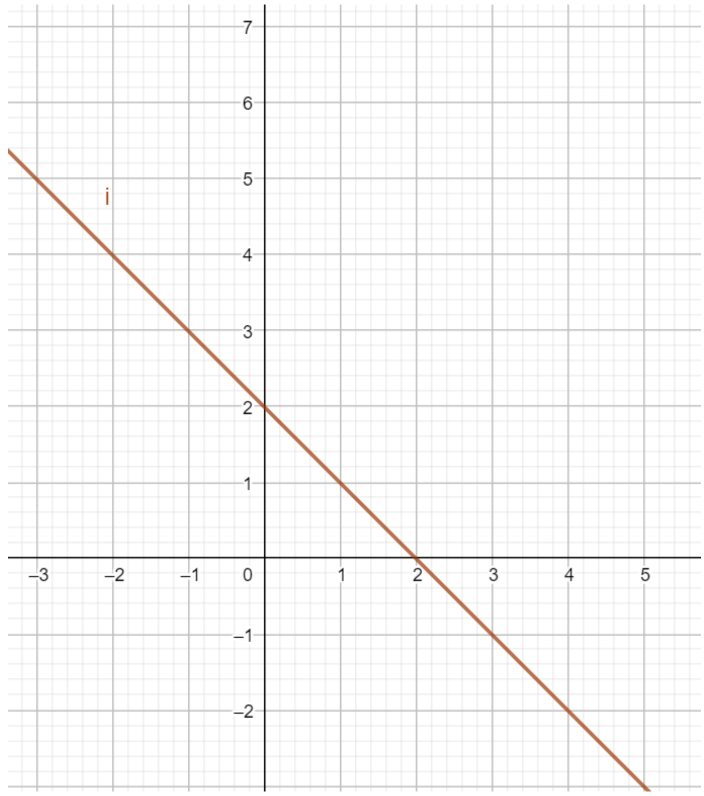
(49. ábra)

c) $h(x) = -4x + 1$



(50. ábra)

d) $i(x) = -x + 2$



(51. ábra)

Házi feladatnak kaptak függvényábrázolási feladatokat, amelyeket szintén GeoGebra ábrák segítségével ellenőriztünk.

Példa feladat Árki Tamás, Konfárné Nagy Klára, Kovács István, Trembeczki Csaba, Urbán János: Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11-12. könyvből:

98. oldal, 3724-es feladat

„Kalózok elveszett kincs nyomába eredvén találtak egy térképvázlatot, valamint egy kissé homályos leírást a kincs helyéről. A térképen egy rendkívül magas fa, valamint egy könnyen beazonosítható sziklaképződmény látható, ezek koordinátái: (-5;6), valamint (-2;3). A leírás szerint a kincs a fát sziklával összekötő egyenes útszakaszon van elásva, a koordinátarendszer kezdőpontjától pontosan 5 egység távolságra.

a) Mely koordinátájú pontban van elrejtve a kalózok által keresett kincs?”[12]

Megoldás:

a)

[12] Árki Tamás, Konfárné Nagy Klára, Kovács István, Trembeczki Csaba, Urbán János: Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11-12., Mozaik Kiadó, 2011, 98.o.

I. e egyenes: $A(-5;-6)$, $B(-2;3)$

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{v}(3;9) -> \boldsymbol{n}(-3;1)$$

$$P_0 = A(-5;-6)$$

$$e: -3x + y = 9$$

II. k kör: $O(0;0)$, $r = 5$

$$k: x^2 + y^2 = 25$$

III. $e \cap k$

$$e: -3x + y = 9$$

$$k: x^2 + y^2 = 25$$

$$10x^2 + 54x + 56 = 0$$

$$x_1 = -4$$

$$y_1 = -3$$

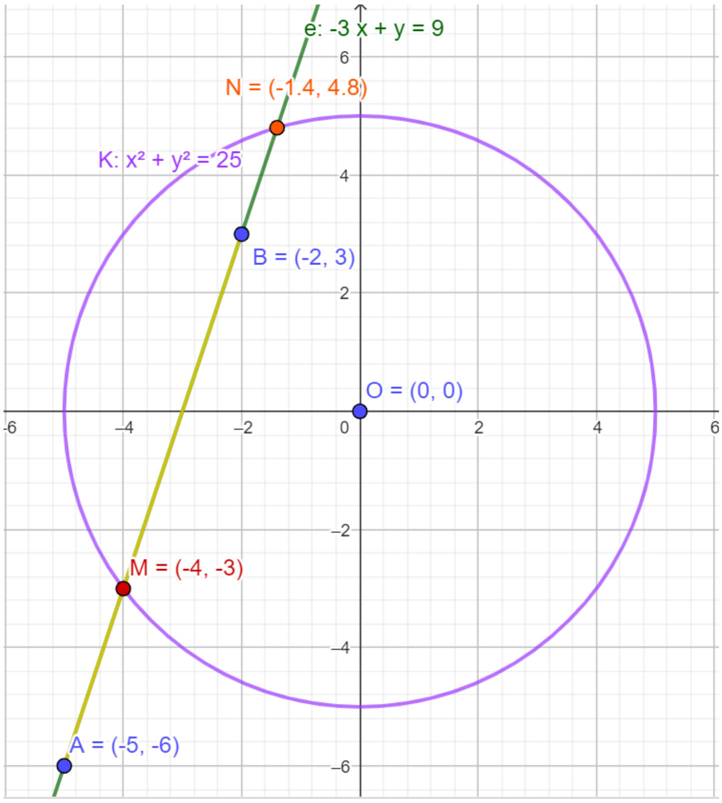
$$-> M(-4;-3)$$

$$x_2 = -1{,}4$$

$$y_2 = 4{,}8$$

$$-> N(-1{,}4;\ 4{,}8)$$

De N nincs rajta az AB szakaszon, ezért M a jó megoldás.



(52. ábra)

A feladatot együtt gondolkodva oldottuk meg, az ábrát pedig lépésről lépésre készítettem el az órán az instrukcióik alapján, miközben ők a füzetükben szerkesztettek saját ábrát.

Példa feladat Juhász István, Orosz Gyula, Paróczay József, Szászné dr. Simon Judit: Matematika 11. Az érthető matematika tankönyvből:

183. oldal 1. feladat

„Határozzuk meg az alábbi körök középpontjait és sugarait! Milyen helyzetűek egymáshoz képest a körök?

a) $x^2 + y^2 = 25$ és $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 0$
b) $x^2 + y^2 = 25$ és $x^2 + y^2 - 12x - 16y + 75 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$ és $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 7 = 0$."[13]

Megoldás:

a) $C_1(0; 0)$, $r = 5$

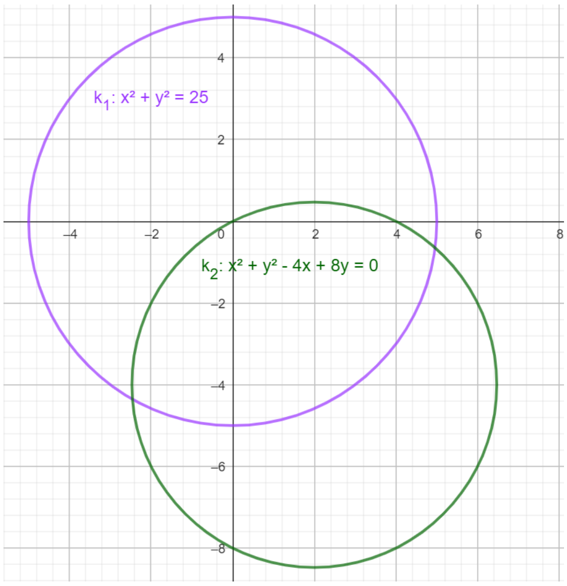
[13] Juhász István, Orosz Gyula, Paróczay József, Szászné dr. Simon Judit: Matematika 11. Az érthető matematika, Oktatási Hivatal, 2020, 183.o.

$k_2: (x-2)^2 + (y+4)^2 = 20$

$C_2(2; -4), r_2 = \sqrt{20}$

$\overrightarrow{C_1C_2}(2; -4) \to |\overrightarrow{C_1C_2}| = \sqrt{20} = r_2 < r_1 + r_2 = \sqrt{20} + 5$

Tehát a körök metszőek.



(53. ábra)

b)

$C_1(0; 0)\ \ r_1 = 5$

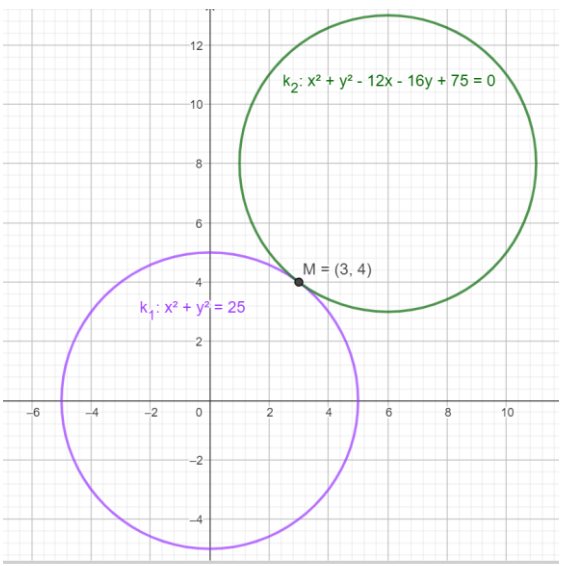
$k_2: (x-6)^2 + (y+8)^2 = 25$

$C_2(6; 8)\ r_2 = 5$

$\overrightarrow{C_1C_2}(6,8) \to |\overrightarrow{C_1C_2}| = 10 = r_1 + r_2$

$d(k_1, k_2) = 0$

Tehát a körök érintőek.



(54. ábra)

c) $k_1: (x-3)^2 + (y+1)^2 = 1$

$C_1(3; -1)$

$r_1 = 1$

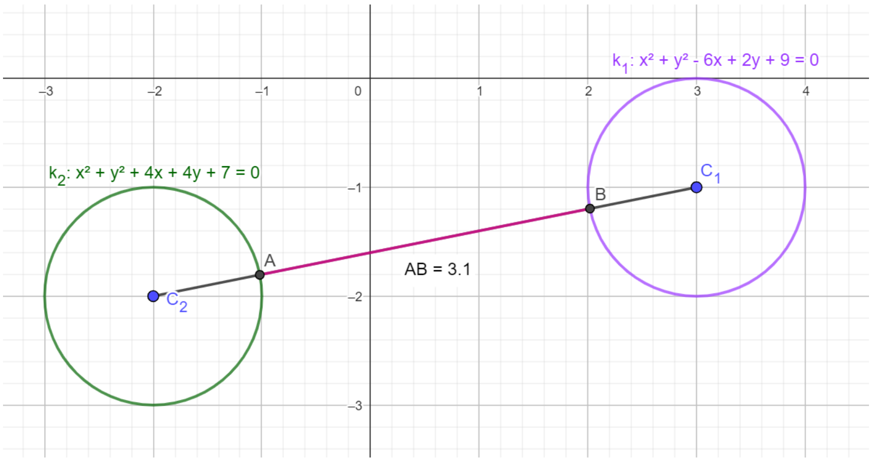
$k_2: (x+2)^2 + (y+2)^2 = 1$

$C_2(-2; -2)$

$r_2 = 1$

$\overrightarrow{C_1C_2}(-5; 1) \rightarrow \left|\overrightarrow{C_1C_2}\right| = \sqrt{26} > r_1 + r_2 = 1 + 1 = 2$

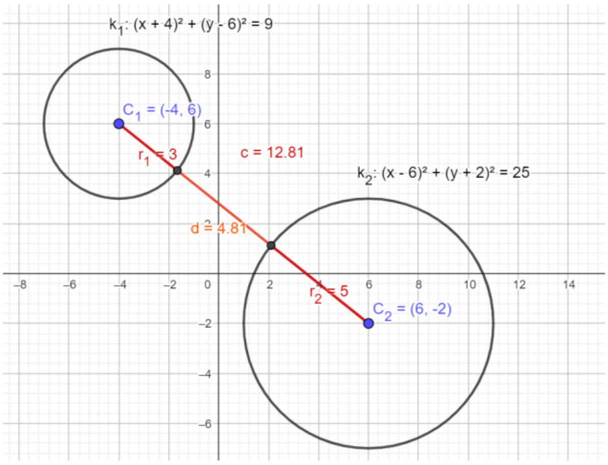
$d(k_1, k_2) = \left|\overrightarrow{C_1C_2}\right| - (r_1 + r_2) = \sqrt{26} - 2 = 3{,}1$



(55. ábra)

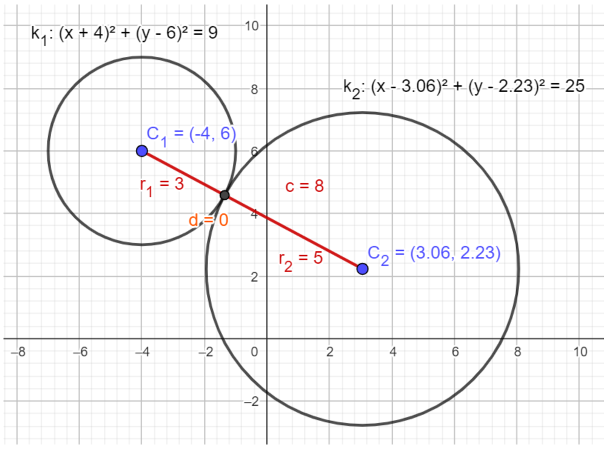
A feladat megoldása mellett a diákok elkészítették a saját ábráikat a füzetükbe, melyeket leellenőriztek a kivetített GeoGebra ábrák alapján, feltették esetleges kérdéseiket.

Mint korábban említettem, a feladatok ábrázolása mellett kipróbáltam a GeoGebrát fogalmak, tételek bevezetéséhez is. A 4. fejezetben említett fogalmak mellett a körök kölcsönös helyzeteit is GeoGebra segítségével mutattam meg a diákoknak. Az ábrán két kör látható, valamint a középpontjaiknak távolsága, a két kör távolsága, illetve a sugaraik nagysága, és a körök egyenletei. A körök mozgatásával változtattam a körök kölcsönös helyzetét, a diákok pedig megfigyelték és felfedezték az összefüggéseket. Összegyűjtöttük, hogy hány féleképpen helyezkedhetnek el a körök, és hogy ábra nélkül, csak az egyenletükből, vagy adataikból, hogyan tudjuk megállapítani a kölcsönös helyzetüket.



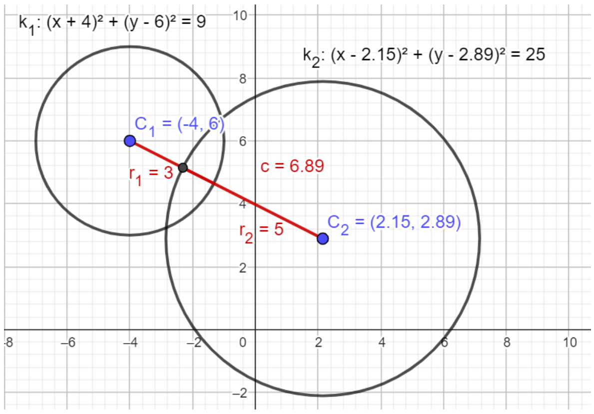
(56. ábra)

A fenti ábrán a két kör nem metszi egymást és egymáson kívül vannak. Ezt az ábra nélkül onnan tudhatjuk, hogy a két kör középpontjának a távolsága nagyobb, mint a sugaruk összege: $\left|\overrightarrow{C_1C_2}\right| > r_1 + r_2$. Ha a sugarak összegét kivonjuk a középpontok távolságából, megkapjuk a két kör távolságát.



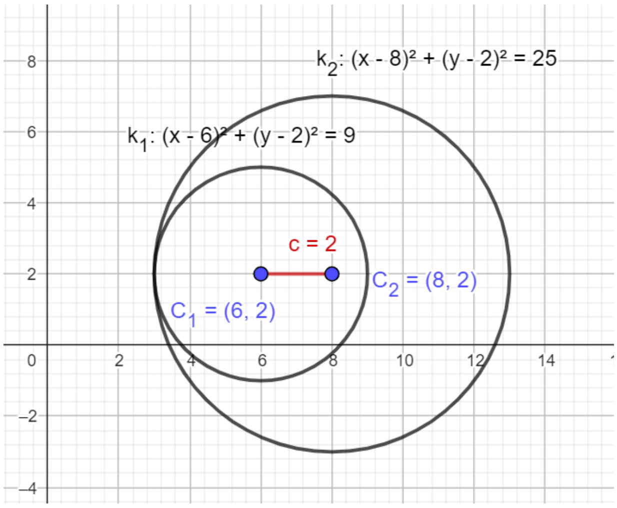
(57. ábra)

Az 57. ábrán látható két kör érintik egymást, ezért a távolságuk 0. Ezt ábrázolás nélkül onnan tudhatjuk, hogy a két kör középpontjának távolsága és a két kör sugarának összege egyenlő: $\left|\overrightarrow{C_1C_2}\right| = r_1 + r_2$. Az érintési pontjuk koordinátáit nem számoltuk ki, mivel az középszinten nem alapkövetelmény, de szorgalmi feladatnak „plusz”-ért kiszámolhatták.



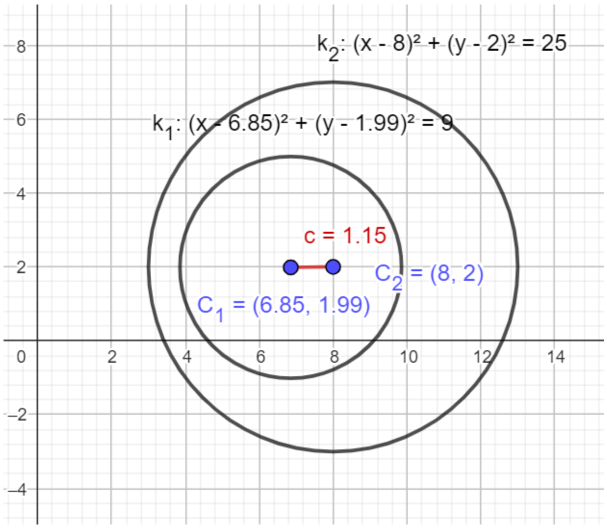
(58. ábra)

Az 58. ábrán metsző köröket láthatunk, a körök kölcsönös helyzetét ábrázolás nélkül onnan ismerhetjük fel, hogy a körök középpontjainak távolsága kisebb, mint a sugarak összege: $|\overrightarrow{C_1C_2}| < r_1 + r_2$.



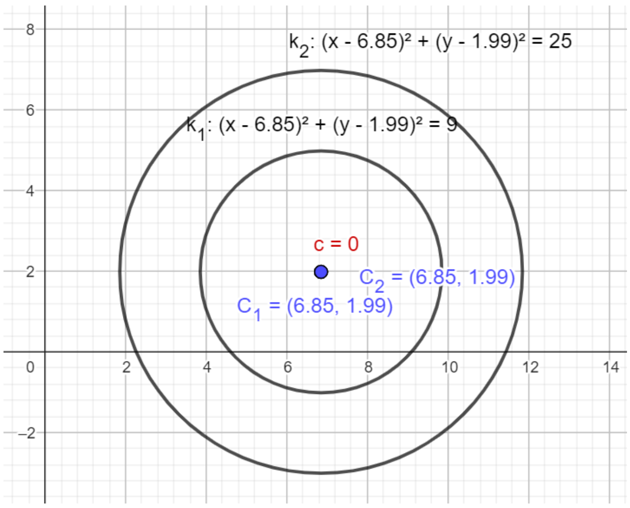
(59. ábra)

A fenti ábrán két belülről érintkező kör láthatunk. A metsző körökhöz hasonlóan, a középpontok távolsága kisebb, mint a sugarak összege, ehhez adódik, hogy most a sugarak különbségének az abszolútértéke megegyezik a közpéppontok távolságával: $|\overrightarrow{C_1C_2}| < r_1 + r_2$ és $|r_1 - r_2| = |\overrightarrow{C_1C_2}|$.



(60. ábra)

A 60. ábrán az egyik kör a másik körön belül van és nem érintkeznek. Itt is igaz, hogy a középpontok távolsága kisebb, mint a sugarak összege, valamint az egyik kör sugara nagyobb, mint a középpontok távolsága: $|\overrightarrow{C_1C_2}| < r_1 + r_2$ és $r_1 > |\overrightarrow{C_1C_2}|\ vagy\ r_2 > |\overrightarrow{C_1C_2}|$.



(61. ábra)

A 61. ábrán koncentrikus köröket láthatunk. Már a körök egyenleteiből észrevehetjük, hogy a körök középpontja megegyezik, valamint, hogy az egyik kör sugara kisebb, mint a másiké

Amellett, hogy a tanórákon nagy hasznát vettem a GeoGebrának, a felkészülésben is nagy segítséget nyújtott. Az órákra tervezett feladatokat mind megoldottam GeoGebrában, így ez fel is gyorsította a folyamatot, valamint a kapott eredményeimet is egyből ellenőrizni tudtam. A felkészülés során szerkesztett ábrákat tudtam is vinni az iskolába, így ezek elkészítése sem jelentett plusz időt. A diákok érdeklődését felkeltette a projektor beüzemelése és használata.

Azonban, mint mindennek, a GeoGebra használatának is voltak, vannak hátrányai. Ilyen például, hogy az rendelkezésre álló számítógép gyakran lassan kapcsol be, lassan tölti be a megnyitni kívánt oldalakat, ezzel perceket véve el az órából. Az összefüggő egyéni iskolai gyakorlaton a projektor a tábla nagy részét eltakarta, ezért előfordult, hogy habár terveztem GeoGebra ábrát, végül mégis a hagyományos tábla mellett döntöttem, mert különben a levezetéseket nem tudtam volna mindenkinek láthatóan felírni. A tanterem fényviszonyai is nagyban befolyásolták a hatékonyságot, túl fényes teremben a diákok nem látták rendesen a kivetített ábrát, és a terem besötétítése is több időt vett igénybe. Szükségem volt egy-két órára, hogy kitapasztaljam, hogy mekkora betűmérettel készítsem az ábrákat, hogy a hátsó padban ülők is jól lássák. Ezek viszont mind kiküszöbölhető problémák, az előkészületeket, ha az idő engedi, becsengetés előtt pár perccel el lehet rendezni, vagy más hasznos dologgal, például házi feladat ellenőrzéssel, eltölteni az időt, amíg minden használatkész. Ez természetesen valamennyivel több tervezést és szervezést igényel, de ez a befektetett energia végül kifizetődik.

Összességében a tapasztalataim a GeoGebrával nagyrészt pozitívok, az ábrák elősegítették a diákok tanulását, felkeltették az érdeklődésüket, valamint segítették az én felkészülésemet is. Ahelyett, hogy elkészítésük, illetve bemutatásuk több időt vett volna igénybe, megfelelő szervezéssel többségében megkönnyítették, felgyorsították a folyamatokat.

8. Összegzés és konklúzió

A dolgozatomban tehát megvizsgáltam a 2012-es és 2020-as Nemzeti Alaptantervet a koordinátageometria témakör szempontjából. A 2020-as NAT-ban lényegesen csökkent az alapkövetelmény minden tekintetben, ez alól a koordinátageometria sem kivétel. Ennek következtében az egyes bizonyítások levezetése nem lehetséges a megfelelő eszköztár hiánya miatt, ezért is különösen fontos, hogy bevonjuk a GeoGebrát a matematika oktatásba, ezzel segítve a tételek, összefüggések szemléltetését, megértését. Habár a követelmény csökkent, az időkeret tágabb lett a 2012-es alaptantervhez képest, de a kellően mély és kreatív feldolgozáshoz még több idő lenne szükséges, a GeoGebra tantermi használata pedig segíthet időt nyerni az órákon.

A GeoGebrát felhasználhatjuk új fogalmak bemutatásához, tételek szemléltetéséhez, összefüggések felfedezéséhez, valamint színesebbé, változatosabbá teheti a tanóránkat. Koordinátageometriában alkalmazhatjuk például a vektorok koordináta-rendszerbe helyezésének szemléltetéséhez, vektorok 90°-os forgatásának bemutatásához, a szabály felfedezéséhez, az egyenes egyenleteinek bemutatásához, illetve a kör egyenletének bemutatásához. Emellett hasznát vehetjük konkrét feladatok ábrázolásához, ellenőrzéséhez, interaktív feladatlapok készítéséhez stb.

A tanterven belül foglaltakon kívül szakkörön, vagy akár fakultáción bemutathatunk a programmal emeltebb szintű fogalmakat, segítségével bebizonyíthatunk tételeket. Példának a GeoGebra segítségével szemléltettem a talpponti háromszöget és a beírt körének középpontját, valamint bebizonyítottam a rá vonatkozó tételt; bemutattam a Feuerbach-kört és az Euler-egyenest, hogy hogyan számítható ki pont és egyenes távolsága az egyenes normálegyenletével és a pont koordinátáival, illetve, hogy a tengelyes tükrözések kompozíciójaként milyen transzformációkat kapunk. Ezeknek az ábráknak az elkészítése hagyományos módon nehezen követhető, valamint a végeredmény kevésbé átlátható, mint a GeoGebrával készített ábra, ezért is fontos a digitális eszköz használata.

A szaktárgyi tanítási gyakorlat és az egyéni összefüggő tanítási gyakorlat során megfigyelhettem, illetve ki is próbálhattam a GeoGebra használatát. Habár nem volt lehetőségem gépteremben a gyerekeket is bevonni a GeoGebra alkalmazásába, a digitális, mozgatható ábrák megemelték a tanóráim színvonalát, a tanulók könnyebben megértették és átlátták a tételeket, észrevették az összefüggéseket, szabályokat. A feladatokhoz készített ábrák sok időt megtakarítottak, hiszen így gyorsabban ellenőrizhették magukat a tanulók, így más, fontosabb dolgokkal foglalkozhattunk. Az órákra való felkészülésemet is javarészt gyorsította a program használata, a gyors feladat megoldás, és egyben önellenőrzés miatt.

Következtetésképpen a GeoGebra használata mindenképpen ajánlott, hiszen a felkelti a tanulók figyelmét, megragadja a figyelmüket. A digitális eszközzel készült ábrák pontosak, így könnyen átláthatóak, elkészülésük követhető. A dinamikus ábrák hozzájárulhatnak az összefüggések, tételek gyorsabb felismeréséhez és megértéséhez, valamint elősegítheti a diákok felfedező tanulását. A GeoGebra sok célt szolgálhat, használhatjuk szemléltetéshez, tételeket, bizonyításokat, konkrét feladatokat szemléltethetünk vele bármilyen szinten, új fogalmakat vezethetünk be, összefüggéseket fedeztethetünk fel a segítségével. Használhatjuk frontális tanításhoz, amikor az egész osztálynak mutatunk be egy fogalmat vagy tételt, használhatjuk interaktív táblán a diákok bevonásával, megfelelő felszerelés birtokában tervezhetünk köré páros vagy csoport munkát, készíthetünk interaktív feladatlapot, adhatunk fel szerkesztési házi vagy szorgalmi feladatot stb.

Ahhoz, hogy a GeoGebra alkalmazása még hatékonyabb legyen, a tantermek felszerelését, berendezését kellene fejleszteni, mivel a tapasztalatok és visszajelzések alapján a GeoGebra az interaktív tábla használatával a legeffektívebb, valamint ahhoz, hogy a diákok is gyakorolhassák a digitális eszköz használatát, illetve kiélvezzék annak minden előnyét, több számítógép hozzáférés lenne szükséges.

Felhasznált irodalom:

1. 2012. Kerettanterv: Matematika, gimnázium. (letöltve 2023.01.23.: https://kerettanterv.oh.gov.hu/03_melleklet_9-12/index_4_gimn.html)
2. 2020. Kerettanterv: Matematika, gimnázium. (letöltve 2023.01.23.: https://www.oktatas.hu/kozneveles/kerettantervek/2020_nat/kerettanterv_gimn_9_12_evf)
3. Árki Tamás, Konfárné Nagy Klára, Kovács István, Trembeczki Csaba, Urbán János: Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11-12. Mozaik Kiadó, Szeged, 2011.
4. GeoGebra 2.5 kézikönyv. fordította: Sulik Szabolcs, 2006. 5. o. (letöltve 2023.02.20.: https://www.uni-miskolc.hu/evml/geogebra/downloads/geogebra-kezikonyv.pdf)
5. Gerőcs László, Vancsó Ödön: Matematika, Akadémia Kiadó, 2010. (megnyitva 2023.03.10.: https://mersz.hu/hivatkozas/m97m_chap05_level3_sec14)
6. Juhász István, Orosz Gyula, Paróczay József, Szászné dr. Simon Judit: Matematika 11. Az érthető matematika, Oktatási Hivatal, Budapest, 2020.
7. Kornai Júlia, Kovács Előd, Lövey Éva, Pálovicsné Tusnády Katalin, Schubert Mihály: Matematika a középiskolák 11. évfolyama számára, II. kötet, Apáczai Kiadó Kft., Celldömölk, 2011.
8. Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István: Sokszínű matematika 11, Mozaik Kiadó, Szeged, 2015.
9. Nemzeti Alaptanterv 2012. (letöltve 2023.01.23.: https://pszheves.hu/wp-content/uploads/2013/08/nat_20121.pdf)
10. Nemzeti Alaptanterv 2020. (letöltve 2023.01.23.: https://magyarkozlony.hu/dokumentumok/3288b6548a740b9c8daf918a399a0bed1985db0f/letoltes)
11. Papp-Varga Zsuzsanna: Interaktív matematika mindenkinek GeoGebra módra, Média- és Oktatásinformatika Tanszék (letöltve 2023.02.23. https://docplayer.hu/14968549-Interaktiv-matematika-mindenkinek-geogebra-modra-papp-varga-zsuzsanna-elte-ik-media-es-oktatasinformatika-tanszek-vzsuzsa-elte.html)

GeoGebra mellékletek az ábrákhoz:

1., 2. ábra: https://www.geogebra.org/classic/scyw5htm

3. ábra: https://www.geogebra.org/classic/fswtjh2y

4., 5. ábra: https://www.geogebra.org/classic/khekzhv7

6. ábra: https://www.geogebra.org/classic/zbgubbsj

7., 8., 9. ábra: https://www.geogebra.org/classic/kydt86rm

10. ábra: https://www.geogebra.org/classic/npuwwff7

11. ábra: https://www.geogebra.org/classic/madaqgnb

12. ábra: https://www.geogebra.org/classic/atbynecx

13. ábra: https://www.geogebra.org/classic/rfe4n3gw

15. ábra: https://www.geogebra.org/classic/k8tkxjvh

16., 17., 18., 19. ábra: https://www.geogebra.org/classic/ns7wndtq

20. ábra: https://www.geogebra.org/classic/qqngtkrp

21., 22., 23., 24., 25., 26., 27. ábra: https://www.geogebra.org/classic/payv2944

28. ábra: https://www.geogebra.org/classic/kwj6csq2

29., 30. ábra: https://www.geogebra.org/classic/hzbzebvr

31. ábra: https://www.geogebra.org/classic/enkam8mc

32. ábra: https://www.geogebra.org/classic/bxdtbw8h

33., 34. ábra: https://www.geogebra.org/classic/emz6zyvt

35. ábra: https://www.geogebra.org/classic/uzfe7crs

36. ábra: https://www.geogebra.org/classic/u9rudhph

37. ábra: https://www.geogebra.org/classic/kuzj7cvh

38. ábra: https://www.geogebra.org/classic/svem5bvw

39. ábra: https://www.geogebra.org/classic/mtqkneef

40. ábra: https://www.geogebra.org/classic/r6vxyzxx

41. ábra: https://www.geogebra.org/classic/eyfjawk8

42. ábra: https://www.geogebra.org/classic/pjpbepz4

43. ábra: https://www.geogebra.org/classic/xeyresdf

44. ábra: https://www.geogebra.org/classic/sfradaqk

45. ábra: https://www.geogebra.org/classic/xfmhycph

46. ábra: https://www.geogebra.org/classic/du3wnq6c

47. ábra: https://www.geogebra.org/classic/d9dxrej3

48. ábra: https://www.geogebra.org/classic/yyc6wtqs

49. ábra: https://www.geogebra.org/classic/dnkscr5e

50. ábra: https://www.geogebra.org/classic/vbmges6k

51. ábra: https://www.geogebra.org/classic/mzxxausa

52. ábra: https://www.geogebra.org/classic/nzezmnhk

53. ábra: https://www.geogebra.org/classic/a4dm7qpv

54. ábra: https://www.geogebra.org/classic/cafmjs2a

55. ábra: https://www.geogebra.org/classic/s2jxmqwf

56., 57., 58., 59., 60., 61. ábra: https://www.geogebra.org/classic/bqkmbhb9