Eredetiségi nyilatkozat

Alulírott ......MEDVEY ZSÓFIA NILLA.. (név)

...ETH2YH........................ (Neptun-kód) ezennel kijelentem és aláírásommal megerősítem, hogy az

ELTE ...matematika tanári - földrajz tanári ...osztatlan tanári mesterszakján írt jelen diplomamunkám saját szellemi termékem, melyet korábban más szakon még nem nyújtottam be szakdolgozatként, és amelybe mások munkáját (könyv, tanulmány, kézirat, internetes forrás, személyes közlés stb.) idézőjel és pontos hivatkozások nélkül nem építettem be.

Budapest, 2023. április 30. ....

Medvey Zsófia Nilla

a hallgató aláírása

Szakdolgozat

Medvey Zsófia Nilla

matematikatanár-földrajztanár
osztatlan tanári mesterszak

2023

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

Természettudományi Kar

Szakdolgozat

Üldözéses feladatok

Témavezetők:

Dr. Besenyei Ádám

habil. egyetemi docens

Dr. Csomós Petra

adjunktus

Készítette:

Medvey Zsófia Nilla

matematikatanár-földrajztanár

osztatlan tanári mesterszak

2023

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Az üldözéses feladatok könnyen megérthető kérdést tesznek fel, de a megoldást már kicsit nehezebb megadni. Minden üldözéses feladathoz szükség van egy üldözőre és egy üldözöttre vagy menekülőre. Az üldöző célja utolérni, elkapni a menekülőt, a menekülő pedig szeretne örökre megmenekülni az őt fenyegető veszélytől. Többféle kerettörténetet adhatunk a különböző kiindulási feltétellel rendelkező feladatoknak, de alapvetően két alaptípust fogunk megkülönböztetni. Az egyik a diszkrét megközelítéssel megoldható kérdések. Ezeket az első fejezetben fogjuk kifejteni. Ezek alaptörténete, hogy egy szelídítő vagy gladiátor bezáródik a ketrecbe egy oroszlánnal. A megoldást egy nyerő stratégia képében keressük a szelídítő számára. Erre három lehetőséget is be fogunk mutatni. A másik alaptípusa az üldözéses feladatoknak a folytonos megközelítéssel megoldható feladatok. Ezekre a második fejezetben hozunk példákat. Itt nem egy nyerő nyerő stratégia, hanem egy mozgás útvonalát keressük. Mivel folytonosnak tekintjük az időt ezekben a feladatokban, mindkét leírt esetben differenciálegyenletek megoldása fogja megadni a választ a kérdésünkre. Ezen feladatok gyökerében lévő matematikai fogalmakat fogjuk bemutatni a harmadik fejezetben. Itt lesz szó arról, hogy az első két fejezetben megjelenő feladatokat miként kapcsolhatjuk be a középiskolai matematika fakultáció menetébe, és ez milyen megalapozást igényel. Az egész dolgozatot átitatja az a szemlélet, hogy a matematika különböző területei között nem élesek a határok, hanem időnként nagyon is szükség van ezek átlépésére. Az üldözéses feladatok megértése és megoldása során a geometria, algebra és az analízis területein is lesz dolgunk.

Többek között ezen szinergiák motiválták a témaválasztásomat is. Ezek a váltások azok, amik akár már a tizenévesek körében is serkenthetik a gondolkodást és az eredeti ötletek kialakulását. Hasonlót tapasztaltam Besenyei Ádám analízis előadásai során. Az ő látásmódja és jól követhető gondolatmenetei segítettek a tanulmányaim során. Az üldözéses feladatok témáját közösen választottuk ki, melynek szántunk egy rendszerező célt is. Vagyis, hogy a témában megjelent cikkek anyagát összesítsük, rendszerezzük és ahol szükséges, precízebb leírást adjunk. Emellett célunk még az is, hogy kialakítsunk középiskolában is használható anyagokat az üldözéses feladatokhoz kapcsolódóan.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném köszönetemet kifejezni Besenyei Ádámnak, hogy betegsége ellenére is segítségemre volt ezen dolgozat megírásában, a téma kiválasztásában, és előadásaival elmélyítette az analízis iránti érdeklődésemet.

Emellett szeretném megköszönni Csomós Petrának, hogy vállalta témavezetésemet, és segítségével a nehéz helyzet ellenére is elkészült ezen szakdolgozat.

Köszönöm férjemnek, gyermekeimnek, testvéreimnek és szüleimnek az összes segítséget és támogatást, amit az egyetemi évek alatt nyújtottak.

1. fejezet

Üldözéses feladatok elemi megközelítése

A cirkuszban az oroszlán kiszökött a ketrecéből. A szelídítője visszacsalogatta, de mikor kihátrált volna a ketrecből, az ajtó becsukódott. A zár kattant, és a szelídítőnek gyorsan kellett megoldást találnia az éhes oroszlán elkerülése érdekében. E mögött a félelmetes történet mögött egy matematikai kérdés bújik meg. A ketrecet tekintsük egy konvex halmaznak. A szelídítő helyét az S, az oroszlán helyét pedig O jelöli. Tegyük fel, hogy az oroszlán és a szelídítő sebessége azonos, amit az egyszerűség kedvéért egy egységnek tekintünk. A feladat tehát az, hogy az S pont mozgását úgy határozzuk meg, hogy O nem éri utol, és S nem megy neki a ketrec falának. Vagyis keressünk menekülési stratégiát a szelídítőnek. Matematikailag a szelídítő mozgását kétféleképpen lehet leírni: mozgását folytonos vagy diszkrét időben tekinthetjük. Az előbbi vezet a differenciálegyenletek területére, amelyet a második fejezetben tárgyalunk. Az utóbbit pedig alább mutatjuk be.

A diszkrét idejű megközelítésben a S pont útja egy törött vonalként adható meg. A mozgás leírásához meg kell adnunk a törött vonal csúcsait, melyeket $S_0, S_1, S_2, \ldots$ jelöl. Emellett pedig, t_i jelöli azt az időt, amely alatt az S_{i-1} pontból a S_i pontba jut a szelídítő. A sikeres meneküléshez az alábbi feltételeknek kell teljesülnie:

- $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = \infty$, így biztosítható, hogy az oroszlán nem éri utol a szelídítőt.
- Az oroszlán útja nem metszi a szakaszt, amin a szelídítő az i-edik időintervallumban mozog.
- A szelídítő nem megy neki a falnak. Ehhez veszünk egy C középpontú, r sugarú kört, és a szelídítő ebben fog mozogni.

A diszkrét idejű megközelítéssel eldöntöttük, hogy az i-dik időintervallumban nem változtatunk irányt, egy-egy adott egyenesen mozog mind az oroszlán, mind a szelídítő.

A következő algoritmusok bemutatják a szelídítő egy-egy lehetséges nyerő stratégiáját. Vagyis megadjuk, hogy mennyit és merre kell mozognia, hogy sikeresen elmeneküljön az oroszlán elől. Ez a fenti jelöléseket használva az i-edik lépésben t_i idő és az S_i pont meghatározását jelenti. Ezek meghatározására több lehetőség is van, azaz többféle stratégiával menekülhet a szelídítő. Az irodalom három ilyet [1] , [2], [3] mutat be, ezeket fogjuk az alábbiakban ismertetni. Mindhárom algoritmus alapvetően arra támaszkodik, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens, míg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens. Ezért ezen üldözéses feladat felfogható ezen sorok konvergeciájának szemléltetéseként. Azonban didaktikailag megkérdőjelezhető, mert az algoritmusok megtalálása, és a sorok konvergenciájára való visszavezetés sokkal nagyobb kihívást jelent, mint a sorok konvergenciájának vizsgálata önmagában. Tehát úgy látjuk, hogy az üldözéses feladatokat diákoknak önálló munkára nem célszerű adni, az algoritmus alap lépéseinek bemutatása után az egyes részletek kidolgozása feladatként kitűzhető. Az üldözéses feladat szépsége, hogy találhatók benne elemi geometriai eszközökkel vizsgálható részletek, emellett az analízis olyan fontos fogalmai mint a határérték és a sorok konvergenciája is előkerül. A megjelenő elemi geometriai módszerek akár már a felső tagozat végén is tárgyalhatók. Az analízissel kapcsolatos részek alkalmasak arra, hogy motiválják a később bevezetendő fogalmakat. Az üldözéses feladatok a középfokú tanulmányok végére a matematikai szinergiák megtapasztalását is elősegítik.

Az alábbiakban bemutatjuk az algoritmusokat, majd bebizonyítjuk, hogy ezek megfelelnek az előbbi feltételeknek.

1.1. Bollobás-féle algoritmus

Az alábbiakban ismertetjük Bollobás Béla által bemutatott stratégiát a szelídítő menekülésére [1]. A többihez hasonlóan ezen algoritmus is azt adja meg, hogy a szelídítő az i-dik időintervallumban hogyan mozog. Fontos megjegyeznünk, hogy az oroszlán mozgásáról semmit nem tételezünk fel az algoritmus megalkotása során, csak az vesszük figyelembe, hogy az adott időintervallum kezdetén hol van az állat. Emlékeztetünk arra, hogy megválasztható egy kör, amely a ketrec belsejében van, és aminek C jelölte a középpontját és r a sugarát. A szelídítő kezdetben is ebben a körben van, és úgy fogjuk megalkotni mozgásának pályáját, hogy ezt a kört ne hagyja el. Az algoritmus érdekessége, hogy a folyamat megkezdése előtt már rögzíthető, hogy az egyes lépések mennyi ideig tartanak, vagyis a t_i sorozat tagjait már előre rögzítjük. Ebben nagy szabadságunk van, mindössze annyit tételezünk fel, hogy

$$\sum_{i=0}^{\infty} {t_i}^2 \leq r^2 \quad \text{és} \quad \sum_{i=0}^{\infty} t_i = \infty. \tag{1.1}$$

A 3. fejeztben bővebben kifejtjük, hogyan adható meg ilyen sorozat. Megjegyezzük, hogy az $t_i = \frac{r}{2i}$ megfelel ezeknek a feltételeknek.

1.1. Algoritmus. Feltételezhető, hogy a szelídítő kiindulópontja (S_1) nem esik egybe a kör középpontjával, azaz $S_1 \neq C$. Jelölje az oroszlán kiindulópontját O_1, azzal a természetes feltevéssel, hogy $O_1 \neq S_1$. Jelölje a szelídítő távolságát a kör középpontjától a kiindulási időpontban $r_1 = \overline{CS_1}$, és feltételezésünk szerint $0 < r_1 < r$. A pályát teljes indukcióval hozzuk létre. Tegyük fel, hogy az i-edik időpontban vagyunk. Ekkor a szelídítő helye $S_i \neq C$, és az oroszlán helye $O_i \neq S_i$. Amint az előbb mutattuk, $i = 1$-re ez teljesül. Jelölje most is a szelídítő távolságát a kör középpontjától $r_i = \overline{CS_i}$. Most határozzuk meg, hogy melyik irányba megy tovább a szelídítő. Ez után mondjuk meg, hogy mennyi ideig fog mozogni abban az irányban. Ez az a pont, amiben a tanulókat leginkább segíteni kell, erre nehéz lehet rájönniük. Legyen ℓ_i egyenes C-n és S_i-n keresztül. A szelídítő erre merőlegesen fut, abban az irányban, amelyik az O_i-től távolabb viszi. Pontosabban O_i-vel kapcsolatban két eset lehetséges:

- az ℓ_i vonalon van, ekkor a szelídítő bármelyik félsík irányába mozoghat,
- az ℓ_i vonal egyik oldalán van, ekkor a szelídítő a másik félsík felé mozog, mint ahol az oroszlán tartózkodik .

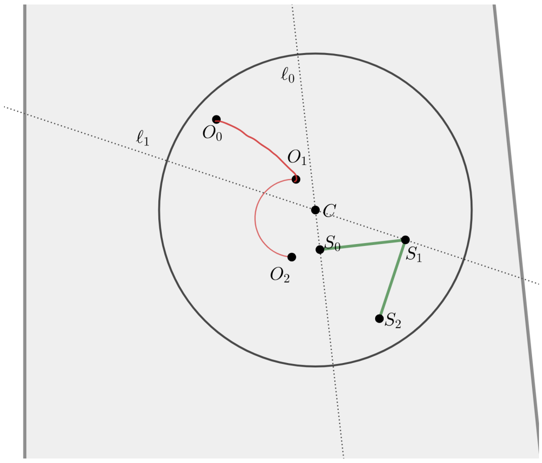
A szelídítő így az ℓ_i egyenestől eltávolodik. Az ilyen irányú mozgást az indokolja, hogy az oroszlán akárhogyan is lendül mozgásba, nem érheti utol a prédáját, mivel ő vagy ℓ_i-n vagy a „rossz” oldalon kezdi mozgását. A mozgás az ℓ_i-re merőlegesen t_i ideig tart. Emlékeztetünk, hogy ezek összege végtelen lesz.

A továbbiakban bebizonyítjuk, hogy ez a stratégia megfelel a korábban leírt feltételeknek.

Bizonyítás. A bizonyítás során a három feltételt egyesével igazolni fogjuk. Az első feltétel, miszerint az oroszlán nem éri utol a szelídítőt, a t_i sorozat választása miatt teljesül.

A második feltétel, azaz hogy az oroszlán útja nem metszi a szakaszt, amin a szelídítő az i-edik időintervallumban mozog, azért áll fenn, mert ahogy az 1.1.ábrán is látjuk, az S_0S_1 szakasz az ℓ_0 egyenes jobb oldalán van, míg az O_0 pont ennek az egyenesnek a bal oldalán van. Mivel az oroszlán sebessége nem lehet nagyobb a szelídítőénél, ezért ugyanannyi idő alatt nem juthat az oroszlán egy pontba a menekülővel. Ez természetesen minden lépésre igaz, az i-dik lépés során az ℓ_i egyenes egyik oldalán van az S_iS_{i+1} szakasz, a másikon pedig az O_i pont.

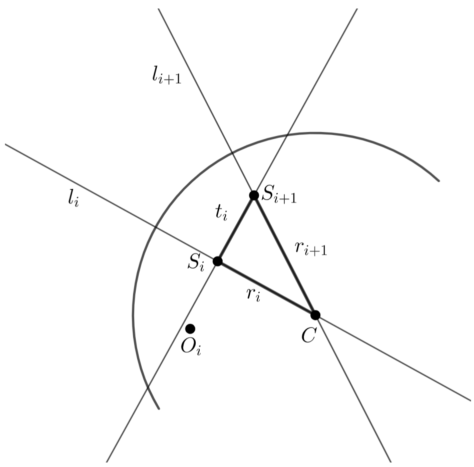
Végül rátérünk arra, hogy a szelídítő nem megy neki a ketrec falának. Ahelyett hogy ezt igazolnánk, bemutatjuk, hogy benne van a körben az $i+1$-edik időintervallum



1.1. ábra. A Bollobás-féle algoritmus

folyamán. Ez következni fog abból, hogy ha megmutatjuk, hogy az S_{i+1} a körben van, mivel az S_i-ről tudjuk, hogy a körben van, és a kör konvex halmaz, így az őket összekötő szakasz is a körben található. Azaz elég igazolni, hogy $r_{i+1} = \overline{CS_{i+1}} < r$. Erről szól a következő állítás.

1.2. Állítás. *Tetszőleges $i \geq 1$ index esetén fennáll az $r_{i+1}^2 = {t_1}^2 + {t_2}^2 + \ldots + {t_i}^2$ összefüggés.*



1.2. ábra. Az i-edik pontból $i+1$-edikbe való lépés a Bollobás-féle algoritmus során

Bizonyítás. Az állítást a Pitagorasz-tételt felhasználva, teljes indukcióval bizonyítjuk. A CS_iS_{i+1} háromszög derékszögű az algoritmus kialakítása miatt, tehát

$$r_{i+1}^2 = {r_i}^2 + {t_i}^2.$$

Az indukciós feltevés szerint $r_i^2 = \sum_{j=1}^{i-1} {t_j}^2$. Ezt a fenti képletbe behelyettesítve megkapjuk, hogy

$$r_{i+1}^2 = \sum_{j=1}^{i-1} {t_j}^2 + {t_i}^2 = \sum_{j=1}^{i} {t_j}^2.$$

□

Most visszatérünk az algoritmus bizonyításának utolsó lépéshez. Az 1.2. Állítás felhasználásával bizonyítjuk, hogy minden i esetén $r_i < r$. Ugyanis az 1.2. Állítás és az (1.1) miatt

$$r_i^2 = \sum_{j=1}^{i-1} {t_j}^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} {t_j}^2 < r^2.$$

Így az 1.1. Algoritmus valóban megfelel mindhárom feltételnek. □

1.2. Jakab-féle algoritmus

A következő algoritmus is a szelídítő egy stratégiáját mutatja be, de a módszer más. A felhasznált cikk [2] sok helyen hibákat tartalmazott, ezek a megértést akadályozták.

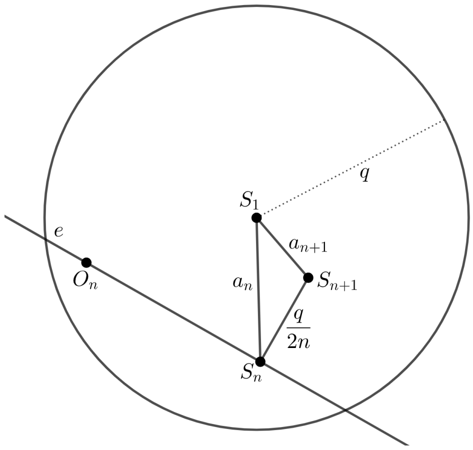
1.3. Algoritmus. Adott a ketrec, ebben a szelídítő kiindulási pontja S_1, az oroszlán kiindulási pontja O_1. Az S_1 körül megadunk egy q sugarú kört, ebben fog mozogni a szelídítő. A feltételek hasonlóak az 1.1. Algoritmusban meghatározottakhoz, vagyis:

- A szelídítő mozgása tetszőleges ideig folytatható, azaz sosem éri utol az oroszlán.
- Az oroszlán nem kapja el az n-edik szakasz során.
- A szelídítő nem megy neki a ketrec falának, vagyis nem megy ki a q sugarú körből.

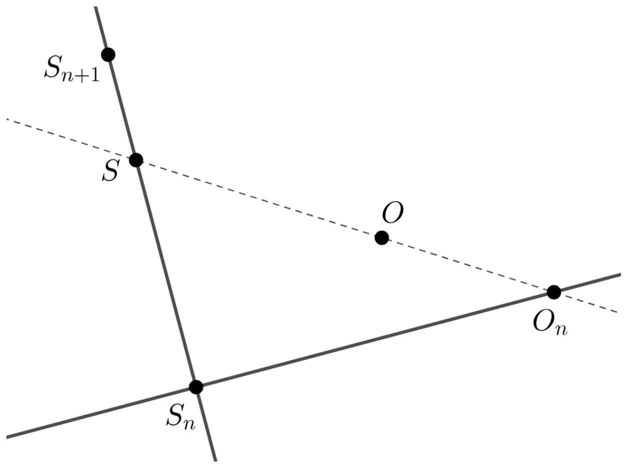
A pályát teljes indukcióval hozzuk létre. Tegyük fel, hogy az n-edik időpontban vagyunk. Ekkor a szelídítő helye S_n, az oroszlán helye $O_n \neq S_n$. Ha S_n és O_n adott, S_{n+1} a következőképpen adható meg. Jelölje e az S_n és O_n pontokat összekötő egyenest. A szelídítő az S_n pontból az S_{n+1} pontba úgy jut, hogy az e egyenesre merőlegesen indul S_1 irányába, mozgása $t_n = q/2n$ ideig tart. Amennyiben az S_1 rajta van az e egyenesen, az irány tetszőlegesen választható. Ez tehát a szelídítő pályáját egyértelműen meghatározza. A továbbiakban bemutatjuk, hogy az előállított pálya megfelel a fenti feltételeknek.

Bizonyítás. A bizonyítás során a három feltételt egyesével igazolni fogjuk. Az első feltétel, miszerint az oroszlán nem éri utol a szelídítőt, következőképpen igazolható

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q}{2n} = \frac{q}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$



1.3. ábra. A Jakab-féle algoritmus



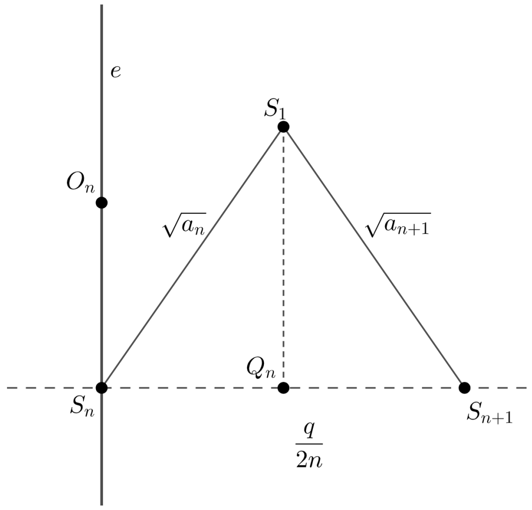
1.4. ábra. Az oroszlán nem kapja el a szelídítőt mozgás közben

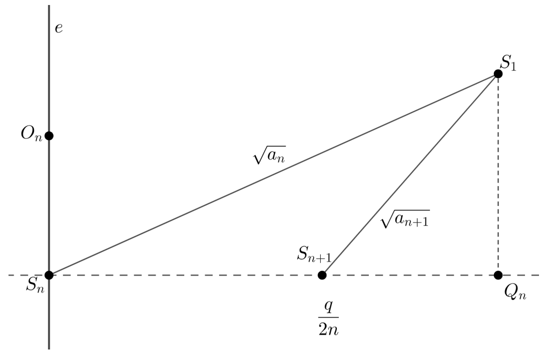
A második feltétel bizonyításához nézzük az 1.4. ábrát. Jelölje S az S_nS_{n+1} szakasz egy pontját, azaz a szelídítő egy tetszőleges helyét az n-edik időintervallumban. Az oroszlán az S pontban nem kaphatja el a szelídítőt, ugyanis az SS_n távolság biztosan kisebb az SO_n távolságnál, hiszen az O_nS_nS háromszög derékszögű, és az SO_n az átfogó. Emlékeztetünk arra, hogy az oroszlán sebessége nem haladja meg a szelídítőét, ezért nem tehet meg hosszabb utat mint amaz.

Végül megmutatjuk, hogy a szelídítő nem megy neki a ketrec falának, vagyis nem megy ki az S_1 középpontú, q sugarú körből. Azaz igazolni fogjuk, hogy $|S_1S_n| < q$. Jelölje $a_n = |S_1S_n|^2$ a vizsgált szakasz hosszának négyzetét. A kívánt feltételt az alábbi állítás segítségével látjuk be.

1.4. Állítás. *Tetszőleges n index esetén fennáll $a_{n+1} - a_n < (\frac{q}{2n})^2$ egyenlőtlenség.*

Bizonyítás. Vetítsük az S_1 pontot az S_n S_{n+1} pontok által meghatározott egyenesre. Jelöljük a vetületi pontot Q_n-nel. A Q_n elhelyezkedése szempontjából két eset lehet-





1.5. ábra. A Q_n pont elhelyezkedése az S_nS_{n+1} szakaszhoz képest

séges, amint azt az ábra mutatja. Az első esetben a Q_n az S_nS_{n+1} szakaszra esik, a második esetben pedig azon kívül van. Tudjuk, hogy a Q_n az e egyenes S_{n+1} felé eső oldalán van. Az e egyenes másik oldalán azért nem lehet a Q_n pont, mert az algoritmust úgy alkottuk meg, hogy a szelídítő az S_n-ből S_1 irányába mozogjon. A két esetben külön bizonyítjuk be a kívánt egyenlőtlenséget.

Tekintsük az első esetben az $S_1Q_nS_{n+1}$ derékszögű háromszöget. A Pitagorasz-tétel szerint

$$a_{n+1} = |S_1S_{n+1}|^2 = |Q_nS_{n+1}|^2 + |S_1Q_n|^2.$$

Vegyük észre, hogy $|Q_nS_{n+1}| \leq \frac{q}{2n}$, mivel a Q_n pont a S_nS_{n+1} szakaszra esik. Az $|S_1Q_n|^2 \leq a_n$ mivel, az S_1S_n átfogó az $S_1S_nQ_n$ derékszögű háromszögben. Ezt a két egyenlőtlenséget behelyettesítjük a fenti Pitagorasz-tételbe, így a következőt kapjuk

$$a_{n+1} = |S_1S_{n+1}|^2 = |Q_nS_{n+1}|^2 + |S_1Q_n|^2 \leq \left(\frac{q}{2n}\right)^2 + a_n.$$

Mindkét oldalból kivonva a_n-et, a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk.

Most rátérünk a második esetre, amikor Q_n az S_nS_{n+1} szakaszon kívül van. Vegyük észre, hogy $|S_1S_{n+1}| < |S_1S_n|$, amint az 1.5. ábrán látható. Ebből következően

$$a_{n+1} = |S_1S_{n+1}|^2 < |S_1S_n|^2 = a_n < a_n + \left(\frac{q}{2n}\right)^2.$$

Mindkét oldalból kivonva a_n-t, a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk. □

Visszatérünk a harmadik feltétel bizonyításához. Adjuk össze az 1.4. Állításban szereplő egyenlőtlenségeket $n = 1$-től kezdve $m - 1$-ig:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_m - a_{m-1}-) < \left(\frac{q}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{(m-1)^2}\right).$$

A bal oldalon a közbülső tagok kiesnek, így $a_1 = 0$ felhasználásával csak az a_m tag marad meg. A jobb oldalon felhasználjuk a $\sum \frac{1}{n^2}$ sor konvergenciáját, pontosabban azt, hogy a sor összege kettőnél kevesebb. Ennek bizonyítását a 3. fejezetben fejtjük ki bővebben. Vagyis

$$a_m < \frac{q^2}{4} \cdot 2 < q^2.$$

Ebből négyzetgyököt vonva

$$|S_1 S_m| < q$$

tetszőleges m esetén.

Ezzel mindhárom feltételt igazoltuk, tehát a stratégia segítségével megmenekül a szelídítő. □

1.3. Totik-féle algoritmus

A következő algoritmus [3] is a szelídítő egy stratégiáját mutatja be ,a módszer az előző szakaszban bemutatotthoz hasonló.

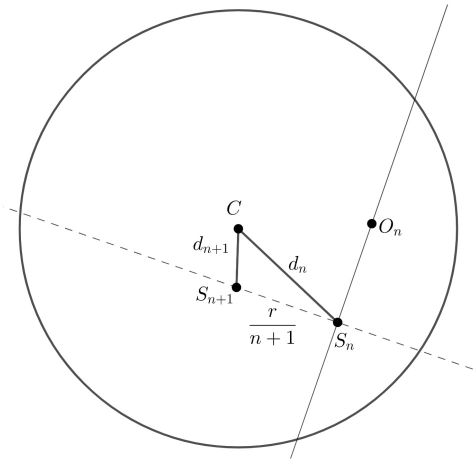
1.5. Algoritmus. Adott a ketrec, ebben a szelídítő kiindulási pontja S_1, az oroszlán kiindulási pontja O_1. Feltehető, hogy van egy C középpontú R sugarú kör, amely a ketrec belsejében van, ebben fog mozogni a szelídítő. A feltételek hasonlóak az előző algoritmusokban meghatározottakhoz, vagyis:

- A szelídítő mozgása tetszőleges ideig folytatható, azaz sosem éri utol az oroszlán.
- Az oroszlán nem kapja el az n-edik szakasz során.
- A szelídítő nem megy neki a ketrec falának, vagyis nem megy ki az R sugarú körből.

A pályát teljes indukcióval hozzuk létre. Tegyük fel, hogy az n-edik időpontban vagyunk. Ekkor a szelídítő helye S_n, az oroszlán helye $O_n \neq S_n$. Ha S_n és O_n adott, S_{n+1} a következőképpen adható meg. A szelídítő az S_n pontból az S_{n+1} pontba úgy jut, hogy az S_n és O_n pontokat összekötő egyenesre merőlegesen fut a kör középpontja, C irányába. Mozgása $t_n = \frac{r}{n}$ ideig tart, ahol r értékét később adjuk meg, de az R sugár harmad része megfelelő lesz. Amennyiben a kör középpontja rajta van az egyenesen, az irány tetszőlegesen választható. Ez tehát a szelídítő pályáját egyértelműen meghatározza. A továbbiakban bemutatjuk, hogy az előállított pálya megfelel a fenti feltételeknek.

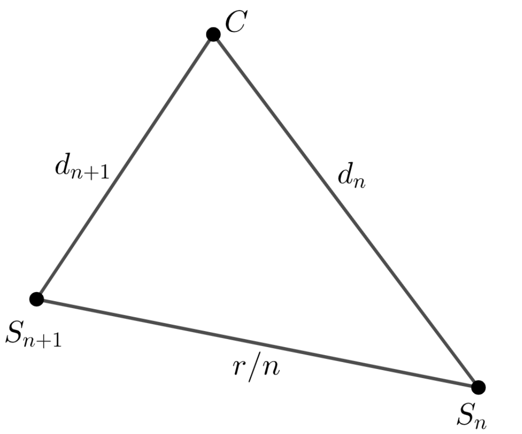
A bizonyítás során szükség lesz a következő állításokra, lemmára. Először ezeket látjuk be. Ezután fogjuk tárgyalni az algoritmus bizonyítását.

Legyen $d_n = |CS_n|$. Az első két állításban becslést adunk a d_{n+1} távolságra.



1.6. ábra. A Totik-féle algoritmus $n+1$-edik pontjának generálása

1.6. Állítás. *Tetszőleges n index esetén fennáll, hogy ha $d_n \leq r$, akkor $d_{n+1} < 2r$.*



1.7. ábra. Az S_n, S_{n+1} és C pontok távolságai

Bizonyítás. Alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget a CS_nS_{n+1} háromszögre.

$$d_{n+1} < d_n + \frac{r}{n} < r + r = 2r.$$

□

Ugyanez a gondolatmenet nem működik a $d_n > r$ esetben, ezért más becslést fogunk levezetni.

1.7. Állítás. *Tetszőleges n index esetén fennáll, hogy ha $d_n > r$, akkor $d_{n+1} < d_n + \frac{r}{2n^2}$.*

Bizonyítás. A bizonyításhoz a koszinusz-tételt fogjuk felhasználni:

$$d_{n+1}^2 = d_n^2 + \left(\frac{r}{n}\right)^2 - \cos\gamma \cdot d_n \cdot \frac{r}{n}.$$

Mivel $\cos\gamma$ pozitív, így a becslés során elhagyható, vagyis

$$d_{n+1}^2 \leq d_n^2 + \left(\frac{r}{n}\right)^2.$$

Ez után gyököt vonunk, és a következőt kapjuk

$$d_{n+1} \leq \sqrt{d_n^2 + \left(\frac{r}{n}\right)^2}. \tag{1.2}$$

A jobb oldal becsléséhez a következő állítás belátására van szükség.

1.8. Állítás. *Tetszőleges pozitív a, és bármilyen b valós szám esetén fennáll, hogy*

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + \frac{b^2}{2a}.$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy az $a+\frac{b^2}{2a}$ összeg négyzetre emelésével könnyen a keresett állításhoz juthatunk:

$$\left(a + \frac{b^2}{2a}\right)^2 = a^2 + b^2 + \frac{b^4}{4a^2} \geq a^2 + b^2.$$

Ebből négyzetgyököt vonva megkapjuk a bizonyítandó állítást. □

$$d_{n+1} \leq \sqrt{d_n^2 + \left(\frac{r}{n}\right)^2}. \tag{1.3}$$

A jobb oldal becsléséhez a következő állítás belátására van szükség.

1.9. Állítás. *Tetszőleges pozitív a, és bármilyen b valós szám esetén fennáll, hogy*

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + \frac{b^2}{2a}.$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy az $a+\frac{b^2}{2a}$ összeg négyzetre emelésével, könnyen a keresett állításhoz juthatunk.

$$\left(a + \frac{b^2}{2a}\right)^2 = a^2 + b^2 + \frac{b^4}{4a^2} \geq a^2 + b^2$$

Ebből négyzetgyököt vonva megkapjuk a bizonyítandó állítást. □

Alkalmazzuk ezt az állítást $a = d_n$, $b = \frac{r}{n}$ választással az (1.3) egyenlőtlenségre.

$$d_{n+1} \leq \sqrt{d_n^2 + \left(\frac{r}{n}\right)^2} \leq d_n + \frac{r^2}{2d_n n^2} = d_n + \frac{r}{2n^2}\frac{r}{d_n}.$$

Ezen a ponton használjuk fel a $d_n > r$ kiindulási feltételt. A fenti képletben az $\frac{r}{d_n}$ törtet 1-gyel becsüljük felülről, így a következő egyenlőtlenséget kapjuk

$$d_{n+1} < d_n + \frac{r}{2n^2},$$

amit bizonyítani akartunk. □

Az eddig kapott állításokat összefoglalhatjuk a következő lemmában.

1.10. Lemma. Bármely $n > 1$ egész szám esetén fennáll, hogy $d_n < 2r + \frac{r}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}$.

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítunk. A kör középpontját úgy választjuk meg, hogy a $d_1 < 2r$ egyenlőtlenség fennálljon. Most rátérünk a bizonyítás azon részére, hogy a tulajdonság n-ről $n + 1$-re öröklődik. Feltételezzük, hogy fennáll

$$d_n < 2r + \frac{r}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2},$$

és igazolni fogjuk, hogy

$$d_{n+1} < 2r + \frac{r}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

A bizonyítást a $d_n \leq r$ és a $d_n > r$ esetekre bontva végezzük el. Ha $d_n \leq r$ akkor az 1.6. Állítást felhasználva

$$d_{n+1} \leq 2r < 2r + \frac{r}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

Ha $d_n > r$ akkor az 1.7. Állítás alapján

$$d_{n+1} < d_n + \frac{r}{2n^2} < 2r + \frac{r}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} + \frac{r}{2n^2} = 2r + \frac{r}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

Ezzel a lemmát igazoltuk. □

Az előkészítés után rátérünk az 1.5. Algoritmus bizonyítására.

Bizonyítás. A bizonyítás során a három feltételt egyesével igazolni fogjuk. Az első feltétel, miszerint az oroszlán nem éri utol a szelídítőt, a következőképpen igazolható

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r}{n} = r\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty.$$

A második feltétel bizonyításához nézzük az 1.4. ábrát. Jelölje S az S_nS_{n+1} szakasz egy pontját, azaz a szelídítő egy tetszőleges helyét az n-edik időintervallumban. Az oroszlán az S pontban nem kaphatja el a szelídítőt, ugyanis az SS_n távolság biztosan kisebb mint SO_n távolságnál, hiszen az O_nS_nS háromszög derékszögű, és az SO_n az átfogó. Emlékeztetünk arra, hogy az oroszlán sebessége nem haladja meg a szelídítőét, ezért nem tehet meg hosszabb utat mint amaz.

Végül megmutatjuk, hogy a szelídítő nem megy neki a ketrec falának, vagyis nem megy ki a C középpontú, R sugarú körből. Azaz igazolni fogjuk, hogy $|CS_n| < R$. Jelölje $d_n = |CS_n|$ a vizsgált szakasz hosszát. A kívánt feltételt a fent ismertetett állítások sorozatával bizonyítjuk be.

Az 1.6. és az 1.7. Állítások és lehetővé teszik, hogy a d_n-re egységes felső becslést adjunk. Erre azért van szükség, hogy be tudjuk látni, hogy a szelídítő nem megy neki a ketrec falának. Az 1.10. Lemmában megfogalmazott becslést tudjuk adni a szelídítő és a kör középpontjának távolságára.

Most van lehetőségünk alkalmas r megválasztására, amelyet a bizonyítás kezdetén ígértünk.

1.11. Tétel. Legyen r olyan szám, amely teljesíti a $3r < R$ feltételt. Ekkor $d_n < R$ feltétel teljesül minden n index esetén.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 2$. (Ld. a 3. fejezet.) Ezt felhasználva az 1.10. Lemma eredménye így írható:

$$d_n < 2r + \frac{r}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2r + \frac{r}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 2r + \frac{r}{2} \cdot 2 = 3r.$$

Tehát a $3r < R$ esetén fennáll, hogy $d_n < R$. Ezért legyen r olyan, hogy $r < \frac{R}{3}$ teljesüljön. □

Ezzel igazoltuk, hogy mindhárom feltételt teljesíti az 1.5. Algoritmust, tehát ez valóban egy menekülési stratégia a szelídítő számára. □

2. fejezet

Üldözéses feladatok differenciálegyenletekkel

Ahogyan a korábbiakban írtuk, ebben a fejezetben fejtjük ki azokat az üldözéses feladatokat, amelyekben az időt folytonos változónak tekintjük. A fő megoldáskeresési módszer a differenciálegyenletek felírása az egyes esetekben. Ebben a fejezetben megjelenő problémák mind különböző egyenletekre vezetnek, ez is segíti a téma széleskörű áttekintését.

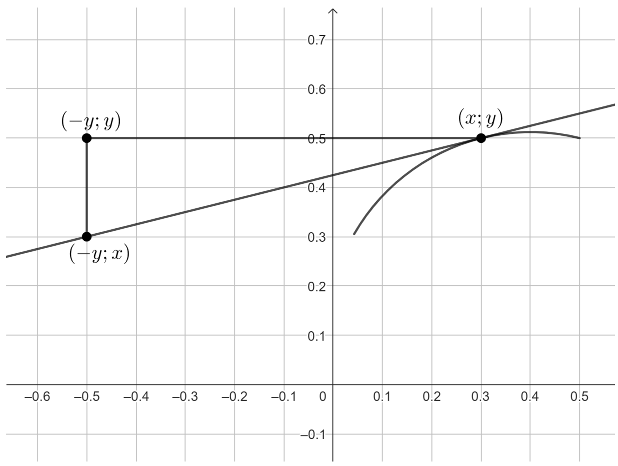
2.1. Egymást elkapó egerek

Egy négyzet alakú szoba négy sarkában ül egy-egy egér. Ugyanabban a pillanatban észreveszik egymást, és mindegyik elkezd a tőle jobbra levő felé futni. Milyen pályát ír le az egerek mozgása?

A problémafelvetés után most rátérünk a pálya megadására [4] . A pálya leírása érdekében helyezzük el az egereket a koordináta-rendszerben úgy, hogy azok az $(1;1), (-1;1),\ (-1;-1), (1;-1)$ pontokból induljanak. Mindegyik állat ugyanazzal a v sebességgel mozog kiszemeltje felé. Ha a megfigyelt egér helyzetét tudjuk, akkor a forgásszimmetria miatt a többi egér helyzete is ismert. Például, ha az $(1,1)$ pontból induló egér (x,y)-ban van, a tőle balra lévő ($(-1,1)$-ből induló) egér helyzete $(-y,x)$. Emiatt elég lesz csak az egyik egér pályáját leírni. Most ez az $(1;1)$ pontból induló egér lesz, jelöljük a pályáját $(x;y(x))$-szel. Az általunk követett egér mozgásának görbéjét egy differenciálegyenlet határozza meg. Ehhez az egér pályájának érintőjét, azaz az y függvény deriváltját keressük, amihez az $(x;y), (-y;y), (-y;x)$ háromszöget használjuk fel, mivel az (x,y) csúcsnál levő szög tangense adja a meredekséget. Ennek értékét a szemben levő oldal $x-y$, és a mellette levő oldal $-y-x$ hányadosa adja. Így a keresett derivált a következőképpen írható fel:

$$y'(x) = \frac{x - y(x)}{-y(x) - x}. \tag{2.1}$$

Tehát ez határozza meg az egér mozgásának pályáját, azzal a kezdeti feltétellel, hogy



2.1. ábra. Az egér mozgási pályája és annak érintője

$y(1) = 1$. Ugyanis ez az egér az $(1; 1)$ pontból indul el. A feladat geometriai vonatkozását itt le lehet zárni, innentől ennek a differenciálegyenletnek keressük a megoldását. A középiskolában természetesen ilyennel nem találkoznak a diákok, tehát nem várható, hogy egy tanuló megoldást tudjon adni. Az egyetemen pedig a szétválasztható és a lineáris differenciálegyenletek kerültek terítékre, azonban az egér pályája nem ilyen típusú egyenletet ad. Észrevehetjük, hogy a (2.1) egyenlet a homogén differenciálegyenletek családjába tartozik, amelyet a az [5] könyv 2. rész, I. fejezetének 3. szakasza alapján a következőképpen definiálunk.

2.1. Definíció. Az $y'(x) = f(x; y(x))$ differenciálegyenletet elsőfokú homogén egyenletnek nevezzük, ha $f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y)$, bármely λ valós szám esetén.

Észrevehetjük, hogy a (2.1) differenciálegyenlet elsőfokú homogén típusú, ugyanis a mi esetünkben

$$f(x, y) = \frac{y - x}{y + x},$$

amelyre teljesül, hogy

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y - \lambda x}{\lambda y + \lambda x} = \frac{y - x}{y + x} = f(x; y).$$

Alkalmazzuk az [5] könyvben ismertetett megoldási módszert, vagyis vezessük be a $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ új ismeretlen függvényt. A $z(x)$ függvényre vonatkozó egyenletet egyszerűbb megoldani, amelyből $y(x) = xz(x)$ alakban kapható meg. Az új egyenlet felirásához deriváljuk ezt az összefüggést:

$$y'(x) = z(x) + xz'(x).$$

A (2.1) egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$z(x) + xz'(x) = \frac{xz(x) - x}{xz(x) + x}.$$

Látható, hogy a jobboldali tört x-el egyszerűsíthető, az egyenlet homogenitása miatt

$$z(x) + xz'(x) = \frac{z(x) - 1}{z(x) + 1}.$$

Ezt átrendezve:

$$xz'(x) = \frac{z(x) - 1}{z(x) + 1} - z(x),$$

melyet közös nevezőre hozva

$$xz'(x) = \frac{z(x) - 1 - z^2(x) - z(x)}{z(x) + 1} = -\frac{1 + z^2(x)}{z(x) + 1}.$$

Ezen a ponton látható, hogy a differenciálegyenlet szétválasztható:

$$z'(x)\frac{z(x) + 1}{1 + z^2(x)} = -\frac{1}{x}. \tag{2.2}$$

A szétválasztható differenciálegyenletek megoldási módszerét alkalmazva keressük mindkét oldal primitív függvényét. A jobb oldal közvetlenül integrálható:

$$\int -\frac{1}{x}dx = c - \ln(x),$$

ahol c tetszőleges valós szám. A bal oldal z szerint primitív függvényét keressük:

$$\int \frac{z + 1}{1 + z^2}dz = \int \frac{1}{1 + z^2}dz + \int \frac{z}{1 + z^2}dz = \operatorname{arctg}(z) + \frac{1}{2}\ln(1 + z^2) + c.$$

A bal és a jobb oldal integrálját helyettesítsük vissza a (2.2) egyenletbe:

$$\operatorname{arctg}(z(x)) + \frac{1}{2}\ln(1 + z^2(x)) = c - \ln(x).$$

Ez azért nem ütközik problémába, mert a baloldal integráljának visszaderiválásakor a $z'(x)$ tag megjelenik az összetett függvény deriválásának szabálya miatt.

Írjuk vissza $z(x)$ helyére az $\frac{y(x)}{x}$ kifejezést, és rendezzük egy oldalra a logaritmust tartalmazó tagokat:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y(x)}{x}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{y^2(x)}{x^2}\right) + \ln(x) = c.$$

A logaritmus azonosságait alkalmazva az alábbit kapjuk

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y(x)}{x}\right) + \ln x\sqrt{1+\frac{y^2(x)}{x^2}} = c,$$

amelyből az x-et a négyzetgyökjel alá bevíve

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y(x)}{x}\right) + \ln\sqrt{x^2+y^2} = c \tag{2.3}$$

kapható.

A differenciálegyenlet megoldása elkészült, de az egerek pályáját, amit keresünk, még nem tudjuk ábrázolni, mert az $y(x)$-et nem tudjuk ebből az alakból kifejezni. Ehhez áttérünk polárkoordinátákra, azaz bevezetjük az r sugarat és φ szöget ($r \geq 0$ és φ valós szám). Ezeket a Descartes-koordinátákkal a következő képletek kapcsolják össze

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Ezekből következik, hogy

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Ezeket behelyettesítve a (2.3) egyenletbe

$$\varphi + \ln r = c.$$

Ebből az egyenletből kifejezhető a sugár a szög függvényében (e alapra emelve mindkét oldalt):

$$r(\varphi) = Ce^{-\varphi}, \tag{2.4}$$

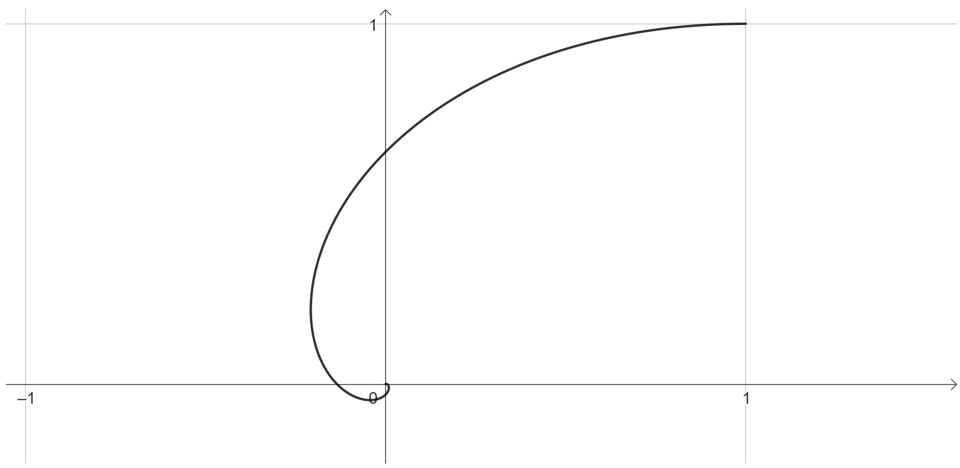
ahol $C \geq 0$. Utolsó lépésként határozzuk meg a C konstans értékét a kezdeti feltételből. Emlékeztetünk, hogy a vizsgált egér az $(x; y) = (1; 1)$ pontból indul. Ezek alapján az $r = \sqrt{2}$ a Pitagorasz-tétel szerint és $\varphi = \frac{\pi}{4}$. A (2.4) egyenletbe ezeket behelyettesítve az alábbi módon kapjuk meg C-t.

$$\sqrt{2} = Ce^{-\frac{\pi}{4}}$$

$$\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} = C$$

$$r(\varphi) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}e^{-\varphi} = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-\varphi}.$$

Ez a logaritmikus spirál egyenlete, vagyis az egerek ezen mozognak. A mozgásuk véges ideig tart, vagyis ezen spirál hossza az origóig véges hosszúságú. Tehát meghatározható, hogy mennyi idő után találkoznak, úgy, hogy vesszük az út hosszának és a sebességnek hányadosát. Megjegyezzük, hogy 2 időegység alatt találkoznak az origóban. Ennek részletes bemutatása megtalálható a [4] szakdolgozat 2.3.1 fejezetében.



2.2. ábra. Az egér mozgási pályája, a logaritmikus spirál

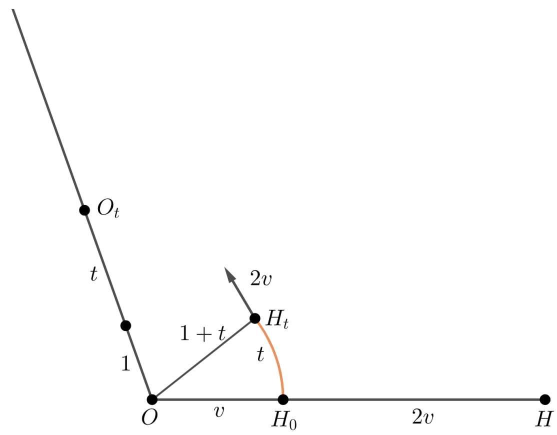
2.2. A tengeralattjárót üldöző hajó

Egy hajó a nagy ködben üldöz egy tengeralattjárót. A köd hirtelen eloszlik, és a hajó kapitánya még éppen meglátja a 3 km messze alámerülő tengeralattjárót. A tengeralattjáró a bemerülési ponttól ismeretlen egyenes irányban v sebességgel menekül, amit a továbbiakban egy egységnek tekintünk. A hajó $2v = 2$ sebességgel tud haladni, és azonnal észreveszi, ha alatta van a tengeralattjáró. Utol tudja-e érni a hajó a víz alatt menekülő tengeralattjárót?

Ez a feladat rendkívül korlátozott, mert a tengeralattjáró csak rögzített sebességgel és irányban tud mozogni. Felmerülhet az olvasóban, hogy a tengeralattjáró pont a sebességét és irányát tudja változtatni. Didkatikai szempontból előnyösebb lehet, ha a kérdés egy rögzített irányban és sebességgel mozgó testről, például egy torpedóról szól. Ekkor a feladat egy rakéta mozgási algoritmusának megadása lenne.

Az algoritmus alapja a [6] könyv 4.3. fejezete alapján a következő. A hajó elindul arrafelé, ahol meglátta a tengeralattjárót. Amikor odaér, egy megfelelően választott ív mentén halad tovább addig, amíg nem találkozik a tengeralattjáróval. Az ív megadásához polárkoordinátákkal fogunk dolgozni. Az O középpont, ahol a tengeralattjáró alábukott, a polárkoordináta-rendszer x tengelye pedig a tengeralattjárót és a hajót összekötő egyenes. A hajó kezdeti helye H, az OH távolság pedig 3 km. A hajó a tengeralattjáró felé mozog 2 km-t, a H_0-al jelölt pontba. Ez a pont $1 : 2$ arányban osztja az OH szakaszt, azért eddig a pontig halad a hajó a tengelyen, mert legelőször itt találkozhatnak. Ez akkor történhet meg, ha a tengeralattjáró is a tengelyen mozog (H irányába). Ha a hajó nem találkozik H_0-ban a tengeralattjáróval, akkor a kapitány tudhatja, hogy az nem a tengelyen mozog, hanem egy másik egyenesen. Ennek megtalálásához egy ívet választ a hajó, amit a következőkben mutatunk be.

Megoldást keresni erre a kérdésre elsőre szinte lehetetlennek tűnik, mivel nem tud-



2.3. ábra. A hajó és tengeralattjáró kezdeti mozása

juk, hogy melyik egyenesen mozog a tengeralattjáró. Felmerülhet, hogy a hajó mozogjon egy ferde egyenesen, de ekkor nem metsz minden lehetséges irányt, amin a tengeralattjáró mehet. Emiatt indokolt lenne egy körvonalon mozognia a hajónak, de akkor meg nem biztos, hogy egy időben jutnak a metszésponthoz. Az időt akkor kezdjük mérni, mikor a hajó H_0-ból elindul, és jelölje $H(t)$ a hajó helyét ettől számítva t időpontban. Megjegyezzük, hogy tengeralattjáró ekkor $1 + t$ távolságra van az origótól, egy számunkra ismeretlen egyenesen. (Emlékeztetünk arra, hogy a tengeralattjáró sebességét 1, a hajóét 2 egységnek tekintjük.) A $H(t)$ pontnak olyannak kell lennie, hogy az éppen $1+t$ távolságra van az origótól. A hajó $H(t)$ helyének sugarát $r(t)$-vel, szögét $\varphi(t)$-vel jelöljük, azaz $r(t) = 1+t$. A pálya leírásához már csak a $\varphi(t)$ függvényt kell meghatározni. A $\varphi(t)$ függvényt egy differenciálegyenlet fogja megadni, amely azt fejezi ki, hogy a hajó pillanatnyi sebessége $2v = 2$. A pillanatnyi sebességet Descartes-koordinátákra írjuk át. Vezessük be a következő jelöléseket

$$x(t) = r(t) \cdot \cos\varphi(t) \quad y(t) = r(t) \cdot \sin\varphi(t).$$

Ezeket deriválva megkapjuk a sebesség komponenseit:

$$v_1 = x'(t) = r'(t) \cdot \cos\varphi(t) - r(t) \cdot \sin\varphi(t) \cdot \varphi'(t),$$

$$v_2 = y'(t) = r'(t) \cdot \sin\varphi(t) + r(t) \cdot \cos\varphi(t) \cdot \varphi'(t).$$

A sebesség nagysága a komponenesieből a Pitagorasz-tétel segítségével fejezhető ki. Ehhez megadjuk a komponensek négyzetét, és felhasználjuk, hogy $r(t) = 1 + t$, és $r'(t) = 1$:

$$v_1^2 = \cos^2\varphi(t) - 2(1+t)\cos\varphi(t)\sin\varphi(t)\varphi'(t) + (1+t)^2\sin^2\varphi(t)\varphi'(t)^2,$$

$$v_2^2 = \sin^2\varphi(t) + 2(1+t)\cos\varphi(t)\sin\varphi(t)\varphi'(t) + (1+t)^2\cos^2\varphi(t)\varphi'(t)^2.$$

Ezen összefüggéseket összeadva

$$v_1^2 + v_2^2 = 1 + (1+t)^2 \varphi'(t)^2.$$

A sebesség nagysága tehát

$$2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{1 + (1+t)^2 \varphi'(t)^2}.$$

Emeljük négyzetre az összefüggést, és fejezzük ki belőle a φ'-t.

$$4 = 1 + (1+t)^2 \varphi'(t)^2,$$

melyből

$$\varphi'(t) = \frac{\sqrt{3}}{1+t},$$

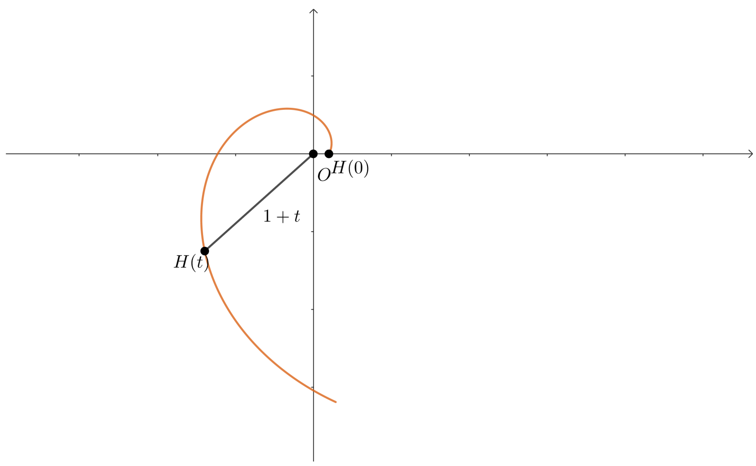
felhasználva, hogy $(1+t) > 1 > 0$. Ebből a $\varphi(t)$ integrálással meghatározható :

$$\varphi(t) = \sqrt{3} \cdot \ln(1+t) + c.$$

A kezdeti $\varphi(0) = 0$ feltételt felhasználva kapjuk, hogy $c = 0$. A hajó pályája a polárkoordináta-rendszerben az $r(t) = 1 + t$ összefüggést felhasználva

$$\varphi(r) = \sqrt{3} \ln r.$$

Tehát megfelelő logaritmikus spirálon mozogva a hajó megtalálja a tengeralattjárót, lásd a 2.4. ábrán.



2.4. ábra. A hajó mozgása az íven történik, a tengeralattjáróé az egyenesen

3. fejezet

Üldözéses feladatok középiskolai tárgyalásban

A dolgozatban eddig bemutatott üldözéses feladatok az iskolába is bevihetők. A diákok a problémafelvetést könnyen megértik, bizonyos fogalmak bevezetéséhez motiválóak ezek a kérdések. Az üldözéses feladatok bevezethetnek tehát a végtelen sorok és a differenciálegyenletek világába. Ez a téma segíthet, hogy a modern matematika eszköztárát közelebb vigyük a diákokhoz, ezáltal jobban megismerjék a lehetőségeket, amiket a mai matematika nyújtani tud. Az egyes témákat úgy dolgozzuk fel, hogy azok a tanórai feldolgozást támogassák.

3.1. Végtelen sorok tárgyalása a középiskolában

A végtelen sorok tárgyalását azzal kezdjük, hogy az összeadást próbáljuk általánosítani először sok, majd végtelen sok tagra. Bevezetésként átismételjük a számtani és mértani sorozatokat, és azok véges összegképletét.

Feladat: Add össze a hárommal osztható számokat 30-ig.

Ez egy számtani sorozat, $a_n = 3n$, a 30 a sorozat tizedik tagja. Emlékezzünk az összegképletre: $S_n = n \cdot \frac{a_1+a_n}{2}$. A feladatot továbbgondolva azt látjuk, hogy minél több tagot adunk össze, az összeg annál nagyobb lesz. Emiatt a diákok sejtése lehet, hogy a végtelen sor összege végtelen.

Feladat: Add össze a kettő hatványait 1024-ig.

Észrevesszük, hogy ez egy mértani sorozat, ahol $a_n = 2^n$, az 1024 a sorozat tizedik tagja. Emlékezzünk az összegképletre: $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$. A feladatot továbbgondolva azt látjuk, hogy minél több tagot adunk össze, az összeg annál nagyobb lesz. Emiatt a diákok sejtése lehet, hogy a végtelen sor összege végtelen. Ebből a két feladatból erősen az a benyomás alakulhat ki, hogy végtelen sok szám összege végtelen, a kérdés nem érdekes. Ezt zökkenti ki a következő feladat.

Hasonlóan gondolkodott erről az ókori ember is, legalábbis Zénon, aki az alábbi paradoxont vetette fel, melyet a Nincs királyi út [7] című könyvben is olvashatunk: A teknős kihívja Akhilleuszt egy futóversenyre. Tegyük fel, hogy Akhilleusz tízszer gyorsabb a teknősnél. A teknős mégis kihívja és még előnyt is ad a hősnek, 100 méteres távon 10 métert. Miután Akhilleusz elfogadta a feltételeket, a teknős felveti, hogy a versenyt nem is kell megtartani, mert ő már meg is nyerte.

Feladat: Utoléri-e Akhilleusz a teknőst az előnyadás után?

Legyen Akhilleusz sebessége $v = 5$ m/s, a teknősé pedig tizedannyi, vagyis $v_t = 0,5$ m/s . Jelölje a_n azt az időt, ami ahhoz kell, hogy Akhilleusz megtegye a kettőjük közötti távolságkülönbséget az n-dik lépésben. Az a_1 jelenti az időt, amíg Akhilleusz a teknős kezdeti előnyét ledolgozza, vagyis 10 métert megtesz. Mivel kiváló futó, sebessége $v = 5$ m/s, így a 10 métert $a_1 = 2$ másodperc alatt teszi meg. Ezalatt a teknős tizedannyit halad, vagyis már csak 1 méter marad az előnye. Ezt $a_2 = 0{,}2$ másodperc alatt teszi meg Akhilleusz. A teknős ezalatt ismét halad előre, de már csak 0,1 métert. Akhilleusz ezt $a_3 = 0{,}02$ másodperc alatt teszi meg. Ez így megy tovább. Tehát a teknős utoléréséhez az alábbi idő szükséges

$$2 + 0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002 + \dots .$$

Ezt az összeget a diákok számológéppel kiszámolhatják, tetszőleges taggal, hogy maguk is érezzék ennek az összegnek a viselkedését. Kiszámolva ezt a összeget megkapjuk a $2{,}2222222\dot{2}$ végtelen szakaszos tizedestörtet, ami úgy is megkapható, hogy a távolságkülönbséget elosztjuk a sebességkülönbséggel. Vagyis $\frac{10}{4{,}5} = 2{,}2222222\dot{2}$. Érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy ez két egészszám hányadosaként is felírható, $\frac{10}{4{,}5} = 2{,}2222222\dot{2} = \frac{20}{9}$. Tehát végtelen sok szám összege is lehet véges. Ez a helyzet a mértani sorozatnál, ha $0 < q < 1$ fennáll a hányadosára.

Ekkor merül fel az a kérdés, hogy mikor lesz végtelen sok szám összege véges, és mikor nem? Ehhez szükségünk lenne egy olyan csökkenő sorozatra, amely pozitív tagokból áll. A tanulóknak is természetesen jöhet, hogy ez a sorozat a természetes számok reciprokai. A kérdés tehát az, hogy

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

véges vagy végtelen ? Célszerű kiszámítani az első néhány tag összegét, a diákok különböző mennyiségű tag összeadásával hozzájárulhatnak ahhoz, hogy össze tudják hasonlítani a különböző hosszúságú sorozatok összegét. A kísérletek nyomán az a benyomásuk támadhat, hogy például 100-ig nem lehet eljutni, de belátható, hogy ez nem igaz, bármilyen nagy lehet az összeg:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}. \tag{3.1}$$

Ez azt mutatja, hogy mindig legalább $\frac{1}{2}$-del növekszik a végtelen összeg, ha kellően sok tagot adunk össze. A fentiekből látható, hogy az n-edik lépésben 2^n tagot kell összeadni. Ha például 100-ig szeretnénk elérni, akkor 200-szor kell a (3.1)-et megcsinálni, vagyis a 2^{200} darab tagot kell összeadni. Ebből következik, hogy bármilyen nagy számig el lehet jutni, tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty,$$

amit pontosabban úgy fogalmazunk meg, hogy a sor divergens.

Ezen példa után következőképpen fogalmazhatjuk meg a kérdést általánosan. Legyen a_n egy nullához tartó, csökkenő sorozat. A kérdés az, hogy az

$$a_1+a_2+a_3+\dots$$

összeg véges vagy végtelen, azaz precíz terminológiával, az összeg konvergens vagy divergens. A fenti példa azt mutatta, hogy az $a_n=\frac{1}{n}$ választással végtelen lesz az összeg. Most mutatunk egy példát, hol a sor konvergens.

Tekintsük az $a_n=\frac{1}{n^2}$ sorozatból előállított sort. Az első nehézség, ami már az $\frac{1}{n}$ sorozatnál is felmerül, hogy az első n tag összegére nem adható meg zárt összegképlet. Tehát itt egy újabb ötlet szükséges. Az alábbi egyszerű azonosság fog elvezetni a konvergencia kérdésének eldöntéséhez:

$$\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n(n-1)}>\frac{1}{n^2}.$$

Ezt felhasználva így becsülhetjük a keresett összeget,

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n\cdot(n-1)}$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$$

A közbülső tagok kiesése miatt az

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}<2$$

egyszerű becslést kapjuk, amely tetszőleges n pozitív egész szám esetén fennáll. Vagyis látható, hogy ezen sor összegére adható egy véges felső becslés. Alsó becslést is meg kell adnunk ahhoz, hogy teljes legyen a megoldás. Ez természetesen adódik, mivel pozitív számok összegét vesszük, így az alsó becslés a nulla. Tehát a keresett összeg nulla és kettő közé esik, vagyis a csendőr-elv alapján valóban konvergens a sor, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2.$$

Az első fejezet (1.1) feltétel teljesítéséhez most meg tudjuk adni a t_i sorozatot, adott r pozitív számhoz. Legyen a $t_i = \frac{r}{2i}$, így az összeg

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{r^2}{4i^2} = \frac{r^2}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < 2 \cdot \frac{r^2}{4} < r^2.$$

Tehát az (1.1) felétel valóban teljesül.

A fent bemutatott végtelen sorok tananyaghoz alább egy tematikus terv található, amely egy lehetséges felépítés a matematika fakultáción való tárgyaláshoz.

3.2. Polárkoordináták

A második fejezetben tárgyalt üldözéses feladatok rávilágítanak, hogy egy másfajta koordinátrendszer bevezetése segíthet a feladatok megoldásában. Az iskolában megtörténik a koordinátarendszer bevezetése, de csak a merőleges, Descartes-koordinátarendszert tárgyaljuk, használjuk. Érdemes tudatosítani a tanulókban, hogy a koordinátarendszer összekapcsolja az algebrát a geometriával. Míg az r sugarú kört a geometriában úgy értelmezzük, mint a középponttól r távolságra lévő pontok halmazát, addig az algebrai megközelítésben az $x^2+y^2 = r^2$ képlettel adjuk meg. Ekkor feltehető a kérdés, hogy egy kör megadható-e más képlettel, más koordinátarendszerben. A válasz kereséséhez segítség lehet, ha egy fél vagy egy negyed kör képletét keressük. A leggyakrabban használt alternatív koordinátarendszer a polárkoordinátarendszer, amelyben a két koordináta (r, φ). Az r az origótól vett távolságot, a φ a pontot az origóval összekötő szakasz vízszintessel bezárt szögét jelöli. A két koordinátarendszer közötti kapcsolatot az

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

képletek adják meg. Tehát például az $(x; y) = (1; 1)$ pont polárkoordinátáinak megadása egy alkalmas bevezető feladat. Ennek megoldása, $r = \sqrt{2}$ és $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

A téma elmélyítésének következő lépése a kör, például az egység sugarú kör megadása. Ennek Descartes-koordinátákban az egyenlete $x^2 + y^2 = 1$, míg polárkoordinátákkal $r = 1$-el adható meg. A kör formális megadása halmazként

$$\{(r; \varphi) : r = 1\}.$$

Az a tény, hogy a φ nem szerepel a képletben fejezi ki azt, hogy bármilyen értéket felvehet. Ez a diákok számára szokatlan lehet, ezért fontosnak tartjuk, hogy külön figyelem legyen ennek szentelve. A polárkoordinátákkal más, amúgy nehezen leírható görbék is megadhatók, ilyen például a spirál. Ennek motivációja lehet a 2. fejezetben bemutatott feladatok megoldása. Ezekben az esetekben már a φ is szerepel az alakzat egyenletében. A logaritmikus spirál egyenlete $r = \mathrm{e}^{\varphi}$. Az üldözéses feladatok megmutatták azt is, hogy a görbéket lehet úgy is tekinteni, mint egy pontnak az útja, amin az végig fut. Vagyis a görbe a pont mozgásának nyomvonala. Legegyszerűbb példaként tekintsük ismét a kört, amelynek már kétféle leírását is megadtuk. A harmadik az origó középpontú, egység sugarú kör paraméteres egyenlete, amelyben a koordináták

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad 0 < t < 2\pi.$$

A félkör és a negyedkör a $0 < t < \pi$ és $0 < t < \frac{\pi}{2}$ paraméterekkel írható le. Ez a megközelítés sokkal egyszerűbbé teszi a félkör vagy más nemegész kör megadását. Például a felső félkör egyenlete

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad 0 < t < \pi.$$

Ez a paraméteres előállítás azt jelenti, hogy a t paramétert mozgatjuk a $[0; \pi]$ intervallumban, eközben az $(x(t); y(t))$ végigfut a felső félkörön.

3.3. Differenciálegyenletek

A második fejezetben megjelenő példák differenciálegyenletekre vezettek, ezért ebben a szakaszban az ehhez kapcsolódó fogalmak középiskolai bevezetését, ismeretterjesztését tárgyaljuk. Bemutatjuk az alapfogalmakat és az elsőrendű egyenletek alapvető típusait.

A differenciálegyenletek olyan egyenletek, ahol az ismeretlen nem egy szám, hanem egy függvény, és az egyenletben ezen függvény és deriváltjai szerepelhetnek. Az elsőrendű közönséges differenciálegyenlet általános alakja

$$x'(t) = f(t, x(t)), \tag{3.2}$$

ahol az f kétváltozós függvény adja meg a differenciálegyenletet. A következő példákon a diákok gyakorolhatják, hogy különböző elsőrendű egyenletek során milyen f választással hozhatók általános alakra:

- $x'(t) = 3x(t) + \sin t$ esetében a jobboldal $f(t, y) = 3y + \sin t$ alakban írható fel,
- $x'(t) = x^2(t)$ esetében a jobboldal $f(t, y) = y^2$ alakban írható fel,
- $x'(t) = \frac{\sqrt{3}}{1+t}$ esetében a jobboldal $f(t, y) = \frac{\sqrt{3}}{1+t}$ alakban írható fel,

- $x'(t) = x(\frac{t}{2})$ esetében a jobboldalhoz nincs alkalmas függvény.

A megadott f függvényekben, az y helyére $x(t)$-t helyettesítve megkapjuk a megfelelő differenciálegyenleteket.

Fontos kiemelni, hogy a differenciálegyenletek használatát a hétköznapi élet folyamatainak leírása motiválja. A differenciálegyenletek először a fizikában jelentek meg, a mozgások leírása során, Newton második törvénye, $F = m \cdot a$ maga is egy differenciálegyenlet, mert a gyorsulás az elmozdulás-idő függvény második deriváltja, azaz $a = x''(t)$. A szabadesés esetében a testre ható erők $F = m \cdot g$, így a differenciálegyenlet

$$m \cdot x''(t) = m \cdot g,$$

ahol m a test tömeg és g a gravitációs gyorsulás. Az egyenlet mindkét oldalát $m \neq 0$-mel egyszerűsítjük, integrálva a sebesség $x'(t) = gt + v_0$, amelyet még egyszer integrálva a test helye $x(t) = g\frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0$, ahol x_0, y_0 tetszőleges valós számok. Felhívhatjuk a tanulók figyelmét, hogy ezt már tanulták a fizikaórán.

A rugóra akasztott test mozgása esetében egy bonyolultabb differenciálegyenletet kapunk, ugyanis az erő ekkor a test helyétől is függ, vagyis $F = -k \cdot x$, ahol k a rugóállandó és x a test helye. Ekkor a differenciálegyenlet

$$mx''(t) = -k \cdot x(t).$$

Felhívhatjuk a figyelmet arra, hogy ez nem oldható meg csupán csak integrálással, mert az ismeretlen függvény a jobb oldalon is szerepel. A konstansokat egynek választva egy olyan függvényt keresünk, aminek a második deriváltja megegyezik az ellentettjével, így kerül a szinusz és koszinusz függvény a harmonikus rezgőmozgás képletébe. Ezek mellett a műholdak, bolygók mozgásának leírásához is differenciálegyenleteket használunk, de ezek jóval bonyolultabbak a fent említettekhez képest. Természetesen nem csak a mechanikában jelennek meg a differenciálegyenletek. Az oldódás folyamatának is egyszerű alakban megadható a differenciálegyenlete:

$$x'(t) = -k \cdot x(t),$$

ahol k az oldódás sebességére jellemző arányossági tényező, $x(t)$ pedig a még fel nem oldódott anyag mennyisége. A megoldás során egy olyan függvényt keresünk, aminek a deriváltja saját maga. Ez felhívja a figyelmünket arra, hogy milyen fontos az e szám, ugyanis az e alapú exponenciális függvény az, aminek deriváltja önmaga. Így a megoldás az

$$x(t) = e^{-kt} \cdot x(0),$$

amelyet az összetett függvény deriválási szabálya alapján ellenőrizhetünk. Ugyanez a differenciálegyenlet alkalmas a gyógyszerfelszívódás modellezésére, segítségével megadható, hogy milyen gyakorisággal kell a gyógyszert bevenni. További példák sorolása helyett bemutatjuk a legfontosabb alapvető típusokat, megoldási módszereiket, és mindegyikhez egy szemléletes példát hozunk, amin a típusok különbségei jól érzékelhetők.

3.3.1. Integrálható differenciálegyenletek

Az (3.2) elsőrendű közönséges differenciálegyenletet integrálhatónak nevezzük, ha a benne szereplő f függvény

$$f(t, y) = g(t)$$

alakú. Azaz az egyenletben a jobb oldalon nem szerepel az ismeretlen függvény, hanem az $x'(t) = g(t)$ alakban írható.

Az egyenlet megoldási módszere rendkívül egyszerű, mindkét oldalát integrálva megkapjuk az $x(t)$ ismeretlen függvényt.

Egy példa, amely jól szemlélteti ezt a típust:

$$x'(t) = \frac{1}{1+t},$$

azaz $g(t) = \frac{1}{1+t}$. Ennek primitív függvénye $\ln(1+t) + c$. Tehát az egyenlet megoldása

$$x(t) = \ln(1+t) + c.$$

Az ismeretlen c konstansra a kezdeti feltétel alapján $c = x(0)$ adódik.

3.3.2. Szétválasztható változójú differenciálegyenlet

A (3.2) elsőrendű közönséges differenciálegyenletet szétválasztható változójúnak nevezzük, ha a benne szereplő f függvény

$$f(t, y) = g(t) \cdot h(y)$$

alakú, ahol $h \neq 0$. Az egyenletben az ismeretlen függvény külön tagként szerepel, vagyis $x'(t) = g(t) \cdot h(x(t))$ alakú.

A szétválasztható differenciálegyenlet megoldása során az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk $h(x(t))$-vel. (Ezért nem lehet $h = 0$.) Így az

$$\frac{x'(t)}{h(x(t))} = g(t)$$

egyenlethez jutunk. Ezt t szerint integrálva a keresett függvényre kapunk egy algebrai egyenletet.

Egy példa, amely jól szemlélteti ezt a típust:

$$x'(t) = x(t)t^2.$$

Ekkor a szereposztás a következő : $h(y) = y, g(t) = t^2$. A megoldási módszerben ismertetett osztást elvégezve

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = t^2.$$

Ezt integrálva t szerint

$$\ln |x(t)| = \frac{t^3}{3} + c.$$

Tehát

$$|x(t)| = e^{t^3/3} \cdot e^c.$$

Vagyis

$$x(t) = K \cdot e^{t^3/3},$$

ahol K tetszőleges valós szám. Az ismeretlen K konstansra a kezdeti feltétel alapján $K = x(0)$ adódik.

3.3.3. Lineáris differenciálegyenletek

A (3.2) elsőrendű közönséges differenciálegyenletet lineáris nevezzük, ha a benne szereplő f függvény

$$f(t, y) = a(t)y + b(t)$$

alakú. Ez a típus az $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ egyenlettel írható le. Megoldási módszere már nem olyan rövid, lépései a következők:

Az egyenlet mindkét oldalából kivonjuk az $x(t)$-t tartalmazó tagot:

$$x'(t) - a(t)x(t) = b(t).$$

Ezután az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk $e^{-A(t)}$-vel, ahol $A' = a$, azaz A az a primitív függvénye:

$$x'(t)e^{-A(t)} - a(t)x(t)e^{-A(t)} = b(t)e^{-A(t)}.$$

Észrevehetjük, hogy a bal oldal egy szorzat deriváltja, azaz

$$\left(x(t) \cdot e^{-A(t)}\right)' = e^{-A(t)} \cdot b(t).$$

Ezt egy tetszőleges t_0 valós számtól integrálva

$$x(t) \cdot e^{-A(t)} = \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} \cdot b(s)ds,$$

amelyet $e^{A(t)}$-vel megszorozva a megoldást

$$x(t) = c \cdot e^{A(t)} + e^{A(t)} \cdot \int\limits_{t_0}^{t} e^{-A(s) \cdot b(s)} ds$$

alakban kapjuk meg.

Egy példa, amely jól szemlélteti ezt a típust:

$$x'(t) = x(t) + e^{2t}$$

Ebben az példában $a(t) = 1$ és $b(t) = e^{2t}$. A megoldási módszert követve először $x(t)$-t vonjuk ki:

$$x'(t) - x(t) = e^{2t}.$$

A következő lépéshez kell $A(t)$. Ezt $A' = a$-ként definiáltuk, ezért most $A(t) = \int a(t)dt = \int 1dt = t + c$. Ezt felhasználva a következő lépés a szorzás $e^{-A(t)} = e^{-t}$-vel:

$$x'(t) \cdot e^{-t} - e^{-t} \cdot x(t) = e^{t}$$

Látható, hogy a bal oldal egy szorzat deriváltja, tehát

$$\left(x(t) \cdot e^{-t}\right)' = e^{t}.$$

Ezt integráljuk 0 és t között:

$$x(t) \cdot e^{-t} - x(0) \cdot e^{-0} = \int\limits_{0}^{t} e^{s} ds = [e^{s}]_0^t = e^{t} - e^{0} = e^{t} - 1.$$

Tehát ezt összefoglalva:

$$x(t) \cdot e^{-t} = x(0) + e^{t} - 1.$$

Az utolsó lépés során az egyenletet e^{t}-vel megszorozva megkapjuk a keresett függvényt.

$$x(t) = e^{2t} + (x(0) - 1) \cdot e^{t}.$$

3.3.4. Homogén differenciálegyenletek

A (3.2) elsőrendű közönséges differenciálegyenletet homogénnek nevezzük, ha a benne szereplő f függvény

$$f(t, y) = g\left(\frac{y}{t}\right)$$

alakú. Ezen tört alak az egyenletében is megjelenik: $x'(t) = g\left(\frac{x(t)}{t}\right)$.

A megoldáshoz ötlet szükséges olyan formán, hogy egy új ismeretlent kell bevezetni, amelyhez érdemes az

$$y(t) = \frac{x(t)}{t}$$

alakot választani. Így $x(t) = t \cdot y(t)$ összefüggést kapjuk. Ennek deriváltja

$$x'(t) = y(t) + t \cdot y'(t).$$

Ezt beírjuk a differenciálegyenletbe, ezáltal a kérdést visszavezetjük egy szétválasztható differenciálegyenletre:

$$y(t) + t \cdot y'(t) = g(y(t)).$$

Ebből az egyenletből kivonunk $y(t)$-t

$$t \cdot y'(t) = g(y(t)) - y(t).$$

Így megkapjuk a szétválasztható változójú differenciálegyenletet.

A 2. fejezetben leírt egeres példa jól szemlélteti ezt a típust, ezért itt most nem mutatunk be példát a homogén differenciálegyenletekre. Megjegyezzük, hogy ott mások a jelölések, $x(t)$ helyett $y(x)$ és $y(t)$ helyett $z(x)$ szerepel.

3.4. Tanórai megvalósítások

Ebben a szakaszban konkrét megvalósítási lehetőségeket mutatunk a tárgyalt témakörökről, leginkább tanórai vagy szakköri feldolgozására. A végtelen sorok témakörében bemutatunk egy tematikus tervet, amely egy nagyobb tanulási egységet ölel fel. A polárkoordinátákhoz kapcsolódóan egy témát bevezető óra tervét mutatjuk be.

A végtelen sorokat csak akkor tudjuk bemutatni a fakultáción, ha a diákok rendelkeznek előzetes tudással a sorozatokról, és ismerik az analízis fontosabb elemeit, úgymint a határérték, a deriválás és az integrálás. A Nemzeti Alaptanterv alapján a sorozatok tárgyalását már 1. osztályban megkezdik a tanulók. Ekkor nyilván még kézzelfogható példákon, de ez már megalapozza a gondolkodást, amely szükséges a későbbiekben. Felső tagozat végére már elvárás, hogy a diákok képesek legyenek sorozatot folytatni, és néhány tag alapján felismerni a szabályt, majd folytatni a sorozatot.

A középiskolai tanulmányok végére a diákok *„számtani és mértani sorozatokat adott szabály alapján felír, folytat; a számtani, mértani sorozat n-edik tagját felírja az első tag és a különbség (differencia)/hányados (kvóciens) ismeretében; a számtani, mértani sorozatok első n tagjának összegét kiszámolja; mértani sorozatokra vonatkozó ismereteit használja gazdasági, pénzügyi, természettudományi és társadalomtudományi problémák megoldásában”* ahogyan a Nemzeti Alaptanterv 2020-as [8] verziója írja. Amikor ezt tanítjuk, akár egy középszintű érettségire készülő csoporttal is meg lehet ismertetni nagyvonalakban az üldözéses feladatokat.

A Nat [8] a fent felsoroltakat a 12. osztály végére várja el, mint tanulói eredmény. Ezeket konkretizálják, és fejtik ki részletesebben a két évfolyamonkénti kerettantervek.

A sorozatok témakörét a felső tagozatban csak 5-6. osztályban tárgyaljuk [9]. Ekkor csak a felismerés szintjén kell mozogni a sorozatok témakörében, és egyszerű sorozatok folytatása az elvárás. A középiskolában csak az érettségihez közelebb kerül elő a témakör [10]. A 11-12. évfolyamon a középszintű érettségire készülve is a számtani és mértani sorozatokat kell alaposan ismernie a diákoknak. Vagyis tudniuk kell n-edik tagot, első n tag összegét megadni mindkét típusú sorozathoz. Ezek mellett még tudniuk kell alkalmazni ezen sorozatokat különböző gazdasági, társadalmi kérdések megoldásához. Látható, hogy eltelik pár év a sorozatok tárgyalása közben. Ez aggodalomra adhat okot, de a sorozatokhoz más témakörök és akár más tantárgyak során is nyúlhatunk. Kézenfekvő a függvények, a statisztika tárgyalása során, de az ének, fizika és földrajz órán is segítségünkre lehetnek.

A határérték, deriválás, integrálás nem kerül elő a középszintű tanulmányok során, erről az emelt szintű érettségi vizsgatájékoztatójából [11] tudhatunk meg többet. Innen megtudhatjuk, hogy azon diákoknak, akik emelt szinten szeretnének érettségizni matematikából, ismerniük kell a sorozatok kapcsán a korlátosság, a monotonitás és a folytonosság fogalmát. Emellett otthonosan kell mozogniuk a konvergens sorozatok területén, ezek összeadásában, kivonásában, szorzatában, hányadosában és ezek határértékének megadásában. Tudniuk kell értelmezni a véges és a végtelenben vett határértékeket. A deriválás és integrálás témakörében a főbb alapvetések, szabályok és alap alkalmazások (pl. területszámítás) képzik a tudásanyagot. Ezek természetesen önmagukban is nehezek és sok időt igénylőek tudnak lenni. Ennek ellenére a lent bemutatott tematikus terv segítheti a téma elmélyítését, és érdeklődést felkeltő erőként is hathat.

A polárkoordinátákról készített bevezető óra tervezete már nem ennyire egy témakörhöz kapcsolódik, mint az előzőek. A Nemzeti Alaptanterv szerint a Descartes-koordinátarendszert a felső tagozat végére készség szinten kell tudni használnia a tanulóknak. Ezek mellett a Nat Függvényszerű gondolkodás szakaszában [8] a hozzárendelések, grafikus ábrázolás értéktábla alapján és egyszerű grafikonok jellemzése is tanulási eredményként van megadva. A kerettantervek 5-6. és 7-8. évfolyamon [9] is ugyanazt fogalmazzák meg, ami egyenértékű a Natban leírtakkal. Vagyis a spirális oktatás elvét alkalmazva 5. osztálytól kezdve 8.-ig jutnak el a tanulók a Natban megfogalmazottakig. Ezek után, a középiskolában, mindenképp meg kell ismerniük a tanulóknak a síkot, a síkidomokat, egyenest, kört a geometriai megközelítésben. A középiskolás korosztályra a koordinátageometria szakaszhoz van hozzárendelve az egyenes és a kör egyenlete [10]. Középszinten az egyeneseket behatóan, a körből csak a sugár és középpont ismeretében kell tudni megadni az egyenletet. A kerettanterv 9-10. évfolyamon [10] a függvényekre és jellemzésükre helyezi a hangsúlyt, ezzel is megalapozva a 11-12. évfolyamon kifejtendő témakört, a koordinátageometriát. Így a kidolgozott óraterv érdekességként egy ilyen csoportban is felhasználható.

Emelt szinten szintén [11] alapján látható, hogy a kör a koordinátarendszerben egy összetett téma. Az emelt szinten érettségizőknek le kell tudniuk vezetni a kör egyenletét, két kör kölcsönös helyzetének, metszéspontok megadására is képesnek kell lenniük. Ezek mellett még a külső pontból húzott érintő egyenletének megadása is a tudásanyag részét képzi. Ezek alapján azt mondhatjuk, hogy a polárkoordináták bevezetése emelt szinten is érdekességként tekinthető, mivel a kidolgozott óraterv nem abban okozhat nehézséget, hogy a megjelenő témák nehezek, inkább a matematikai látásmód fejlesztésére alkalmas. Segíthet, hogy ne csak a megszokott, képletszerű gondolkodás mélyüljön el a diákokban, hanem időnként lépjenek egyet hátra és nagyobb képet lássák.

Óra	Tematika	Megjegyzések
1. óra	Számtani sorozatok ismétlése Megjelenő fogalmak: számtani sorozat, n-edik tag képlete, összegképlete	Kerettantervi kötődéseket ld. fent
2. óra	Mértani sorozatok ismétlése Megjelenő fogalmak: mértani sorozat, n-edik tag képlete, összegképlete	Számtani, mértani közép Számtani-mértani összefüggés
3. óra	A végtelen sor fogalma Végtelen sok tag összege számtani és mértani esetben	Zénon-paradoxonok
4. óra	$\sum \frac{1}{n}$ sor vizsgálata Megvizsgálni, hogy számtani vagy mértani-e ez a sor Látjuk, hogy nincs összegképlete Ehhez az 1., 2., 3. tag számtani és mértani átlagát kell ellenőrizni Harmonikus közepet is ellenőrizzük Becslést adunk, hogy az összeg végtelen	Excel (vagy Google Táblázatok) használata első n tag összegének kiszámolásához Harmonikus közép fogalmának ismétlése
5. óra	$\sum \frac{1}{n^2}$ sor vizsgálata Megvizsgálni, hogy számtani vagy mértani-e ez a sor Látjuk, hogy nincs összegképlete Ehhez az 1., 2., 3. tag számtani és mértani átlagát kell ellenőrizni Becsléshez ötlet kell: $\frac{1}{n^2}$ alulról kell becsülni $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} > \frac{1}{n^2}$ Ezzel belátjuk, hogy az összeg véges	Excel (vagy Google Táblázatok) használata első n tag összegének kiszámolásához
6. óra	Oroszlános feladatok bemutatása Szereposztásokat a feladaton belül közösen kitalálni	

3.1. táblázat. Tematikus terv a végtelen sorok témakörhöz

Idő	Tevékenység	Munkaforma
7 perc	Bevezetés: Koordináta-rendszerek ismétlése Egyenes és kör egyenletének ismétlése $y = mx + b$ és $r^2 = x^2 + y^2$ Feladatok: két pontból meghatározni az egyenes egyenletét Középpont és sugár alapján a kör egyenletének meghatározása	egyéni munka, tanulók a táblánál a megoldásokat bemutatják
10 perc	Más koordináta-rendszer keresése Polárkoordináták bevezetése Néhány pont meghatározása Descartes- és polárkoordináta-rendszerben Feladatok: $(1;1), (1;-1)$ pontok megadása polár-koordinátákkal	tanári magyarázat páros munka
10 perc	Kör egyenletének meghatározása polárkoordinátákkal 1.) Egységsugarú kör 2.) Félkör 3.) Negyedkör	páros munka
8 perc	Logaritmikus spirál képletének megadása, közös kielemzése Fontos észrevétel: sugár függ a szögtől	frontális osztálymunka
10 perc	Görbe paraméterezésének bevezetése egeres, hajós feladat bemutatása Szemléltetés Geogebrával	tanári magyarázat

3.2. táblázat. Óraterv a polárkoordináták bevezetéséhez

Összefoglalás

Ahogyan a bevezetésben is írtuk, a dolgozatnak hármas célja volt. Az első, hogy az üldözéses feladatokat rendszerezzük. A második, hogy precízebb, bővebb leírását adjunk a cikkekben megjelenő levezetéseknek, mivel azok sok helyen nagyvonalúak. Ezt azért tartjuk fontosnak, mert így érthetőbbé válik ezen feladatok, kérdések leírása. Ezt továbbfűzve valósult meg a harmadik cél: hogy bemutassunk egy eszközkészletet, amely segítségével az üldözéses feladatok középiskolában felhasználhatók, bemutathatók.

Ehhez a három célhoz kapcsolódik a dolgozat három fejezete. Az első fejezetben mutattuk be azokat az üldözéses feladatokat, amelyek megoldásához diszkrét megközelítésre van szükség: vagyis valamilyen időegység alatt lépünk előre, és a menekülő útját pontról-pontra adjuk meg. A fejezetben három algoritmust adtunk meg, amelyek mind egy-egy nyerő stratégiát adnak a szelídítő számára. Ezen algoritmusoknál mind bebizonyítottuk, hogy ezeket alkalmazva sosem éri utol az oroszlán a menekülőt. A különbség a három megközelítésben abban rejlik, hogy hogyan adjuk meg, hogy melyik irányba mozog a szelídítő az i-dik lépés során. Az első algoritmusban a középpontot S_i-vel kötjük össze, és erre az egyenesre merőlegesen mozog a szelídítő. A második és harmadik algoritmusban az S_iO_i egyenesre merőlegesen mozog. A különbség az, hogy mennyi ideig mozog abban az irányban a menekülő. A mozgás időtartamát az összes esetben úgy kell megadnunk, hogy a szelídítő örökké mozogjon. A bizonyítások során annak belátása volt a legnehezebb feladat, hogy a szelídítő nem megy ki a meghatározott körből, ami ahhoz kell, hogy biztosítsuk, hogy nem megy neki a ketrec falának. A második fejezetben a folytonos esetet fejtettük ki az üldözéses feladatok kapcsán. Ezek a kérdések mind differenciálegyenletekre vezetnek. Ezeket megoldva megkapjuk a menekülő útvonalát. Mindkét leírt esetben fontos szerepet játszanak a polárkoordináták, ugyanis a menekülő mindkét esetben logaritmikus spirálon mozog.

A harmadik fejezetben mutattuk be azokat az eszközöket amelyek szükségesek az első kettő megértéséhez, feldolgozásához, olyan szinten, hogy a középiskolai fakultációhoz kapcsolódni tudjon. A diszkrét idejű esetben a legfontosabb eszköz a végtelen sorok konvergenciájának fogalma. Kiemelten foglalkoztunk az $1/n$ és $1/n^2$ sorok divergenciájával és konvergenciájával. A folytonos idejű esetben polárkoordinátákkal lehet modellezni a mozgást, ezért ezen keresztül kapcsolódtunk a középiskolai tananyaghoz. Rávilágítottunk arra, hogy a sík többféle módon koordinátázható, vagyis a korábban említett szinergiák itt tetten érhetők. A középiskolai tanulmányok során a fakultáción megjelenik a deriválás és az integrálás. Ezeknek egy következő szintje a differenciálegyenletek, amiknek az egyszerűbb típusait a 3.3. szakaszban mutattuk be. A tanórai feldolgozást segítendő elkészítettünk egy, a végtelen sorokhoz kapcsolódó tematikus tervet. Ez egy 6 órát felölelő terv, amely során a számtani, mértani sorozatoktól az $1/n$ és $1/n^2$ sorok összegéig juthatunk el. Emellett még egy óratervet is összeállítottunk a polárkoordináták bevezetéséhez. Itt kiemelt szerepet kap a kör egyenletének különböző megadása.

Bízunk abban, hogy a megjelenő témák és feladatok felkeltették az érdeklődést annyira, hogy akár középiskolai fakultáción is tárgyalásra kerülnek.

Irodalomjegyzék

[1] Bollobás, Béla. The Lion and the Christian, and Other Pursuit and Evasion Games. In: An Invitation to Mathematics: From Competitions to Research, Dierk Schleicher, Malte Lackmann (eds.) 181-193, 2011.

[2] Jakab, Tamás. Milyen húrokat pengetnek az oroszlánok? In: Polygon; 4. évfolyam 2. szám, 108-115, 1994.

[3] Totik, Vilmos. Unalmas analízis? In: Polygon; 20. évfolyam 1. szám, 109-111, 2011.

[4] Palotay, Réka. Differenciálegyenletek és alkalmazásaik, szakdolgozat, 2012. https://abesenyei.web.elte.hu/theses/palotay.pdf.

[5] Scharnitzky, Viktor. Differenciálegyenletek, Műszaki Könyvkiadó, 1997.

[6] Hatvani, László – Pintér, Lajos. Differenciálegyenletes modellek a középiskolában, Typotex, Polygon sorozat, 1997.

[7] Sain, Márton. Nincs királyi út! Gondolat, 1986.

[8] Nemzeti Alaptanterv, Magyar Közlöny, 2020.

[9] Matematika kerettanterv 5-8. évfolyam, 2020. https://www.oktatas.hu/kozneveles/kerettantervek/2020_nat/kerettanterv_alt_isk_5_8

[10] Matematika kerettanterv 9-12. évfolyam, 2020. https://www.oktatas.hu/kozneveles/kerettantervek/2020_nat/kerettanterv_gimn_9_12_evf

[11] Érettségi vizsgakövetelmények, 2017. https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/erettsegi/vizsgakovetelmenyek2017/matematika_vk.pdf