

Szakdolgozat

Takács Balázs
informatikatanár – matematikatanár
osztatlan tanári mesterszak

2023

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

Természet Tudományi Kar

Szakdolgozat

*Statisztika oktatása digitális eszközök
segítségével*

Témavezető:

Koren Balázs

mestertanár

Készítette:

Takács Balázs

informatika tanár -matematikatanár
osztatlan tanári mesterszak


2023

Eredetiségi nyilatkozat

Alulírott Takács Balázs (LUW91K) ezennel kijelentem és aláírással megerősítem, hogy az

ELTE Informatika és Matematika osztatlan tanári mesterszakján írt jelen diplomamunkám saját szellemi termékem, melyet korábban más szakon még nem nyújtottam be szakdolgozatként és amelybe mások munkáját (könyv, tanulmány, kézirat, internetes forrás, személyes közlés stb.) idézőjel és pontos hivatkozások nélkül nem építettem be.

Budapest, 2023. 05. 02.



a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

1.	Bevezetés.....	7
1.1.	A témaválasztás indoklása	7
1.2.	Célok.....	7
1.3.	A szakdolgozat felépítése	8
2.	A foglalkozások leírása	9
2.1.	Módszertan.....	9
2.1.1.	Felfedezéssel tanulás	9
2.1.2.	Próba-hiba	10
2.1.3.	Szemléltetés.....	10
2.2.	Használt felületek.....	11
2.2.1.	Microsoft Excel táblázatkezelő program.....	11
2.2.2.	Google Looker Studio adatvizualizációs eszköz.....	12
2.3.	Korosztály választás.....	13
2.4.	Előkészületek	13
2.5.	Első alkalom.....	14
2.5.1.	Első munkalap	15
2.5.2.	Második munkalap	16
2.6.	Második alkalom.....	17
2.6.1.	Első feladat	18
2.6.2.	Második feladat	19
2.6.3.	Harmadik feladat	20
2.6.4.	Negyedik feladat	22
2.6.5.	Ötödik feladat.....	23
2.7.	Matematikai háttér	25
2.7.1.	Valószínűség számítás.....	25
2.7.2.	Nevezetes közepek	35

2.8.	Harmadik alkalom.....	38
2.8.1.	Első oldal.....	39
2.8.2.	Második oldal.....	40
2.8.3.	Harmadik oldal.....	44
2.8.4.	Negyedik oldal.....	47
2.8.6.	Ötödik oldal.....	51
2.8.8.	Hatodik oldal.....	52
2.9.	Felmérő.....	54
2.9.2.	Első feladat.....	55
2.9.4.	Második feladat.....	56
2.9.6.	Harmadik feladat.....	57
2.9.7.	Negyedik feladat.....	58
2.10.	Attitűd vizsgálat.....	59
3.	A megtartott foglalkozások leírása.....	60
3.1.	Első alkalom.....	60
3.2.	Második alkalom.....	64
3.3.	Harmadik alkalom.....	66
3.4.	Felmérők eredményei.....	68
3.4.1.	Első feladat.....	68
3.4.2.	Második feladat.....	68
3.4.3.	Harmadik feladat.....	69
3.4.4.	Negyedik feladat.....	69
3.4.5.	Összefoglalás.....	70
3.5.	Attitűd vizsgálat eredményei.....	71
3.5.1.	Kérdőív.....	71
3.5.2.	Beszélgetés.....	72
4.	Változtatási és bővítési lehetőségek.....	73

5.	Összegzés	74
6.	Irodalomjegyzék.....	76
7.	Mellékletek.....	79
7.1.	1. sz. melléklet: Felmérők eredményei	79
7.2.	2. sz. melléklet: Attitűd vizsgálat eredményei	89

1. Bevezetés

1.1. A témaválasztás indoklása

Szakkolgozatom témájaként a statisztika oktatását választottam. Úgy gondolom ez egy sokszínűbb témakör annál, mint amilyenek a diákok tekintik. Ezt az általam választott digitális eszközök segítségével a tanulóknak is be szeretném bizonyítani.

Mivel a matematika mellett az informatika a másik szakom, így szerettem volna olyan témát választani, amivel ehhez is kötődhetek. Továbbá vallom, hogy a tanórákon megszerzett tudás önmagában céltalan, ha azt nem tudjuk az élet más területein alkalmazni. Ennek első lépcsőfoka a különböző tantárgyak közötti kapcsolatok megteremtése. Diákként jó érzésekkel töltött el, amikor a tudásom több tantárgy keretein belül is felhasználhattam. Nekem ez motivációt adott olyan tananyag részek megtanulására is, amelyek nem tartoztak közvetlenül az érdeklődési körömbe.

1.2. Célok

A kutatásom és a megtartott foglalkozások célja megvizsgálni, hogy milyen mértékben tudnak segíteni a technológia kínált lehetőségek a diákok által már elsajátított ismeretek elmélyítésében és jobb megértésében. A 2020-as Nemzeti Alaptanterv szerint: „A témakör (Leíró statisztika) tanulása eredményeként a tanuló konkrét adatsor esetén átlagot számol, megállapítja a leggyakoribb adatot (módusz), a középső adatot (medián), és ezeket összehasonlítja”. Ezzel szemben egy nehezebb feladat megoldására ez a tudás sok esetben kevés és magasabb szintű rálátás szükséges. Az általam tervezett feladatok során ezen kihívásokra szeretném felkészíteni őket, olyan példákon keresztül, melyek meghaladják egy hagyományos, tantermi körülmények között megvalósítható tanóra kereteit.

Gyakorlatom során is tapasztaltam, hogy egy tanóra nagyon rövid tud lenni, főleg, ha valami izgalmasat szeretnénk csinálni. Általában nincs elég idő és lehetőség arra, hogy a diákok próbálkozzanak, hibázzanak, majd

ezekből tanulva új irányba induljanak el. A digitális eszközök használata ebben segíthet és szélesítheti ki tanári eszköztárunkat. Ezen lehetőségekkel élve szeretném megadni az esélyt a diákoknak, hogy bizonyos összefüggésekre a saját tempójukban és a saját hibáikon keresztül jöjjenek rá.

1.3. A szakdolgozat felépítése

Szakdolgozatom első felében az elkészített foglalkozásokat és a hozzájuk tartozó elméleti részeket fogom bemutatni az alábbi sorrendben:

- Módszertan
- Használt felületek
- Korosztályválasztás
- Előkészületek
- Foglalkozások bemutatás
- Elméleti kitekint
- Felmérő
- Attitűd vizsgálat

Szakdolgozatom második felében az elkészült kutatásom egyes elemeit és az arra készült reflexióimat mutatom be az alábbi sorrendben:

- Megtartott foglalkozások
- Felmérők eredményei
- Attitűd vizsgálat eredményei
- Változtatási lehetőségek
- Összegzés

2. A foglalkozások leírása

Szakedolgozatom alapját három általam készített és megtartott foglalkozás képezi. A feladatok az általános iskolában tanult legfontosabb statisztikai mutatók, illetve az adatok különböző ábrázolásai köré összpontosulnak.

2.1. Módszertan

Az órák tervezése során több oktatási módszer is hatott rám. Tanárként előszeretettel alkalmazok, olyan oktatásszervezési módokat, amelyekben a diákok maguk tudnak felfedezni újabb összefüggéseket, akár önállóan, párban vagy csoportban dolgozva.

2.1.1. Felfedezéssel tanulás¹

Alapja a tanulók gondolkodásra bírása. Célja elérni, hogy a diákok maguk tegyenek fel kérdéseket, majd ezekre keressenek válaszokat és végül állapítsanak meg következtetéseket, összefüggéseket. (Didaktika – Elméleti alapok a tanítás tanulásához, 2003) Tanárként az a feladatunk, hogy megteremtjük a kellő körülményeket és a háttérből segítsük a folyamatot. A felfedezéssel tanulás hatékony módszer lehet azok számára, akik szeretnek kísérletezni, hibázni és a megoldásra önállóan rátalálni. Ez a tanulási forma ösztönözheti a problémamegoldó szemléletet és kreatív gondolkodást.

Az első és a második foglalkozásomra, ez a legjobban jellemző oktatási stratégia. A diákok az Excelben előre elkészített feladatokkal találkoznak, amelyek megoldására, illetve megoldásaira a szoftver nyújtotta előnyök kihasználásával kell rájönniük. A feladatok megoldása során lehetőségük van tapasztalataik megosztására társaikkal. Haladástól függően segíthetjük a csoportot, akár konkrét utasításokkal is.

¹ Ballér Endre, Golnhofer Erzsébet, Falus Iván, Kotschy Beáta, Nádasi Mária, Nahalka István, Feyér Judit, Réthy Endréné, Szivák Judit, Vámos Ágnes (2003). *Didaktika – Elméleti alapok a tanítás tanulásához*. 208.-209. o.

2.1.2. Próba-hiba²

Szorosan ide kapcsolódik a magyarul „próba-hibának” nevezett tanulási módszer. Talán az eredeti angol „trial and error” kifejezés sokkal beszédesebb, de bárhogyan is nevezzük, a módszer lényege a próbálkozásokon és a hibázásokon alapul. A foglalkozásokon szereplő feladatok esetén azonnal látható, hogy a válaszuk jó vagy sem. Minden hibás megoldás után újra próbálkozhatunk, de már azzal a tapasztalattal a fejünkben, amit egy korábbi rossz válasz által szereztünk. Erről a megoldási stratégiáról számomra mindig a Sir Arthur Conan Doyle által megalkotott karakter, Sherlock Holmes elhíresült mondata jut eszembe: „Ha a lehetetlent kizártuk, ami marad, az az igazság, akármilyen valószínűtlen is legyen.”.

Bár ennek kutatása nem képezi szakdolgozatom részét, de úgy gondolom, hogy ez a módszer a hibázás iránti félelmet is csökkentheti, ami több diáknál is valós gondot okoz.

2.1.3. Szemléltetés³

A szemléltetés az egyik leghatékonyabb tanulási módszer. Lehetővé teszi a diák számára a találkozást a valós világgal. A szerzett információink nagyjából nyolcvan százalékát látás útján gyűjtjük. A szemléltetés nem csak egy módszer, de az ismeretszerzés alapvető eleme is. Eszközként tárgyakat, ábrákat, videófelvevételeket vagy diagrammokat is használhatunk. Nem csak az összefüggések megértésben, de az információk memorizálásában is segít. (Didaktika – Elméleti alapok a tanítás tanulásához, 2003)

Harmadik foglalkozásom alkalmával diagrammokat fogunk elemezni, módosítani és készíteni. A módszer hatékonyságát növelhetjük, ha a folyamat során a diákokat cselekvő félként bevonjuk a szemléltető eszközök készítésének folyamatába. Sokat tanulhatunk abból is, ha a diákok mutatják meg miként képzelik el az adott jelenséget. Jobban megérthetjük gondolkodásuk módját és az esetleges félreértésekre, hibás gondolatokra is fény derülhet.

² <https://gobertpartners.com/when-to-use-trial-and-error-method>

³ Ballér Endre, Golnhofer Erzsébet, Falus Iván, Kotschy Beáta, Nádasi Mária, Nahalka István, Feyér Judit, Réthy Endréné, Szivák Judit, Vámos Ágnes (2003). *Didaktika – Elméleti alapok a tanítás tanulásához*. 232.-235.

2.2. Használt felületek

A felületek választásakor alapvető szempont volt, hogy azok magyar nyelven is elérhetőek, illetve ingyenesen beszerezhetőek és használhatóak legyenek.

2.2.1. Microsoft Excel táblázatkezelő program

A foglalkozások első feléhez olyan felületeket kerestem, amit a diákok ismernek és nagyobb segítségek nélkül is tudnak használni. Ennek több oka is van.

Elsősorban nem az informatikai, hanem a matematikai tudásukat szeretném fejleszteni. Ez a cél a háttérbe szorulna, ha először meg kellene tanítani nekik egy teljesen új program használatát.

Másodszor figyelembe kellett vennem és mérlegelnem kellett a korosztály sajátosságait. Eleinte gondolkodtam olyan mobiltelefonos applikációk használatán is, amelyekkel informatika terem nélkül is interaktív feladatokat tudunk volna megoldani. Mivel nem várható el a diákoktól, hogy rendelkezzenek saját, az applikációt futtatni képes mobiltelefonnal, ezért erről letettem.

Harmadrészt könnyen reprodukálhatóra szerettem volna tervezni. A diákok saját készülékeire nem támaszkodhattam, de hasonló módon az iskoláéra sem. Nem feltétel, hogy egy általános iskola rendelkezzen az informatika terem számítógépein kívül egyéb eszközökkel.

Így esett végül a választásom az Excelre. Ez a diákok számára ingyenesen, magyar nyelven is elérhető. Az Oktatási Hivatal által nyolcadik évfolyamos diákok számára kiadott Digitális Kultúra tankönyv is többek között ezt ajánlja. A kutatásom helyszínéül szolgáló iskola tanáraival történt egyeztetésem után tudom, hogy itt is ezt használják a diákok. A különböző statisztikai mutatók könnyen meghatározhatók és ezek az adatok változására dinamikusán reagálnak. Ezen funkciók teszik lehetővé számomra, hogy meg tudjam valósítani a tervezett foglalkozásokat. Az általam alkalmazni kívánt feladatok sok számítással járnak. Alapesetben ezeket a tanulóknak kellene elvégezniük. Ez túl sok lenne egy tanóra időkeretéhez. Emellett rengeteg

olyan számítást is el kellene végezni, ami hibás eredményt ad. Ez negatívan hathat a diákok motivációjára. Ezekre a problémákra nyújt megoldást az Excel.

Tanári szempontból úgy gondolom, hogy a pedagógusok többsége egy jól kidolgozott foglalkozást szívesen használ fel vagy oszt meg kollégáival. Ez könnyen megtehető, ha a feladatok egy fájlban vannak, amit könnyedén lehet sokszorosítani és még ki sem kell nyomtatni őket. Számomra szempont egy sok időt és energiát igénylő feladat elkészítése során, hogy a végtermék mások számára is használható legyen. Az Excel-t általában olyan matematikatanárok is tudják használni, akik nem informatikatanárok és nagyvalószínűséggel minden iskolában megtalálható a számítástechnika terem eszközein is.

2.2.2. Google Looker Studio adatvizualizációs eszköz

A foglalkozások második feléhez a konzulensem által ajánlott Looker Studio⁴-t használtam. Kevés kivételt leszámítva ez a felület is elérhető magyar nyelven és ingyenesen.

A felület számos előnnyel bír az Excel szemléltető eszközeivel szemben. A rengeteg hasznos funkció közül számomra a grafikonok készítésére és módosítására volt szükségem. Főként a diagrammok módosítási lehetősége az, amit legjobban ki szerettem volna használni.

Mivel a diákok számára ez egy új felület, olyan módon szerettem volna felhasználni, hogy a megismerése ne vegyen el túl sok időt, de még is tudjak újat tanítani nekik. Ezen okból választottam azt az utat, hogy a diákok inkább csak szerkesszék a meglévő grafikonokat, amiket én előre létrehoztam. Erre tökéletesen alkalmas a program. Nem csak a tartalmi, de a formai tulajdonságokat is részletesen lehet szabályozni.

Ezen kívül a megjelenített adatokon nagyon könnyen lehet különböző szűréseket is végezni. Ezek sok esetben látványosak és figyelem felkeltőek. A matematikára nem, de a vizuális ingerekre fogékony diákok számára ezen

⁴ <https://lookerstudio.google.com/>

feladatok által, reményeim szerint pozitív élményeket és némi motivációt tudok adni.

2.3. Korosztály választás

Több okból is a nyolcadikosokat tartom a legmegfelelőbb célcsoportnak a foglalkozásom számára.

Matematikából ekkorra már megismerték az átlag, a módusz és a medián fogalmát. Ezen mutatókat nem csak ismerik, de egy konkrét adathalmaz esetében meg is tudják állapítani. Feladatban szereplő vagy önállóan gyűjtött adatokat tudnak táblázatba rendezni és diagrammon ábrázolni. Ismerik az oszlop-, vonal-, kör- és pontdiagrammokat. Meglévő diagramból számukra hasznos információkat tudnak leolvasni.

Informatika órán a táblázatkezelés minden számomra fontos lépését megismerték. Elsősorban adatokat tudnak táblázatos formában elrendezni. Továbbá tudnak egyszerűbb, többek között matematikai és statisztikai függvényeket is használni. Megfelelően elrendezett adatokból létre tud hozni különböző diagrammokat. Meglévő diagrammokon változtatásokat tud alkalmazni.

Annak érdekében, hogy valóban hasznosak legyenek a foglalkozásaim a diákok számára a fentebb leírt ismeretek nélkülözhetetlenek. Célom ezen ismeretek bővítése és más szemszögből történő bemutatása.

2.4. Előkészületek

Előzetesen egyeztettem a csoport matematika tanárával, aki biztosított afelől, hogy a foglalkozásomhoz kellő témakörrel a diákok időben, még a foglalkozásaim előtt találkoznak. Ez nagyon fontos volt, hiszen az órán tanult ismereteket én felhasználni szeretném nem pedig megtanítani.

Azt tudtam, hogy informatikából már szerepelt ebben a tanévben a táblázatkezelés témakör és azt is tudtam, hogy Microsoft Excel-t használtak erre célra. Ettől függetlenül a tanárukkal is egyeztettem, hogy van-e olyan funkció, amit én esetleg szeretném, ha a diákok tudnának, de órán nem

került elő. Mivel próbáltam informatikai oldalról minél jobban leegyszerűsíteni a feladatokat, így nem találtunk ilyen gondot.

2.5. Első alkalom

Az első egy ráhangoló alkalom, amelynek elsődleges célja a csoporttal történő megismerkedés. Először bemutatkozom a csoport számára, ejtek pár szót magamról. Ezután röviden kifejtem, hogy miért kértem fel őket ezen foglalkozásokra. Tudatosítom bennük, hogy ez még csak az első, bemelegítő alkalom és vár még rájuk kettő ehhez hasonló. Ezt azért éreztem célszerűnek megtenni, hogy aki ezt a foglalkozást még nem találja elég érdekesnek vagy hasznosnak, számítsen rá, hogy ez változhat.

Ezután hagyom őket is szóhoz jutni. Kérek mindenkitől egy gyors bemutatkozást. Megkérdem a neveiket és megkérem őket, hogy röviden mondják el mi jut eszükbe, ha azt hallják, hogy statisztika. Ezzel fejben is megkezdődik a ráhangolódás. A foglalkozásokat úgy időzítettem, hogy a matematika órák keretein belül már túl legyenek az ide tartozó témakörön. Az órán tanultakra röviden reflektálunk és kiemelem, hogy ezekből az én általam tartott foglalkozásokon mik kapják a főszerepet. Ezek lesznek az átlag, módusz és a medián. Megbeszéljük melyiket hogyan számoljuk ki, határozzuk meg. Reményeim szerint ez könnyen, akadály nélkül fog menni. Ezen kívül az adatok leolvasása grafikonról és ábrázolása szintén grafikonon lesz terítéken, de csak a harmadik alkalommal. Remélhetőleg, ekkorra már fejben mindenki megérkezett és elkezdhetünk foglalkozni a fájlokkal. Megnyitjuk a mai órára készített fájlt (*lásd 1. ábra*)

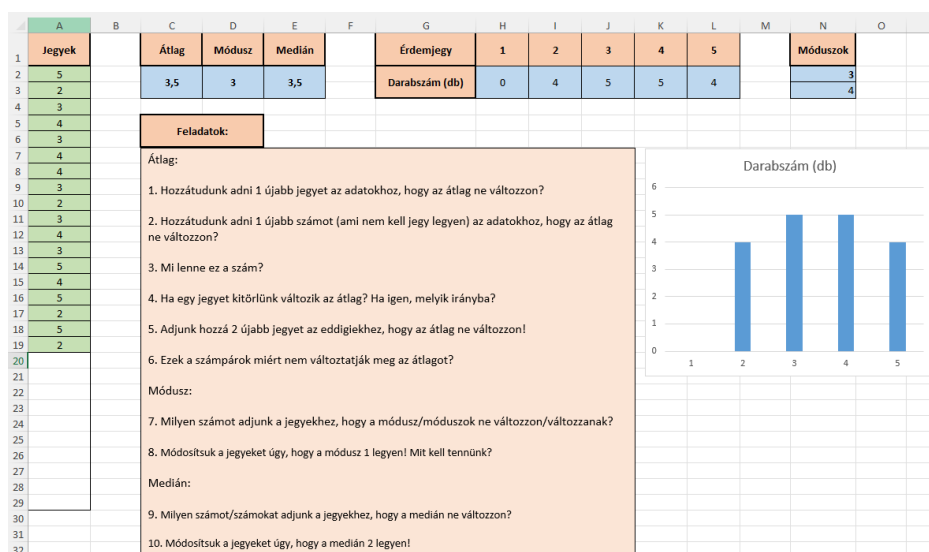
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Jegyek		Átlag	Módusz	Medián		Érdemjegy	1	2	3	4	5		Móduszok
2	5						Darabszám (db)							
3	2													
4	3													
5	4													
6	3		Feladatok:											
7	4													
8	4													
9	3													
10	2													
11	3													
12	4													
13	3													
14	5													
15	4													
16	5													
17	2													
18	5													
19	2													
20														
21														
22														

1. ábra Első munkalap

2.5.1. Első munkalap

Közösen megismerkedünk az első munkalapon szereplő feladatokkal. A könnyebb átláthatóság kedvéért minden esetben az adatok háttérét zöld szín, a fejlécek és szövegek háttérét narancs szín, a kiszámított mennyiségek háttérét kék szín jelzi itt és a további dokumentumokban is. Megkérem őket, hogy használják az Excel tudásukat és hajtsák végre a feladatokat. Bármilyen elakadásuk van lehet kérdezni tőlem, illetve egymásnak is lehet segíteni. Ezen feladatok célja, hogy a megoldásuk közben megszokják a felületet és érzékeljék, hogy most nem nekik kell majd a számításokat elvégezniük, hanem hagyatkozhatnak a programra. Amikor nagyjából mindenki készen van, akkor átmegyünk az Excel munkafüzet második lapjára (lásd 2. ábra vagy melléklet).

2.5.2. Második munkalap



2. ábra Második munkalap

A második munkalapon (lásd 2. ábra) a feladatokat leszámítva minden ugyanaz, mint az előző lapon. Minden adat már előre ki van számolva, amit az előző lapon ők is meghatároztak. Jöhetnek azon feladatok, amik miatt a foglalkozásokat megterveztem. A hagyományos irányt megfordítva, nem az adatokból számolunk különböző statisztikai mutatókat, hanem az adatokat változtatva megfigyeljük miként változnak ezek az értékek. Ez egy alkalmazás vagy program használata nélkül rengeteg időt emésztene fel. Minden egyes változtatás hatása azonnal láthatóvá válik egyéb erőfeszítés nélkül is.

Olyan feladatokat és kérdéseket állítottam össze, amelyek mentén jól megfigyelhetőek a változások. Ezeket a feladatokat is hagyom, hogy egyedül csinálják, de bizonyos időközönként arra kérem őket, hogy beszéljék meg az eredményeket. Szeretném, ha a saját szavaikkal megfogalmaznák a tapasztalataikat.

Összefoglalva az első alkalmat, megtörténik tervezett foglalkozások felvezetése és több, de egyszerűbb feladat megoldása. Elkezdjük megfigyelni, hogyan változnak a statisztikai mutatók az adatok módosítása során. Az program használata rengeteg időt takarít meg, és lehetővé teszi az eredmények azonnali vizsgálatát. Az önállóan végzett feladatokkal együtt a

diákokat arra bátorítom, hogy osszák meg saját megfigyeléseiket és tapasztalataikat a kapott eredményekkel kapcsolatban.

2.6. Második alkalom

Üdvözlöm a diákokat és megköszönöm, hogy továbbra is itt vannak és remélhetőleg aktív szerepet vállalnak ezen foglalkozáson is. Röviden összegezzük mik történtek legutóbb, majd rátérünk a mai órára.

Az első alkalomhoz hasonlóan, egy előkészített Microsoft Excel munkafüzetben fogunk dolgozni. Összesen öt feladattal foglalkozunk, melyek külön munkalapokon szerepelnek a könnyebb átláthatóság kedvéért. Ebben a munkafüzetben is követtem a korábban alkalmazott színezéseket. Minden feladat az átlaggal, a módusszal vagy a mediánnal kapcsolatos. Egyik feladatban sem a mutatók kiszámítása a cél, hanem azok viselkedésének megfigyelése.

A diákoknak minden esetben az adatokat kell megadniuk, amelyből a megfelelő mutatók automatikusan kiszámítódnak. Valószínűleg először, olyan kiindulási adatokat használnak majd, amelyek nem megfelelőek. Reményeim szerint ez így is lesz, és ezután kezdenek korrigálni. Így láthatják, hogy az általuk alkalmazott változtatások milyen irányba mozdítják el a statisztikai mutatók értékeit.

2.6.1. Első feladat

5 szám átlaga 6.					
Mennyi az összegük?					
Írjátok a zöld cellákba olyan számokat, melyek átlaga 6!					
Számok:					
Átlag	#####				
Összeg	0				

3. ábra Első feladat

Egy könnyebb feladattal indítunk (lásd 3. ábra). A feladat megoldása lényegében nem az általunk megadott adatok, hanem egy abból számított érték. Természetesen, ha jó adatokat adunk meg, amelyek átlaga valóban hat, akkor egyszerűen csak ki kell olvasni az automatikusan kiszámított összeget. A feladat célja megmutatni az adatok összege és átlaga közti szoros összefüggést. Megvárom amíg sikerül olyan adatokat megadniuk, amelyek átlaga valóban hattal egyenlő. Ezt valószínűleg pár korrigálással gyorsan megteszik, hiszen az előző alkalmon láttuk, hogy ha a növelem valamely adat nagyságát az átlag is növekedni fog, illetve fordítva. Ezáltal bármely próbálkozásukat könnyen tudják majd javítani.

Amikor találtak öt olyan számot, melyek átlaga megfelelő, akkor meg kérem őket, hogy találjanak másik kombinációt is. Úgy gondolom lesz, olyan diák, aki hamar rá fog érezni miként lehet kevés változtatással is újabb öt jó számot találni. Megkérem őket mondják el, hogy változott-e az átlag vagy sem. Ha valaki esetleg azt mondaná, hogy változott, akkor tudni fogom, hogy valami nem sikerült és segítek neki. A helyes válasz, hogy nem változik az összeg. Amikor már a legtöbben rájöttek, hogy bármilyen szám kombinációval, amelyek átlaga hat, mindig ugyanannyi, azaz harminc lesz a számok összege én is megerősítem őket ebben. Megkérem őket, hogy gondolják át, hogy ez miért lehet. Gondoljanak arra miként számolnak átlagot. Hagyok időt, hogy egyedül vagy akár többen együtt ötleteljenek. Ha van bátor jelentkező, őt meghallgatjuk, majd közösen is átbeszéljük a

kérdést. Felhívom a figyelmüket újra az átlagszámítás módjára. Ha összeadunk, jelen esetben öt számot, majd elosztjuk az összeget mindig öttel és ugyanúgy hatot kapunk eredményül az csak úgy lehet, ha minden esetben ugyanazt az összeget osztottuk öttel. Ezzel a gondolattal nem időznék sokat. Úgy gondolom, hogy ebben a korban ez az összefüggés nem mindenki számára befogadható még, de mindenképpen érdemes beszélni a jelenség okairól.

Végezetül meg kell jegyezni, hogy ez csak akkor igaz, ha az adatok számát nem változtatjuk. Például az nem igaz, ha nyolc szám átlaga hat, akkor az összegük harminc marad. Ez nagyon fontos kiegészítés, mert enélkül meg van az esély, hogy tévesen rögzül a megismert összefüggés. Továbbá megfogalmazható az a következtetés, hogy az adatok ismerete nélkül, csak az átlaguk és darabszámuk segítségével meghatározható az összegük is.

2.6.2. Második feladat

4 szám összege 20. Mennyi az átlaguk? Írjátok a zöld cellákba olyan számokat, melyek összege 20!				
Számok:				
Átlag	#####			
Összeg	0			

4. ábra Második feladat

Ez a feladat (lásd 4.ábra) egy az egyben az előző megfordítása. Eleinte úgy gondoltam, hogy a kettő közül csak az egyik fog szerepelni. Végül jónak láttam, ha az előzőleg megismert összefüggést látjuk a másik oldalról is. Kevesebb időt szánok erre a részre. Alapból a feladat is könnyebb, hiszen egyszerűbb négy olyan számot megadni, melyek összege húsz, mint korábban öt olyat, aminek az átlaga hat. Ha megadtak négy helyes adatot,

akkor szintén megkérem őket, hogy találjanak újabb négy jó számot és figyeljék meg, hogy változik-e az átlag.

Természetesen nem fog változni, és minden esetben az átlag öt lesz. Szintén megbeszéljük a jelenség okait is. Mivel a változatlan összeget, a húszat, minden esetben négyvel osztjuk, így az eredmény, azaz az átlag sem változik.

Zárásként szintén megbeszéljük, hogy fontos, hogy az adott összeg mellett az adatok darabszámát sem szabad változtatni. Továbbá megfogalmazható az a következtetés, hogy az adatok ismerete nélkül, csak az összegük és darabszámuk segítségével meghatározható az adatok átlaga is.

2.6.3. Harmadik feladat

Megmértük négy ember magasságát. A két alacsonyabb átlaga: 165 cm. A két magasabb átlaga 180 cm.	
Mennyi a 4 ember együttes átlaga?	
Írjátok a zöld cellákba olyan magasságokat, melyek eleget tesznek a fent leírtaknak!	
Magasságok:	<input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>
Alacsonyak átlaga	#SZÁM!
Magasak átlaga	#SZÁM!
Átlagok átlaga	#SZÁM!
4 ember átlaga	#####

5. ábra Harmadik feladat

A harmadik feladat (lásd 5. ábra) keretein belül még mindig csak az átlaggal foglalkozunk. Többször előkerül az a kérdés, hogy több átlagot lehet-e átlagolni és vajon ugyanazt az eredményt kapjuk, mintha egyből az eredeti, összes adatból számoltunk volna végső átlagot.

Ez a feladat a tanítási gyakorlatomon szerzett egyik élményem kapcsán kapott itt helyet. Két diák kérdezgette az osztálytársaikat, hogy mondják el

milyen jegyeik vannak matematikából. A cél az volt, hogy ők majd kiszámolják ezek után a féléves matematika átlagát az egész osztálynak. Természetesen volt, aki nem szeretne volna elárulni társainak a jegyeit. Ekkor gondolkodtam el azon, hogy egyszerűbb lenne mindenkitől megkérdezni csak az átlagukat. Ez sokkal kevesebb számolást eredményezne és ez talán olyan adat, amit szívesebben osztanak meg egymással, mint konkrétan a jegyeiket. A problémán tovább tűnődve rájöttem, hogy nem biztos, hogy minden diáknak ugyanannyi jegye. Ez nem okozna gondot, ha a diákok a saját átlaguk mellett a jegyeik számát is elárulnák. Ebben az esetben már lehetne súlyozni az átlagokat a darabszámmal, de a súlyozott átlag fogalmát nem ismerik.

Most ennek a feladatnak egy rövidebb változatát készítettem el. Ebben a feladatban négy ember magasságát kell megadni aszerint, hogy a két alacsonyabb és a két magasabb ember átlagos magassága a feladatban szereplő legyen. Amint megadunk négy magasságot rögtön látjuk a két alacsonyabb és a két magasabb ember átlag magasságát, valamint az átlagokból számolt átlagot és mind a négy magasságból számolt átlagot is. A feladat érdekessége, hogy bármilyen négy számot beírhatnánk, a számunkra érdekes mutatók mindenképpen azonos eredményt adnának. Úgy gondolom, hogy ha csak ennyit kellene itt csinálni, hogy megadunk négy bármilyen számot a körülmények nélkül, az kevésbé lenne emlékezetes vagy érthető a diákok számára. Ezért szól a feladat magasságokról. Valójában miközben próbálkoznak megfelelő magasságokat megadni, minden akár rossz próbálkozás esetén is látszik, hogy a két végső átlag értéke folyamatosan ugyanaz marad.

Ennek okai rövid algebrai átalakításokkal, hamar levezethetőek. Ezt a foglalkozás keretein belül nem áll módomban végig csinálni a diákokkal. Úgy gondolom, hogy a tapasztalás ebben a korban sokkal többet ért, mint a mögöttes okok. Egy dolgot viszont mindenképp meg kell jegyezni a végén. Csak olyan átlagokból számíthatunk közös átlagot, amelyek egymást nem átfedő és azonos számú adatokból lettek kiszámítva. Ebben az esetben a négy magasságot két-két adatra bontjuk, amelyek között nincs átfedés, azaz a két halmaz diszjunkt. Ugyanez a helyzet egy osztályban, ahol a diákok

matematika jegyei csak a sajátjai és egyik sem közös egy társáéval sem. Természetesen itt ismételten figyelni kell a korábban felvetett problémára, hogy vajon minden diák ugyanannyi jegyet kapott-e vagy sem.

2.6.4. Negyedik feladat

Gondoltam 3 egész számra 1 és 10 között.	
Az átlaguk 4.	
A mediánjuk 3.	
Számok:	<input type="text"/>
Átlag	#####
Medián	#SZÁM!
Összeg	0

6. ábra Negyedik feladat

A negyedik feladatban (lásd 6. ábra) az átlag mellett már szerepel a medián is. A feladatban három egész számot kell megadni egy és tíz között, amelyek átlaga négy és mediánja három. Ebben a feladatban már jó megoldások száma véges. Mivel nincs sok lehetőség, így hamar meg lehet találni legalább egyet.

Remélhetőleg lesz olyan diák, aki kezdésnek beírja a hármast és mellé keres még két számot. A feladat megbeszélését érdemes ezzel indítani. Három számot kell megadnunk, ami páratlan darabszám, így a medián az biztosan, olyan érték, ami szerepel az adatok között, ezért azt beírhatjuk kezdésnek. Erre a gondolatra próbáljuk először őket rávezetni. Ezt meg lehet tenni a feladat elején is. Ha már a hármast beírtuk, akkor nézzük meg milyen számokat kell beírunk melléjük. Mivel a medián három, így a maradék két szám olyan, hogy az egyik legalább három és a másik legfeljebb három. Ha erre a következtetésre eljutnak a diákok, akkor lehetséges, hogy a legalább és legfeljebb szavak helyett, a kisebb és nagyobb szavakat fogják használni. Ekkor érdemes megbeszélni velük,

hogy például lehet több hármas is az adatok között és abban az esetben a „kisebb” szóhasználat helytelen. Szóval a további számokat keresve az egyik számnak biztosan az egy, kettő, három választásokról kell kikerülnie. Mindháromhoz tartozik helyes megoldás, és ennyi, azaz összesen három helyes megoldása van a feladatnak.

Érdemes megemlíteni, még a három, négy, öt számhármast is, amely átlaga valóban négy, de ekkor már az adatok mediánja négy lesz és nem három. Ez egy olyan hibás megoldás, ami könnyen előfordulhat és tanárként érdemes előre felkészülni rá.

A feladatban nincs szó a három szám összegéről, de mivel korábbi feladatokban szerepelt, így emlékeztetőként ide is betettem, hogy lássák minden jó megoldás esetén az számok összege változatlan.

2.6.5. Ötödik feladat

<p>Ferkó nadrág zsebei tele vannak aprópénzzel.</p> <p>A táblázatban látod milyen érméi vannak a bal zsebében.</p> <p>Emellett elárulta, hogy a pénzének átlaga 29Ft, 10-esből van a legtöbb és ha sorba rendezi az érméket középen egy 20-as áll. Továbbá 7db érme lapul a jobb zsebében.</p> <p>Mennyi pénze van Ferkónak összesen?</p> <p>Milyen érmék vannak a jobb zsebében?</p>								
Bal zseb	5	10	10	10	20	50	50	50
Jobb zseb								
Átlag	25,625							
Medián	15							
Módusz	10							
Összeg	205							

7. ábra Ötödik feladat

Az ötödik és egyben utolsó feladat (lásd 7. ábra) már jóval összetettebb. Itt az átlag és a medián mellett megjelenik a módusz is. A feladat szövege szerint rá kell jönnünk, hogy milyen pénzürmék lapulnak Ferkó jobb nadrágzsebében. Ehhez meg tudunk pár információt. Elárulja az összes pénzének az átlagát, ami huszonkilenc forintnak felel meg. Megtudjuk, hogy tízesből van a legtöbb, azaz a módusz tíz lesz. Elárulja, hogy ha érték szerint

sorba rendezi az érméket, akkor középen egy húszas található. Ebből tudjuk, hogy az adatok mediánja húsz. Itt szándékosan nem a módusz és a medián szót használtam a feladat szövegében. Próbáltam minél inkább elrejtetni az információkat. Végezetül elárulja milyen érmék lapulnak a bal zsebében és hogy a jobb zsebében még hét érme található. Feladatunk rájönni, hogy milyen érmék vannak a jobb zsebében. Ha ezekre rájöttünk láthatjuk, hogy mennyi pénze van összesen.

A feladatot korábbi érettségi példák ihlették. Azok nem ennyire összetettek, de érettségi írás közben nincs segítségünkre egy olyan felület, ami folyamatosan kiszámítja nekünk a legfontosabb értékeket. Talán ennél a feladatnál látszik leginkább, hogy milyen előnyei vannak egy digitális segédeszköznek. A helyes felhasználásával sokkal nehezebb feladatokat is meg tudunk oldani. Megismerhetjük ezen típuspéldákat anélkül, hogy rengeteg fárasztó és unalmas számolást csinálnánk. Ezen segédeszközök lehetővé teszik a munkafolyamatok gyorsabb és hatékonyabb lebonyolítását, így energiát spórolunk és több időt fordíthatunk az eredmények értelmezésére. Kevesebb idő alatt több feladat végezhető így el, azaz több tapasztalatot szerezhetünk. Természetesen ez nem helyettesíti teljes egészében a hagyományos gyakorlást, hiszen éles helyzetben nem lesz ott velünk. Ez a módszer arra viszont jó lehet, hogy nagyobb nehézségek nélkül ismerkedjünk a nehezebb feladatokkal és pozitív élményeket szerezzünk megoldásaik során.

Visszatérve a feladathoz, a megfelelő zöld cellákat kell feltölteni magyar forgalomban lévő pénzérmék értékeivel. Valószínűleg ez több időt igényel majd, mint a korábbi feladatok. Célszerű odafigyelni erre a többi feladat alatt, hogy itt biztosan elegendő idő álljon a diákok rendelkezésére. Abban az esetben, ha a tanulók lassan haladnának a megoldással rá lehet vezetni őket, hogy milyen érmék azok, amiket biztosan használniuk kell. Például tízes érmét nagy valószínűséggel kell használni hiszen ebből kell legyen a legtöbb.

2.7. Matematikai háttér

2.7.1. Valószínűségszámítás

A foglalkozásokon körül jártuk a három leggyakrabban használt középértéket az átlagot, a módot és a mediánt. Ezen mutatókat a statisztika témakör keretein belül vizsgáltuk meg, és értékeiket számszerű adatokon értelmeztük. A három mennyiségnek a valószínűség számításban is jelentős szerepe van. Használatukkal jellemezhető egy esemény kimeneteleinek halmaza. A mutatók meghatározásának módja eltérő diszkrét és folytonos esetekben.

Átlag

Definíció: Az X diszkrét valószínűségi változó eloszlása legyen $(x_i, p_i)_{i=1,2,\dots}$. Ekkor X várható értéke vagy átlaga: $E(x) = \sum_i x_i p_i$, ha ez a sor abszolút konvergens.

Definíció: Az X folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye legyen $f(x)$. Ekkor X várható értéke vagy átlaga: $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$, amennyiben az $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx$ impropius integrál konvergens.

Módusz

Definíció: *Diszkrét* valószínűségi változó módusza a legvalószínűbb x_k érték (vagyis amelyre $p_k = P(x_k)$ a legnagyobb)

Definíció: *Folytonos* valószínűségi változó módusza a sűrűségfüggvény lokális maximumhelye.

Medián

Definíció: Jelölje az X valószínűségi változó eloszlásának mediánját $me(X)$, amelyre teljesül: $P(X \leq me(X)) \geq \frac{1}{2}, P(X \geq me(X)) \geq \frac{1}{2}$.

Mit nevezünk valószínűségi változónak és annak eloszlásának?

Definíció: Egy $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, ami elemi eseményekhez rendel valós számokat valószínűségi változónak nevezünk.

Definíció: Az X valószínűségi változó diszkrét, ha csak véges vagy megszámlálhatóan sok értéke van. Értékkészlete $Im(X) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ alakban írható fel.

Definíció: Az X valószínűségi változó folytonos, ha értékkészlete tartalmaz egy intervallumot. $Im(X) \supseteq (a, b)$

Definíció: Az X diszkrét valószínűségi változó eloszlásán értjük a lehetséges értékeinek halmazát a hozzájuk tartozó valószínűségekkel: $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ és $\{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ ahol $p_i := P(X = x_i)$

Definíció: Az X tetszőleges valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ahol $F(x) := P(X < x)$

Tekintsünk először pár nevezetes diszkrét eloszlást

Diszkrét egyenletes eloszlás

Egy véges halmazon legyenek X lehetséges értékei $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, és $p_i = P(X = x_i) = \frac{1}{n} \forall i - re$.

$$X \text{ várható értéke: } E(x) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$X \text{ mediánja: } me(X) = \frac{n+1}{2}$$

X módusza: Minden érték azonos valószínűséggel fordul elő, így nincs legvalószínűbb elem.

Példa: Tekintsük egy kockadobás kimeneteleit.

$$E(x) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = 3,5$$

$$me(X) = \frac{6+1}{2} = 3,5$$

Binomiális eloszlás - $X \sim \text{Bin}(n, p)$

Jelölje X , hogy n független kísérletből hányszor következik be egy p valószínűségű esemény.

X eloszlása: $(k, p_k)_{k=0,1,\dots,n}$, ahol $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

X várható értéke: $E(x) = np$

X mediánja: $me(X) = \text{közelítőleg } np$

X módusza: $\text{közelítőleg } np$

Példa: Egy módosított érmével annak az esélye, hogy fejet dobunk 0,6. Ezt az érmét ötször feldobjuk és figyeljük a fejek számát. $X \sim \text{Bin}(5; 0,6)$

$$P(X = 0) = \binom{5}{0} 0,6^0 (1 - 0,6)^{5-0} = 0,01024$$

$$P(X = 1) = 0,0768$$

$$P(X = 4) = 0,2592$$

$$P(X = 2) = 0,2304$$

$$P(X = 5) = 0,0776$$

$$P(X = 3) = 0,3456$$

$$E(x) = 5 \cdot 0,6 = 3$$

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \geq 0,5$$

$$P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \geq 0,5$$

$$me(X) = 3$$

$$módusz = 3 \quad (P(X = 3) = 0,3456)$$

Hipergeometriai eloszlás - $X \sim \text{Hipergeo}(N, M, n)$

Legyen N elemből M jelölt. Jelölje X , hogy n visszatevés nélküli választásból hányszor húzunk jelöltet. Ekkor X eloszlása hipergeometriai.

X eloszlása: $(k, p_k)_{k=0,1,\dots,n}$, ahol $p_k = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

X várható értéke: $E(x) = n \frac{M}{N}$

X mediánja: közelítőleg $me(X) = \frac{(n+1)(M+1)}{N+2}$

X módusza: közelítőleg $\frac{(n+1)(N+1)}{N+n+2}$

Példa: Egy dobozban van 10 golyó, amelyből 6 db fehér. Háromszor húzunk visszatevés nélkül. Hányszor húzunk ki fehéret?

$X \sim \text{Hipergeo}(10; 6; 3)$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{6}{0}\binom{10-6}{3-0}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{30}$$

$$P(X = 2) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 1) = \frac{9}{30}$$

$$P(X = 3) = \frac{5}{30}$$

$$E(x) = 3 \frac{6}{10} = 1,8$$

Medián:

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \geq 0,5, P(X = 2) + P(X = 3) \geq 0,5$$

$$\frac{(n+1)(M+1)}{N+2} = \frac{(3+1)(6+1)}{10+2} = 2,3$$

$$me(X) = 2$$

Módusz:

$$\frac{(n+1)(N+1)}{N+n+2} = \frac{(3+1)(10+1)}{10+3+2} = 2,93$$

$$\text{módusz} = 2 \quad (P(X = 2) = 0,5)$$

Geometriai eloszlás - $X \sim Geo(p)$

Jelölje X , hogy hányadik független kísérletben következik be először egy p valószínűségű esemény.

X eloszlása: $(k, p_k)_{k=0,1,\dots}$, ahol $p_k = (1 - p)^{k-1}p$

X várható értéke: $E(x) = \frac{1}{p}$

X módusza: Mindig 1. Az a legvalószínűbb eset, hogy az első próbálkozás sikeres volt.

Példa: Hány embert kell megkérdezni, mire találok valakit, aki ebben a hónapban született? $X \sim Geo(\frac{1}{12})$

$$P(X = 1) = \left(1 - \frac{1}{12}\right)^{1-1} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

$$P(X = 2) = \frac{11}{144}$$

$$P(X = 3) = \frac{121}{1728}$$

$$E(x) = \frac{1}{\frac{1}{12}} = 12$$

módusz = 1

Negatív binomiális eloszlás - $X \sim \text{Negbin}(r, p)$

Jelölje X , hogy hányadik független kísérletben következik be r -edszer egy p valószínűségű esemény. Ekkor X eloszlása negatív binomiális.

X eloszlása: $(k, p_k)_{k=0,1,\dots}$, ahol $p_k = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$

X várható értéke: $E(x) = \frac{r}{p}$

Példa: Egy gyerekeknek szóló tombolán minden jegy 0,6 eséllyel nyerő. Addig vásárolunk szelvényeket, amíg nem lesz 2 nyertes. Hány húzásra van szükség, hogy kétszer nyerjünk? $X \sim \text{Negbin}(2, ; 0,6)$

$$P(X = 2) = \binom{2-1}{2-1} 0,6^2 (1-0,6)^{2-2} = 0,36$$

$$P(X = 3) = 0,288$$

$$P(X = 5) = 0,09$$

$$P(X = 4) = 0,1728$$

$$E(x) = \frac{2}{0,6} = 3,3$$

$$P(X = 2) + P(X = 3) \geq 0,5 \text{ és } P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \geq 0,5$$

$$me(X) = 3$$

$$\text{módusz} = 2 (P(X = 2) = 0,36)$$

Poisson eloszlás - $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

Ha X eloszlása $(k, p_k)_{k=0,1,000}$, ahol $p_k = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$, akkor X Poisson eloszlású.

X várható értéke: $E(x) = \lambda$

X mediánja: $me(X) = \lambda$

X módusza:

- λ és $\lambda - 1$, ha λ egész szám
- $[\lambda]$, ha λ nem egész szám

Példa: Tekintsük a $\lambda = 10$ paraméterű Poisson eloszlást.

$X \sim \text{Poisson}(10)$

$E(x) = 10$

$me(X) = 10$

módusz = 10 és 9

Következzen pár nevezetes folytonos eloszlás

Egyenletes eloszlás - $X \sim E(a, b)$

Az egyenletes eloszlás annak felel meg, hogy X értéke az (a, b) intervallumban teljesen véletlenszerű. Ez azt jelenti, hogy a sűrűségfüggvénye konstans.

$$X \text{ sűrűségfüggvénye: } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a < x < b \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$X \text{ eloszlásfüggvénye: } F(X) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a < x \leq b \\ 1 & \text{ha } x > b \end{cases}$$

$$X \text{ várható értéke: } E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$X \text{ mediánja: } me(X) = \frac{a+b}{2}$$

X módusza: Minden érték azonos valószínűséggel fordul elő, így nincs legvalószínűbb elem.

Példa: Általános iskolában a matematika dolgozatot a lassabbak szünetben is befejezhetik, de maximum 5 percet kapnak pluszban. Így a dolgozatot mindenki legalább 45, de legfeljebb 50 percig írja.

$$X \sim E(45; 50)$$

$$E(X) = \frac{45 + 50}{2} = 47,5$$

$$me(X) = \frac{45 + 50}{2} = 47,5$$

Exponenciális eloszlás - $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

Azt mondhatjuk, hogy az X valószínűségi változó exponenciális eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel, ha

$$X \text{ sűrűségfüggvénye: } f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0 \\ 0 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$$X \text{ eloszlásfüggvénye: } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

$$X \text{ várható értéke: } E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$X \text{ mediánja: } me(X) = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Példa: Tekintsük a $\lambda = 5$ paraméterű Exponenciális eloszlást.

$$X \sim \text{Exp}(5)$$

$$E(X) = \frac{1}{5}$$

$$me(X) = \frac{\ln 2}{5} \approx 0,1386$$

Standard normális eloszlás - $X \sim N(0, 1)$

Azt mondhatjuk, hogy az X valószínűségi változó standard normális eloszlású, ha

$$X \text{ sűrűségfüggvénye: } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$$

X várható értéke: $E(X) = 0$, mivel φ szimmetrikus nullára

X mediánja: $me(X) = 0$, mivel φ szimmetrikus nullára

X módusza: 0 , mivel a haranggörbe itt veszi fel a maximumát

Normális eloszlás - $X \sim N(m, \sigma^2)$

Legyen $Y \sim N(0, 1)$ és $X = \sigma Y + m$, ahol $m \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$. Ekkor azt mondhatjuk, hogy az X valószínűségi változó normális eloszlású m és σ^2 paraméterekkel.

$$X \text{ sűrűségfüggvénye: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$$

X várható értéke: $E(X) = m$, mivel f szimmetrikus m -re

X mediánja: $me(X) = m$, mivel f szimmetrikus m -re

X módusza: m , mivel a haranggörbe itt veszi fel a maximumát

Példa: Tekintsük az $X \sim N(2, 3^2)$ normál eloszlást.

$$E(X) = me(X) = \text{módusz} = 2$$

2.7.2. Nevezetes közepek

A foglalkozások során a diákok megtapasztalhatták, hogy a vizsgált mutatók a különböző adatok esetén miként változnak. Megfigyelhető, hogy egyik érték sem lehet kisebb vagy nagyobb az adatok legkisebb, illetve legnagyobb értékénél. Ezen tulajdonságuk alapján középértékeknek nevezzük őket. A matematikában ezek mellett több középérték is létezik. A foglalkozások során körül járt átlag, azaz a számtani közép mellett több nevezetes közép is létezik, mint a mértani közép, harmonikus közép vagy a négyzetes közép. Minél jobban megismerjük egy közép viselkedését annál könnyebben mérhetjük össze más közepekkel.

Két szám ($a \geq b > 0$) esetén:

Definíció: Két szám számtani vagy aritmetikai közepén az alábbi összefüggést értjük:

$$A(a; b) = \frac{a + b}{2}$$

Állítás: $b \leq \frac{a+b}{2} \leq a$

Bizonyítás: $b = \frac{b+b}{2} \leq \frac{a+b}{2} \leq \frac{a+a}{2} \leq a$

Definíció: Két szám mértani vagy geometriai közepén az alábbi összefüggést értjük:

$$G(a; b) = \sqrt{ab}$$

Állítás: $b \leq \sqrt{ab} \leq a$

Bizonyítás: $b = \sqrt{bb} \leq \sqrt{ab} \leq \sqrt{aa} \leq a$

Definíció: Két szám harmonikus közepén az alábbi összefüggést értjük:

$$H(a; b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Állítás: $b \leq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq a$

Bizonyítás: $b = \frac{2}{\frac{1}{b} + \frac{1}{b}} \leq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{a}} \leq \frac{2}{\frac{2}{a}} = a$, mivel $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$

Definíció: Két szám négyzetes közepén az alábbi összefüggést értjük:

$$N(a; b) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

Állítás: $b \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leq a$

Bizonyítás: $b = \sqrt{\frac{b^2 + b^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{a^2 + a^2}{2}} \leq a$, mivel $b^2 \leq a^2$

Állítás: A nevezetes közepekre fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$H(a; b) \leq G(a; b) \leq A(a; b) \leq N(a; b)$$

Több szám ($a_1, a_2, \dots, a_n > 0$) esetén:

Definíció: n darab szám számtani közepén vagy aritmetikai közepén az n darab szám összegének és darabszámának, az n számnak a hányadosát értjük:

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Definíció: n darab szám mértani közepén vagy geometriai közepén az n darab szám szorzatának az n -edik gyöké értjük:

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Definíció: n darab szám harmonikus közepén az n darab szám reciprok értékeiből számított számtani közép reciprokát értjük:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

Definíció: n darab szám négyzetes közepén az n darab szám négyzeteinek számtani közepéből vont négyzetgyököt értjük

$$N = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

A nevezetes közepek között továbbra is fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$H \leq G \leq A \leq N$$

2.8. Harmadik alkalom

Utolsó alkalommal az adatok ábrázolásával, illetve a már ábrázolt adatok értelmezésével foglalkozunk. A témakör ezen része nagy hangsúlyt kap általános iskolában. Ezt mutatja, hogy a nyolcadikos diákok által minden évben megírt központi írásbeli feladatsorok mindig tartalmazznak olyan részt, ahol egy diagramhoz kapcsolódó kérdésekre kell válaszolni. Ez az egyik oka, hogy az utolsó alkalom témájának ezt választottam.

Másfelől az adatok vizualizációja eltér egy megszokott matematika feladattól, ezért alkalmas lehet felkelteni azon diákok figyelmét, akik nem igazán szeretik ezt a tantárgyat. Egy jó ábra vagy grafikon elkészítéséhez szükség van kreativitásra. Az olyan készség tárgyak kedvelői, mint például rajz, előtérbe kerülhetnek. Minél szebb, látványosabb grafikonok készítésével előtérbe kerülhet az erényeik. Bízassuk ezen diákokat, hogy bátran használjanak színeket az adatok jelöléséhez és készítsenek különböző fajtájú grafikonokat. A foglalkozás keretein belül mi is ezt fogjuk tenni.

A foglalkozást egy rövid beszélgetéssel kezdem. Megkérdezem, hogy milyen diagram típusokat ismernek. Megkérem őket, hogy aki tud, az nyugodtan mondjon példát melyikkel mit érdemes szemléltetni. Megkérdezem őket, hogy milyen eszközökkel készítették már diagrammokat. Arra számítok, hogy eddig csak a füzetben kézzel rajzolták ezeket, illetve informatika órán Excelben létrehoztak egyszerűbb oszlop- vagy kördiagrammokat. Ezen látómezőt szeretném szélesíteni egy újabb felülettel, ezért most a Google Looker Studio-t fogjuk használni. Ahogyan azt már korábban leírtam ez egy magyar nyelven is elérhető, ingyenesen használható online alkalmazás. A felület célközönsége alapvetően nagyobb vállalatok és ehhez mérten rengeteg funkcióval rendelkezik. Ezen információkat a diákoknak is elmesélem. Ezután megkérem őket, hogy nyissák meg a kapott link segítségével a korábbi foglalkozásokhoz hasonlóan előkészített weboldalt.

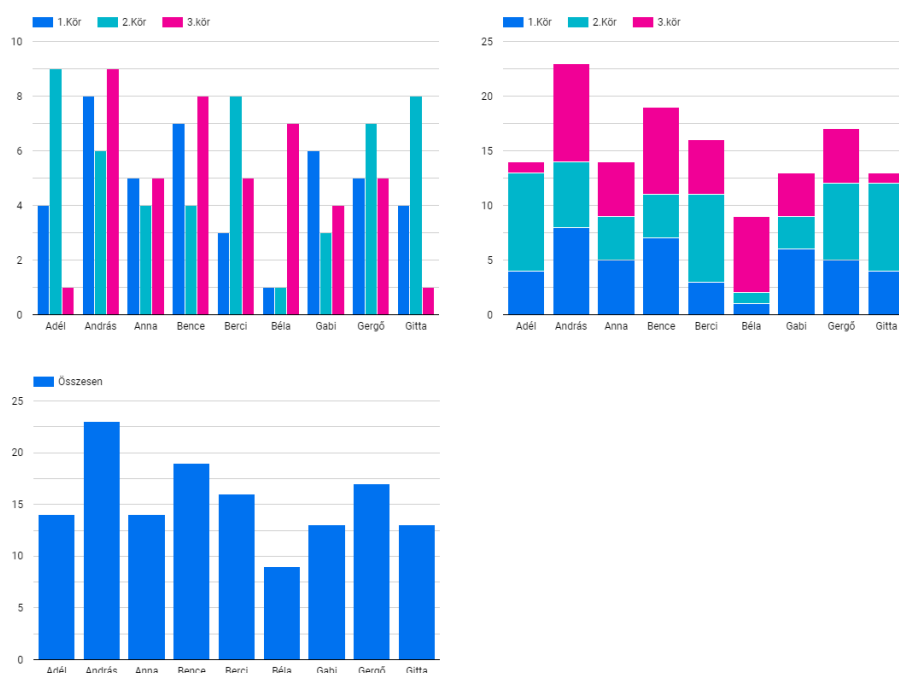
2.8.1. Első oldal

Nevek -	Csapat	Nem	1.Kör	2.Kör	3.kör	Összesen
Gitta	Gamma	L	4	8	1	13
Gergő	Gamma	F	5	7	5	17
Gabi	Gamma	L	6	3	4	13
Béla	Béta	F	1	1	7	9
Berci	Béta	F	3	8	5	16
Bence	Béta	F	7	4	8	19
Anna	Alpha	L	5	4	5	14
András	Alpha	F	8	6	9	23
Adél	Alpha	L	4	9	1	14

8. ábra Első oldal

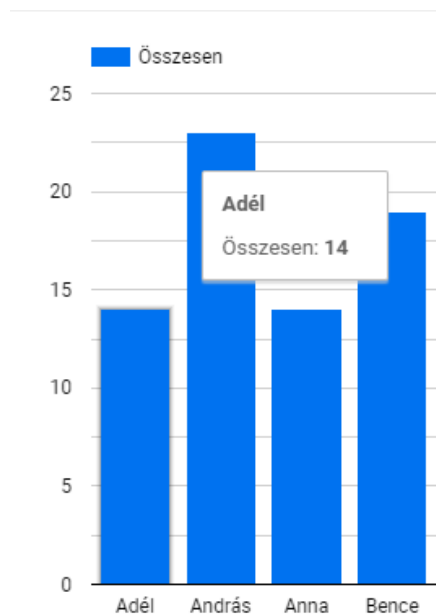
Az első oldalon találjuk azon adatokat (lásd 8. ábra), amelyekkel dolgozni fogunk. Áttekintjük ezeket és elmesélem a csoportnak, hogy ezek az adatok egy versenyhez tartoznak. Láthatjuk az indulók neveit és a hozzájuk tartozó egyéb információkat. Minden induló esetében láthatjuk, hogy mely csapatba tartozik és milyen nemű. Ezek ismétlődő adatok így számunkra megfelelőek lesznek csoportosítás vagy szűrés céljára. Minden név ugyanolyan kezdőbetűvel rendelkezik, mint a saját csapatneve. Ennek csak átláthatósági okai vannak. A verseny jellege egy három körből álló megmérettetés. A táblázatban látható minden játékos adott körben, illetve összesen elért pontszáma. Az utolsó oszlopban szereplő összpontszámot szintén csak az egyszerűség kedvéért vettem be az adatok közé, hiszen ennek kiszámítására lenne lehetőség a Looker Studio-ban is. Annak érdekében, hogy minden adat teljesen érthető legyen, végig megyünk egy választott versenyző adatsorán és megbeszéljük, hogy milyen adatok tartoznak ő hozzá.

2.8.2. Második oldal



9. ábra Második oldal

Az adatok megismerése után tovább mehetünk a második oldalra (*lásd 9. ábra*). Itt különböző oszlopdiagrammokat találunk. Hagyok pár percet a tanulók számára, hogy tanulmányozzák ezeket. Majd megbeszéljük őket egyesével. Kezdetben megnézzük milyen információk szerepelnek a tengelyeken. Mindhárom diagram esetében a vízszintes tengelyen a versenyzők nevei szerepelnek. Ez fogja adni a diagrammok összehasonlításának alapját. A függőleges tengelyeken pedig pontszámokat jelenítünk meg. Megkérdezem, hogy milyen információkat tudunk meg az első diagramról. Megbeszéljük, hogy itt minden versenyző pontszáma szerepel, még hozzá körökre bontva. Rákérdezek néhány konkrét adatra, amit nekik kell leolvasniuk. Például, hogy Gabi hány pontot szerzett a második körben. Valószínűleg erre könnyen választ tudnak majd adni. Ezután már felvezetve a másik két diagrammot megkérdezem, hogy például Adél hány pontot szerzett összesen. Úgy gondolom a diákoknak ez sem okoz majd különösebb gondot, hiszen a második és harmadik grafikonon is az összpontszám jelenik meg. Abban az esetben, ha rávisszük a kurzort a lenti grafikonon az Adélhoz tartozó oszlopra, akkor a program ki is írja a megfelelő adatot (*lásd 10. ábra*).



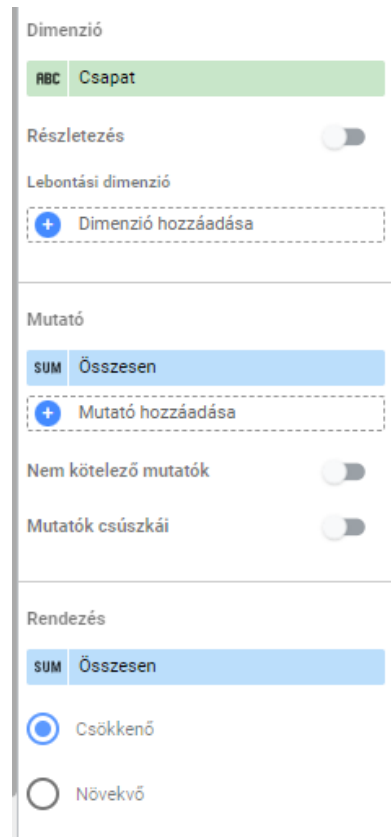
10. ábra Adatcímke mutatása

Ezután megbeszéljük, hogy miben különbözik az a két diagram, amely az összpontszámot jeleníti meg. Mindkét esetben látható egy-egy versenyző összpontszáma, de a halmozott oszlopdiagrammon a különböző körökben szerzett pontok aránya is látható. Több információ nyerhető ki egy ábrából. Megjegyzem, hogy ez nagyon sok, közel azonos érték esetén csak zavaró és nem ad plusz értéket hozzá a diagrammunkhoz.

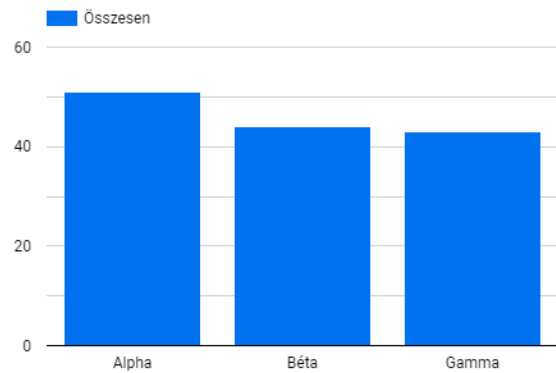
Ekkor megkérdezem őket, hogy ők melyik diagrammot használnák a verseny eredményeinek szemléltetésére és miért. Reményeim szerint mindkét felső diagrammot választja, majd valaki. Ha csak arra vagyunk kíváncsiak kinek van a legtöbb pontja, akkor tökéletes az alsó ábra is, de erre a célra látványosabb a halmozott oszlopdiagram. Abban az esetben, ha szeretnénk jól látható módon szemléltetni minden versenyző esetében a körönként elért pontszámot, akkor az első a legjobb választás. Ezekkel a kérdésekkel szeretném megmutatni számukra, hogy a diagrammokat mindig az adott cél érdekében készítjük és olyan formában, amely a legjobb szemlélteti a kívánt jelenséget.

Ezen az oldalon maradván létrehozunk még egy oszlopdiagrammot. Mutatom számukra, hogy ezt miként lehet megtenni, majd ők is megcsinálják. Ez az oszlopdiagram csapatonként fogja mutatni, a csapatok által elért összpontszámot. Először a beszúrás menüből kiválasztjuk az

oszlopdigrammot, majd ezt elhelyezzük az oldalon. Ezután a tulajdonságok menüben beállítjuk, hogy mit szeretnénk látni (lásd 11. és 12. ábrák).



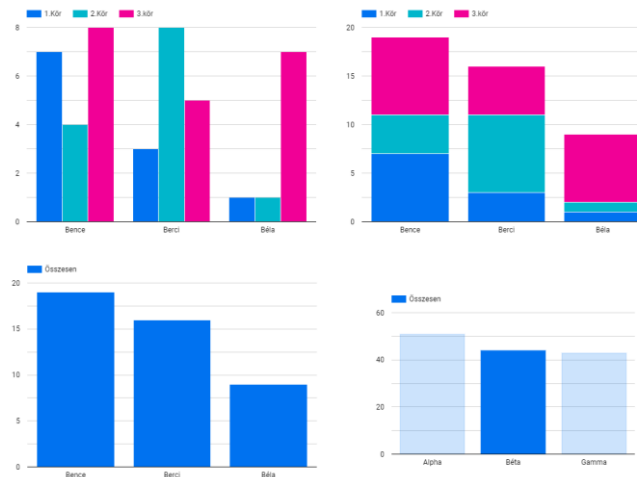
11. ábra Tulajdonságok menü



12. ábra Elkészült összesítő diagram

Ezen a diagrammon egyértelműen látszik, hogy az Alpha csapat nyerte a versenyt. Az általuk elért pontszámot több módon is megtudhatjuk. Rávihetjük a kurzort és ekkor kiírja a program vagy a diagram stílusánál beállítható, hogy az adtcímkék láthatóak legyenek. Ezt a részt a diákokra bízom, hogy keressék meg és állítsák be.

Az utolsó feladat következik az oldalon. Az utoljára létrehozott diagrammon kattintsunk rá a Béta csapat pontszámát jelző oszlopra. Ekkor minden diagrammon automatikusan csak a Béta csapathoz tartozó adatok fognak megjelenni (lásd 13. ábra).

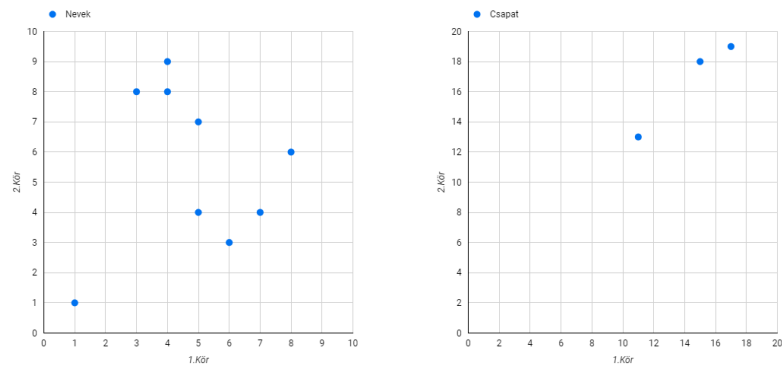


13. ábra Béta csapathoz tartozó szűrés eredménye

Ez egy gyors és egyszerű módja annak, hogy szűrést végezzünk az adatokon. Úgy gondolom, hogy ez nagyon látványos és a diákok figyelmét is felkelti.

Ezen feladatok mentén elkezdünk megismerkedni a weboldallal. Meglévő diagrammokról információkat olvasunk le és létrehozunk újakat. Módosítjuk diagrammok beállításait és stílusát. Megnézzük, hogy miként lehet szűrést végezni. Azon időt megspórolva, ami alatt meg kellene rajzolni a diagrammokat, több értékesebb kérdést is meg lehet beszélni. Emellett a diagrammok módosítási lehetősége megfelelő program nélkül megvalósíthatatlan.

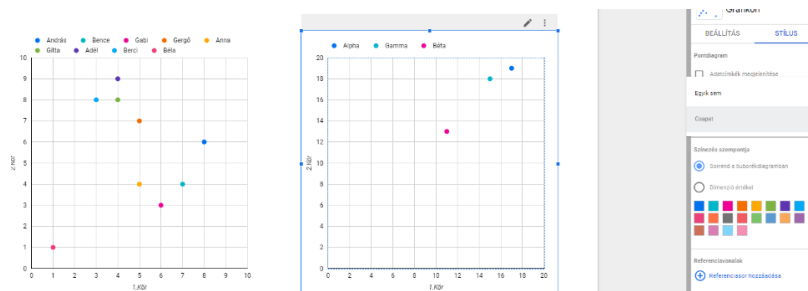
2.8.3. Harmadik oldal



14. ábra Harmadik oldal

A harmadik oldalon két pontdiagrammot találunk (lásd 14. ábra). Kezdetben megvizsgáljuk milyen információk szerepelnek a tengelyeken. Mindkét esetben az első és második kör pontszámai jelennek meg a vízszintes, illetve függőleges tengelyeken. ezen felül látható, hogy az első diagram esetében a versenyzők, míg a másodikon a csapatok szerepelnek.

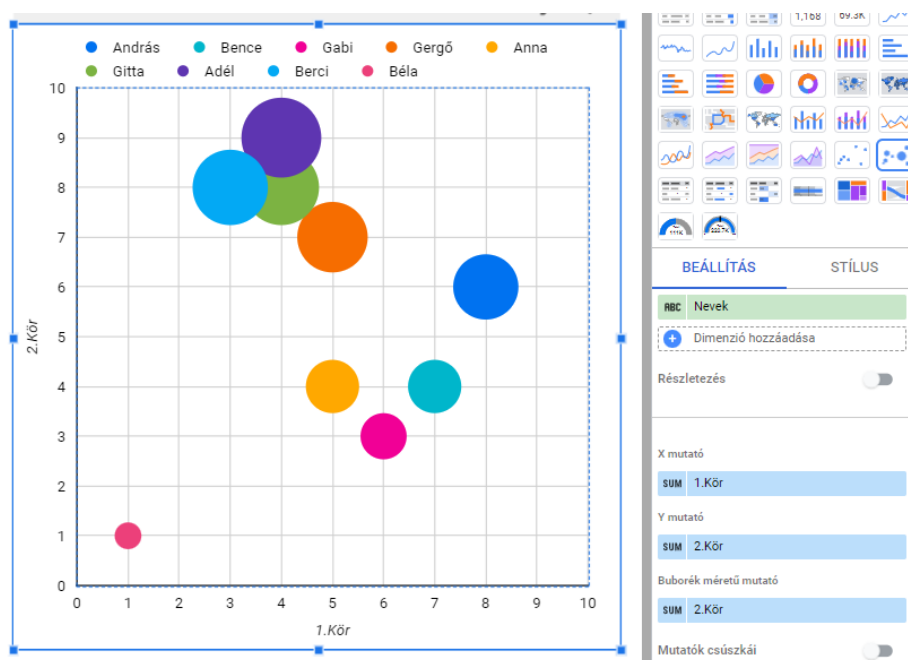
Megkérdezem, hogy mit tudunk meg a grafikonokról. Mivel nem látható, hogy az adott pontok kit vagy mit jelölnek pontosan, így az információk kinyerése meglehetősen nehéz. Amikor egy adott pont fölé visszük a kurzort akkor ott megjelenik a ponthoz tartozó név, illetve az első és második körben szerzett pontszám is. Ettől ez még nem lesz egy jól olvasható diagram. Ötleteljünk közösen mitől lehetne jobb a diagram. Ha minden pont felett megjelenne a hozzá tartozó név, akkor már ránézésre tudnánk melyik versenyző hol helyezkedik el. Különböző színekkel lehetne jelölni a pontokat és minden színhez tartozna egy versenyző. Következő lépésben ezeket az ötleteket meg is valósítjuk. Mindkét diagram esetében, a diagram stílusán belül beállítjuk, hogy a buborékok színe nevek, illetve csapatok szerint jelenjenek meg (lásd 15. ábra).



15. ábra Stílusbeállítások

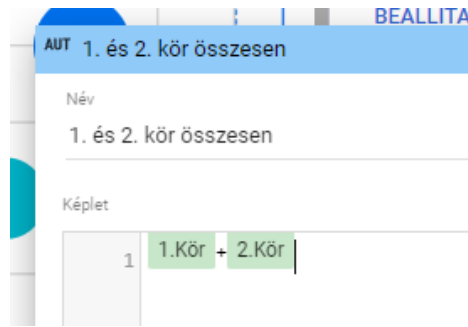
Most, hogy már könnyebben értelmezhetővé vált a diagram megkérdezem tőlük, hogy mit tudunk leolvasni róla. Segítségképpen tekintsük meg Bélát. Béla nagyon közel helyezkedik mindkét tengelyen a nullához. Egyik fordulóban sem ért el sok pontot. Ezzel szemben András mindkét tengely esetében messzebb helyezkedik az origótól. Ebből levonható az a következtetés, hogy minél távolabb helyezkedik egy játékos az origótól, annál jobban teljesített összességében az első és második fordulót alapul véve.

Ezek után megnézzük hogyan lehetne még látványosabbá tenni a diagrammot. Megkérem a diákokat, hogy állítsuk át a neveket tartalmazó diagram típusát buborékdiaagramra (lásd 16. ábra).



16. ábra Buborékdiaagram

Ekkor a buborékok mérete még nem megfelelő, hiszen a program automatikusan a második kör pontszámai alapján állítja ezt be. Számunkra a megfelelő méretezés az első és második kör összpontszáma szerint lenne jó. Ilyen mezőnk még nincs, ezt létre kell hozni. A buborékok méreténél egy új mezőt fogunk létrehozni. Az új mező neve legyen „1. és 2. kör összesen”. A képlet egyszerűen az „1. kör” és „2. kör” mezők összege (lásd 17. és 18. ábra).



17. ábra Mezők összegzése

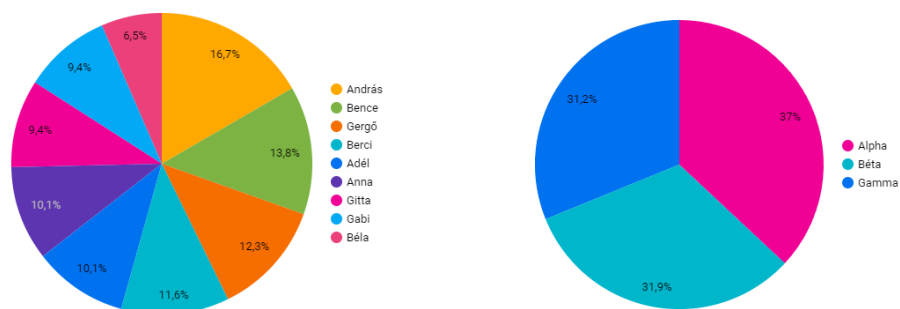


18. ábra Buborék számszerű mérete

Ekkor már a megfelelő mérettel rendelkezik minden buborék. Minél messzebb találhatóak az origótól, annál nagyobbak. A buborékok mérete könnyen ellenőrizhető, ha rávisszük bármelyikre a kurzort. Ha a buborékok túlságosan nagyok és zavaróan fedik egymást, akkor a stílusmenüben egymáshoz viszonyítva arányosan állítható a méretük.

Ezzel egy nagyon látványos diagrammot tudunk készíteni és meglehetősen gyorsan. Egy ilyen grafikon elkészítése a füzetben nagyon sok időt venne. Meg lehet ezt is tenni és egy pont diagram minden pontja köré a két körben elért összpontszámmal arányos sugarú köröket rajzolva. Úgy gondolom ennek megalkotása ellentétes hatást váltana ki és inkább csökkentené a diákok figyelmét. Emellett ez sok számítással járna és pont azon diákok motivációjára lenne negatív hatással, akiket egy látványos, kreatív feladattal szerettünk volna ösztönözni. Továbbá a buborékdiagram nem képezi részét a kötelezően megismerendő diagrammoknak. Használjuk ezt érdekességnek és figyelem felkeltő eszköznek.

2.8.4. Negyedik oldal

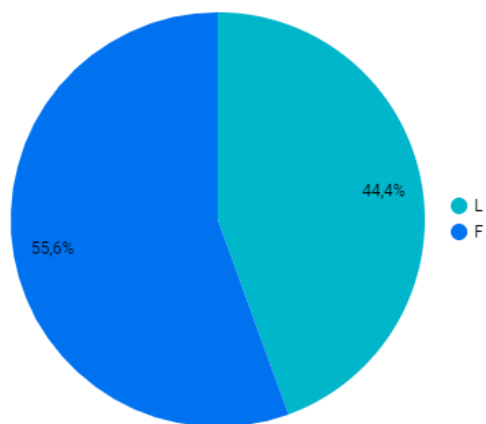


19. ábra Negyedik oldal

A negyedik oldalon két kördiagrammot találunk (lásd 19. ábra). Látható, hogy a bal oldali a nevekkel, a jobb oldali a csapatokkal foglalkozik. Ránézésre ennél többet nem tudunk meg. Első feladatként ki kell deríteniük, hogy milyen adatokat ábrázolnak a diagrammok. A korábbi oldalakon már használtuk a „Tulajdonságok” menüt. Nincs más dolguk, mint ezt megnyitni és kiolvasni, hogy milyen adatok alapján készültek a diagrammok. Mindkét diagram az összpontszámok eloszlását jeleníti meg. Ezután megkérdezem, hogy miként lehetne ezt szemléltetni. Mivel egyik diagramnak sincs címe, így ennek megadásával már egyértelműen lehetne tudni mit ábrázoltunk. Ez megtehető egy szövegdozoz segítségével is.

Ezek után az a kérdésem, hogy mit jelentenek kördiagrammon látható százalékos értékek. Például András esetében mit takar a „16,5%” felirat. Az előbb láttuk, hogy az „Összesen” mező alapján készült a diagram. Ettől függetlenül érdemes megbeszélni, hogy András nem a versenyen szerezhető összes pont, hanem a versenyzők által megszerzett összes pont 16,5%-át gyűjtötte össze. Ez a két dolog között nagy különbség van. Az adatokból nem is derül ki, hogy valójában hány pontot lehetett elérni egy adott fordulóban és összességében a versenyen.

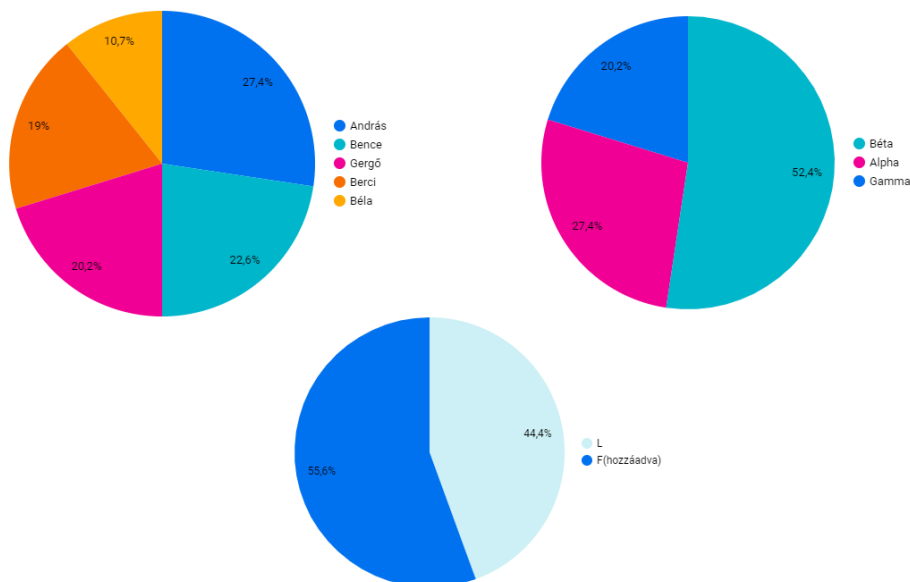
A következő feladatban arra kérem a diákokat, hogy hozzanak létre ezen az oldalon még egy kör diagrammot, ami mutatja a versenyzők neveinek eloszlását (lásd 20. ábra).



20. ábra Nemek eloszlása

Megkérdezem őket, hogy mi az, amit ez a diagram elárul. Valószínűleg mindenki azt fogja válaszolni, hogy több fiú vett részt a versenyen, mint lány. Ezen diagram segítségével nézzük meg, hogy csak a fiúk egymáshoz mérten hogyan teljesítettek a versenyen. Szerencsére ez egy mozdulattal megtehető. Kattintsunk rá a kördiagrammon a fiúkat jelölő részre. Ezután minden diagrammon csak a fiúkhöz tartozó értékek fognak megjelenni (lásd 21. ábra).

Összpontszám megoszlása versenyzők szerint

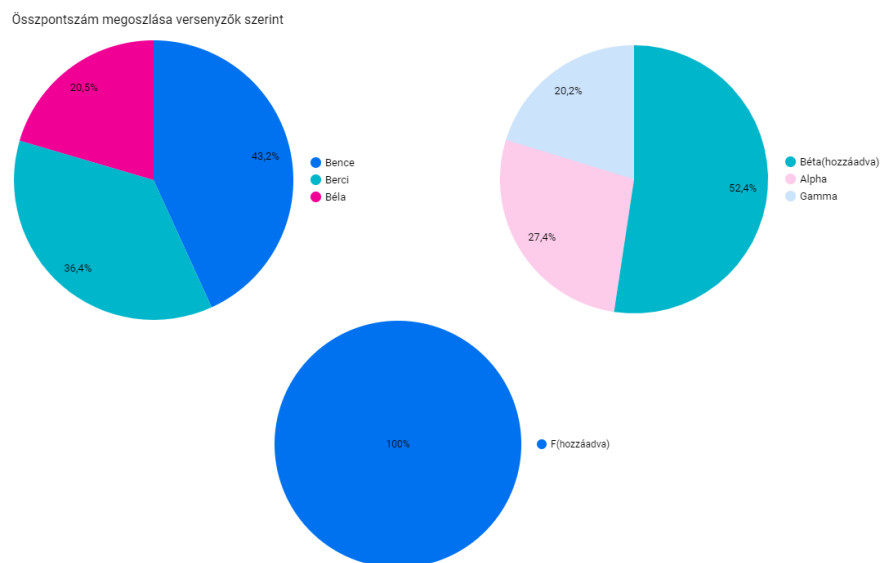


21. ábra Szűrés a fiúk alapján

Tekintsük először a versenyzőkhöz tartozó diagrammot. Mondjunk példákat mit tudunk erről leolvasni. Jól látható, hogy Béla volt a legrosszabbul és András a legjobban szereplő fiú. Látható továbbá, hogy a fiúk által szerzett pontok felét András és Bence gyűjtötték össze. Ezután

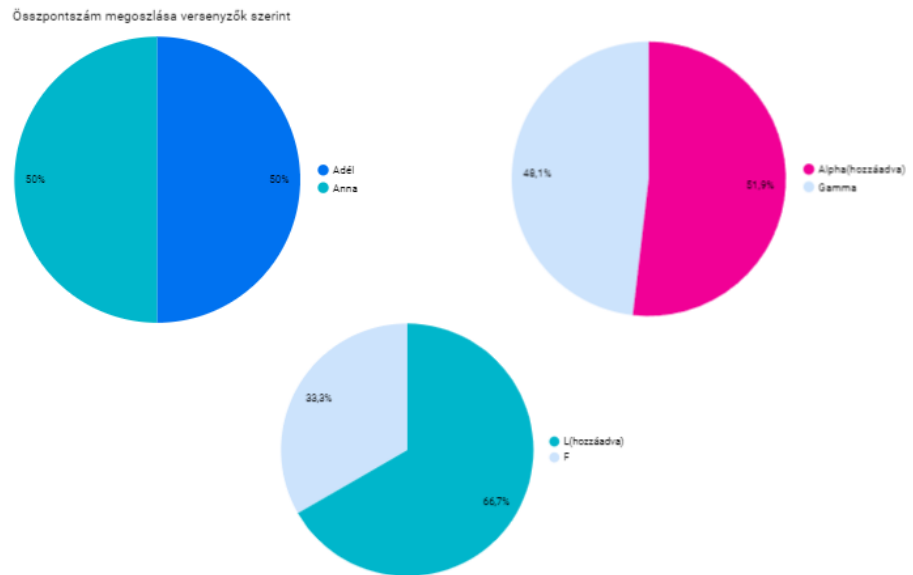
tekintsük meg a csapatokról szóló diagrammot. Kérdezzük meg a diákokat, hogy ez az ábra mit árul el nekünk. Mivel a csapatokon belül eltérő a fiúk és lányok aránya, így ez a diagram számunkra nem tartalmaz releváns információkat. Még arra sem lehet ebből következtetni, hogy melyik csapatban teljesítettek legjobban a fiúk. Nagyjából az látható, hogy a Béta csapat fiúi kétszer annyi pontot szereztek, mint az Alpha csapat fiúi. Ez igaz, de ha megnézzük az első oldalon, hogy az adott csapatokban hány fiú szerepelt, akkor látható, hogy a Béta csapatban háromszor annyi fiú csak kétszer annyi pontot ért el, mint az Alpha csapat egyszem fiúja.

Ezt követően alkalmazzunk még egy szűrést az adatokon. Az alsó diagrammon maradjanak kijelölve a fiúk és emellett a jobb oldali diagrammon jelöljük ki a Béta csapatot. Ezáltal a diagrammokon csak azon fiúk szerepelnek majd, akik a Béta csapatban vannak (*lásd 22. ábra*). Az alsó diagrammon látszik, hogy ebben a csapatban csak fiúk vannak. A bal oldali diagrammon pedig az általuk szerzett pontok eloszlását látjuk.



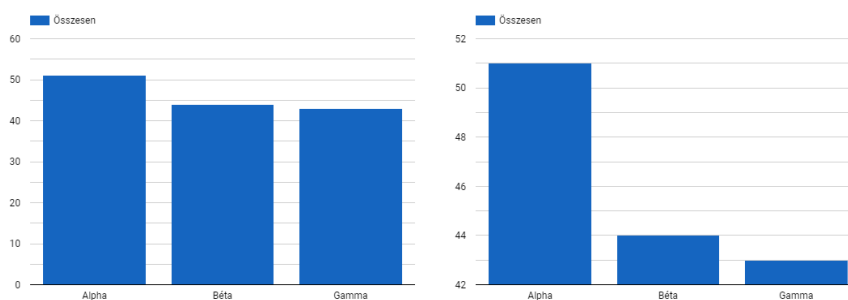
22. ábra Szűrés a Béta csapat fiúira

Utolsó feladat keretein belül nézzük meg, hogyan teljesítettek az Alpha csapatban szereplő lányok. Ehhez a megfelelő diagrammokon ki kell jelölni az Alpha csapatot és a lányokat. Ezután leolvasható a bal oldali diagramról, hogy ebben a csapatban szereplő lányok ugyanannyi pontot szereztek (*lásd 23. ábra*).



23. ábra Szűrés az Alpha csapat lányaira

2.8.6. Ötödik oldal

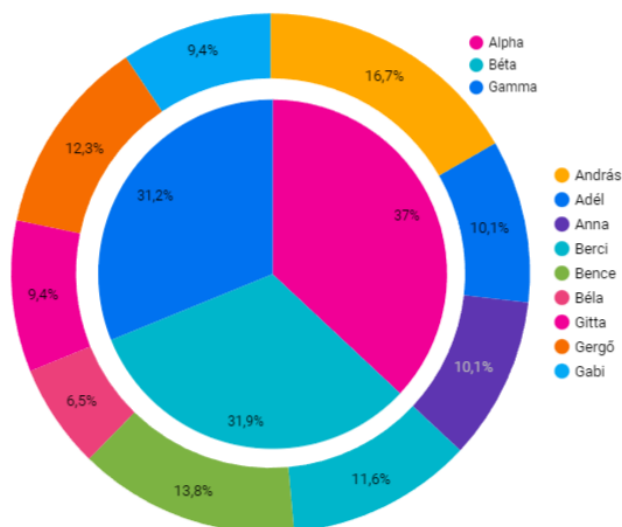


24. ábra Ötödik oldal

Az ötödik oldalon újabb oszlopdiagrammokat találunk (lásd 24. ábra). A diákok feladata összehasonlítani ezeket. Mindkét diagrammon a csapatok összpontszáma van megjelenítve. A különbség abban rejlik, hogy a jobb oldali esetén a függőleges tengely beosztása negyvenkettővel kezdődik. Miután ezt a felfedezést megtettük, gondolkodjunk el rajta, hogy ettől mi változik. Fogalmazzunk meg gondolatokat a jobb oldali diagrammon szereplő oszlopok magasságáról. Az látható, hogy az Alpha csapathoz tartozó oszlop magassága többszöröse a másik két csapathoz tartozó oszlopok magasságának. Kérdezzük meg őket, hogy a verseny végeredményét tekintve ez milyen érzést kelt. Ezzel a vizuális trükkel az a hatás érhető el mintha az Alpha csapat nagyon fölényes győzelmet aratott volna. Ezzel szemben a jobb oldali, nem módosított diagrammon látszik, hogy valójában ez nem történt így.

A feladat tanulsága, hogy a vizuális megjelenés bármennyire is látványos tud lenni, az adatszámok, a tengelyek beosztása és a jelmagyarázatok megismerése nélkül nem vonható le belőle semmilyen következtetés sem.

2.8.8. Hatodik oldal



25. ábra Hatodik oldal

A hatodik és egyben utolsó oldalon két korábban már látott kördiagram egy látványos elhelyezési módjának bemutatásával szeretném zárni a foglalkozást (lásd 25. ábra). A belső kördiagrammon a csapatok által szerzett pontszámok eloszlása, amíg a külső gyűrűdiagrammon a játékosok pontszámainak eloszlása látszik. Az adatok mindkét diagrammon a „Csapatok” mező szerint vannak növekvő sorrendbe rendezve. Ezáltal a csapatokat jelölő területek mellett az oda tartozó játékosok találhatóak. Jól látható így, hogy például az Alpha csapat az összes pontszám 37%-át szerezte meg, ami a csapatban szereplő játékosok esetében 10,1%, 10,1% és 16,7%-ot jelent. Természetesen ez, akkor is látható lenne, ha nem így helyeztük volna el a diagrammokat, de kevésbé lenne szemléletes.

Az ehhez hasonló feladatokon keresztül sok mindent megmutathatunk a diákok számára.

1. Egy diagram célja nem csak az adatok vizuális megjelenítése. Egy jó diagram mindig könnyen értelmezhető. Az adatokat egyértelmű és világos módon kell ábrázolnia, hogy a szükséges információkat könnyen le tudjuk olvasni.
2. A megfelelő diagram típus kiválasztása is lényeges. Az átadni kívánt üzenet célja alapján kell megválasztani. A kiválasztott típusnak olyannak kel lennie, hogy általa megértsük az ábrázolt adatok közti összefüggéseket. Általában több típus is megfelelő

lehet. A diagram készítés általában egy nyitott feladat, ezért alkalmas a diákok önállóságának és problémamegoldó képességének fejlesztéséhez.

3. Egy jó diagram vizuális megjelenésével felkelti a figyelmet. Ezt teheti színekkel, formákkal vagy különböző típusokkal. Vigyázni kell, hogy az érdeklődés felkeltése mellett ne legyen túlzó vagy zavaró. Meg kell teremteni a megfelelő egyensúlyt a tartalom és a vizuális megjelenítés között.
4. A diagrammot felhasználási területe alapján el kell látni megfelelő címmel, ha van akkor a tengelyeinek elnevezéseivel és jelmagyarázattal. Az adott kontextuson belül a nézőnek meg kell tudnia érteni a diagram által közölt információkat.

2.9. Felmérő

A foglalkozások végeztével a diákok megírják egy felmérő feladatsort. Erre már nem digitálisan, hanem papír alapon kerül sor. Ennek oka, hogy általában a diákokra váró legfőbb megmérettetések, mint például a középiskolai felvételi vagy a későbbi érettségi is papíron zajlik. A foglalkozások, akkor tekinthetők sikeresnek, ha a digitális eszközökön keresztül megszerzett tudást hagyományos körülmények között is fel tudják használni.

Egy számonkérés helyszínének és körülményeinek kiválasztására minden esetben figyelni kell. A diákok teljesítményét befolyásolhatja, hogy hol és milyen formában kell számot adniuk tudásukról. Azok a tanulók sok esetben jobban teljesítenek, akik ugyanazon a helyen számolnak be tudásukról, ahol az ismereteket megszerezték. Az ismerős környezet biztonságot nyújt és itt könnyebben fel tudják idézni a tanultakat.

Ezzel szemben én fontosnak érzem, hogy a megszerzett tudást ne csak az iskola falain belül, a megszokott környezetben tudják majd hasznosítani, hanem bármely helyzetben és szituációban. Ez lehet egy már korábban említett vizsgaszituáció vagy az élet bármely területe. Visszautalva az tervezett foglalkozásokra a megfelelő számonkérési körülmények kiválasztása mellett érdemes arra is figyelni, hogy a diákokat minél több különböző helyzetbe és környezetbe helyezzük, hogy minél szélesebb körű tanulási élményekkel gazdagodhassanak.

A felmérőbe választott feladatokat többségében korábbi érettségi feladatsorokból választottam ki. Úgy gondolom, hogy ha a nyolcadik osztályos diákok ezeket is meg tudják oldani, akkor valóban tudtam számukra befogadható módon új információkat átadni.

2.9.2. Első feladat

1. Az alábbi táblázat egy biológiadolgozat eredményeit mutatja. Adja meg az adathalmaz móduszát és mediánját!

érdemjegy	1 (elégtelen)	2 (elégséges)	3 (közepes)	4 (jó)	5 (jeles)
dolgozatok száma	0	1	3	5	6

26. ábra Első feladat

Az első feladatot (lásd 26. ábra) a 2019-es tavaszi középszintű matematika érettségiből választottam ki (Matematika középszintű írásbeli vizsga 2019.05.07.). Ott ez volt a tizenkettedik feladat, azaz a rövid feladatok közé tartozott. A módusz meghatározása egy pontot, a medián értéke kettő pontot ért. Úgy gondolom ez egy jó kezdő feladat. Nem hosszú és többségében még a tanórákon megszerzett tudásukra van szükségük. Viszont a jegyek nincsenek felsorolva. A darabszámaik láthatóak hasonló módon ahogy az első foglalkozás során mi is összegeztük a jegyek számát. Úgy gondolom, hogy a móduszt egyszerűen a látott darabszámok alapján meg fogják tudni határozni. A medián esetében valószínűleg fel fogják sorolni a számokat és ezek után megkeresik majd a középső elemet.

Gondolkodtam azon, hogy kibővítem a feladatot a jegyek átlagának kiszámításával is. Végül ezt nem tettem meg. Úgy gondolom, hogy érdemben nem adott volna hozzá a feladathoz. Mivel meg kell határozni a mediánt, valószínűleg felsorolják a jegyeket. Az átlag kiszámítása ezek után csak ezen számok összeadásából, illetve megszámlálásából állt volna.

A módusz és medián meghatározásán túl, a valódi célom a feladattal az volt, hogy lássam tudják-e értelmezni a táblázatba rendezett adatokat.

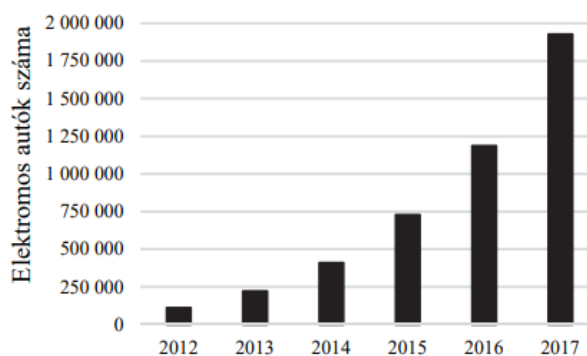
2.9.4. Második feladat

2. Szemléltesse oszlopdiaagrammon a táblázat adatait.

év	2012	2013	2014	2015	2016	2017
elektromos autók száma (ezerre kerekítve)	110 000	221 000	409 000	727 000	1 186 000	1 928 000

27. ábra Második feladat

A második feladat szintén a 2019-es tavaszi középszintű matematika érettségiből származik, de már a második feléből (Matematika középszintű írásbeli vizsga 2019.05.07.). Sőt azon belül is a választható feladatok között a tizenhatodik feladat b) része volt. Három pontot lehetett begyűjteni egy tökéletes megoldásért. A javítási útmutató részletes leírást nem ad arról mi számít hibátlan megoldásnak, de látható egy minta (*lásd 28. ábra*).



28. ábra Mintamegoldás

Én úgy tudnám meghatározni a teljes értékű megoldást, hogy a diákok az egyik tengelyen (célszerűen a vízszintes) jelölik az évszámokat, a másikon pedig az autók számát. Ezen kívül egy adott évhez tartozó oszlop teteje a megfelelő darabszám értéknél van. A megoldás minőségét növeli, ha a tanuló ügyel a megfelelő arányokra és a 28. ábrán látható beosztáshoz hasonlókat készít.

A felmérő során kell még diagrammot készíteniük, de azt egy nehezebb feladatnak számom és nem biztos, hogy ott oszlopdiaagrammot készítenek. Mindenképpen szerettem volna látni, hogy szabadkézzel miként készítik el ezt a diagrammot.

2.9.6. Harmadik feladat

3. Kilenc diáktól, akik olvastak szépirodalmi könyvet, megkérdezték, hogy márciusban hány könyvet olvastak el. A válaszok (pozitív egész számok) elemzése után kiderült, hogy a kilenc szám (egyetlen) módusza 1, mediánja 2, átlaga $\frac{16}{9}$, terjedelme 2. Add meg ezt a kilenc számot!

29. ábra Harmadik feladat

Ezt a feladatot a 2017-es tavaszi középszintű matematika érettségiből választottam (lásd 29. ábra) (Matematika középszintű írásbeli vizsga 2017.05.09.). A tizennyolcadik, azaz választható feladat, c) részeként szerepelt. A szövegben egy minimális változtatást tettem, hogy önálló feladatként is megállja a helyét. Egy hiba nélküli megoldás hat pontot ért.

Az ilyen típusú feladatok alapján állítottam össze a második foglalkozáson megoldott feladatokat. Úgy gondolom, hogy az ott megismert ötletek és módszerek sokat segítenek majd ebben az esetben. Ezen a második alkalmon szereplő utolsó pénzermés feladat összetettségében magasabb szintet képvisel ennél a feladatnál, de természetesen ott meg volt a digitális felület adta előny.

A feladat egy tipikus statisztika feladat fordítottja. Nem ismerjük az adatokat, de tudunk róluk bizonyos információkat. A feladat megoldása több irányból is megközelíthető. Egy fajta út a foglalkozásokon használt folyamatos próbálkozás. Ez meglehetősen lassú megoldási folyamat, ha nem áll rendelkezésünkre valamilyen, főként digitális segédeszköz. Természetesen a próbálkozást is lehet hatékonyan végezni. Az ehhez kellő gondolatok, amikhez hozzá szeretném juttatni a tanulókat anélkül, hogy a rengeteg fáradtságos számolás során elvesztenék a motivációjukat.

Végeredményként egy számsorozatot kell megadni. A számoknak meg kell felelniük a feladatban leírt körülményeknek. Általában egyetlen helyes megoldás van, de lehet olyan feladatot is készíteni, ahol több jó eredmény is megadható. Ezek a feladatok a kombinatorika témakör egysajátításában is segíthetnek. Amikor a diákok már ismerik a módját annak, hogy miként adható meg egy jó válasz, akkor könnyebb tovább lépni abba az irányba, hogy mennyi lehet összesen.

2.9.7. Negyedik feladat

4. Kétfordulós matematika versenyt rendeztek 8. évfolyamon, amelyen 3-3 tanuló vett részt az A és B osztályból. Az alábbi táblázatban a szerzett pontokat látod. Készíts két különböző fajtájú diagramot, amelyek szerinted a legjobban szemléltetik az eredményeket.

Nevek	A osztály			B osztály		
	András	Anita	Abigél	Berci	Bogi	Béla
1. forduló	40	25	32	18	38	22
2. forduló	32	28	19	28	32	35

30. ábra Negyedik feladat

A felmérő utolsó feladatát (lásd 30. ábra) én alkottam meg. Próbáltam az utolsó alkalomhoz hasonlóan jól használható adatokat kitalálni. Szándékosan eltértem az ott alkalmazott adattábla formavilágától, mert nem szerettem volna, hogy egyértelműen arra hasonlítson. A feladat szövegében leírom, hogy milyen eseményhez tartoznak az adatok. A diákok feladata kettő, az adatokat jól szemléltető diagram készítése.

Ez egy nyitott feladat és ebben érzem a nehézségét. Az ilyen típusú feladatokkal ritkábban találkozhatnak a tanulók. Ez a matematikában általában jobb teljesítményt elérő diákok számára is kihívást jelenthet. Ezzel szemben a kreatívabb diákok számára pont ez a szabadság adhat lehetőséget a kibontakozáshoz. Reményeim szerint elegendő segítséget tudok majd nyújtani a feladat megoldásához a harmadik foglalkozás során.

2.10. Attitűd vizsgálat

A diákokkal történő utolsó találkozásom során egy attitűd vizsgálatot készítetek. Először egy kérdőívet töltenek ki, amelyben a foglalkozásokhoz kapcsolódó kérdésekre kell válaszolniuk. Válaszaikat négy fokozatú skálán kell megjelölniük. Jobban szeretem, ha egy ilyen teszt kérdésre páros számú válasz adható. A válaszadóknak nincs lehetőségük a középútat választani, így reményeim szerint árnyaltabb képet nyerhetek a válaszok által. A kérdőívet (*lásd 31. ábra*) természetesen anonim módon töltik ki.

Kérlek minden állítás után húzd alá a rád legjobban jellemző vagy leginkább igaz választ. A válaszokat név nélkül adod meg. Kérlek légy minél őszintébb.

1. Örülök, hogy részt vettem a foglalkozásokon.

Egyáltalán nem Inkább nem Inkább igen Teljes mértékben

2. Szívesen részt vennék hasonló tanórákon.

Egyáltalán nem Inkább nem Inkább igen Teljes mértékben

3. Úgy gondolom tanultam új dolgot a foglalkozások során.

Egyáltalán nem Inkább nem Inkább igen Teljes mértékben

4. Szerintem az első alkalom ...

...rossz volt. ...kevésbé volt jó. ...jó volt. ...nagyon jó volt.

5. Szerintem a második alkalom ...

...rossz volt. ...kevésbé volt jó. ...jó volt. ...nagyon jó volt.

6. Szerintem a harmadik alkalom ...

...rossz volt. ...kevésbé volt jó. ...jó volt. ...nagyon jó volt.

31. ábra Attitűd vizsgálatához tartozó kérdőív

A maradék időben szeretném meghallgatni a véleményüket szóban is. A kitöltött kérdőívben szereplőkhöz hasonló kérdéseket teszek fel, amelyekre reményeim szerint hosszabb válaszok is születnek. Emellett szeretném megtudni egyéb megjegyzéseiket azzal kapcsolatban, hogy mi tetszett számukra a legjobban és mi az, amin változtatnának. Továbbá milyen tantárgyak vagy témakörök kapcsán vennének részt hasonló órákon.

3. A megtartott foglalkozások leírása

3.1. Első alkalom

Ahogy az előzetesen terveztem az órát egy rövid beszélgetéssel kezdtük, hogy a diákok rá tudjanak hangolódni a foglalkozásra. Már az elején nagyon közvetlenek és érdeklődőek voltak. Azt éreztem rajtuk, hogy izgalommal várják, hogy pontosan mit is fogunk csinálni. Ez egy olyan szempont, ami miatt érdemes a tanítás hagyományos, mindennapi ritmusát megtörni. Főleg a diákok, de mi tanárok is hajlamosak vagyunk belefásulni a szürke hétköznapiakba. Egy-egy új ötlettel, eszközzel vagy módszerrel újra izgalmassá tehetjük az óráinkat.

Miközben vártunk, hogy minden számítógép elinduljon és mindenki be tudjon jelentkezni, volt időm még feltenni egy-két olyan kérdést is, amit előzetesen nem terveztem. Az egyik ilyen kérdésem az volt, hogy: „Informatika órán kívül volt bármilyen más órák itt az informatika teremben, például matematika?”. A válaszuk nemleges volt. Igazából ez nem lepett meg. Én sem emlékszem, hogy valaha lett volna ilyenre példa általános iskolában. Szervezési szempontból megértem, hiszen nem fér el egyik informatika teremben sem egy teljes osztály, de csoportbontással ez is orvosolható lenne. A második kérdésem pedig az volt, hogy: „Most hogyan érzitek magatokat, hogy itt vagyunk az informatika teremben és állításom szerint mégis matematika órát szeretnétek nektek tartani?”. Vegyes válaszokat kaptam. Volt olyan diák, aki izgalmasnak találta a helyzetet, de volt, aki egyszerűen csak úgy fogalmazott, hogy nem érti egyelőre mit fogunk csinálni.

Amikor már minden számítógép elindult, akkor kértem őket, hogy az általam már előre megosztott első alkalomhoz szükséges fájlt keressék meg és nyissák meg. Így, hogy már látták a felületet, összefoglaltam, hogy mi vár rájuk ezen a 3 foglalkozáson. Átismételtük azon ismereteket, amelyek hiánya megnehezítené a közös munkát. Szerencsére nem volt ezekhez senki részéről sem kérdés. Ezért időzítettem így a foglalkozásokat, hogy a statisztika témakör már szerepeljen eddigre a matematika órákon.

Feladatok:
1. Számítsuk ki a C2 cellában a jegyek átlagát!
2. Számítsuk ki a D2 cellában a jegyek móduszát!
3. Számítsuk ki a E2 cellában a jegyek mediánját!
4. Számoljuk össze a H2:L2 tartományban, hogy melyik jegyből mennyi van!
5. Készítsünk diagramot a jegyek és darabszámaik felhasználásával!
6. Határozzuk meg az N oszlopban az N2 cellával kezdődően a jegyek összes móduszát!
7. Rendezzük csökkenő sorrendbe a jegyeket! Változik ettől bármilyen korábban kiszámolt mennyiség?

32. ábra Első oldal feladatai

Most már elkezdhattük az első lapon szereplő feladatokat megoldani (lásd 32. ábra). A diákok többsége gond nélkül haladt a feladatokkal. Volt két diák, akiknek segítenem kellett. Számukra inkább az Excel használatában akadtak problémák. Az első és második feladatot közösen megoldottam velük. Eddigre a többi diák már előrébb tartott. Ezzel a két diákkal a többieknek szánt ellenőrzés közben haladtam együtt. Így ők sem maradtak. Közben megnyugtattam őket, hogy ezek után már függvényeket nem kell használniuk és tudnak majd haladni a többiekkel. Ezeket a feladatokat ráhangolódás céljára hoztam, de ebben az esetben arra is jó volt, hogy lássam milyen szinten építhetek az informatikai jártasságukra. A négyes és hatos feladatokat együtt csinálta az egész csoport.

Feladatok:
<p>Átlag:</p> <ol style="list-style-type: none"> Hozzátudunk adni 1 újabb jegyet az adatokhoz, hogy az átlag ne változzon? Hozzátudunk adni 1 újabb számot (ami nem kell jegy legyen) az adatokhoz, hogy az átlag ne változzon? Mi lenne ez a szám? Ha egy jegyet kitörlünk változik az átlag? Ha igen, melyik irányba? Adjunk hozzá 2 újabb jegyet az eddigiekhez, hogy az átlag ne változzon! Ezek a számpárok miért nem változtatják meg az átlagot? <p>Módusz:</p> <ol style="list-style-type: none"> Milyen számot adjunk a jegyekhez, hogy a módusz/móduszok ne változzon/változzanak? Módosítsuk a jegyeket úgy, hogy a módusz 1 legyen! Mit kell tennünk? <p>Medián:</p> <ol style="list-style-type: none"> Milyen számot/számokat adjunk a jegyekhez, hogy a medián ne változzon? Módosítsuk a jegyeket úgy, hogy a medián 2 legyen!

33. ábra Második oldal feladatai

Amikor minden feladattal készen voltunk áttértünk a második munkalapra és az ott szereplő feladatokra (*lásd 33. ábra*). Megbeszéltük, hogy miként tudnak próbálkozni. Először bátortalanul nyúltak az adatokhoz és inkább fejben próbálták kitalálni a válaszokat. Megkértem őket, hogy az ötleteiket, válaszaikat próbálják is ki és nézzék meg mi változik általuk. Az első három feladat még így zajlott, de a negyedik feladattól kezdve már kezdték megérteni és alkalmazni önállóan is az általam javasolt megoldási módot.

Azok a diákok, akik a program nyújtotta segítség nélkül is könnyen meg tudták válaszolni a kérdéseket nagyon hamar végeztek. Nehéz volt bennük tartanom a helyes válaszokat, hogy azokat ne mondják el a társaiknak. Erre előzetesen nem számítottam, de hoznom kellett volna extra feladatokat számukra. Úgy érzem számukra ez az alkalom kissé unalmasnak és fölöslegesnek tűnt.

A módusszal foglalkozó feladatok megoldásának indoklásakor sokan a létrehozott diagram oszlopainak magasságával indokolta az eredményt. Például egy ilyen válasz volt: „ Ahhoz, hogy a módusz egy legyen, annyi

egyest kell beírunk, hogy az egyesek oszlopa legyen a legmagasabb, és mivel ez a legmagasabb ez lesz a módusz.,, Ezt annyival egészítettem, illetve javítottam ki, hogy annyi egyest kel beírni, hogy belőlük legyen a legtöbb, hiszen így lehet belőle módusz. Továbbá ezért lesz az egyesek oszlopa a diagramban a legmagasabb. Természetesen az általam tett korigálás előtt és után is megdicsértem, hiszen nagyon jól felismerte a diagram oszlopainak magassága és a módusz közti összefüggést. Nagyon örültem ennek a válasznak. Ezt a megfigyelést azért tudta meg tenni, mert az adatok változása során a diagram oszlopai dinamikusan változnak. Abban a lépésben, amikor az egyesek oszlopa lesz a legmagasabb, a móduszokat megjelenítő cellákban megjelenik az egyes szám.

Hasznosnak érzem ezt az órát, mint a további alkalmak felvezetője. Kaptam egy első benyomást a diákokról egyéneként és csoport szinten is. Örülök, hogy voltak olyan visszajelzések, amelyekre a felhasznált felület, azaz a digitális eszköz nyújtotta segítség nélkül nem biztos, hogy sor került volna. Az első alkalom után úgy gondolom, hogy foglalkozásaim a témakörben jártas, de nem kiemelkedő teljesítményt nyújtó diákok számára tudják majd a legtöbb pluszt adni.

3.2. Második alkalom

A második alkalomra csak egy héttel az első után tudtam megfelelő időpontot találni. Az első foglalkozás felidézésével kezdtünk. Megkérdeztem, hogy mire emlékeznek. Többnyire csak a feladatokat sorolták. Próbáltam megtudni, hogy mit tanultak a feladatok megoldásából. Nem jártam túl sok sikerrel. Reménykedtem, hogy a feladatok során könnyebb lesz számukra alkalmazni a tapasztalatokat, mint szóban megfogalmazni azokat.

Röviden elmondtam, hogy a mai alkalommal olyan feladatokkal fogunk foglalkozni, amelyek az első alkalom második részéhez hasonlítanak majd. Számukra mindig az adatok megadása lesz a feladat és minden más a feladat megoldásához szükséges mennyiség ezekből automatikus kiszámítódik. Minden feladatot felolvastam. Megoldásuk előtt bátorítottam őket, hogy minél többet próbálkozzanak, ne egyből a jó megoldást akarják megadni. Nem baj, ha kezdetben rossz adatokkal próbálkoznak. Ezeket az előző alkalom tapasztalatai szerint tudják majd korrigálni. Megkértem őket, hogy ha valaki kész van egy feladattal jelezze nekem. Tovább csak az menjen, akinek azt megengedtem.

Bármennyire hangsúlyozni, hogy nem kell egyből egy jó eredményt megadni, az első foglalkozáshoz hasonlóan most sem írtak be próbálkozásként adatokat. Egyből a jó számokat szerették volna megadni. Alapvetően egy feladat esetében ezt szoktuk tenni. Keresünk egy logikus megoldási módot, amivel kiszámítjuk a helyes eredményt. Ez általában egy teljesen jó és természetes dolog, de érdekes volt látni, hogy amikor erre nincs szükség és csak próbálkozni kellene, akkor sem tudnak máshogy cselekedni. Majd arra gondoltam, hogy egyszerűen csak nem értik hogyan kellene használni a digitális segédletet. Elkezdtük együtt megoldani az első feladatot. A kivetítőn mutattam nekik, hogy beírok teljesen véletlenszerűen öt számot. Kértem, hogy ezt tegyék meg ők is. Ezután nézzék meg ezek átlagát és attól függően cseréljenek le egy számot kisebbre vagy nagyobbra, hogy az átlag több vagy kevesebb mint hat. Ezután már el tudtak indulni egy úton hamar találtak öt jó számot. Akiknek ez sikerült, tőlük azt kértem, hogy

találjanak másik, ezektől különböző öt számot és figyeljék meg miként változik a számok összege. Miután sikerült megfigyelni, hogy az összeg mindig harminc, ennek magyarázatát kérdeztem tőlük. Ahogyan azt már korábban is tapasztaltam, nehezen tudják szavakba önteni gondolataikat és meglehetősen zavaros válaszokat kaptam. Miután elmagyaráztam a jelenség okait éreztem, hogy nem . Nem feszegettem tovább a határaikat, hanem haladtunk tovább.

A második feladattól kezdve már bátrabban kísérleteztek a feladatok megoldása során. Úgy gondolom tényleg csak arra volt szükségük, hogy együtt elkezdjék a feladatok megoldását és ez lendületet adott nekik. Egészen az utolsó feladatig nem volt semmi megakadás. Ügyesen és jól haladtak. Itt volt pár szövegértési probléma, de ezeket hamar orvosoltuk. A megoldást nehezen találták, így segítettem pár ötlettel.

Amikor sikerült a feladatot megoldani már csak pár percünk maradt az órából. Próbáltam pár mondatban összefoglalni a feladatokat és röviden felvezetni a következő alkalmat. Sajnos a diákok figyelme, ekkor már inkább szüneten járt. Azt láttam rajtuk, hogy elfáradtak. Az óra elején az első feladattal túl sok idő ment el. Hamarabb kellett volna ott változtatnom. Ha így teszek, akkor korábban végzünk, ami által marad idő a megbeszélésre és talán kevésbé fáradnak el. Úgy gondolom, ha ügyesebben vezetem rá őket a feladatok megoldásának menetére, akkor ez az öt feladat még kevés is lett volna.

3.3. Harmadik alkalom

Az óra elején, amíg mindenkinek sikerült megnyitnia a megfelelő weboldalt, röviden meséltem a felületről. Elmondtam, hogy ezt az oldalt ők is bármikor elérik és ingyenesen tudják használni. Ezek után megkérdeztem, hogy milyen diagrammokat ismernek. Most már sokkal bátrabban jelentkeztek, mint az első alkalom során. Válaszul az oszlop-, illetve a kördiagrammot mondták. Ezeken kívül még kaptam pár függvényekkel kapcsolatos választ is, amelyekre próbáltam röviden reagálni.

Az első oldalon szereplő, az adatokat tartalmazó, táblázat értelmezésével nem volt probléma, így mehettünk tovább az első oldalra. Az itt szereplő oszlopdiaagrammokkal kapcsolatos kérdésekre meglepően sokan szerettek volna válaszolni. Az első két alkalomhoz képest sokkal élénkebb volt a csoport, pedig a foglalkozásra hetedik órában került sor. Nem tudtam eldönteni, hogy a témakör volt sokkal jobban hozzájuk illő vagy mostanra szoktak meg engem. Bármelyik is legyen jól tudunk haladni.

Kis megtorpanást jelentett, amikor a negyedik diagrammot kezdtük létrehozni. Együtt haladtam a csoport többségével és mutattam a kivetítőn, hogy mit kell csinálni. Volt pár diák, akik azt kérdezték, hogy hogyan kell kijelölni az adatokat. Először nem értettem a kérdést, majd miután már láttam, hogy ők az első oldalon szereplő táblázatot nézik, rájöttem mi a gond. Úgy próbáltak eljárni, mint ha az Excel-ben hoznánk létre diagrammot. Mondtam nekik, hogy lépjenek vissza a második oldalra és figyeljék először csak a kivetítőt. Miközben megmutattam újra a feladatot hozzátettem, hogy ez egy másik felület, ezért más logika szerint kell cselekedni. Megnyugtattam őket, hogy nincs semmi gond majd ráéreznek. Emlékszem, hogy számomra is időbe telt elsajátítani a felület kezelését. Amikor már mindenki létre hozta a negyedik diagrammot, megkértem őket, hogy kattintsanak rá valamelyik oszlopára. Tapasztalhatóan tetszett nekik a látvány, ahogy minden diagram egyszerre változott meg. Jó volt ezt látni. Ezek olyan tulajdonságai a digitális eszközöknek, amelyeket nagyon nehéz vagy lehetetlen helyettesíteni.

A harmadik oldalon szereplő pontdiagrammok szerkesztése lassan ment. Ez nem volt meglepő, hiszen most használták először a felületet. Miután végeztünk azt éreztem, hogy tetszik a diákoknak az elkészült diagram. Amikor erre rákérdeztem, akkor pozitív visszajelzést.

Úgy gondolom, hogy a negyedik oldalon szereplő kördiagrammokkal kapcsolatos feladatok nem arattak túl nagy sikert. Kérdéseimre kevesen és inkább csak muszájból válaszoltak. Szerintem ezen az oldalon is látványos feladatok szerepeltek. Nem tudtam eldönteni, hogy mi okozta ezt a visszaesést.

Reménykedtem, hogy nem unták meg a foglalkozást idő előtt, mert még volt hátra két rész és az idővel jól álltunk. A következő feladat során is csendesebbek voltak, de most jobbnak éreztem a figyelmüket. Talán a feladat érdekesebb volt számukra.

Az utolsó oldalhoz érve jeleztem, hogy itt elég, ha csak figyelnek. Végig mondtam, hogy mit csinálok és ezt a kivetítőn is mutattam. Miután elkészítettem a kész diagrammokat megkérdeztem, hogy szerintük ez jól néz-e ki és/vagy könnyen értelmezhető-e. Minden diák, aki a kinézetre adott visszajelzést, csak pozitívan értékelte. Ez egy szubjektív szempont, és úgy gondolom ebben nagy szerepet játszott, hogy az én munkámat kellett értékelniük. A tanárral szemtől szemben a diákok ritkábban mernek kritikusak lenni. A kérdésem második felére is igenlő válaszok érkeztek, azaz szerintük értelmezhető a diagram. Meglepően tapasztaltam, hogy megpróbálkoztak részletes válaszokat adni. Többen visszautaltak a korábbi oldalon szereplő kördiagrammokra, és úgy vélekedtek, hogy ez így jobb, mert itt nem csak egymás mellé vannak helyezve. Ezzel a feladattal maximálisan elértem a célt. Úgy érzem megtudtam mutatni számukra az adatok vizualizációjának egy kreatív oldalát.

A foglalkozást egy rövid összefoglalóval zártam. Újra végig mentünk a különböző oldalakon és megnéztük miket alkottunk az órán.

3.4. Felmérők eredményei

Miközben kiosztottam a felmérőket, emlékeztettem őket, hogy nevet ne írjanak a lapra. Ezen kívül viszont megkértem őket, hogy rajzoljanak egy csillagot a jobb felső sarokba azok, akik mindhárom foglalkozáson részt vettek. Sajnos betegségek és egyéb elfoglaltságok okán nem minden tanuló tudott részt venni az összes foglalkozáson. Úgy gondolom, hogy valós következtetést csak olyan diákok felméréjéből tudok levonni, akik minden alkalommal jelen tudtak lenni. Így a következőkben csak a hét darab csillaggal ellátott felmérő eredményeit fogom részletezni.

3.4.1. Első feladat

Öt diák hibátlanul oldotta meg az első feladatot, egy diák a mediánt jól, de a móduszt hibásan határozta meg. Ők mindannyian felsorolták növekvő sorrendben a jegyeket. Egy diák volt, aki nem sorolta fel a jegyeket. Ugyanaz, aki nem tudta meghatározni sem a móduszt, sem a medián értékét. Az ő munkájából arra következtetek, hogy a darabszámokat tekintette az adatoknak, mert azokhoz az adatokhoz mérten jó mutatókat adott meg. Az ő esetében a feladat helyes megoldása az adatok értelmezése során bukkott el.

3.4.2. Második feladat

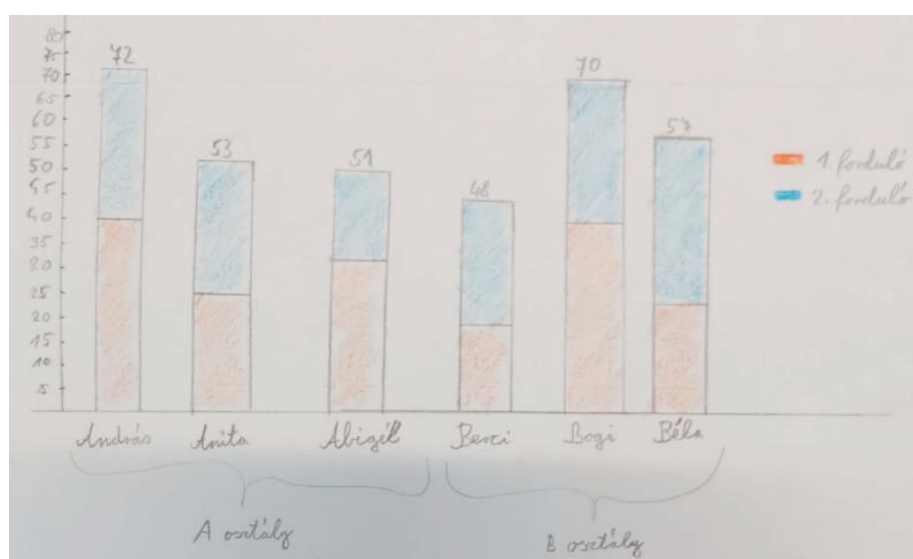
A kapott diagrammok igazán érdekes eredményt mutatnak. A vízszintes tengelyen kivétel nélkül mindenki feltüntette az adott oszlophoz tartozó évszámot. Két diáknál nem szerepel függőleges tengely. Az ő esetükben az értékek csak az oszlopokra írva szerepelnek. Sok esetben ez megkönnyíti az adatok leolvasását és néztünk a foglalkozásokon példát is erre. Ez viszont nem helyettesíti az irányú skálát. A másik öt diák készített függőleges tengelyt és a darabszámokat ezen jelölte meg. Egy-két diagrammon lehet azt látni, hogy az adatok egymáshoz viszonyított nagyságára is odafigyeltek. A legtöbb diagramról az olvasható le, hogy az adatok növekedése inkább egyenletes, mint sem egy exponenciális görbére illeszkedő. A foglalkozások során a tengelyek és az azokon szereplő értékek megalkotása elhanyagolható szerepet kapott. Úgy gondolom vonható párhuzam a két jelenség között.

3.4.3. Harmadik feladat

Egy diák kivételével mindenki hibátlanul meg tudta oldani a feladatot. Ezen megoldások többségén látható, hogy a diák rádiózással módosította a leírt számokat. Úgy gondolom, hogy ugyanúgy próbálgatták a számokat, ahogyan azt a foglalkozások alatt is tettük. Vagy így, vagy bármilyen más logika szerint, de képesek voltak megoldani egy hat pontos érettségi feladatot. Egy diák volt, aki nem tudta felsorolni a helyes számokat. Nagyon érdekes, hogy ő csak egymás mellé, vesszővel elválasztva leírta, hogy egy, kettő, három. Úgy gondolom, hogy arra rájött, hogy csak ilyen számok lehetségesek, de mivel nem tudott tovább haladni így ezeket is áthúzta. Számomra ez egy nagyon érdekes jelenség, amit a hosszúgyakorlatom során is tapasztaltam. A diákok az elkezdett, de be nem fejezett vagy általuk hibásnak gondolt megoldásokat áthúzzák, és még az esélyét sem hagyják meg annak, hogy a leírtakra részpontokat kapjanak.

3.4.4. Negyedik feladat

A feladat jellegéből adódóan nagyon különböző megoldások születtek. Egy diák kivételével mindenki készített legalább két diagrammot. Először erről a kivételes diák megoldásáról írnék. Összességében is az ő felméréje a legjobb és letisztultabb. Eltekintve attól, hogy csak egy diagrammot készített, annak a színvonala nagyon magas (lásd 34. ábra).



34. ábra Negyedik feladathoz készített halmozott oszlopdiaagram

Ő használt egyedül színeket. A színekhez készített jelmagyarázatot. A tengelyeken jól olvashatóan jelenítette meg az adatokat. Továbbá ő készített egyedül halmozott oszlopdiagrammot. Úgy gondolom, hogy az ő esetében valóban látható, hogy részt vett a foglalkozásaimon és azok célt értek nála.

Visszatérve a többi megoldásra, oszlopdiagrammot mindenki készített. Ezeken a csapatok vagy a tanulók pontszámait szemléltették. Meglepően változatos formában és minőségben készültek ezek. Egy diák készített kördiagrammot, amin a csapatok összpontszámai szerepelnek. Százalékos arányt nem számított, és mivel a két csapat pontszáma közel azonos volt, így a kördiagrammot egyszerűen csak elfelezte. Egy diák készített pontdiagrammot. Az adatokat egymáshoz képest arányosan helyezte el a tengelyeken, ami meglepő hiszen a felméréjében található másik két diagramról ez már nem mondható el. Valószínűleg úgy érezte, hogy itt ez számít.

3.4.5. Összefoglalás

Úgy gondolom, hogy az összes foglalkozáson részt vett diákok igen jól teljesítettek a felmérőn. A legrosszabbul sikerült feladat a második volt. Az adatok nagy számok voltak, és arányaiban ezeket rosszul ábrázolták. A felmérében ez volt az egyetlen olyan rész, amelyre kevesebb hangsúlyt fektettem. Ezzel szemben a foglalkozásokon is szerepelt típusokat kevés kivételtől eltekintve jól oldották meg. A feladatok ráadásul ezen diákoknál idősebb és tanultabb rétegnek szólóak. Az utolsó feladat során jó volt látni, hogy a sok oszlopdiagram közt volt egy-két bátor próbálkozás is.

3.5. Attitűd vizsgálat eredményei

3.5.1. Kérdőív

A kérdőív kiosztása közben emlékeztettem őket, hogy nevet ne írjanak rá. Továbbá megkértem mind a három alkalmon résztvevő diákokat, hogy a lap jobb felső sarkába rajzoljanak egy csillagot. A felmérők értékeléséhez hasonlóan most is csak a csillaggal ellátott kérdőíveket veszem bele a végső értékelésbe. Nézzük először a kérdésekre kapott válaszok számát:

1. Örülök, hogy részt vettem a foglalkozásokon.
 - a. Egyáltalán nem 0
 - b. Inkább nem 0
 - c. Inkább igen 5
 - d. Teljes mértékben 3
2. Szívesen részt vennék hasonló tanórákon.
 - a. Egyáltalán nem 0
 - b. Inkább nem 1
 - c. Inkább igen 5
 - d. Teljes mértékben 2
3. Úgy gondolom tanultam új dolgot a foglalkozások során.
 - a. Egyáltalán nem 0
 - b. Inkább nem 0
 - c. Inkább igen 7
 - d. Teljes mértékben 1
4. Szerintem az első alkalom ...
 - a. ...rossz volt. 0
 - b. ...kevésbé volt jó. 4
 - c. ...jó volt. 3
 - d. ...nagyon jó volt. 1
5. Szerintem a második alkalom ...
 - a. ...rossz volt. 0
 - b. ...kevésbé volt jó. 1
 - c. ...jó volt. 5
 - d. ...nagyon jó volt. 2
6. Szerintem a harmadik alkalom ...
 - a. ...rossz volt. 0
 - b. ...kevésbé volt jó. 0
 - c. ...jó volt. 3
 - d. ...nagyon jó volt. 5

Az első és második kérdés válaszai alapján senki sem bánta meg, hogy részt vett a foglalkozáson és egy diák kivételével mindenki részt venne hasonló foglalkozáson. Ebből arra következtetek, hogy hozzám hasonlóan

ők is pozitív élményeket szereztek. A harmadik kérdésre kapott válaszok kicsit megleptek. Előzetesen arra számítottam, hogy itt a legpozitívabb választ jelölik be a legtöbben. A diákok új felülettel, új feladat típusokkal és megoldási gondolatokkal találkoztak. Úgy gondolom, hogy a megszerzett tudásról még másképp vélekednek ebben a korban.

Az első foglalkozást a diákok fele „kevésbé jóra” értékelte. Megértem, hogy ezt kevésbé találták izgalmasnak. Ez az alkalom inkább számomra volt hasznos. Meg kellett ismernem a csoportot és fel kellett mérnem az ismereteiket. A második és harmadik alkalmat egy diák kivételével mindenki pozitívan értékelte. Úgy gondolom, hogy ezek tényleg jól sikerült foglalkozások voltak és örülök, hogy ezt a diákok is így gondolják. Véleményem szerint az utolsó alkalom, azért kaphatott ennyire jó értékelést, mert a feladatok többsége új és látványos volt.

3.5.2. Beszélgetés

Ezen alkalom és összességében a foglalkozásaim lezárása egy közös beszélgetés volt. Elsősorban megköszöntem számukra az aktív részvételt. Ezután adtam lehetőséget, hogy szóban is értékeljék a munkámat. Ahogyan az lenni szokott, elsőnek megszólalni mindig nehéz. Szépen lassan elkezdtek szállingózni a pár szavas válaszok. Végül egy diák hosszabban is kifejtette a véleményét. Főként a harmadik alkalomról beszélt. Ezt találta a legérdekesebbnek, mert itt volt a legtöbb újdonság számára. Válaszához többen csatlakoztak.

Újra ötletellenek tűntek, így próbáltam rövid és célzott kérdéseket feltenni. A kérdőívben szereplő második és harmadik kérdést tettem fel nekik újra, és kértem, hogy példával együtt adjanak választ. Ez a módszer bevált és többen adtak bővebb válaszokat is.

4. Változtatási és bővítési lehetőségek

Úgy gondolom, hogy egy tanár a saját osztályának sokkal hatékonyabb módon tudna tartani hasonló órákat. Ha ismerjük a diákokat, akkor könnyebb építeni az erősségeikre és készülni a gyengésségeikre.

Számomra végig kihívást jelentett, hogy különböző tempóban haladtak a diákok. Célszerű lett volna egy-két extra feladatot is készítenem azok számára, akik hamarabb végeznek. Emellett a feladatok többsége alkalmas különböző szintű verziók készítésére. Mivel digitális eszközökön dolgozunk, így a változtatásokat gyorsan el lehet végezni. A sokszorosítással sincs probléma, hiszen a fájl bármennyiszer másolható. A második alkalommal használt Excel fájl esetében lehetne készíteni több, különböző nehézségű verziót. Ezek mindegyike elérhető lenne a diákok számára. Célszerű a közepes nehézségűt ajánlani nekik kezdésnek, ha ez túl nehéz vagy könnyű, akkor ehhez mérten megnyithatnak egy másik verziót. Nézzünk egy konkrét változtatási lehetőséget a második alkalom első feladatára. Itt meg kell adni öt számot, amelyek átlaga hat. Ez lehet egy közepes szint. Ettől egyszerűbb, ha csak kettő számot kell megadni, amelyek átlaga hat kell legyen. Nehezebb verzió, ha az öt szám átlaga valamilyen nem egész szám kell legyen. A feladat jellege nem változik meg ezektől a módosításoktól.

A statisztika témakör más részeit is fel lehet dolgozni hasonló digitális eszközök segítségével. Az adatok gyűjtése, tárolása és rendszerezése hasonlóan jó téma lehet egy ilyen foglalkozásnak. Későbbi tanulmányaik során megismerkednek valamely adatbázis kezelő programmal, mint például a Microsoft Access. Az adatbáziskezelés témakörnek elengedhetetlen része a tárolt adatok közti kapcsolatok megértése. Lehetne tervezni egy olyan foglalkozást is, amelyen egyszerűbb feladatok által elősegíthetjük bonyolultabb adattárolási sémák feldolgozását. Bár ez a foglalkozás a statisztika témakörhöz tartozna, az informatikához szükséges készségeiket is fejlesztené.

5. Összegzés

Kutatásom a statisztika témakör egy nagyon kicsi szeletét érintette. Kezdetben nehéz volt kiválasztanom, hogy a témakör mely részei kerüljenek a középpontba. Tudtam, hogy általános iskolai korosztályt érintő témát szeretnék feldolgozni, hiszen ezt a korcsoportot szeretem tanítani és végzettségem szerint is általános iskolai tanár leszek. Több tankönyv és rengeteg feladat megtekintése, illetve tapasztalataim felidézése után kezdett körvonalazódni, hogy miket szeretnék leginkább kiemelni.

A foglalkozások első felében a statisztikai mutatókat emeltem ki. Sokszor unalmasnak van bélyegezve a statisztika a fiatalabb generációk számára. Nagy adattábla esetében sokat kell számolni egy-egy mutató meghatározása érdekében. Szerettem volna csavarni egyet a feladatokon, ami által nem csak a feladat irányát, de megoldási menetét is megváltoztattam. Látható volt, hogy a feladatok során most nem a statisztikai mutatókat, hanem a kiindulási adatokat kellett megtalálni. Emellett a rengeteg számolás terhét is levettem a diákok válláról annak érdekében, hogy az összefüggések megfigyelése kerülhessen a figyelmük középpontjába. Látva, hogy a foglalkozások során és a megírt felmérésekben hogyan teljesítettek úgy gondolom, hogy elértem a célomat.

A témakörből másodikként az adatok vizualizációját emeltem ki. Leginkább saját tapasztalataim okán választottam a diagrammok elemzésével és készítésével foglalkozó részt. A diákok szemléletének megváltoztatása, illetve kibővítése által szerettem volna jobb teljesítményre sarkalni őket. Szintén a digitális eszközök adták meg azt a lehetőséget számomra, hogy hatékony módon át tudjam adni. Ez a témakör esetében már nehezebben mérhető a fejlődés. A feladatoknak sok jó megoldás és két jó megoldás minősége is eltérhet. Úgy gondolom a foglalkozáson látottak és a felmérésekben adott válaszok alapján is, hogy van létjogosultsága a digitális eszközök használatának a témakör ezen része esetében is.

A foglalkozások alatt, a diákok nagyrésznél érdeklődést és aktivitást tapasztaltam. Azt láttam és éreztem rajtuk, hogy nyitottak az új tanulási mód és környezet irányába. A különböző alkalmakon és a felmérésekben szereplő

feladatokra adott megoldásokból pedig kiderül, hogy tanulmányilag is hasznosnak bizonyultak a digitális eszközökkel támogatott foglalkozások.

Különleges élmény volt számomra ez a pár alkalom. Voltak jobban és rosszabban sikerült részei, de összességében elégedett vagyok a végkifejlettel. A foglalkozások tervezése és szervezése sok időt vett igénybe, de látva a végeredményt, azt tudom mondani, hogy minden energia ráfordítást megért.

6. Irodalomjegyzék

Ballér Endre, Golnhofer Erzsébet, Falus Iván, Kotschy Beáta, Nádasi Mária, Nahalka István, Feyér Judit, Réthy Endréné, Szivák Judit, Vámos Ágnes (2003). *Didaktika – Elméleti alapok a tanítás tanuláshoz*.

Link: https://dtk.tankonyvtar.hu/xmlui/bitstream/handle/123456789/13400/2011_0001_519_42498_2.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

Letöltés ideje 2023.02.02.

Bárdossy Ildikó, Dudás Margit, Pethőné Nagy Csilla, Priskinné Rizner Erika (2002). *A kritikai gondolkodás fejlesztése – Az interaktív és reflektív tanulás lehetőségei*.

Oldalak: 14-197, 314-374

Besenyey Ádám. *A számtani-mértani közép és egyéb érdekességek*.

Link: <https://abesenyeyi.web.elte.hu/publications/agm.pdf>

Letöltés ideje: 2023.04.10.

Carol S. Dweck (2008), Császár László fordítása (2014), kiadó: HVG Kiadó Zrt., Budapest, 2015. *Szemléletváltás – A siker új pszichológiája*.

Oldalak: 13-121

Csiszár Villő. *Valószínűségszámítás 1..*

Link: <https://csvillo.web.elte.hu/mtval/jegyzet.pdf>.

Letöltés ideje 2023.03.15

dr. Szalkai István (2018). *Valószínűségszámítás alapjai szemléletesen*.

Link: <https://math.uni-pannon.hu/~szalkai/walszam2017.pdf>.

Letöltés ideje 2023.03.15.

Dr. Takácsné Prof. Dr. György Katalin (2018). *Statisztika az oktatásban – Hogyan szerethető meg? konferencia és megemlékezés, Absztrakgyűjtemény*.

Link: <http://kgk.uni-obuda.hu/sites/default/files/Statisztika-az-oktatásban-absztraktfuzet-2018.pdf>

Emberi erőforrások minisztériuma (2017.05.09.). *Matematika középszintű írásbeli vizsga.*

Link: https://dload-oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok_2017tavasz_kozep/k_mat_17maj_fl.pdf

Letöltés ideje 2023.05.02.

Emberi erőforrások minisztériuma (2019.05.07.). *Matematika középszintű írásbeli vizsga.*

Link: https://dload-oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok_2019tavasz_kozep/k_mat_19maj_fl.pdf

Letöltés ideje 2023.05.02.

Mérei Ferenc Fővárosi Pedagógiai és Pályaválasztási Tanácsadó Intézet hírleve (2009).

Link: <https://docplayer.hu/3732759-Hatekony-tanulasszervezesi-modok.html>

Letöltés ideje 2022.02.05.

Nagy Sándor (2008). *Nukleáris mérésekben szerepet játszó eloszlások összefoglalója.*

Link: <https://nagysandor.eu/lne/Distributions.pdf>.

Letöltés ideje 2023.04.02.

Oktatási Hivatal (2020). *Kerettanterv a matematika tantárgyhoz általános iskola 5-8. évfolyama számára.*

Link: https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/kerettanterv/Matematika_F.docx.

Letöltés ideje 2023.01.22.

Oktatási Hivatal (2020). *Digitális kultúra tankönyv 8.*

Link: https://www.tankonyvkatalogus.hu/pdf/OH-DIG08TA_teljes.pdf

Letöltés ideje 2023.05.01.

Ország Gáborné, Sugár András, Szobonya Réka (2016). A statisztika
oktatása számítógépes támogatással.

Link: <http://dx.doi.org/10.20311/stat2016.11-12.hu1193>.

Letöltés ideje 2022.12.06.

Abonyi-Tóth Andor, Farkas Csaba, Varga Péter (2023). Digitális kultúra
tankönyv 8.

Link: https://www.tankonyvkatalogus.hu/pdf/OH-DIG08TA_teljes.pdf

Letöltés ideje 2023.05.01.

7. Melléklet

7.1. 1. sz. melléklet: Felmérék eredményei

1. Az alábbi táblázat egy biológiadolgozat eredményeit mutatja. Adja meg az adathalmaz módusát és mediánját!

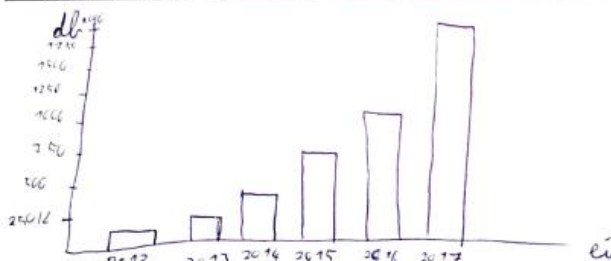
éremjegy	1 (elégtelen)	2 (elégséges)	3 (közepes)	4 (jó)	5 (jeles)
dolgozatok száma	0	1	3	5	6

módusz: jeles
medián: közepes

2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5

2. Szemléltesse oszlopdiagramon a táblázat adatait.

év	2012	2013	2014	2015	2016	2017
elektromos autók száma (ezerre kerekítve)	110 000	221 000	409 000	727 000	1 186 000	1 928 000



3. Kilenc diáktól, akik olvastak szépirodalmi könyvet, megkérdezték, hogy márciusban hány könyvet olvastak el. A válaszok (pozitív egész számok) elemzése után kiderült, hogy a kilenc szám (egyetlen) módusza 1, mediánja 2, átlaga $\frac{16}{9}$, terjedelme 2. Add meg ezt a kilenc számot!

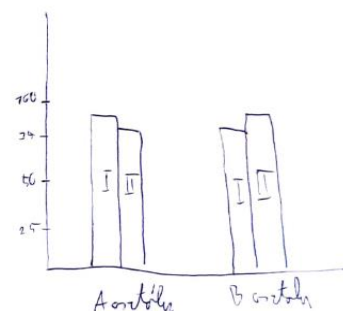
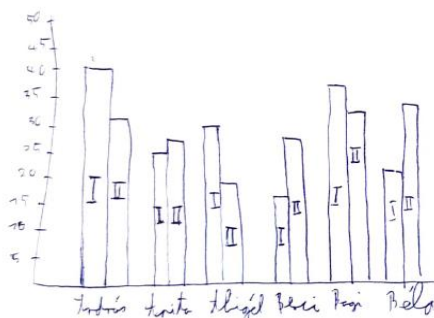
1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3

4. Kétfordulós matematika versenyt rendeztek 8. évfolyamon, amelyen 3-3 tanuló vett részt az A és B osztályból. Az alábbi táblázatban a szerzett pontokat látod. Készíts két különböző fajtájú diagramot, amelyek szerint a legjobban szemléltetik az eredményeket.

Nevek	A osztály			B osztály		
	András	Anita	Abigél	Berci	Bogi	Béla
1. forduló	40	25	32	18	38	22
2. forduló	32	28	19	28	32	35

1. → 97
2. → 79

1. → 78
2. → 95



1. Az alábbi táblázatot egy biológiai dolgozat eredményeit mutatja. Adja meg az adathalmaz módusát és mediánját!

érdemjegy	1 (elégtelen)	2 (elégséges)	3 (közepes)	4 (jó)	5 (jeles)
dolgozatok száma	0	1	3	5	6

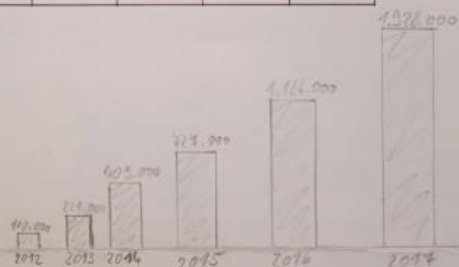
medián: 4

módus: 5

2 2 3 3 3 4 4 4 5 5 5 5 5 5

2. Szemléltesse oszlopdiagramon a táblázat adatait.

év	2012	2013	2014	2015	2016	2017
elektromos autók száma (ezerre kerekítve)	110 000	221 000	409 000	727 000	1 186 000	1 928 000



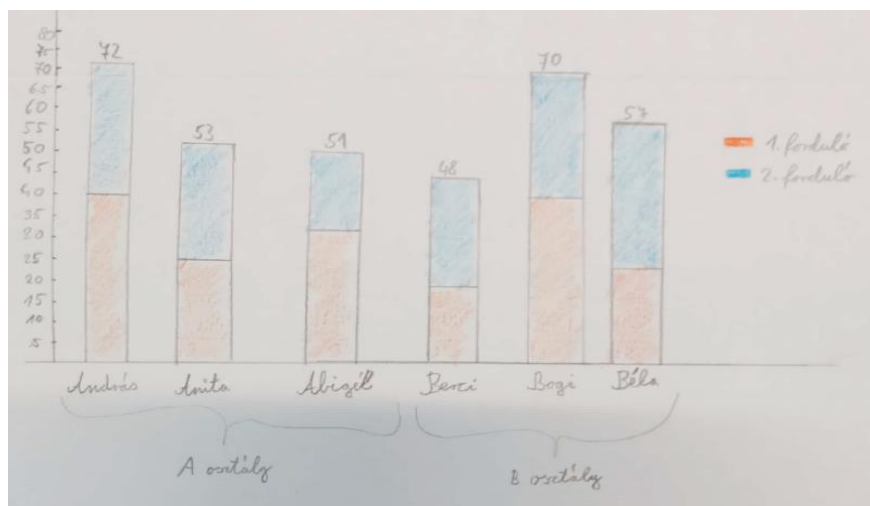
3. Kilenc diáktól, akik olvastak szépirodalmi könyvet, megkérdezték, hogy márciusban hány könyvet olvastak el. A válaszok (pozitív egész számok) elemzése után kiderült, hogy a kilenc szám (egyetlen) módusza 1, mediánja 2, átlaga $\frac{16}{9}$, terjedelme 2. Add meg ezt a kilenc számot!

1 1 1 1 2 2 3 3

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3

4. Kétfordulós matematika versenyt rendeztek 8. évfolyamon, amelyen 3-3 tanuló vett részt az A és B osztályból. Az alábbi táblázatban a szerzett pontokat látod. Készíts két különböző fajtájú diagramot, amelyek szerint a legjobban szemléltetik az eredményeket.

Nevék	A osztály			B osztály		
	András	Anita	Abigél	Berci	Bogi	Béla
1. forduló	40	25	32	18	38	22
2. forduló	32	28	19	28	32	35





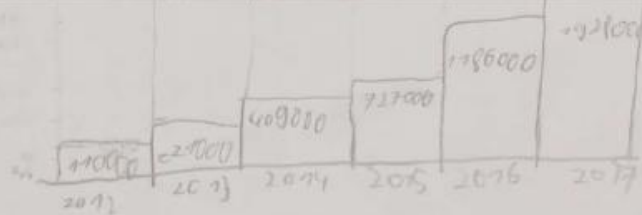
1. Az alábbi táblázatot egy biológiodolgozat eredményeit mutatja. Adja meg az adathalmaz módusát és mediánját!

érdemjegy	1 (elégtelen)	2 (elégséges)	3 (közepes)	4 (jó)	5 (jeles)
dolgozatok száma	0	1	3	5	6

medián: 0,1, 3,5
módus: 3

2. Szemléltesse oszlopdiagrammon a táblázat adatait.

év	2012	2013	2014	2015	2016	2017
elektromos autók száma (ezerre kerekítve)	110 000	221 000	409 000	727 000	1 186 000	1 928 000

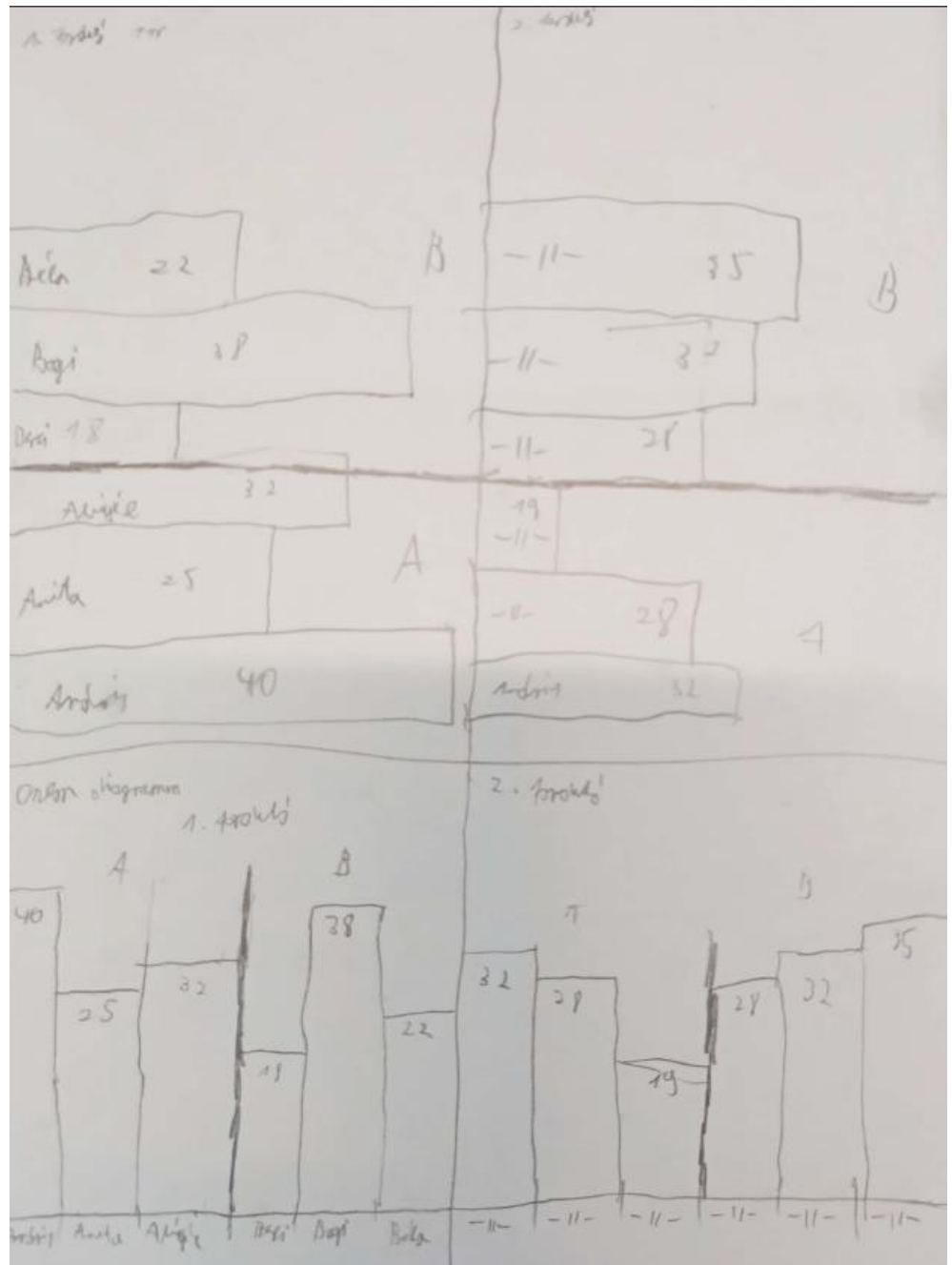


3. Kilenc diáktól, akik olvastak szépirodalmi könyvet, megkérdezték, hogy márciusban hány könyvet olvastak el. A válaszok (pozitív egész számok) elemzése után kiderült, hogy a kilenc szám (egyetlen) módusza 1, , mediánja 2, átlaga $\frac{16}{9}$, terjedelme 2. Add meg ezt a kilenc számot!

1 1 1 2 2 3 3 3
4 db 3 db 2 db

4. Kétfordulós matematika versenyt rendeztek 8. évfolyamon, amelyen 3-3 tanuló vett részt az A és B osztályból. Az alábbi táblázatban a szerzett pontokat látod. Készíts két különböző fajtájú diagrammot, amelyek szerinted a legjobban szemléltetik az eredményeket.

Nevek	A osztály			B osztály		
	András	Anita	Abigél	Berci	Bogi	Béla
1. forduló	40	25	32	18	38	22
2. forduló	32	28	19	28	32	35



1. Az alábbi táblázatot egy biológiadolgozat eredményeit mutatja. Adja meg az adathalmaz módusát és mediánját!

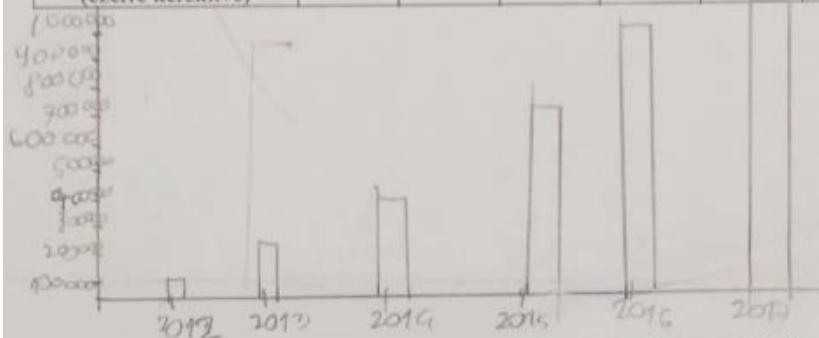
éremjegy	1 (elégtelen)	2 (elégséges)	3 (közepes)	4 (jó)	5 (jeles)
dolgozatok száma	0	1	3	5	6

módus: 5

medián: 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5 = 4

2. Szemléltesse oszlopdiagrammon a táblázat adatait.

év	2012	2013	2014	2015	2016	2017
elektromos autók száma (ezerre kerekítve)	110 000	221 000	409 000	727 000	1 186 000	1 928 000



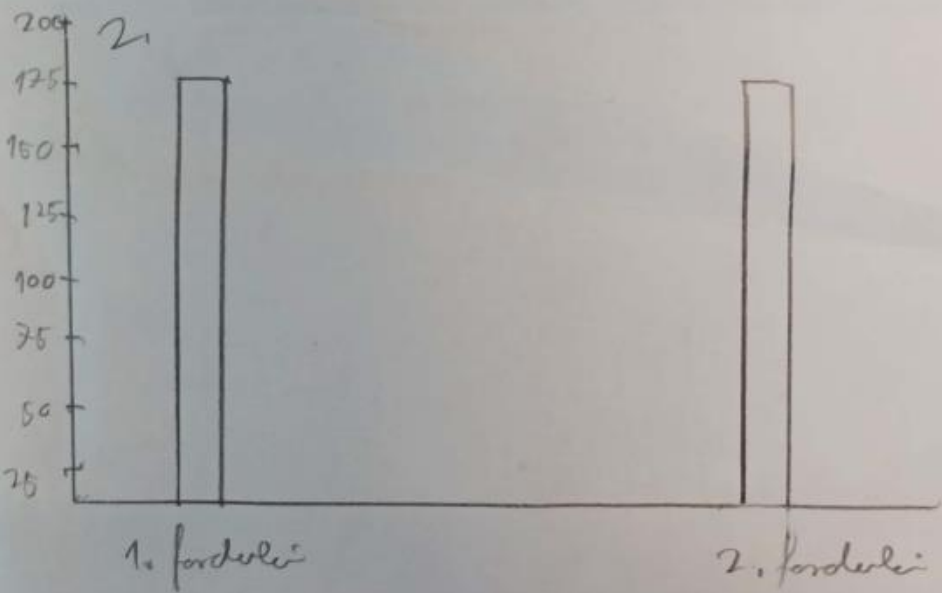
3. Kilenc diáktól, akik olvastak szépirodalmi könyvet, megkérdezték, hogy márciusban hány könyvet olvastak el. A válaszok (pozitív egész számok) elemzése után kiderült, hogy a kilenc szám (egyetlen) módusza 1, mediánja 2, átlaga $\frac{16}{9}$, terjedelme 2. Add meg ezt a kilenc számot!

1 1 1 2 3 3 3

4. Kétfordulós matematika versenyt rendeztek 8. évfolyamon, amelyen 3-3 tanuló vett részt az A és B osztályból. Az alábbi táblázatban a szerzett pontokat látod. Készíts két különböző fajtájú diagrammot, amelyek szerinted a legjobban szemléltetik az eredményeket.

Nevek	A osztály			B osztály		
	András	Anita	Abigél	Berci	Bogi	Béla
1. forduló	40	25	32	18	38	22
2. forduló	32	28	19	28	32	35

4f





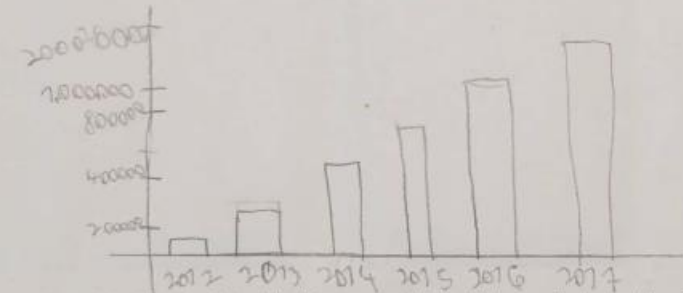
1. Az alábbi táblázatot egy biológiodolgozat eredményeit mutatja. Adja meg az adathalmaz módusát és mediánját!

éremjegy	1 (elégtelen)	2 (elégséges)	3 (közepes)	4 (jó)	5 (jeles)
dolgozatok száma	0	1	3	5	6

módus: 5
medián: 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5

2. Szemléltesse oszlopdiaagramon a táblázat adatait.

év	2012	2013	2014	2015	2016	2017
elektromos autók száma (ezerre kerekítve)	110 000	221 000	409 000	727 000	1 186 000	1 928 000



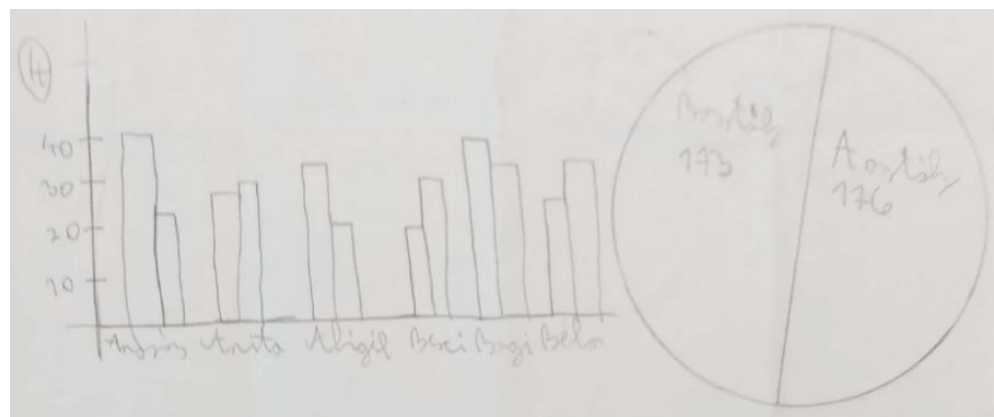
3. Kilenc diáktól, akik olvastak szépirodalmi könyvet, megkérdezték, hogy márciusban hány könyvet olvastak el. A válaszok (pozitív egész számok) elemzése után kiderült, hogy a kilenc szám (egyetlen) módusza 1, mediánja 2, átlaga $\frac{16}{9}$, terjedelme 2. Add meg ezt a kilenc számot!

$$\frac{1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3}{9} = \frac{16}{9} = 1,78$$

4. Kétfordulós matematika versenyt rendeztek 8. évfolyamon, amelyen 3-3 tanuló vett részt az A és B osztályból. Az alábbi táblázatban a szerzett pontokat látod. Készíts két különböző fajtájú diagrammot, amelyek szerint a legjobban szemléltetik az eredményeket.

	A osztály			B osztály		
Nevek	András	Anita	Abigél	Berci	Bogi	Béla
1. forduló	40	25	32	18	38	22
2. forduló	32	28	19	28	32	35

349 = 100%



1. Az alábbi táblázat egy biológiodolgozat eredményeit mutatja. Adja meg az adathalmaz módusát és mediánját!

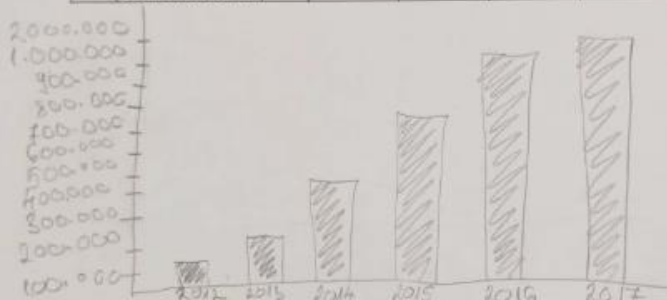
érdemjegy	1 (elégtelen)	2 (elégséges)	3 (közepes)	4 (jó)	5 (jeles)
dolgozatok száma	0	1	3	5	6

módusz: 4

medián: 2 3 3 3 4 4 4 (4) 5 5 5 5 5 (4)

2. Szemléltesse oszlopdiaagrammon a táblázat adatait.

év	2012	2013	2014	2015	2016	2017
elektromos autók száma (ezerre kerekítve)	110 000	221 000	409 000	727 000	1 186 000	1 928 000



3. Kilenc diáktól, akik olvastak szépirodalmi könyvet, megkérdezték, hogy márciusban hány könyvet olvastak el. A válaszok (pozitív egész számok) elemzése után kiderült, hogy a kilenc szám (egyetlen) módusza 1, mediánja 2, átlaga $\frac{16}{9}$, terjedelme 2. Add meg ezt a kilenc számot!

1, 2, 3

4. Kétfordulós matematika versenyt rendeztek 8. évfolyamon, amelyen 3-3 tanuló vett részt az A és B osztályból. Az alábbi táblázatban a szerzett pontokat látod. Készíts két különböző fajtájú diagrammot, amelyek szerinted a legjobban szemléltetik az eredményeket.

Nevek	A osztály			B osztály		
	András	Anita	Abigél	Berci	Bogi	Béla
1. forduló	40	25	32	18	38	22
2. forduló	32	28	19	28	32	35

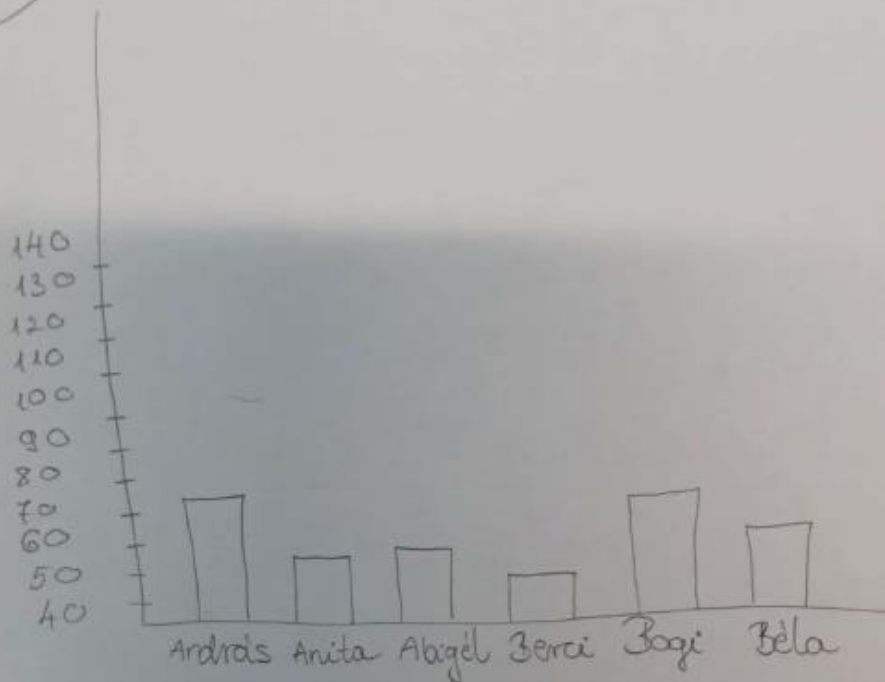
72 53 54 | 46 70 57
179 | 173

4. feladat

1.



2.



1. Az alábbi táblázat egy biológiai dolgozat eredményeit mutatja. Adja meg az adathalmaz módusát és mediánját!

éremjegy	1 (elégtelen)	2 (elégséges)	3 (közepes)	4 (jó)	5 (jeles)
dolgozatok száma	0	1	3	5	6

2
3 3 3
4 4 4 4
5 5 5 5 5 5
1 1 1 1 1 1
1 2 3 4 5 6
medián: 4 módus: 5

2. Szemléltesse oszlopdiagramon a táblázat adatait.

év	2012	2013	2014	2015	2016	2017
elektromos autók száma (ezerre kerekítve)	110 000	221 000	409 000	727 000	1 186 000	1 928 000



3. Kilenc diáktól, akik olvastak szépirodalmi könyvet, megkérdezték, hogy márciusban hány könyvet olvastak el. A válaszok (pozitív egész számok) elemzése után kiderült, hogy a kilenc szám (egyetlen) módusza 1, mediánja 2, átlaga $\frac{16}{9}$, terjedelme 2. Add meg ezt a kilenc számot!

1 1 1 1 2 2 2 3 3 = 16

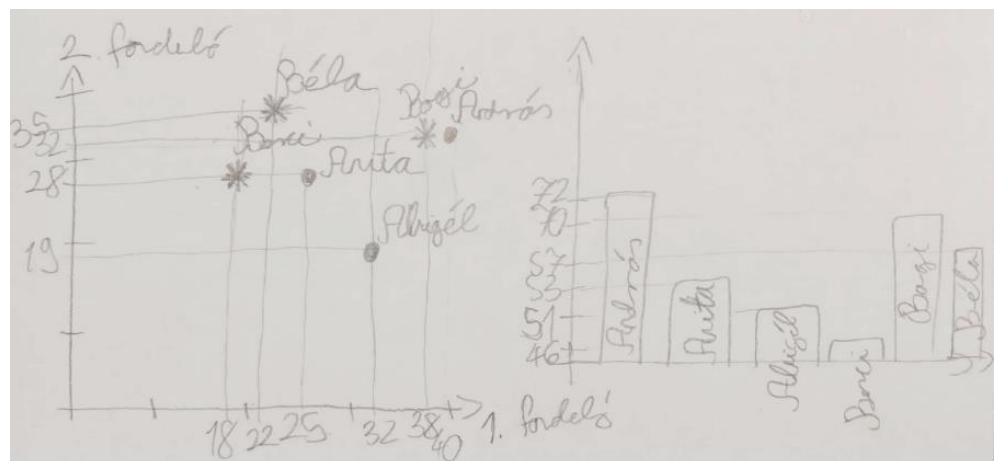
1, 2, 3

Számok: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3

4. Kétfordulós matematika versenyt rendeztek 8. évfolyamon, amelyen 3-3 tanuló vett részt az A és B osztályból. Az alábbi táblázatban a szerzett pontokat látod. Készíts két különböző fajtájú diagramot, amelyek szerinted a legjobban szemléltetik az eredményeket.

Nevék	A osztály			B osztály		
	András	Anita	Abigél	Berci	Bogi	Béla
1. forduló	40	25	32	18	38	22
2. forduló	32	28	19	28	32	35

32 53 51 46 70 57



7.2. 2. sz. melléklet: Attitűd vizsgálat eredményei



Kérlek minden állítás után húzd alá a rád legjobban jellemző vagy leginkább igaz választ. A válaszokat név nélkül adod meg. Kérlek légy minél őszintébb.

1. Örülök, hogy részt vettem a foglalkozásokon.
Egyáltalán nem Inkább nem Inkább igen Teljes mértékben
2. Szívesen részt vennék hasonló tanórákon.
Egyáltalán nem Inkább nem Inkább igen Teljes mértékben
3. Úgy gondolom tanultam új dolgot a foglalkozások során.
Egyáltalán nem Inkább nem Inkább igen Teljes mértékben
4. Szerintem az első alkalom ...
...rossz volt. ...kevésbé volt jó. ...jó volt. ...nagyon jó volt.
5. Szerintem a második alkalom ...
...rossz volt. ...kevésbé volt jó. ...jó volt. ...nagyon jó volt.
6. Szerintem a harmadik alkalom ...
...rossz volt. ...kevésbé volt jó. ...jó volt. ...nagyon jó volt.



Kérlek minden állítás után húzd alá a rád legjobban jellemző vagy leginkább igaz választ. A válaszokat név nélkül adod meg. Kérlek légy minél őszintébb.

1. Örülök, hogy részt vettem a foglalkozásokon.
Egyáltalán nem Inkább nem Inkább igen Teljes mértékben
2. Szívesen részt vennék hasonló tanórákon.
Egyáltalán nem Inkább nem Inkább igen Teljes mértékben
3. Úgy gondolom tanultam új dolgot a foglalkozások során.
Egyáltalán nem Inkább nem Inkább igen Teljes mértékben
4. Szerintem az első alkalom ...
...rossz volt. ...kevésbé volt jó. ...jó volt. ...nagyon jó volt.
5. Szerintem a második alkalom ...
...rossz volt. ...kevésbé volt jó. ...jó volt. ...nagyon jó volt.
6. Szerintem a harmadik alkalom ...
...rossz volt. ...kevésbé volt jó. ...jó volt. ...nagyon jó volt.



Kérlek minden állítás után húzd alá a rád legjobban jellemző vagy leginkább igaz választ. A válaszokat név nélkül adod meg. Kérlek légy minél őszintébb.

1. Örülök, hogy részt vettem a foglalkozásokon.
Egyáltalán nem Inkább nem Inkább igen Teljes mértékben
2. Szívesen részt vennék hasonló tanórákon.
Egyáltalán nem Inkább nem Inkább igen Teljes mértékben
3. Úgy gondolom tanultam új dolgot a foglalkozások során.
Egyáltalán nem Inkább nem Inkább igen Teljes mértékben
4. Szerintem az első alkalom ...
...rossz volt. ...kevésbé volt jó. ...jó volt. ...nagyon jó volt.
5. Szerintem a második alkalom ...
...rossz volt. ...kevésbé volt jó. ...jó volt. ...nagyon jó volt.
6. Szerintem a harmadik alkalom ...
...rossz volt. ...kevésbé volt jó. ...jó volt. ...nagyon jó volt.



Kérlek minden állítás után húzd alá a rád legjobban jellemző vagy leginkább igaz választ. A válaszokat név nélkül adod meg. Kérlek légy minél őszintébb.

1. Örülök, hogy részt vettem a foglalkozásokon.
Egyáltalán nem Inkább nem Inkább igen Teljes mértékben
2. Szívesen részt vennék hasonló tanórákon.
Egyáltalán nem Inkább nem Inkább igen Teljes mértékben
3. Úgy gondolom tanultam új dolgot a foglalkozások során.
Egyáltalán nem Inkább nem Inkább igen Teljes mértékben
4. Szerintem az első alkalom ...
...rossz volt. ...kevésbé volt jó. ...jó volt. ...nagyon jó volt.
5. Szerintem a második alkalom ...
...rossz volt. ...kevésbé volt jó. ...jó volt. ...nagyon jó volt.
6. Szerintem a harmadik alkalom ...
...rossz volt. ...kevésbé volt jó. ...jó volt. ...nagyon jó volt.



Kérlek minden állítás után húzd alá a rád legjobban jellemző vagy leginkább igaz választ. A válaszokat név nélkül adod meg. Kérlek légy minél őszintébb.

1. Örülök, hogy részt vettem a foglalkozásokon.

Egyáltalán nem Inkább nem Inkább igen Teljes mértékben

2. Szívesen részt vennék hasonló tanórákon.

Egyáltalán nem Inkább nem Inkább igen Teljes mértékben

3. Úgy gondolom tanultam új dolgot a foglalkozások során.

Egyáltalán nem Inkább nem Inkább igen Teljes mértékben

4. Szerintem az első alkalom ...

...rossz volt. ... kevésbé volt jó. ...jó volt. ...nagyon jó volt.

5. Szerintem a második alkalom ...

...rossz volt. ... kevésbé volt jó. ...jó volt. ...nagyon jó volt.

6. Szerintem a harmadik alkalom ...

...rossz volt. ... kevésbé volt jó. ...jó volt. ...nagyon jó volt.



Kérlek minden állítás után húzd alá a rád legjobban jellemző vagy leginkább igaz választ. A válaszokat név nélkül adod meg. Kérlek légy minél őszintébb.

1. Örülök, hogy részt vettem a foglalkozásokon.

Egyáltalán nem Inkább nem Inkább igen Teljes mértékben

2. Szívesen részt vennék hasonló tanórákon.

Egyáltalán nem Inkább nem Inkább igen Teljes mértékben

3. Úgy gondolom tanultam új dolgot a foglalkozások során.

Egyáltalán nem Inkább nem Inkább igen Teljes mértékben

4. Szerintem az első alkalom ...

...rossz volt. ...kevésbé volt jó. ...jó volt. ...nagyon jó volt.

5. Szerintem a második alkalom ...

...rossz volt. ... kevésbé volt jó. ...jó volt. ...nagyon jó volt.

6. Szerintem a harmadik alkalom ...

...rossz volt. ... kevésbé volt jó. ...jó volt. ...nagyon jó volt.



Kérlek minden állítás után húzd alá a rád legjobban jellemző vagy leginkább igaz választ. A válaszokat név nélkül adod meg. Kérlek légy minél őszintébb.

1. Örülök, hogy részt vettem a foglalkozásokon.
Egyáltalán nem Inkább nem Inkább igen Teljes mértékben
2. Szívesen részt vennék hasonló tanórákon.
Egyáltalán nem Inkább nem Inkább igen Teljes mértékben
3. Úgy gondolom tanultam új dolgot a foglalkozások során.
Egyáltalán nem Inkább nem Inkább igen Teljes mértékben
4. Szerintem az első alkalom ...
...rossz volt. ...kevésbé volt jó. ...jó volt. ~~X~~nagyon jó volt.
5. Szerintem a második alkalom ...
...rossz volt. ...kevésbé volt jó. ...jó volt. ~~X~~nagyon jó volt.
6. Szerintem a harmadik alkalom ...
...rossz volt. ...kevésbé volt jó. ~~X~~jó volt. ...nagyon jó volt.



Kérlek minden állítás után húzd alá a rád legjobban jellemző vagy leginkább igaz választ. A válaszokat név nélkül adod meg. Kérlek légy minél őszintébb.

1. Örülök, hogy részt vettem a foglalkozásokon.
Egyáltalán nem Inkább nem Inkább igen Teljes mértékben
2. Szívesen részt vennék hasonló tanórákon.
Egyáltalán nem Inkább nem Inkább igen Teljes mértékben
3. Úgy gondolom tanultam új dolgot a foglalkozások során.
Egyáltalán nem Inkább nem Inkább igen Teljes mértékben
4. Szerintem az első alkalom ...
...rossz volt. ... kevésbé volt jó. ...jó volt. ...nagyon jó volt.
5. Szerintem a második alkalom ...
...rossz volt. ... kevésbé volt jó. ...jó volt. ...nagyon jó volt.
6. Szerintem a harmadik alkalom ...
...rossz volt. ... kevésbé volt jó. ...jó volt. ...nagyon jó volt.