2023

Szakdolgozat

Dr. Pintérné Tóth Rebeka Sára

angol nyelv és kultúra tanára – matematikatanár

2023

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

Természettudományi Kar

Szakdolgozat

Egy Arany Dániel Feladat Utóélete

Témavezető:

Dr. Szabó Csaba

egyetemi tanár

Készítette:

Dr. Pintérné Tóth Rebeka Sára

angol nyelv és kultúra tanára - matematikatanár

osztatlan tanári mesterszak

2023

Eredetiségi nyilatkozat

Alulírott Dr. Pintérné Tóth Rebeka Sára (név)

Q7K9UT (Neptun-kód) ezennel kijelentem és aláírásommal megerősítem, hogy az ELTE angol nyelv- és kultúra - matematikatanár tanári mesterszakján írt jelen diplomamunkám saját szellemi termékem, melyet korábban más szakon még nem nyújtottam be szakdolgozatként, és amelybe mások munkáját (könyv, tanulmány, kézirat, internetes forrás, személyes közlés stb.) idézőjel és pontos hivatkozások nélkül nem építettem be.

Budapest, 2023. 04. 28.

Dr. PinTóth

a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Tanári pályafutásunk alatt előfordulhat, hogy találkozunk egy olyan feladattal, ami megmozgatja a fantáziánkat, szeretnénk róla minél többet megtudni. Kíváncsiak vagyunk arra, hogy milyen módszerekkel tudunk hasonló feladatok gyártani, esetlegesen milyen érdekes módosításokat tudunk rajta végezni. Számomra az ebben a dolgozatban szereplő feladat pontosan ilyen érzelmeket keltett és ezért döntöttem úgy, hogy szeretnék minél többet megtudni az ilyen típusú problémákról. A szakdolgozatom kiindulási pontja egy, az Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1997/98. évi kiadásában megjelent feladat. Ennek szövege a következőképpen hangzik:

Egy szabályos sokszög csúcsaihoz tetszés szerint 1-et vagy -1-et írunk. Egy „lépésben" bármely három egymást követő csúcshoz írt szám előjelét az ellenkezőjére változtatjuk. (Például az 1; 1; -1 hármast a -1; -1; 1 hármasra cserélhetjük.)

a.) *Elérhető-e ilyen „lépésekkel" tetszőleges kiindulási helyzet esetén, hogy a csúcsokhoz írt 100 szám összege 0 legyen?*
b.) *Elérhető-e tetszőleges kiindulási helyzet esetén, hogy mindegyik csúcshoz az 1-es szám tartozzon?*

A feladat hivatalos megoldását az egyik Országos Közoktatási Szolgáltató Iroda által 1999-ben kiadott számban találjuk, és így hangzik:

a.) *A száz darab csúcshoz írt szám 25 darab egymást követő, közös elem nélküliszámnégyesre tagolható.*
Megmutatjuk, hogy bármelyik számnégyes számainak összege lefeljebb két „lépéssel" 0-vá tehető. Így pedig nyilvánvaló, hogy a 25 számnégyes „összege" 0-vá tehető.
Egy számnégyesben a -1-esek száma 0, 1, 2, 3, 4 lehet.
Ha a -1-esek száma kettő, akkor készen vagyunk.
Ha nincs -1-es a négyes tagjai között, akkor az (1;1; 1; 1) négyesből az első három tag előjelváltása után a (-1; -1; -1; 1) négyes adódik. Ha most az utolsó három tag előjelét változtatjuk meg, akkor a számunkra megfelelő (-1; 1; 1; -1) négyest kapjuk.
Ha egy darab -1-es van a számnégyes tagjai között, akkor a -1-es valamelyik szélső szám, vagy a két különböző szám egyike lehet, azaz a számnégyes (1; 1; 1; -1)

vagy (1; 1; -1; 1) alakú. Mindkét esetben (és a szimmetrikus esetekben is) egyetlen „lépésben” – most az utolsó három tag előjelváltásával – a kívánt eredményhez jutunk.

Az 1-esek és a -1-esek szerepe felcserélhető egy négyesben belül, így állításunk minden lehetséges esetben igaz.

b.) *Számozzuk meg a csúcsokat például pozitív körüljárás szerint 1-től 100-ig!*

Hajtsuk végre a feladat feltételeinek megfelelő „lépéseket” az első csúcstól kezdve a 98-adik csúccsal bezáróan a következőképpen:

Ha az i-edik csúcshoz írt szám 1, akkor menjünk tovább a feladat feltételeinek megfelelő „lépéssel” addig a csúcsig, amelyikhez a -1 szám tartozik (i=1, 2, 3, … 98).

Ha ilyen csúcs nincs, akkor megállunk.

Ha -1-es csúcshoz jutunk, akkor i=1, 2, …, 98 esetén ehhez és a következő két csúcshoz írt szám -1-szeresét vesszük.

Az így kapott új számszázasra az iménti eljárást annyiszor ismételjük meg, míg a 98-adik csúcsig nem jutunk. (A 99-edik és a 100-adik csúcsra már nem alkalmazzuk az eljárást.)

Ekkor az 1.; 2.; …; 98. sorszámú csúcsok mindegyikéhez nyilvánvalóan az 1-es szám tartozik.

A 99-edik és a 100-adik csúcshoz írt szám pedig az eljárás befejezése után rendre (1; 1), (1; -1), (-1; 1), (-1; -1) lehet.

Ha mindkét szám 1-es, akkor készen vagyunk.

Ha mindkettő -1-es, akkor az (1; 1; -1; -1) négyesből (ilyen van, mert két szomszédos -1-esen kívül a többi csúcshoz az 1-es szám tartozik) kiindulva az első három tag előjelváltásával a (-1; 1; 1; 1) négyeshez jutunk. Tehát a két „-1-es esete” visszavezethető az „egy darab -1-es esetére”. Ekkor viszont az egy darab -1-esen kívül 99 darab 1-es van, amelyek 33 darab hármas csoportba oszthatók. Mindegyik csoport egyszeri „felváltásával” mind a száz csúcshoz írt szám újra -1 lesz.

Ha most az 1., 2., 3. jelű csúcshoz írt számokat -1-el szorozzuk (ami egy „lépés”), majd az újonnan kapott számszázas 2., 3., 4. csúcsához írt számok előjelét változtatjuk meg, utána ezt az eljárást folytatjuk tovább a 3., 4., 5. csúcshoz alkalmazva a jelváltást (tehát összesen 100 darab „lépést” hajtunk végre), akkor

mindegyik csúcshoz az 1-es szám fog tartozni, hiszen bármely csúcshoz (az eredetileg) írt -1-es pontosan háromszor váltott előjelet.
Tehát elérhető tetszőleges kiindulási helyzet esetén, hogy mindegyik csúcshoz az 1-es szám tartozzon.

A dolgozatban ennek a feladatnak az általánosításait és kiterjesztéseit fogom vizsgálni. Az érthetőség és a középiskolások kedvéért átfogalmazom az eredeti feladatot piros és kék korongokra az 1 és -1 számok helyett és az alábbi kérdéseket vizsgálom: hogyha a kiindulási helyzetben csak a korongok piros oldala van felül, akkor elérhető-e az a két állapot, hogy pontosan 1 kék korong lesz, illetve, hogy a folyamat végére az összes korong kék lesz. Emellett általánosan azt is vizsgálom, hogy elérhető-e egy kiindulási helyzetből minden másik helyzet. Amikor egy középiskolás tanár szeretne ilyen feladatokat megoldani, akkor kell a kezébe egy olyan eszköz, amivel ezt megteheti. A mi eszközünk a lineáris algebra lesz. A szakdolgozatban elhangzó összes algebrai kifejezés és definíció forrása Kis Emil *Bevezetés az Algebrába* és Freud Róbert *Lineáris Algebra* című könyve. Lefordítom a korongokat a 0, 1 maradékosztályok nyelvére $modulo$ 2, és lefordítom a körök körberakását a vektorok nyelvére. Egy ügyes megfeleltetéssel az alábbi feladatokhoz jutunk. A legáltalánosabb esetben a kérdés így hangzik:

Adott az n dimenziós vektortérben n db vektorunk, amelyikben mindig k db szomszédos 1-es van ciklikusan. Igaz-e, hogy ez az n db vektor generálja a vektorteret? Ha nem, akkor milyen alteret generál?

A dolgozat módszertani részében elvégeztem egy kísérletet, amiben a kiindulási feladatokat bevittem néhány osztályba, ahol a diákoknak adott idő alatt kellett foglalkozniuk a feladatokat. Ezalatt az volt az elvárás, hogy minden gondolatukat írják le a feladattal kapcsolatban, hogy minél több információhoz jussak a kiértékelés során. A középiskolák rangsorán az első 10-be tartozó középiskolák egyikében végeztem el, ahol a hosszú gyakorlatomat keretein belül tanítok. Itt előre egyeztettem a tanárokkal arról, hogy szerintük a diákok számára elvégezhetőek-e a feladatok, de valószínű, hogy egy általános középiskolai osztályban ilyen problémákkal nem fognak találkozni a diákok. Az elemzés alatt bemutatok különféle próbálkozásokat és összegezni is fogom a csoportok teljesítményét. A dolgozatban kiértékelem néhány diák megoldását.

2. A kiindulási feladat

Ennek a szakdolgozatnak az elkészültét egy olyan versenyfeladat ihlette, ami a 1997/98. évi Arany Dániel Matematikaversenyen jelent meg a Haladó kategória I. és II. fordulójában a nem speciális feladatok között. A feladat szövege így szól:

Egy szabályos százszög csúcsaihoz tetszés szerint 1-et vagy -1-et írunk. Egy „lépésben” bármely három egymást követő csúcshoz írt szám előjelét az ellenkezőjére változtatjuk. (Például az 1; 1; -1 hármast a -1; -1; 1 hármasra cserélhetjük.)

a.) Elérhető-e ilyen „lépésekkel” tetszőleges kiindulási helyzet esetén, hogy a csúcsokhoz írt 100 szám összege 0 legyen?

b.) Elérhető-e tetszőleges kiindulási helyzet esetén, hogy mindegyik csúcshoz az 1-es szám tartozzon?

2.1.A feladat középiskolás megoldása

A középiskolai megoldás alapötlete abban rejlik, hogy a 100 csúcsot fel tudjuk bontani 25db 4-4 csúcsból álló részre. Ha az ilyen négyesekben meg tudjuk mutatni azt, hogy bármilyen állásból elérhető, hogy az összeg 0 legyen, vagyis két 1- es és két -1-es szerepeljen, akkor ebből már következik, hogy a 100 csúcshoz tartozó számok összege is 0 lesz. A minta megoldás viszonylag egyszerű és könnyen feldolgozható, viszont egy elég specifikus ötletet igényel az elején, a rövidebb ciklusokra való felbontást. Felmerül a kérdés, hogy mi van akkor, ha a csúcsok száma nem bontható hasonlóan kisebb részekre. Ezért mikor egy ilyen feladatra gyakorolunk egy iskolai környezetben, akkor fontos, hogy többféle változatot is megmutassunk a diákoknak. A fenti feladat leírva könnyűnek tűnhet, de természetes módon elindít egy gondolatmenetet, melyben eszünkbe juthatnak különböző általánosítások, illetve kiterjesztések. Például, hogy mi van akkor, ha nem 100, hanem több csúcsunk van, vagy éppen akkor, ha egyszerre nem három, hanem több korongot forgathatunk egyszerre. Ezek a kérdések a diákjainkban is felmerülhetnek, és tanárként készen kell állnunk ezek megválaszolására is.

3. Miért is korongok

Véleményem szerint egy diákot eléggé meg tudnak ijeszteni egy feladatban az olyan kifejezések, mint „szabályos százszög” és a csúcsokra írt 1, és -1-esek. Ezért amikor bevezetünk egy ilyen feladattípust, érdemesebb egy kicsit barátságosabb megfogalmazással kezdeni. Ezért a feladatokban a sokszöget körben elhelyezett korongokra fogjuk cserélni, a

1 és -1-es jelölést pedig színekre egy korong két oldalán. Ezért a feladatok a következő módon fognak kezdődni:

100 korongot lehelyezünk egymás mellé egy körben. Minden korongnak 2 oldala van, egy piros és egy kék. Minden lépésünkben megfordítunk 3 egymás melletti korongot, ezzel megváltoztatva a színüket. (Tehát ha egy piros, piros, kék hármast fordítunk meg, abból egy kék, kék, piros hármas lesz.)

Ebben a részben a következő feladatokat fogjuk részletesebben tárgyalni.

A feladat:

Legyen az a kiindulóhelyzet, hogy mind a 100 korongunknak a piros oldala van felül.

a.) Elérhető-e a megengedett lépéseinkkel, hogy 1 kivételével minden korongnak a piros fele legyen felül?

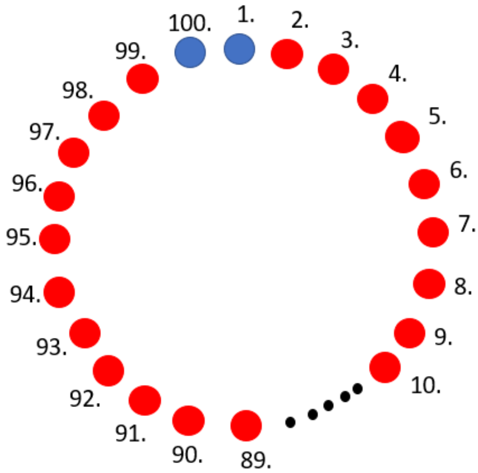
b.) Elérhető-e a megengedett lépéseinkkel, hogy minden korongnak a kék fele legyen felül?

3.1. Az új feladat megoldása

3.1.1. A feladat a.) részének megoldása középiskolai módszerrel

Az könnyen látható, hogy ahhoz, hogy egy piros korong a forgatások után is piros maradjon, ahhoz páros sokszor kell őt megforgatni, ha pedig azt szeretnénk, hogy kék legyen, akkor páratlan sokszor.

Tehát ahhoz, hogy a lépéseink után csak 1 kék korongunk legyen egy olyan lépéssorozatot kell megadnunk, amiben 1 kivételével az összes korongot páros sokszor forgattuk meg. Ahhoz, hogy könnyebben le tudjuk írni a feladatot számozzuk meg a korongokat 1-től 100-ig. Mivel a korongok körben vannak, és mindegyikük ugyanolyan színű, ezért bármelyiktől kezdhetjük a sorszámozást. Első lépésként forgassuk meg az 1.; 2.; 3. koronghármast. Így lesz 3 kék és 97 piros korongunk. Ezt a hármast nem szeretnénk újra megfordítani, így eggyel elcsúsztatva forgassuk meg a 2.; 3.; 4. koronghármast. Ekkor az első korong kék marad, a 2. és 3. újra piros lesz, míg a 4. kékké változik, vagyis az első 3 korong már olyan állapotban van, amiben mi szeretnénk. A 4. korongot meg kell fordítani még egyszer, hogy piros legyen, tehát legyen a következő forgatandó hármas a 4.; 5. és 6. korong. Így már a 4. korongot is megfordítottuk kétszer, tehát vele már nem kell foglalkoznunk. A következő hármas legyen az 5. koronggal kezdődő és így haladjunk tovább. Ezt a forgatási módszert addig tudjuk folytatni, míg meg nem fordítottuk a 98.; 99. és 100. korongokat is. Ha ezt megtesszük, akkor egy olyan álláshoz jutunk, amiben a 100. és 1. korongok kékek, a többi pedig piros.



1. ábra

Eddig a pontig úgy dolgoztunk, hogy közben arra törekedtünk, hogy az első korong legyen az, ami a végén kék marad, de itt látszik, hogy talán nem ez lesz a megfelelő megoldás. Mivel a feladat nem tűzte ki, hogy melyik korongunk legyen kék ezért ez nem is baj. Utoljára megfordítva tehát a 100., 1., és 2. korongokat elérjük azt, hogy a 2. korongon kívül mindegyik piros legyen, míg a 2. korong kék. Ezzel megoldottuk a kitűzött feladatot. Ha esetleg olyan megfogalmazásban kapjuk meg a feladatot, amiben ki van tűzve, hogy melyik korongok kell kékké, akkor sem kell megijedni. Vegyük észre, hogy ebben az esetben a célállapot előáll az előbb kapott állapot elforgatásaként, vagyis a kívánt végállapot elérhető olyan módon, hogyha a megfelelő lépéseinket elforgatva hajtjuk végre.

3.1.2. A feladat b.) részének megoldása középiskolai módszerrel

A feladat második részére is könnyen lehet módszert találni. Ebben az esetben úgy szeretnénk forgatni, hogy a folyamat végére minden korong páratlan sokszor legyen megfordítva. Vegyük észre, hogy egy korong pontosan három darab hármasban szerepel, így, ha ezek közül az összeset megforgatjuk, akkor a kiválasztott korongot háromszor, vagyis páratlan sokszor forgattuk meg. Tehát ha az összes lehetséges hármast megfordítjuk, akkor el tudjuk érni, hogy az összes korong kék legyen. Ennek talán a legegyszerűbb módja, ha elindulunk az első hármastól, és ezután mindig eggyel eltolva a kezdő korongot megforgatjuk az összeset.

3.1.3. A feladat megoldása vektorterekkel

Az eddigi feladatokban rövid gondolkodás után mindig találtunk egy módszert, amivel el tudjuk érni a kitűzött célt. Fölmerül a kérdés, hogy milyen célokat tudunk kitűzni, azaz, ha kiindulunk egy alapállapotból, akkor milyen állapotokba tudunk eljutni. Az alapfeladatban az első részben egy tetszőleges állapotból kellett egy olyanba eljutni, ahol a fele -1, a fele pedig 1, a második feladatrészben pedig egy olyan állapotba kellett eljutni, ahol minden egyforma előjelű. Ezzel szemben a korongos feladatban egy konkrét megadott alapállapotból kellett előállítani azt, ahol minden korong piros egy kivételével, illetve a csupa kék állapotot. Látni fogjuk később, hogy ezek mind visszavezethetők ugyanarra a típusfeladatra. Nézzük meg, hogyha a szaktanár, vagy akár a diákok közül valaki általánosítja a feladatot, és feltesz magának kérdéseket, akkor hogyan lehet biztosan eldönteni, hogy az egyik állapotból el tudunk-e jutni a másikba.

A feladatot át fogjuk írni a vektorterek nyelvére. Ehhez keresnünk kell egy megfeleltetést az állapotok és a vektorok között. Mivel 100 korongunk van körbe, amiket be tudunk számozni, fel tudjuk írni a korongok állásait, mint 100 hosszú oszlopvektorok. A kérdés már csak az, hogy mik legyenek a vektorok koordinátái. A korongoknak két különböző színű oldala van, ezért érdemes *modulo 2*-ben gondolkodnunk. A korong piros oldalát feleltessük meg a 0-nak, a kék oldalát pedig feleltessük meg az 1-nek. Ha fölül van a piros oldal, akkor írjunk 0-s koordinátát a vektor megfelelő helyére, ha pedig a kék oldal van felül, akkor írjunk 1-est. Ha ezt megtesszük, akkor a korongok összes lehetséges állása felírható olyan 100 hosszú oszlopvektorként, amiben csak 1-esek és 0-ák vannak. Tehát az összes lehetséges állapot megadja a Z_2^{100} vektortér összes vektorát. Ebben a felállásban vizsgáljuk meg, hogy mit jelentenek a forgatások. Z_2-ben. Ha 1-hez 1-et adunk, akkor 0-át kapunk, ha 0-hoz 1-et adunk, akkor 1-et kapunk, tehát egy átforgatásnál a „pirosból kék lesz” azt jelenti, hogy 0-ból 1, ha a „kékből piros” pedig azt, hogy 1-ből 0 lesz. Tehát egy korong megforgatása azzal egyenlő, hogy a megfelelő koordinátákhoz hozzáadunk 1-et. Akkor, hogyha 3 szomszédos korongot forgatunk meg, akkor az azt jelenti, amikor az eredeti állapotot leíró vektorhoz hozzáadunk egy olyan 100 hosszú oszlopvektort, melynek három egymás melletti koordinátája 1, a többi pedig 0. Ezeket a vektorokat átforgatásvektoroknak fogjuk nevezni. Az átforgatásvektorok a következőképpen néznek ki:

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\1\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\1\\1\\\vdots\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\dots,\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\\vdots\\1\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Vannak olyan átforgatásvektorok is, amelyek „átlógnak” a kezdőpontunkon, amelyek az utolsó két koordinátában kezdődnek és az első koordinátákban lesz a folytatása, mert a kört mesterségesen elvágtuk. Könnyen látszik, hogy 100db átforgatásvektor van, mivel a kör minden koordinátájában kezdődik egy hármas, ami egy lehetséges átforgatásnak felel meg.

Ezeket figyelembe véve az **a.)** kérdés lefordítása a vektorok nyelvére a következőképpen hangzik: *Előállítható-e az átforgatásvektorok lineáris kombinációjaként egy olyan vektor, amiben egy koordináta 1, a többi pedig 0?* Ilyenkor a kiindulási helyzetünk a csupa piros kör, vagyis a csupa 0 vektor. Mint a középiskolai megoldás felírásánál, itt is arra szeretnénk törekedni, hogy úgy írjuk fel a lineáris kombinációt, hogy az abban szereplő vektorokban minden helyen páros sokszor szerepeljen az 1-es, kivéve az egyik koordinátában. Tehát ha például fel akarjuk használni a lineáris kombinációban azt a két átforgatásvektort, amiben az első három, illetve a 2.; 3. és 4. koordináta 1-es, akkor azt a vektort már nem szeretném belevenni, amiben a 3-4-5. helyen található koordináta 1-es, mivel akkor már a 3. koordináta helyén páratlan sokszor szerepelne az 1-es. Vagyis a következő vektor, amit használni fogunk a kombinációban az lesz, amiben az 1-esek a 4. koordinátában kezdődnek és így folytatjuk a gondolatmenetet tovább. Látszik, hogy ez pontosan a fentiekben leírt algoritmus lefordítása a vektorokra. Ha ezt a módszert alkalmazzuk végig, akkor a következő egyenletet kapjuk:

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\1\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\1\\1\\\vdots\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\\vdots\\1\\1\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

A vektorok szimmetriái miatt, ha ezt az állást elő tudtuk állítani, akkor bármelyik olyan vektor előállítható, amiben csak 1db 1-es szerepel, mivel, ha el tudom érni, hogy az első helyen legyen csak 1-es, és a többi helyen 0, akkor, ha azt a vektort szeretném előállítani, amiben a $k.$ helyen van az 1-es, akkor ahhoz nem kell mást tennünk, minthogy eltoljuk az összes kombinációban szereplő átforgatásvektort $k-1$-gyel. Vagyis az alábbi állapotok biztos, hogy előállíthatók lesznek.

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\dots,\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\\vdots\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Ha megnézzük ezeket a vektorokat, akkor láthatjuk, hogy ezek pont a Z_2^{100} standart bázisát alkotják, vagyis generálják az egész vektorteret. Ez számunkra azért hasznos, mert hogyha ezeket a bázisvektorokat elő tudjuk állítani, akkor ezek lineáris kombinációit is. Ugyanis ha az egyik állapotba való eljutás után elvégezzük egy másik eljutásba való korongok forgatásait, akkor a két állapot vektortérbeli összegét kapjuk. A bázisvektorok segítségével pedig elő tudjuk állítani az egész vektorteret, ami pedig azt jelenti, hogy ebben az esetben minden helyzet előállítható forgatásokkal, vagyis a feladat b.) részét már nem is kell külön vizsgálni, mert arról is tudjuk, hogy megoldható lesz. Így, ha nem is tudjuk pontosan, hogy hogyan, de azt láthatjuk, hogy minden helyzethez van konstrukció, és ha a diákjainknak feladjuk a feladatot, akkor nem hiába fognak megoldást keresni.

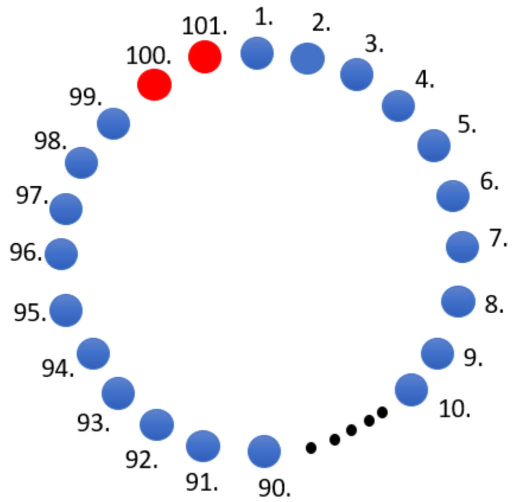
3.2. Felmerülő kérdések, megjegyzések

Ezt a megoldást olvasva azt gondolhatja az ember, hogy ez egy könnyen áthálható és logikus feladat. Így akármilyen módon ki tudjuk terjeszteni egy másik feladatra, sokfajta új feladatot tudunk gyártani és ezek mindig megoldhatóak lesznek. Így az esetleges problémát csak az algoritmus bonyolultsága jelentheti. Egyszerre két dologra gondolhatunk, amikor ezt a feladatot természetesen módosítjuk. Az egyik az az, hogyha azt az általánosítást használjuk, hogyha nem 100, hanem tetszőleges számú korong van körbe rakva. A másik változat az az, hogy mi történik akkor, hogyha nem szomszédos 3, hanem szomszédos k db korongot fordítunk meg egyszerre. Először az első kérdést fogom részletesebben tárgyalni. A megoldás kulcsa a 100-nak a 3-mal való oszthatósági maradéka lesz. Látható, hogy a 100 3k+1 alakban írható fel, és a megoldásból is láttuk, hogy a végén 1 korong maradt ki. Egyszerű megfigyeléssel megállapítható, hogyha az előző feladatmegoldásban a 100-at lecseréljük egy bármelyik 3k+1 alakú számra, akkor a 98. átforgatás helyett a 3k-1. forgatás fog kulcsszerepet játszani a megoldásban és a megoldás analóg módon fog működni a 100 esetére. Tehát ez azt jelenti, hogyha a korongok száma 1-et ad maradékul hárommal osztva, akkor a módszerünk működni fog. Most megvizsgáljuk azon eseteket, amire $n \equiv 2\ (3)$, illetve $n \equiv 0\ (3)$, ahol n a korongok kezdeti száma. Kezdjük a 3k+2 alakú számmal, azon belül is egy konkrét esettel.

3.3. Az a.) feladat megoldása 101 korong esetén

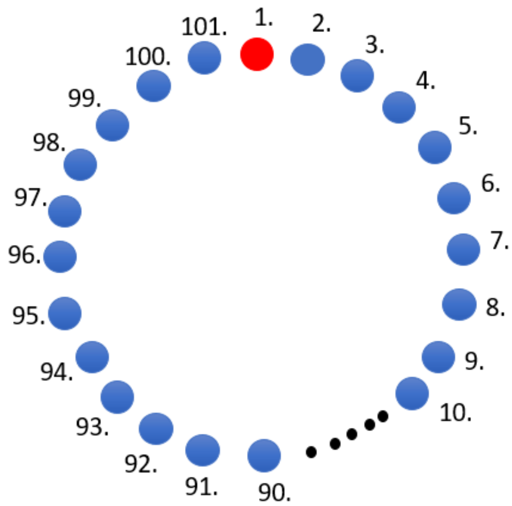
3.3.1. Középiskolai módszer

Legyen itt is az az első célunk, hogy elérjük azt, hogy a lépések után csak 1 kék korongunk maradjon. Ezt a problémát egy kicsit máshogyan kell megközelítenünk, mint az előző esetben. Annyira, hogy teljesen az ellenkezőjét fogjuk annak csinálni, amit kéne, és az elején annyi korongot forgatunk kékre, amennyit csak tudunk. Ezt persze úgy a legegyszerűbb megtenni, ha elindulunk az elején és egymás melletti hármasokat forgatunk addig, míg ezt átlógás nélkül meg tudjuk tenni, vagyis jelen esetünkben 33-szor. Ezen lépések után a körünk a következőképpen fog kinézni:



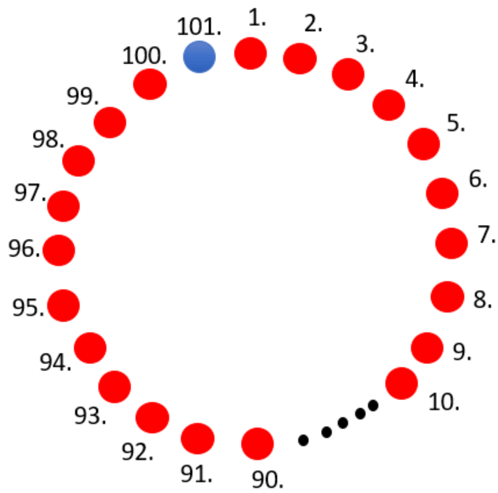
2. ábra

Vagyis marad 2 piros korongunk, és mellette 99 kék. Fordítsuk meg most azt a kimaradt 2 korongot és velük együtt az elsőt is. Az így kapott állás a következő:



3. ábra

Így most elértük, hogy legyen 1 piros és 100 kék korongunk. Innen a megoldás már nagyon egyszerű. Még 99 kék korongot kell átforgatnunk pirosra, hogy elérjük, amit szeretnénk, és mivel a 99 3-mal osztható, így a 101-es melletti 99 korongot hármasával megfordítjuk, és így a 33 forgatás után a 101 korongból a 101.-sel jelölt kék lesz, az összes többi pedig piros. Tehát elértük azt, hogy pontosan 1db kék korongunk van. Akkor, ha egy tanár a diákoknak ezt a megoldást el szeretné mondani, akkor célszerű úgy mondani, hogy sorban indulunk el az elejétől és úgy forgatunk, bár mi tudjuk, hogy a forgatások sorrendje nem számít.



4. ábra

A **b.)** feladatrész megoldásához ugyanazt a módszert tudjuk használni, mint a 100 korong esetében, mivel még mindig nem változott az a tény, hogy egy korong pontosan 3 hármasban szerepel, így az összes hármas megforgatása után az összes korongunk kék oldala lesz felül.

3.3.2. Megoldás vektorterekkel

Az alapmegfeleltetéseink itt is azok, mint az előző esetben, azzal a különbséggel, hogy itt az oszlopvektorok 101 hosszúak 100 helyett, mivel ennyi koronggal dolgozunk. Ugyanígy átforgatásvektorból is 101 db lesz, mivel létezik 1 minden koronggal kezdődően. Ha az **a.)** rész megoldását szeretnénk lefordítani, akkor az első lépés az, hogy minden $3k+1$-dik koronggal kezdődő hármashoz tartozó átforgatásvektort belevennénk a lineáris kombinációba, ahol $k \in Z^+, k \leq 33$. Ezzel érjük el azt az állást, mikor csak az első helyen álló korongunk piros, a többi pedig kék. Ekkor már csak annyi dolgunk van, hogy ehhez hozzáadjuk azokat az elforgatásvektorokat, amik azoknak a hármasoknak felelnek meg, amik kezdő korongja $3k$ alakú, ahol $k \in Z^+$és $k \leq 33$. Ha ezt megtettük, akkor előáll az az állapotvektor, amiben csak a második helyen koordináta 1- es, a többi pedig 0. Ismét csak, mint a 100 korong esetén, a periodikusság miatt, ha ez a vektor előállítható, akkor minden másik olyan vektor is, amiben csak egy db 1-es van. Ez pedig pont azt jelenti, hogy jelen esetben elő tudtunk állítani egy bázisát a Z_2^{101} vektortérnek, pontosan úgy, mint az előző esetben a Z_2^{100}-nak. Ez itt sem jelent mást, minthogy az ezek által generált altérben lévő összes állapot előállítható a megengedett lépéseinkkel. Ám mivel itt egy bázisról beszélünk, és ők az egész vektorteret generálják, minden állás előállítható lesz a 101 korong esetében is. Ezért az is igaz lesz, hogy nem kell külön vizsgálnunk a 101 kék korong esetét, mivel ebből már biztosan tudjuk, hogy elő fog állni.

Ezen kívül láthatjuk azt is, hogy a 101 korong esete is általánosítható az összes olyan esetre, amiben a korongok száma $3k + 2$ alakú, mivel az algoritmusunk sehol sem használja ki, hogy pontosan 101 db korongunk van. Ahogy a 100 korongra bemutatott algoritmust általánosítottuk $3k + 1$ db korongra, ugyanúgy a most 101 db korongra felírt módszert lehet általánosítani $3k + 2$ db korongra. Először sorban addig forgatgatjuk meg a korongokat, amíg 2 pirosunk nem marad, majd ezt megfordítva egy olyan állapothoz jutunk, hogy 1db pirosunk van és a maradék $3k + 1$ db kék. Ha $3k$ db kéket megfordítunk hármasával sorban, akkor egy olyan állapothoz jutunk, ahol 1 db kék korongunk van, míg a többi piros, és pontosan ez volt a cél. Vagyis most már látható, hogy ha a korongjaink száma 3-mal osztva 1 vagy 2 maradékot ad és mindig 3 egymás melletti korongot forgatunk, akkor akármilyen állást elő tudunk állítani. Ez számunkra tanárként rengeteg lehetőséget ad arra, hogy különböző feladatokat gyártsunk a diákjainknak. Persze, itt figyelembe kell venni azt is, hogyha egy helyzet előállítható az nem azt jelenti, hogy könnyű az előállítására algoritmust adnunk középiskolai eszközökkel. Ezért nem annyira egyszerű a dolgunk, hogy kitalálunk egy esetet, amiről tudjuk, hogy elő fog állni, majd bízunk a diákjaink képességeiben, hogy rájöjjenek egy megoldásra.

3.4. A feladat megoldása 102 korong esetén

Az utolsó eset, amit meg kell vizsgálni az, mikor a korongok száma osztható 3-mal. Az előző két feladat mintáját folytatva nézzük most a 102 korong esetét. Elég könnyű látni, hogy az alapfeladatunk **b.)** része nagyon könnyen megoldható, mivel, ha hármasokat forgatunk, akkor annyi a dolgunk, hogy minden olyat megforgassunk ezek közül, amelynek első korongja $3k + 1$ alakú, ahol $k \in Z^+$ és $k \leq 33$.

Viszont az **a.)** feladatrészben már problémákba ütközhetünk. Akár az 100, akár a 101 korong esetére megvizsgált módszereket próbáljuk ki, sajnos nem jutunk megoldásra. Sokszori próbálkozás után felmerül az emberben a gyanú, hogy lehet, hogy ez a feladat, az előzőktől különbözően, nem lesz megoldható.

3.4.1. A 102 korong esetének leírása a vektortérben

Az alaphelyzet ismét nagyon hasonló ahhoz, amit az előző két esetben. Még akkor is, ha az ember otthonosan mozog a vektorterek világában annak is meggyűlne a baja azzal, ha 102 hosszú vektortokkal kéne dolgoznia. Ezért ehelyett próbáljunk meg először egy olyan esettel dolgozni, ahol a korongok számára ugyanúgy igaz, hogy 3-mal osztható. Így nézzük az $n = 6$ esetét.

3.5. Az a.) feladatrész megoldása 6 korong esetén vektorokkal

6 korong esetén 6 hosszú vektoraink vannak, amik megfeleltethetőek a Z_2^6 elemeinek. Itt is igaz lesz az, hogy az átforgatásvektorok lineáris kombinációit kell vizsgálnunk. A felhasználható átforgatásvektorok a következőek:

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Az előző esetekben már láthattuk, hogyha előáll egy olyan vektor a fentiek lineáris kombinációjaként, amelyben csak egy 1-es van, akkor az összes olyan vektor is előállítható, ami ugyanezekkel a tulajdonságokkal rendelkezik. Nézzük meg, hogy a $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ vektort elő tudjuk-e állítani, vagyis előáll-e az átforgatásvektorok lineáris kombinációjaként, ahol $\alpha_i \in \{1; 2\}$, $i = 1; 2; 3; 4; 5; 6$

$$\alpha_1 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\1\\0\end{bmatrix} + \alpha_4 \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix} + \alpha_5 \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix} + \alpha_6 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Vegyük észre, hogy ez egy 6 egyenletből álló lineáris egyenletrendszer, ami a következő módon írható fel:

$$\begin{cases}\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 1 = 1\\ \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 1 = 0\\ \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0\\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0\\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 0 = 0\\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 1 = 0\end{cases}$$

Ennek az egyenletrendszernek keressük innentől a megoldásait. Erre a legegyszerűbb módszer a Gauss-elemináció. Első lépésben vonjuk ki a második egyenletből a harmadikat.

$$\begin{cases}\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 1 = 1 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 1 = 0\end{cases}$$

Következő lépésként vonjuk ki az elsőből a harmadikat.

$$\begin{cases}\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 1 = 1 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 1 = 0\end{cases}$$

Ezután vegyük el az elsőből a negyediket.

$$\begin{cases}\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 1 = 1 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 1 = 0\end{cases}$$

Majd utolsónak a hatodikat vonjuk ki az elsőből. Az így kapott egyenletrendszer:

$$\begin{cases}\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 1 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 1 = 0\end{cases}$$

Látható, hogy kaptunk egy olyan sort, amiben minden együttható 0, de a jobb oldalon 1-es található. Ez nem lehetséges, tehát az egyenletrendszerünknek nincsen megoldása. Ez azt jelenti, hogy a 6 korongnál nem fog előállni a $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ vektor. Ebből az is következik, hogy a 6 korong esetében biztos nem lesz igaz az, hogy minden lehetőség elő fog állni. Ekkor felmerül az a kérdés, hogy akkor mennyi és melyik kombinációk lesznek azok, amik benne vannak az átforgatásvektorok által generált altérben.

Ezeket a vektorokat többféleképpen is leírhatjuk. Nézzük meg, hogy az előző Gauss-eleminációs módszerrel hogyan juthatunk megoldásra. Pontosan azok a vektorok fognak előállni, amelyek előállnak az elforgatásvektorok lineáris kombinációjaként. A Gauss-eliminációs lépésekből látható, hogy az $\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$ vektorok függenek a másik 4-től. Ezek a vektorok előállnak a maradék négy vektor lineáris kombinációjaként az alábbi módon:

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \text{ és } \begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

A maradék négy vektor már független lesz, ezekkel fogunk innentől dolgozni. Nézzük, hogy a négy vektor segítségével mely vektorok állíthatók elő:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

A mátrix oszlopai által generált alteret nézzük, tehát nem változik meg ez az altér, hogyha a Gauss-elemináció lépéseit végezzük az oszlopokra. Ezt a tudást fogjuk most kihasználni. Első lépésként vonjuk ki a második oszlopot az elsőből:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Majd a harmadikat a másodikból

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&1&1\\0&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

És utolsó lépésként a negyediket a harmadikból:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A most kapott vektorok lineáris kombinációjaként az alábbi típusú vektorok állíthatók elő:

$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \\ d \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ a+d \\ b+d \\ c+d \end{bmatrix}$$

Jelen esetben ezeket a vektorokat könnyű felsorolni, mivel a változók helyébe 0-t vagy 1-et írva a következő 16 vektort kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ez a módszer mindig működni fog, de elég könnyű látni, hogy a 100-101-102 korong esetén a módszer körülményessé, hosszúvá és bonyolulttá tud válni.100 db egyenlettel elvégezni egy Gauss-eleminációt nem egy egyszerű dolog. Ezért szeretnénk, ha lenne egy másik, kényelmesebb módszer. Szerencsénkre van is ilyen. Ehhez pedig be kell vezetnünk a merőleges fogalmát.

4. Merőleges altér keresés

Ez a másik módszer az, hogy megkeressük az átforgatásvektoraink által generált altér merőlegesét. Ebbe pontosan azok a vektorok fognak beletartozni, amikre igaz, hogy ha az átforgatásvektorok által generált altér bármelyik vektorát tekintjük, akkor az ezekkel vett skalárszorzata 0. A merőleges altérnek az a tulajdonsága, hogy az összes vektorra merőleges, ami előáll az átforgatások segítségével. Tehát úgy fogjuk tudni majd eldönteni, hogy egy lehetséges állapot előáll-e az átforgatásvektorok lineáris kombinációjaként, hogy megnézzük, hogy a merőleges vektoraira merőlegesek-e. Ráadásul elég megkeresni ennek a merőleges altérnek egy bázisát, mivel, ha egy bázis minden elemére merőleges egy vektor, akkor a vektortér összes elemére is az és pontosan azok a vektorok vannak benne, amik merőlegesek a merőlegesre.

Első lépésként vizsgáljuk azt, hogy hogyan tudjuk a merőleges vektorokat megadni az n=6 esetén. Ehhez azt az egyenletrendszert kell megoldani, ahol az egyenlet együtthatói az elforgatásvektorok koordinátái, és minden egyenlet eredménye 0, tehát az átforgatásvektorok által képzett mátrix oszlopvektorai szerepelnek a sorokban és a végén 0 áll. Ez pont meg fogja adni azokat az $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}$ vektorokat, amelynek bármelyik elforgatásvektorral vett skaláris szorzata 0. Ekkor az alábbi lineáris egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

Első lépésként vonjuk ki az első egyenletet a hatodikból:

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

Majd az ötödikből az elsőt:

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

Ezután vonjuk ki az ötödik egyenletből most a másodikat:

$$\begin{cases}\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 1 = 0\end{cases}$$

Majd az ötödikből a negyediket, ezzel egy csupa 0 sort képezve:

$$\begin{cases}\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 1 = 0\end{cases}$$

Következő lépésként vonjuk ki a hatodik egyenletből a harmadikat:

$$\begin{cases}\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 1 = 0\end{cases}$$

Ezután, ha kivonjuk a hatodik egyenletből most a negyedik egyenletet, akkor egy újabb 0 sort fogunk kapni:

$$\begin{cases}\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0\end{cases}$$

Ha ezt elvégeztük, akkor következő lépésként vonjuk el a második egyenletet az elsőből:

$$\begin{cases}\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0\end{cases}$$

Most pedig a másodikból a harmadikat:

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

Ezután ezt a mintát követve most vonjuk ki a negyedik egyenletet a harmadikból:

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

Majd utolsó lépésként a negyediket az elsőből:

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 1 + \alpha_6 \cdot 1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 0 + \alpha_5 \cdot 0 + \alpha_6 \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

Ebben az alakban a két szabadváltozó α_5 és α_6, amit tetszőlegesen meg tudunk választani, például legyen $\alpha_5 = a$ és $\alpha_6 = b$. Ekkor a merőleges altér a következő alakú átforgatásvektorokból áll elő: $\begin{bmatrix} a+b \\ a \\ b \\ a+b \\ a \\ b \end{bmatrix}$.

Következő lépésként keressük meg az ilyen alakú vektorok bázisát. A lehetőségeink a következők: $a = 1, b = 0$; $a = 0, b = 1$; $a = 0, b = 0$ és $a = 1, b = 1$. Ezek közül a harmadik a csupa 0 vektort adja, a másik 3 esethez tartozó vektorok pedig a következők:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ezek közül viszont nem fog mind a három szerepelni a bázisban, mivel a harmadik vektor előáll az első kettő lineáris kombinációjaként a következő módon:

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

Tehát a merőleges 2-dimenziós, vagyis pontosan azok a helyzetek lesznek előállíthatóak az átforgatásvektorokból, amelyek leíró vektoraira igaz az, hogy merőlegesek a bázis vektoraira.

Az átforgatásvektorok által generált altér merőlegesével azt is megállapíthatjuk, hogy a lehetséges állapotok közül ténylegesen mennyi áll elő az átforgatásvektorok lineáris kombinációjaként. Ezt pedig úgy tudjuk megadni, hogy felhasználjuk azt a tudást, hogy egy V vektortér esetén, ahol $U \subseteq V$ egy altér, akkor fennáll a következő összefüggés:

$$dimU + dimU^{\perp} = \dim V$$

A 6 korong estében a merőleges dimenziója 2 és már azt is megadtuk, hogy az előálló helyzetek alterének dimenziója 4, tehát pontosan $2^4 = 16$ olyan állapot lesz, amit elő tudunk állítani. Ez ugyanaz az eredmény, amit előbb, a másik módszer segítségével is megkaptunk.

Most már láthattuk, hogy miért nagyon hasznos dolog az, hogy meg tudjuk adni egy vektortér vagy annak egy alterének a merőlegesét. Mégis, a fenti levezetésben ugyanúgy a Gauss-eleminációhoz fordultunk, mint az első esetben, így ez a módszer sem egyszerűbb több korong esetén. Ezért szeretnénk egy módszert, amivel ugyanerre a megoldásra juthatunk kevesebb lépés segítségével.

4.1.Merőleges keresés sok korongra

Keressük meg a merőleges altér bázisát. 100 fölötti korongszám esetén nagyon bonyolult lenne egy olyan számolást végig vinni, amiben az összes átforgatásvektornak egyszerre keressük a merőleges vektorait. Ilyen esetekben könnyebb megkeresni egyesével a megfelelő vektorokat. Nézzük azt a konkrét esetet, ahol 102 korong van körben. Elsőként egy olyan vektort szeretnénk megtalálni, ami merőleges a $[1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ vektorra, vagyis a vele vett skaláris szorzata 0.

Ehhez arra van szükség, hogy az első három koordináta közül pontosan kettő helyen szerepeljen az 1-es, és egy helyen a 0, innentől a többi koordinátát szabadon megválaszthatjuk. Elsőként nézzük azt az esetet, amikor az első két helyen álló tagot választjuk 1-nek és a harmadikat 0-nak. Ha csak az első átforgatásvektorra kéne, hogy merőleges legyen a készülő vektor, akkor a többi koordinátát szabadon tudnánk megválasztani. Itt kell figyelembe venni, hogy egy olyan vektorra van szükség, ami nem csak egy, hanem az összes átforgatásvektorra merőleges. Ez azt jelenti, hogy a másodikra, vagyis a $[0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$-ra is. Ennél a vektornál a kényes elemek a második, harmadik és negyedik koordináták. Mivel a merőleges vektornak megadtuk már az első három elemét, ezért úgy kell melléjük igazítanunk a negyedik elemet, hogy a merőlegesség megmaradjon mindkét vektorra. A második helyen álló 1-es és a harmadik helyen álló 0 miatt a negyedik helyen már csak egy 1-es lehet, hogy megfeleljen annak a feltételünknek, hogy a külön vizsgált 3 hely közül pontosan 2-n legyen 1-es. Ha bevesszük a harmadik átforgatásvektort is, ahol a harmadik, negyedik és ötödik koordinátára kell figyelnünk, akkor itt is azt látjuk, hogy ezek közül az első kettő helyen lévő elem már meg van határozva, és ezek már kijelölik azt, hogy pontosan melyik számnak kell lennie a harmadik helyen. Így, ha a merőleges vektornak meghatározzuk az első 3 koordinátáját, akkor a további koordinátákat már csak egyféleképpen választhatom meg, hogy rendre a többi átforgatásvektorra is merőleges legyen. Tehát egy olyan vektort már találtunk, ami bele fog tartozni a merőlegesbe, és ez a következőképpen fog kinézni: $[1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 1 \quad 1 \quad 0]^T$.

Nézzük meg, hogy milyen merőleges vektort kapunk akkor, ha az első három koordinátát máshogy választjuk meg. Vegyük most 0-nak az első koordinátát, a második kettőt pedig 1-nek. Ekkor az előző gondolatmenetet követve a negyedik koordináta helyén már csak 0 állhat, hogy megmaradjon a merőlegesség, majd ezt újabb két 1-es fogja követni, és ez a minta folytatódik egészen a vektor utolsó koordinátájáig. Így már két merőlegesvektorunk is van. A kérdés az, hogy van-e több.

Az első három koordináta kiválasztására már csak egy lehetőségünk van, mikor az első és harmadik koordináta 1 és a második 0. Itt is tudjuk ugyanazt a logikát követni, mint az előző két esetben, és így a negyedik koordináta 1-es, az ötödik 0 majd a hatodik és hetedik 1-es, és így tovább, míg a következő vektort nem kapjuk: $[1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad 0 \quad 1]^T$. Máshogy már nem tudjuk kiválasztani az első elemeket így már csak az a feladatunk maradt, hogy megkeressük a kapott merőleges altér egy bázisát. Az utoljára megkapott vektorunk előáll a másik kettő összegeként a következő módon:

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\\1\\0\\1\\\vdots\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\1\\1\\0\\\vdots\\1\\0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\\0\\1\\1\\\vdots\\1\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

Tehát a bázisunk csak 2 elemű és ebből következve a merőleges 2 dimenziós. Ebből tehát könnyen meg tudjuk mondani, hogy a megoldásvektorok által alkotott altér 100 dimenziós. Tehát az összes lehetséges 2^{102} állás közül pontosan 2^{100} db állapot fog előállni az átforgatásvektorok segítségével.

5. Mélyebb algebrai értelmezés

5.1. $3|n$ esetén

A következő fejezetben a 102 korong esetét nézzük meg mélyebb algebrai értelmezésben. Amikor azt keressük, hány állapot fog előállni, akkor azt kell megnéznünk, hogy az átforgatásvektorokból képzett mátrixnak mennyi a rangja. Ez meg fog egyezni a lineáris transzformáció képterének dimenziójával. Egy nagy mátrix esetében ez nem olyan egyszerű, ezért felhasználjuk azt a tudást, hogy a magtér dimenziójának megadása egy könnyebb folyamat. Mivel egy $\varphi: V \to V$ lineáris transzformációnál $\dim Ker(\varphi) + \dim Im(\varphi) = \dim V$, így, ha megvan a magtér dimenziója, akkor könnyen kiszámítható a képtér dimenziója is. A magtérben pedig pontosan azok a vektorok vannak benne, mint amik az előállítható állások alterének merőlegesében.

Egy ilyen, az átforgatásvektorokból álló mátrixnak sajátvektorai a komplex test fölött az $[1, \quad \varepsilon, \quad \varepsilon^2, \quad \dots \quad \varepsilon^{100}, \quad \varepsilon^{101}]$ alakú vektorok, ahol az ε bármelyik komplex 102. egységgyök lehet. A sajátvektorokhoz tartozó sajátértékek megadásához először megnézzük hogyan viselkedik egy olyan mátrix, amiben a sorvektorok ciklikusan követik egymást. Egy ilyen mátrix az alábbi módon fog kinézni:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_2 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ & & \vdots & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

Ha ezt megszorozzuk a hozzá tartozó egyik sajátvektorral, akkor a következő mátrixot fogjuk kapni:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_2 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ & & \vdots & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon^2 \\ \vdots \\ \varepsilon^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \cdot \varepsilon + a_2 \cdot \varepsilon^2 + \cdots + a_{n-1} \cdot \varepsilon^{n-1} \\ a_{n-1} + a_0 \cdot \varepsilon + a_1 \cdot \varepsilon^2 + \cdots + a_{n-2} \cdot \varepsilon^{n-1} \\ a_{n-2} + a_{n-1} \cdot \varepsilon + a_0 \cdot \varepsilon^2 + \cdots + a_{n-3} \cdot \varepsilon^{n-1} \\ \vdots \\ a_1 + a_2 \cdot \varepsilon + a_3 \cdot \varepsilon^2 + \cdots + a_0 \cdot \varepsilon^{n-1} \end{pmatrix}$$

A keletkező mátrixban az egymás után következő sorok egymás ε-szeresei, vagyis a sajátvektorhoz tartozó sajátérték az $a_0 + a_1 \cdot \varepsilon + a_2 \cdot \varepsilon^2 + \cdots + a_{n-1} \cdot \varepsilon^{n-1}$ összeg. Mivel az átforgatásvektorok egy ciklikus mátrixot alkotnak, így fel tudunk írni az alábbi szorzatot:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon^2 \\ \vdots \\ \varepsilon^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 \\ \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 \\ \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 \\ \vdots \\ \varepsilon^{n-1} + 1 + \varepsilon \end{pmatrix}$$

Az itteni sajátvektorhoz tartozó sajátértékek éppen a $1 + \varepsilon + \varepsilon^2$ összegek lesznek. Ez az összeg értelmezhető úgy is, mint egy olyan mértani sorozat első három tagjának összege, aminek első tagja 1, kvóciense pedig ε, és ily módon felírhatjuk rá a mértani sorozatokra vonatkozó összegképletet. Ekkor a sajátérték: $\alpha_\varepsilon = \frac{\varepsilon^3 - 1}{\varepsilon - 1}$. A gondolatmenet folytatása előtt zárjuk ki azt az esetet, amikor $\varepsilon = 1$, amikor a tört nevezője nem értelmes. Behelyettesítve az összeg alakba azt kapjuk, hogy a sajátérték 1+1+1=3. A 3 sajátértékhez tartozó sajátvektor pedig a csupa 1 vektor lesz, és ha ezzel megszorzom a mátrixot, akkor a keletkező vektor minden koordinátája 3, amire teljesül $3 \equiv 1\ (2)$, tehát a csupa 1-es vektort kapom és ehhez az esethez biztosan nem fog tartozni Z_2-ben magtérbeli vektor.

Ha $\varepsilon \neq 1$, akkor azokat a komplex számokat keressük, amire $\alpha_\varepsilon = \frac{\varepsilon^3 - 1}{\varepsilon - 1} = 0$ lesz. Ezt az egyenletet átrendezve a $\varepsilon^3 = 1$ egyenletet kapjuk. Ennek a komplex számok körében pontosan 3 megoldása lesz, de ebből az egyik az $\varepsilon = 1$, és ezt már az előbb kizártuk. Le kell ellenőriznünk, hogy ez a három megoldás, vagyis a primitív 3. egységgyökök léteznek-e Z_2-ben, és ott szerepelnek-e az n. egységgyökök között. A harmadik egységgyökök szerepelnek Z_2 algebrai lezártjában, és ugyanúgy, ahogy a komplex test esetén, egy harmadik egységgyök pontosan akkor lesz n. egységgyök is, ha $3|n$. Mivel $3|102$, a 0 kétszeres sajátérték lesz, a mag tehát kétdimenziós, és ezért 2^{100} db helyzet fog előállni.

5.2. 3łn esetén

Ha az n nem osztható 3-mal, akkor ugyanezzel a gondolatmenettel az $\varepsilon^3 = 1$ megoldásait kell keresni. Ebben az esetben sosem fog teljesülni ez az egyenlőség, mert n nem osztható 3-mal, így egy harmadik egységgyök soha nem n. egységgyök. Egy érdekes példa, ha $n = 101$, akkor a 101 prím léte miatt az összes elem 101 rendű lesz. Ez azt jelenti, hogy a magban csak a csupa 0 vektor fog szerepelni, vagyis a mátrixunk invertálható és így az összes lehetséges állapotvektor benne lesz a képtérben, azaz forgatásokkal minden lehetséges eset előáll, ahogy az elemi konstrukciónál is láttuk.

6. 3 helyett tetszőleges k db korong forgatása

Eddig minden olyan esetet megnéztünk, amiben egyszerre 3 egymás melletti korongot fogatunk, és megkülönböztettünk három különböző esetet, amikor $n \equiv 0\ (3)$, mikor $n \equiv 1\ (3)$ és mikor $n \equiv 2\ (3)$, ahol n az összes korong számát jelöli. Akkor, hogyha egyszerre szomszédos k db korongot forgatunk, akkor a maradékosztályokra való bontás nagyon körülményes lenne. hiszen egyesével kéne végig nézni k esetet, általános esetben pedig nem használható. Ezért szeretnénk egy általánosabb módszert mutatni. Erre alkalmasak lesznek az egységgyökök. A következő fejezetben olyan eseteket vizsgálok, amiben kiindulásként tetszőleges n db korongból indulunk ki mindegyiknek a piros oldalával felül és egyszerre k db egymás melletti korongot forgatunk. Ugyanúgy, mint az előző esetekben itt is felírható a megfelelő átforgatásvektorokból álló mátrix. A ciklusmátrix a következőképpen fog kinézni:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ebben a mátrixban minden sorban pontosan k db 1-es szerepel. Az ehhez tartozó sajátvektorok továbbra is $[1, \quad \varepsilon, \quad \varepsilon^2, \quad \dots \quad \varepsilon^{n-2}, \quad \varepsilon^{n-1}]$ alakúak, ahol az ε-k pontosan az n. egységgyökök a komplex számok felett, míg az ezekhez tartozó sajátértékek itt is $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{k-1}=\frac{\varepsilon^k-1}{\varepsilon-1}$ alakban lesznek felírhatók. Az első eset, amit vizsgálnunk kell az a $\varepsilon=1$ esete. Az ehhez tartozó sajátérték az 1+1+1+…+1=k. Akkor, hogyha ez a k szám páratlan, akkor ez $modulo$ 2 felett nem 0 lesz. Az $[1, \quad \varepsilon, \quad \varepsilon^2, \quad \dots \quad \varepsilon^{n-2}, \quad \varepsilon^{n-1}]$ alakú vektorok lineárisan függetlenek a komplex számtest fölött, ezért van egy sajátvektorokból álló bázis, a mátrix diagonizálható. Ezért a például, ha 131 korong esetén 5-öket forgatunk, akkor mindenféle számolás nélkül meg tudjuk mondani, hogy a sajátértékek mind nem 0-ák, vagyis minden lehetséges állapot elő fog állni.

Akkor, hogyha ezt a Z_2 fölött szeretnénk értelmezni, akkor az egységgyökök a Z_2 algebrai lezártja fölött vannak. Az előző gondolatmenet akkor érvényes, ha az $[1, \quad \varepsilon, \quad \varepsilon^2, \quad \dots \quad \varepsilon^{n-2}, \quad \varepsilon^{n-1}]$ vektorok lineárisan függetlenek Z_2 fölött is. A Vandermonde-determináns miatt, ha ezek az ε-ok mind különbözőek, akkor ez teljesül is. Igen ám, de Z_2 fölött tudjuk-e biztosan, hogy két n. egységgyök megegyezik-e. Sajnos nem mindig, mert például páros n esetén az egységgyököket úgy határozzuk meg, hogy megnézzük a x^n-1 polinom gyökeit. Ezzel a komplex számok felett nincs is probléma, de $modulo$ 2- ben ezt át tudjuk alakítani a következő módon: $x^n-1=\left(x^{\frac{n}{2}}-1\right)^2$. Sőt, ha például vesszük 96 korong esetét, akkor a $x^{96}-1$ kifejezés felírható $(x^{48}-1)^2$ alakban, de úgy is, mint $(x^{24}-1)^4$ vagy $(x^3-1)^{32}$. Ez pedig azt jelenti, hogy a sajátértékek nem lesznek különbözőek. Akkor, ha ez áll fenn, akkor nem tudjuk, hogy a mátrixok diagonizálhatóak-e, és ekkor már nem tudjuk, hogy a magtér dimenziója megegyezik-e a 0 sajátérték multiplicitásával. Érdekes számolások mutatják például, hogyha $n=6$ és $k=2$ vagy $k=4$, akkor az $(n;k)$ ugyanaz, mégis a két magtér dimenziója különböző. Ezeknek a tisztázása nagyon bonyolult algebrai eszközöket igényelne, de a vektorterek elemi tulajdonságainak segítségével meg tudjuk vizsgálni azt az esetet, mikor n és k egyszerre páratlan. A 100, 102 korong esetére tudtunk konkrét megoldást adni, de páros n esetére nem tudtunk általános következtetések levonni. Így tanárként, ha szeretnénk olyan feladatot gyártani, amiben az korongok száma páros, akkor fontos, hogy előre végezzünk el vizsgálatokat. Egy másik lehetőség, hogy csak akkor használunk páros korongszámot, ha az még kezelhető nagyságú, és könnyen ellenőrizhető vagy a merőlegesek vizsgálásával, vagy a Gauss-elemináció segítségével.

Az utolsó eset, amit vizsgálni kell, az az, mikor n páratlan. Ebben az esetben biztosak lehetünk benne, hogy a $\frac{\varepsilon^k-1}{\varepsilon-1}$ kifejezésnek mind különbözőek lesznek, vagyis a Z_2 fölötti karakterisztikus polinomjának nem lesznek többszörös gyökei Z_2 algebrai lezártjában. Azt kell megmondanunk, hogy milyen esetekben teljesül az $\varepsilon^k = 1$ egyenlőség, ami pontosan azzal a kérdéssel egyezik meg, hogy hány olyan elem van az n. egységgyökök között, aminek a rendje i, ahol $i|k$. Tudjuk, hogy ebben az esetben, ha $x^n \equiv 1$ és $x^k \equiv 1$, akkor ebből következik az az összefüggés, hogy $x^{(n;k)} \equiv 1$, ahol $(n;k)$ a két szám legnagyobb közös osztóját jelöli. Vagyis ezeknek a feltételeknek pontosan az $(n;k)$-dik egységgyökök fognak megfelelni. Ezek közül az egyik biztosan az 1 lesz, de erről megállapítottuk, hogy nem lesz benne a magban, mivel a csupa 1 vektor lesz a hozzá tartozó sajátvektor. Tehát a merőleges dimenziója pontosan $(n;k) - 1$ lesz. Így ha veszünk egy olyan feladatot, amiben 143 korongot rakunk körbe és egyszerre 6 egymás melletti korongot forgatunk, akkor könnyen megmondható, hogy a merőleges dimenziója $(147;9) - 1$, vagyis $3 - 1 = 2$ dimenziós lesz. Ebből pedig már könnyen megállapítható, hogy az ehhez az alaphelyzethez tartozó képtér dimenziója $147 - 2 = 145$ lesz, ami azt is jelenti, hogy pontosan 2^{145} olyan helyzet lesz, ami elő fog állni az elforgatásvektorok segítségével.

Egy speciális eset az, ha $(n;k) = 1$. Ekkor az $\frac{\varepsilon^k-1}{\varepsilon-1}$ kifejezés soha nem lesz egyenlő 0-val, mivel nincsenek olyan n. egységgyökök, amik a k.-ra emelve 1-et adnak. Tehát az egyetlen vizsgálandó eset az, amikor $\varepsilon = 1$. Ha a k szám is páratlan, akkor az $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{k-1}$ összeg 1-et fog adni $mod2$, vagyis a hozzá tartozó sajátvektor nem a nullvektor lesz, és így lesz n db különböző nem 0 sajátértékünk, tehát a vektorok generálják az egész vektorteret és minden lehetséges állapot elő fog állni. Ezért a például, ha 131 korong esetén 5-öket forgatunk, akkor mindenféle számolás nélkül meg tudjuk mondani, hogy az összes lehetséges kimenetel megoldható lesz.

Ha viszont a n páratlan, de a forgatott korongok k száma páros, akkor mivel a $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{k-1}$ összegben páros számú 1-est adunk össze, tehát 0 lesz a maradék *modulo* 2. Ebből az következik, hogy a mag pontosan 1 dimenziós lesz, az altérben azok a vektorok lesznek benne, amiknek a csupa 1 vektorral vett skaláris szorzata 0, és a generált altér merőlegese a csupa 1 vektorból fog állni. Ez akkor teljesül, ha a tagok összege a vektoron belül 0, vagyis páros sok 1-es szerepel benne. Így, ha a 131 korongnál négyeseket forgatunk, akkor meg tudjuk mondani, hogy pontosan azok az állapotok állnak elő, amiben páros sok az 1-esek száma.

Összegezve a fentieket, azt láthatjuk, hogy ha a feladatot általánosítjuk, hogy páratlan n esetén tudjuk kezelni az összes lehetséges esetet, és mindig egyszerű lineáris algebrai módszerekkel meg tudjuk mondani, hogy melyek azok a helyzetek, amik előállnak. A páros n esetén, ahogy az egyik fentebb leírt feladatban is láthatjuk, a mi általunk alkalmazott lineáris algebrai módszerek nem működnek, sőt a megállapítások, amit páratlan korongszám esetén teszünk nem is igazak, s így, ha középiskolásnak adjuk ki a feladatokat, akkor más módszerekhez kell folyamodni, más megoldási módszereket kell keresni. Az egyik ilyen lehetséges megoldási módszer az az, amit az Arany Dániel versenyben megjelent feladatnál láthatunk.

6.1. Rövid kitekintés a páros n esetére

Az eddigiekben láttuk, hogy a lineáris algebrai módszerek akkor alkalmazhatóak könnyen, ha van n db független sajátvektorunk. Ezt mindig garantálni tudjuk azzal, hogy van n különböző sajátértékünk. Akkor nem különbözőek a sajátértékek, ha a karakterisztikus polinomnak van többszörös gyöke. Esetünkben a sajátértékek akkor lesznek egyenlők, ha két különböző egységgyök megegyezik a Z_2 algebrai lezártjában, tehát pontosan akkor, ha $x^n - 1$ polinomnak van többszörös gyöke. A többszörös gyököket a derivált teszttel tudjuk ellenőrizni. Akkor, ha van a polinomnak egy többszörös gyöke, az a deriváltnak is gyöke. Ezt algebra előadásokon úgy tanultuk, hogy ami a polinomnak n-szeres gyöke, az a deriváltban a gyök $n-1$-szeres, de ott kihasználtuk, hogy a komplex számtestben vagyunk. Az $x^n - 1$ deriváltja $n \cdot x^{n-1}$. Z_2 fölött ez a polinom a 0 polinom, ha n páros. Ilyenkor a mátrixunknak van többszörös sajátértéke, és első ránézésre nem tudhatjuk, hogy a sajátértékhez tartozó sajátaltér hány dimenziós. Legyen $n = c \cdot 2^t$, ahol c páratlan. Ekkor Z_2 fölött $x^n - 1 = (x^c - 1)^{2^t}$. Látható, hogy itt minden gyök 2^t multiplicitással van jelen. Forgassunk most k szomszédos korongot. Ahogy eddig is írtuk, az $\varepsilon^k = 1$ megoldásit keressük, ahol ε egy n. egységgyök. A polinomfelbontásból látható, hogy ugyanekkor ε egy c. egységgyök is. Tehát keressük az $\varepsilon^c = 1$ és $\varepsilon^k = 1$ egyenletek megoldásait egyszerre. Ez, szokás szerint, akkor teljesül, ha $\varepsilon^{(k;c)} = 1$. Tehát $(k;c)$ db megoldása van az egyenletnek és minden gyök multiplicitása 2^k. Ez az a pont, ahol a jelenlegi tudásunk elfogy.

Most nézzünk meg két esetet elemi eszközökkel. Az általános esetet is kezelhetnénk úgy, hogy minden sorból kivonom a fölötte lévő sort. Ekkor az első sorunk megmarad úgy ahogy van, a többi sorban pedig mindegyikben 2 db 1-es lesz. Amikor az $i+1$. sorból kivonom az i.-et, akkor egy olyan vektort kapok, aminek az i. és $i+k$. koordinátája 0. Vizsgáljuk meg most az $n = 6$ és $k = 4$, illetve $k = 2$ helyzeteket. Az első esetben azt kapjuk a kivonások után, hogy az első sorban van 4 db 1-es, a többiben pedig négyeséve elcsúsztatva 2 db 1-es. Ha ugyanezt megcsináljuk $k = 2$ esetén, akkor az első sorban megmarad két szomszédos 1-es, a többiben pedig 2 db 1-es kettesével elcsúsztatva. Így a két mátrix a következő:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mivel mindkét mátrixunk ciklikus, ezért a kettővel való elcsúsztatás ugyanazt jelenti, mint a néggyel való elcsúsztatás a másik irányba. Tehát 2 olyan mátrixot kaptunk, amik lényegében csak az első sorban különböznek, mert a maradék 5 sor, igaz permutálva, de megegyeznek. Az első mátrixban, hogyha a második és harmadik sort összeadjuk, akkor a mátrix első sorát kapjuk és a mátrix rangja megegyezik az utolsó 5 sorból álló mátrix rangjával, ami esetünkben 4. Ezzel ellentétben a második mátrix első sora nem áll elő az utolsó 5 sor lineáris kombinációjaként. Ezt le lehet ellenőrizni Gauss-eleminációval is, de a dolgozatban ismertetett módszerek közül egyszerűbb azt mondani, hogy a mátrix utolsó 5 sora merőleges az $[1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$ vektorra, az első sora pedig nem. Megállapíthatjuk tehát, hogy a $(6;2) = (6;4) = 2$ és a két mátrix rangja mégis különbözik Z_2 fölött. Ezért egészen biztos, hogy nem bizonyítható olyan összefüggés páros n esetére, mint a páratlan n esetére.

7. A feladat középiskolában

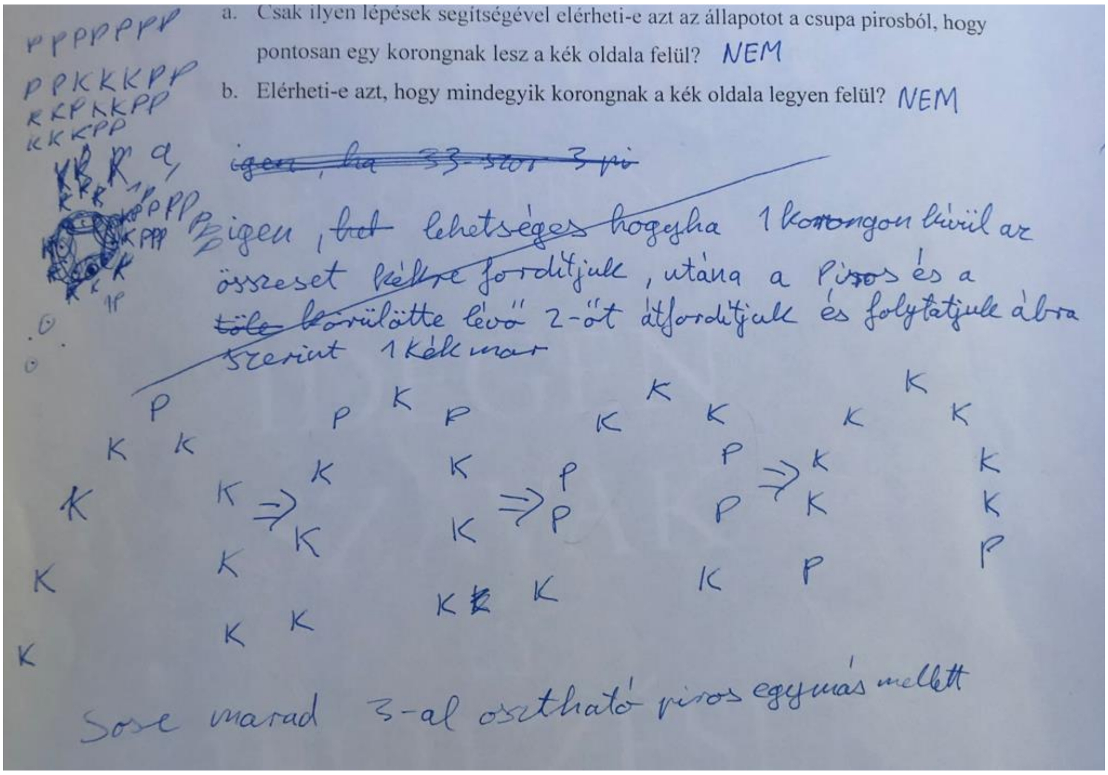
A szakdolgozat írásának részeként elvégeztem egy kutatást, amiben azt szerettem volna megtudni, hogy hogyan kezelik ezeket a feladatokat olyan diákok, akik most látják őket először. Abban az iskolában adtam oda két csoportnak a feladatokat, ahol jelenleg is a hosszú gyakorlatomat végzem. Ez egy elég neves iskola Budapest külkerületében, ahol kétfajta képzés választható. Két olyan osztály van, akik 8 osztályos képzésen vesznek részt és egy olyan, ahova a gyerekek négyéves képzésre jelentkezhetnek. Az iskola diákjai rendszeresen vesznek részt matematika versenyeken és szerepelnek jól, az elmúlt években több diák került be az országos döntőbe OKTV-n vagy más matematikaversenyen. Többek között évek óta nyerik meg a diákok a legeredményesebb iskola címet a Zrínyi matematikaversenyen. Emellett az 5. és 6. évfolyamba járóknak heti kétszer délutáni matematika órákon kell részt vennie, ahol egy szaktanár segítségével az éppen aktuális versenyekre készülnek fel. Utána már kötelező szinten nincsen hasonló óra, de minden évfolyamnak indul választható matematika szakkör, ahol hasonló tevékenységet végeznek a diákok. A jelenlegi helyzetben én két csoportba vittem be a feladatlapot, amin a következő két feladat szerepelt:

1. Bélának van otthon 100 olyan korongja, aminek egyik oldala kék, a másik pedig piros. Mind a 100 korongot elhelyezi egy körben úgy, hogy mindegyiknek a piros oldala legyen felül. Csak olyan lépéseket hajt végre, ahol három egymás melletti korongot átfordít a másik oldalára. (tehát pl.: a piros-kék-kék koronghármasból kék-piros-piros hármast csinál)
    a. Csak ilyen lépések segítségével elérheti-e azt az állapotot a csupa pirosból, hogy pontosan egy korongnak lesz a kék oldala felül:
    b. Elérheti-e azt, hogy mindegyik korongnak a kék oldala legyen felül?

2. Egy szabályos százszög csúcsaihoz tetszés szerint 1-et vagy -1-et írunk. Egy „lépésben” bármely három egymást követő csúcshoz írt szám előjelét az ellenkezőjére változtatjuk. (Például az 1; 1; -1 hármast a -1; -1; 1 hármasra cserélhetjük.)

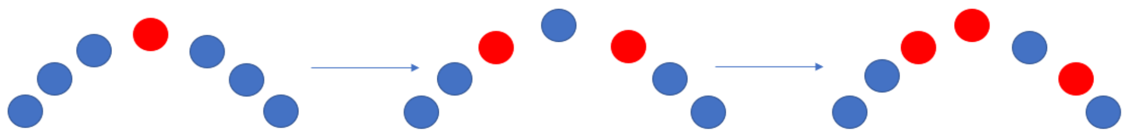
a. Elérhető-e ilyen „lépésekkel” tetszőleges kiindulási helyzet esetén, hogy a csúcsokhoz írt 100 szám összege 0 legyen?
b. Elérhető-e tetszőleges kiindulási helyzet esetén, hogy mindegyik csúcshoz az 1-es szám tartozzon?

Az első csoport, aki megírta a feladatokat az iskola 12.c osztályának emelt fakultációs csoportja volt. Az itt lévő diákok 4 éve járnak ebbe az iskolába és jelenleg arra készülnek, hogy 1 hónapon belül emelt érettségit tegyenek le. A csoport 13 diákjának fél órája volt arra, hogy dolgozzanak a feladatokon, amiben arra kértem őket, hogy akkor is írják le az összes gondolatukat, hogyha nem sikerült megoldani a feladatot, vagy rájönnek útközben, hogy hibáztak. Beszedtem és kiértékeltem a feladatokat, és az láttam, hogy nagyon különböző válaszok születtek, de mégis voltak olyan motívumok, amik többször megjelentek. Ebben a részben arra szeretnék koncentrálni, hogy az első, korongokkal megfogalmazott feladattal hogyan boldogultak a diákok. Mielőtt összegezném a csoport összteljesítményét szeretnék kiemelni pár megoldást, illetve próbálkozást a csoportból.



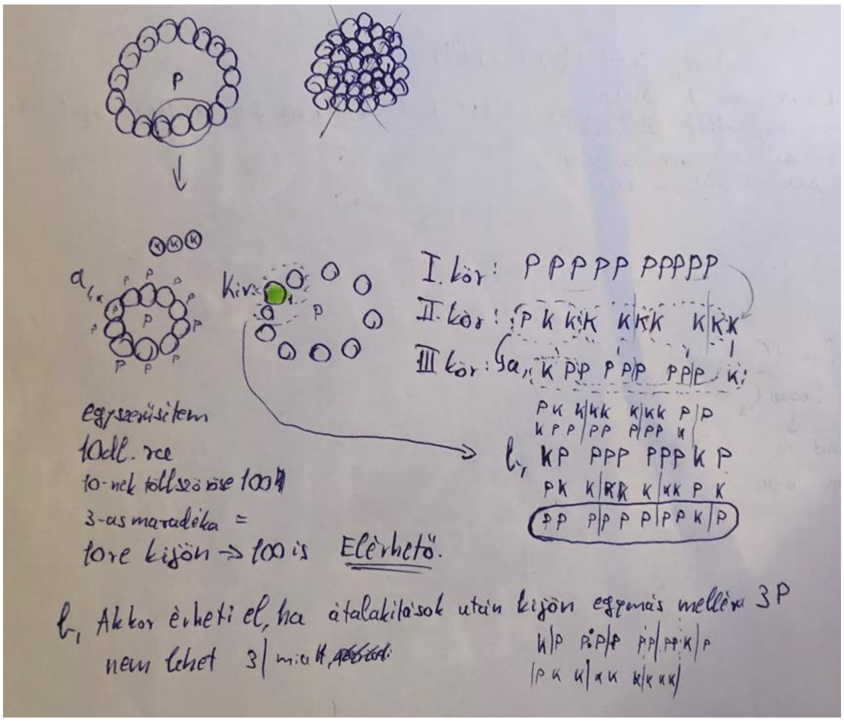
5. ábra

Az első diák, akit szeretnék kiemelni majdnem sikeresen oldotta meg a feladatot. Jó volt a kiindulás, miszerint az elején minél több korongot fordítsunk kékre, így ezt meg is teszi 99 koronggal. Innen még jól folytatja azzal a gondolattal, hogy azt a hármast kell megfordítani, amiben megtalálható az 1db piros korong. Ha ezt a gondolatot jól tovább viszi, akkor a feladat megoldható pár nagyon könnyű lépéssel. Megfordítva azt a hármast, aminek a középső eleme piros, majd azt a hármast, aminek első eleme az a korong, ami az elején az egyedül maradt piros, akkor kapunk egy olyan négyest, amiben pontosan 3 piros és 1 kék korong van. Mivel emellett a maradék 96 korong kék, őket könnyű pirossá visszafordítani, és készen vagyunk a feladattal. Ezt a gondolatmenetet a következő ábra mutatja:



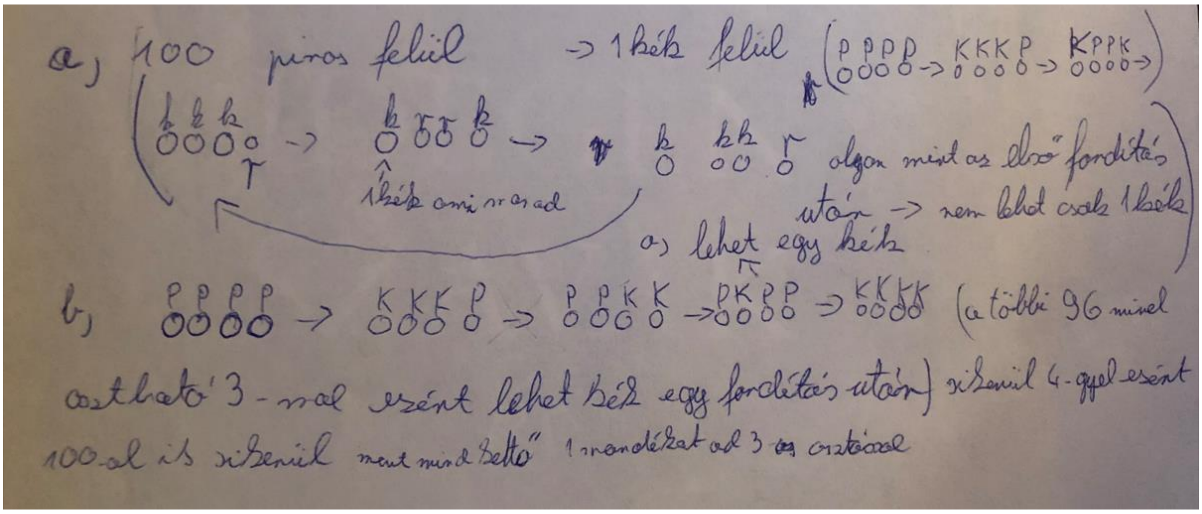
6. ábra

Ezzel ellentétben sajnos a diák az első forgatás után egy másik módszert választ, amiben mindkét oldalon egyszerre indul el szimmetrikus forgatásokkal. Ezután a másik hiba az, hogy azt mondja, hogy a kívánt állapot azért nem érhető el mert sosem keletkezik egymás mellett annyi piros korong, amik száma osztható 3-mal. Ez azért baj, mert ha ilyen számú korong maradna akkor ezeket visszafordítva azt kapnánk, hogy minden korong kék, ahelyett, hogy 1 kék és minden másik piros. Ez a magyarázat tehát csak a feladat b.) részéhez lenne megfelelő. A diák algoritmusát használva egy olyan állapotnak kéne előállnia a feladat a.) részének megoldásához, ahol keletkezik két piros korong, és köztük 1 db kék, mivel ebből az állapotból már a fenti ábra értelmében elérhető a célállapot. Így látszik, hogy a diáknak voltak jó gondolatai, és szépen is tudta ábrázolni azokat, de utána sajnos rossz irányba indult és rossz következtetéseket vont le.



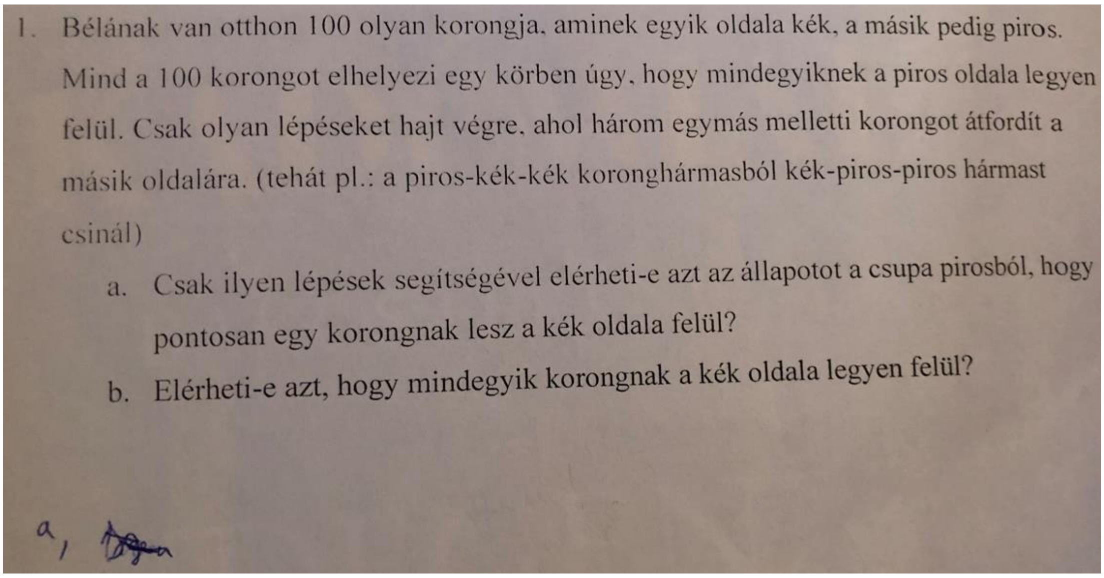
7. ábra

A következő diák is egy nagyon jó módszert használ. Megnézi, hogy mi történik 10 korong esetén és ezt terjeszti ki 100 korongra, ami egy működő gondolatmenet, mivel mindkét számnak ugyanaz a 3-sal vett maradéka. Ehhez persze szívem szerint elvártam volna még egy kis magyarázatot, hogy miért is elég az, ha egy kisebb korongszámra működik a kigondolt stratégiánk, de ettől egy középiskolás diák esetében eltekinthetünk. Két olyan hibát követ el a diák, ami nagyban befolyásolja a megoldás helyességét. Az első az, hogy igaz, hogy jó következtetéseket von le, de a 10 korong esetén egy rossz forgatással jut el az elvárt állapothoz, mivel az egyik lépésben egy piros korongot elfelejt kékké változtatni. Így sajnos az általa talált eljárás nem helyes. A másik hiba az, hogy a szép gondolatmenet után az a.) részben nem veszi észre, hogy a b.) szorosan összefügg ezzel, mivel, de ennek ellenére a b.)-t külön feladatként kezeli, és nem jut jó végeredményhez.



8. ábra

A következő diák, akinek a megoldásáról szeretnék beszélni a mintamegoldásban megjelenő módszert szerette volna felhasználni az első feladatban. A 100 korongot 25db négyesre bontotta, és azt vizsgálta, hogy egy ilyen négyesen belül elérhető-e a 3 piros – 1 kék felállás. Ez viszont nem sikerül, és így a megoldása sem, viszont az ő szemében a feladat befejezett, és levonja a neki helyesnek tűnő következtetést. Ezután a b.) részben is ugyanezzel a módszerrel próbálkozik, ahol már több forgatási hibát is elkövet, emiatt pedig egy olyan eredményhez jut, ami nem igaz, miszerint egy négyesen belül elérhető, hogy a 4db piros korongból 4db kék korong legyen. Ennek következtében a válasza technikailag jó, miszerint elérhető, hogy az összes korong kék legyen, de az út, amin odajut nagyon hibás. Emellett az egyik hibás forgatás következtében előáll egy olyan állapot a négyesen belül, ahol a 3 piros mellett egyetlen kék korong van, ami arra ösztönzi a diákot, hogy megváltoztassa az a.) részre adott válaszát. Így az a.) részre is habár a végső válasz helyes, ezt a diák több hiba elkövetésével éri el.



1. Bélának van otthon 100 olyan korongja, aminek egyik oldala kék, a másik pedig piros. Mind a 100 korongot elhelyezi egy körben úgy, hogy mindegyiknek a piros oldala legyen felül. Csak olyan lépéseket hajt végre, ahol három egymás melletti korongot átfordít a másik oldalára. (tehát pl.: a piros-kék-kék koronghármasból kék-piros-piros hármast csinál)
   a. Csak ilyen lépések segítségével elérheti-e azt az állapotot a csupa pirosból, hogy pontosan egy korongnak lesz a kék oldala felül?
   b. Elérheti-e azt, hogy mindegyik korongnak a kék oldala legyen felül?

a, [illegible]

9. ábra

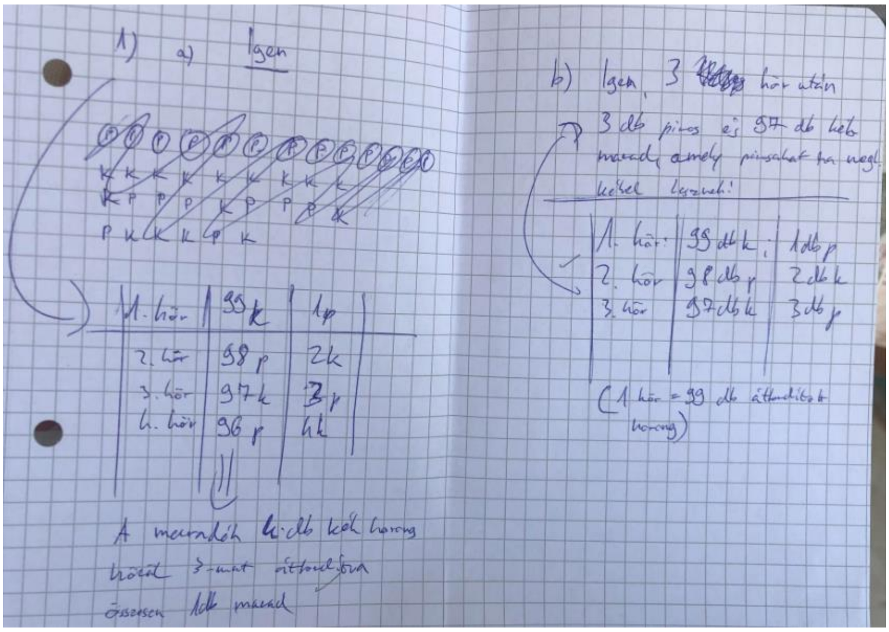
Az utolsó „megoldás” egy olyan diáké, aki sajnos fél óra után se tudott egy szónál többet írni a papírjára, majd ezt is kihúzta. Ez azért meglepő, mivel rajta kívül mindenki más el tudott indulni valamilyen gondolatmenettel. Persze, nem tudható, hogy tényleg ennyire nem volt ötlete a feladathoz, vagy csak nem írta le azokat a gondolatait, amik felmerültek annak ellenére, hogy erre mindenki meg lett kérve. Én is találkoztam már olyan diákkal a rövid pályafutásom során, aki nem szerette kimutatni azt, hogy valamit nem tud és ezért nem írt le addig egy megoldást, amíg abban biztos nem volt.

A következő részben értékelem a csoport összteljesítményét. Öt olyan diák volt a csoportból, aki teljesen vagy majdnem teljesen meg tudta oldani a feladatot. Két helyen nagyon szépen megjelent az a gondolat, hogy mi a különbség akkor, hogyha egy korongot páros vagy páratlan sokszor forgatunk meg. Egy diák konkrétan azt az algoritmust írta le, amit én is megfogalmaztam fentebb ebben a dolgozatban. Sokan azt a gondolatmenetet követték, amiben először elérjük azt az állapotot, hogy 1 piros korong maradjon 99 kék mellett. Ezután a piros melletti egyik kéket „rögzítjük”, mint kék, és a maradék 33 egymás melletti hármast megfordítják megint. Így, ami eddig piros volt az kék lesz, a többi pedig piros, vagyis összesen két egymás melletti korong marad kék. Ezután utolsó lépésként megfordítják azt a hármast, amiben ez a két elem szerepel, ezzel pontosan 1 db kék korongot kapva a végére. Nem mindenkinek sikerült viszont ezt a gondolatmenetet teljesen végig vinni. Voltak, akik miután 1 piros koronggal maradtak utána rosszul indultak tovább, illetve olyan is előfordult, hogy egy ponton hibát követtek el a korongok forgatásával, és ezért nem tudtak helyes következtetéseket levonni. Mások azzal próbálkoztak, hogy megnézik tudnak-e algoritmust gyártani 10 korong esetére, majd ezt az esetet terjesztik ki 100 korongra sikeresen a megegyező maradékok miatt.

Amit nagyon érdekesnek találtam, hogy sok diák, aki helyesen megállapította azt, hogy az a.) rész megoldható nem vette észre, hogy ebből már megoldható a feladat b.) fele is, mivel, ha el tudjuk érni azt, hogy 100 korong közül pontosan 1 legyen kék, és mellette 99 piros, akkor azokat a pirosokat nagyon könnyen kékre lehet fordítani. Így ők teljesen külön feladatként tekintettek erre, és külön algoritmust akartak megadni rá, ami az esetek többségében nem sikerült. Ezt a problémát láttuk a második kiemelt diák megoldásában is. Voltak olyan diákok is, akik észrevették az összefüggést. Közülük voltak, akiknek az a.) rész is sikerült, de olyanok is, akik nem boldogultak az első résszel, de megmagyarázták, hogyha az a helyzet előáll, akkor a b.)-beli is.

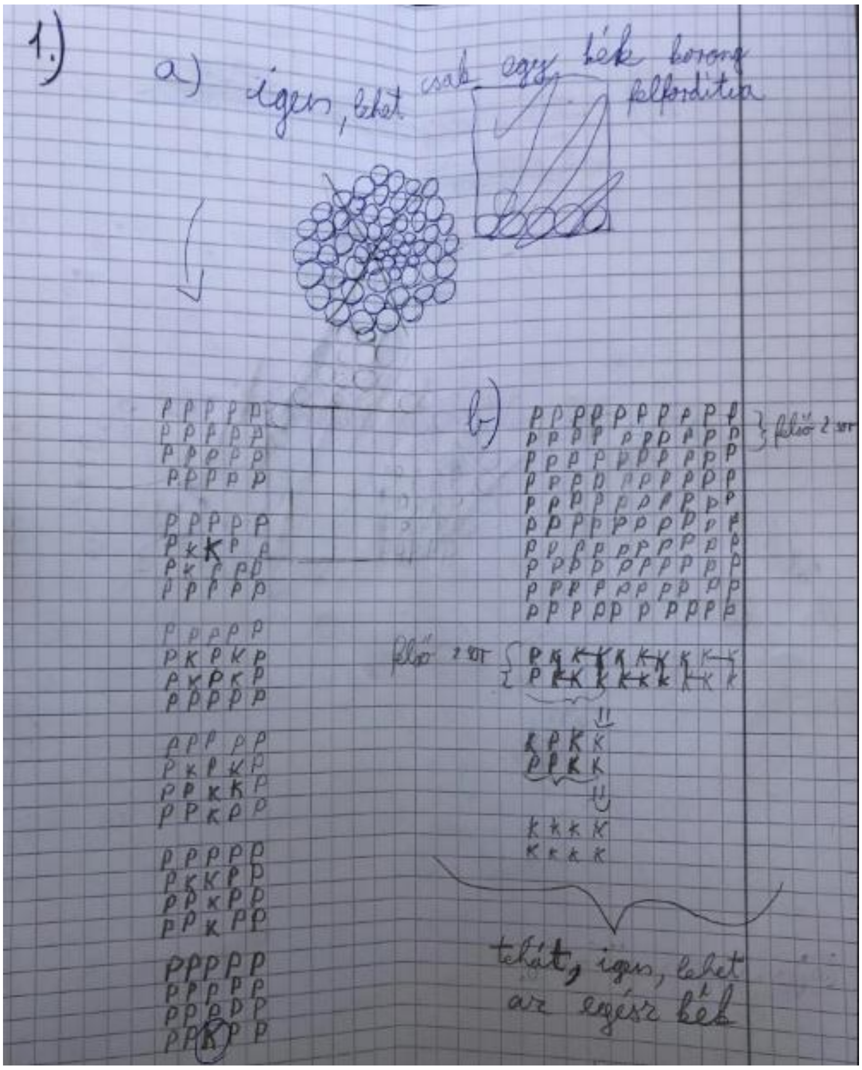
Sokan úgy kezdtek neki a feladatnak, hogy próbálkoztak különféle algoritmusokkal, amiket sajnos nem tudtak sikeresen végig vezetni, vagy hibásnak bizonyultak és ez megrekesztette őket, nem mentek tovább. Ebben a csoportban is voltak, akik 10 korongra szerették volna először megtalálni az algoritmust, de sajnos a levezetések hibásak voltak. Két olyan diák volt a csoportból, aki a feladat első részét teljen mértékben félreértette, és arra a kérdésre válaszoltak, hogy hogyan érhető el, hogy 1 piros és 99 kék korong legyen a csupa pirosból kiindulva. Ezzel nagyon megkönnyítették a feladatot, és így ilyen szempontból nem értékelhető a válaszuk. Egy olyan diák volt, aki a második feladatban rájött arra, hogy segít, ha a 100 korongot 25 db 4 hosszú részre bontjuk és ezért az első feladatban is ezt szerette volna alkalmazni, de nem sikerült, és a forgatással is voltak problémák, illetve 1 olyan ember is volt, aki egyik feladatot se tudta megválaszolni, és nem írt szinte semmit egyik részhez sem, mint ahogy a fenti, részletesebb leírásban is láttuk. Nagyon meglepőnek tartottam az elején, hogy mennyi olyan diák volt, aki nagyon sok logikai hibát követett el a forgatások során, még akkor is, ha egy lépésben be is karikázták azt a három korongot, amivel dolgozni szeretnének.

A másik csoport, aki dolgozott ugyanezen a két feladaton egy olyan csoport volt, akik a matematika szakkör tagjai a 11. évfolyamon. Ez a csapat a három osztályból tevődik össze, a tagjai pedig mint maguk választották a szakkört az év elején. Ezeken az alkalmon vagy versenyekre készülnek a tanárukkal, vagy nehezebb és magasabb szintű matematikai feladatokat oldanak meg. A tanáruk fő érdeklődési köre a geometria különböző területei, ezért gyakran foglalkoznak a szakkör keretein belül ilyen jellegű problémákkal. Vannak olyan alkalmak is, amikor olyan témakörök is előkerülnek, amikkel normális esetben csak egyetemen találkozhatna egy diák. Mikor az általam kitűzött feladatokat oldották meg, akkor 23 fő volt jelen és ebben az esetben is 30 perc volt arra, hogy dolgozzanak a kérdéseken. Jó érzés volt látni, hogy ezek a diákok milyen lelkesedéssel fogtak neki a feladatoknak, és azt is, hogy mindenki ki tudta tölteni az idő egészét a feladatmegoldással, sőt, ez néhány esetben kevésnek is bizonyult. Volt olyan, aki a második feladatot épphogy csak el tudta kezdeni mikor be kellett adni a lapokat. Páran elvitték magukkal a feladatokat, hogy még otthon tudjanak rajta gondolkodni, de elmondásuk szerint az első feladathoz sikerült minden gondolatukat leírni az időkereten belül. Elsőnek itt is szeretnék két megoldást külön, részletesebben szemléltetni.



10. ábra

A következő megoldásban egy nagyon érdekes módszer kerül elő és tisztán a számok nyelvére fordítódik le a feladat. Megjelenik, hogy egy „környi” forgatás után egy olyan állapotba jutunk, ahol 99 kék korong mellett 1 db piros lesz. Innentől érdekes a gondolatmenet, mert azt csinálja a diák, hogy újra megfordít 33 darab egymás melletti hármast méghozzá úgy, hogy az első megfordítandó hármas a pirosan maradt koronggal kezdődik. Ezután a kör után 98 piros korong mellett 2 kék koronghoz jutunk. Egy következő kör után 97 kék és 3 piros koronghoz, a negyedik kör után pedig 96 piros és 4 kék koronghoz jut. A 4 kék közül 3-at pirosra forgatva a kívánt álláshoz jutunk. Ez a megoldás jó, bár itt is elvárható lenne egy világosabb leírása annak, hogy mit jelent egy kör és az egyes lépéseknél melyik korongmármassal kezdődik a forgatás. Ez a megoldás sokkal több forgatást igényel, mint a mások által megfogalmazott algoritmusok, bár ez nem probléma, mivel sehol sem kérte a feladat, hogy minél kevesebb lépésből kéne eljutni a kívánt állapotig. Összetett gondolkodásmódot sugall az, hogy ezt a módszert fejben át tudta gondolni, és látta, hogy melyik lépés után melyik színből hány darab marad. Ezután hogyha a b.) rész megoldását megnézzük, akkor látszik, hogy a 3 kör végig vitele 1 lépés híján pontosan azt jelenti, hogy az összes korongot pontosan háromszor fordítjuk meg, vagyis megfelel a dolgozat első részében leírt algoritmusnak.

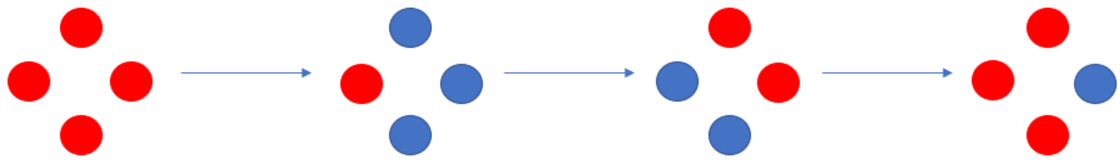


11. ábra

Az utolsó diák, akit kiemelnék azt a módszert választotta, mikor kevesebb korongra vizsgálja az eseteket, és ezt próbálja kiterjeszteni. Annak megválasztásánál, hogy hány koronggal szeretne dolgozni az elején hibát követ el, mivel az 5-öt választotta. Ezzel az a probléma, hogy az 5-nek és a 100-nak a 3-mal vett maradéka más. Így abban az esetben is, ha talál módszert arra, hogy az 5 korong esetén elérje a kívánt állapotokat, azokat akkor sem tudná a 100 korong esetére általánosítani, maximum csak a 101 korongra. A b.) részben azt választja a diák, hogy leírja mind a 100 korongot és ezzel próbál dolgozni. A probléma ezzel az, hogy a sorok és oszlopok összezavaróak lehetnek abban, hogy tulajdonképpen melyik elem melyik mellett van. Így az a forgatássorozat, amit elvégzett nem is teljesen érthető, és nem megfelelő a körben lévő korongok megfordítására.

Most összefoglalom, hogy a csoport, mint egész hogyan birkózott meg a feladatokkal. Ebből a csapatból 6 fő volt az, aki hibátlan megoldást tudott megadni az első feladat a.), vagyis az 1 kék és 99 piros korong esetére. Közülük ketten voltak azok, akik a dolgozatban szereplő algoritmust adták meg, és ebben a csoportban is voltak olyan diákok, akik a 99 db kék és 1 piros mintázatból indultak tovább. Akik ezt tették, azok közül volt olyan is, aki sajnos nem jutott helyes megoldásra. Jó volt látni, hogy aki ebből a csoportból boldogult az a.) feladatrésszel, annak nem volt semmilyen problémája sem a b.)-vel és rögtön látta az összefüggést a két feladat között. Sőt, olyan diákok is hivatkoztak erre, akik az első résznél nem jutottak sikerre és kiemelték, hogy ha az előbbi megoldható, akkor nem lesz probléma az utóbbival.

Ez volt az egyik legnagyobb különbség a két csoport megoldásai között meglepő módon az volt, hogy a 11. osztályosok megoldásaiban sehol sem jelent meg a 10-es szám és az összefüggés a maradékosztályokkal, mindenki magabiztosan dolgozott a nagyobb értékkel is. Ez alól kivétel volt az az egy diák, aki 5 korongra vezette vissza a feladatot, akinek megoldását az előbb részleteztem. Meggondolandó, hogy azok a diákok, akik versenyfeladatokat oldanak minden héten mennyire jobban hozzá vannak szokva ahhoz, hogy nagy számokra találjanak ki algoritmusokat azokkal szemben, akik „csak” az emelt érettségire készülnek. Egy másik nagy különbség egy új módszer megjelenése volt. Négy olyan diák is volt, akik úgy álltak neki a feladatnak, hogy nem 99, csak 96 korongot fordítottak át az elején kékre, és azt próbálták belátni, hogy 4 piros korongnál tudunk úgy forgatni, hogy azok közül csak 1 legyen kék, majd azzal fejezték volna be az algoritmust, hogy a felfordított 96 korongot visszafordítják. Voltak olyan, aki próbálkozás után rájött, hogy ez nem sikerülhet és ezzel arra a következtetésre jutott, hogy a feladat nem megoldható. Mások megoldották valahogy, hogy az általuk remélt állapot tényleg elérhető legyen. Erre a végeredményre többféleképpen jutottak el. Valaki egyszerűen hibát követett el a fordításokban, míg valaki elfelejtette azt a tényt, hogy csak az egymás melletti hármasokat lehet megfordítani és kiválasztotta azt a 3 korongot, amit meg szeretne fordítani, nem törődve azzal, hogy nincsenek egymás mellett. Egy másik diák úgy kezelte a 4 kimaradó elemet, mintha ők magukban is egy külön, kisebb kört alkotnának, és ez az elhelyezés olyan hibás gondolatmenetekhez, mint a következő:



12. ábra

Ez a megoldás azért tűnik jónak, mert akármelyik három korongot választjuk, azok egymás mellett vannak, de ha a 100 korong egészét nézzük, akkor látszik, hogy az utolsó fordítás a fent látható módon nem lehetséges, mivel a 3 korong nem egymás mellett helyezkedik el.

13. ábra

Sajnos az ilyen következtetések miatt az egyik ilyen elindulás sem vezetett egy újfajta megoldási algoritmus kitalálásához. Míg az előző csoportnál arra a következtetésre jutottam, hogy lehet, hogy a második feladat megoldása miatt gondoltak arra, hogy az elsővel is hasonló módon próbálkozzanak, ebben az esetben ezt nem hiszem, mivel majdnem az összes olyan diák, aki ezzel próbálkozott el se jutott a második problémáig, illetve nem 25db 4-es csoportra osztják fel a korongokat, hanem csak egy kiválasztott négyest emelnek ki.

Voltak olyanok a csoportból, akik jó gondolatokkal kezdték a feladatok megoldását, viszont a későbbiekben vagy rossz következtetéseket hoztak, vagy elindultak egy rosszabb irányba és a 23 diákból összesen 6 olyan volt, aki sajnos nem jutott semmire.

Az ő kiindulási gondolataik sajnos nem jutottak messzebb, mint egyszerű próbálkozások. Ezekben a megoldásokban nem jelentek meg olyan ötletek, hogy amennyit tudunk forgassunk meg az elején, hanem legtöbbször az elejéről, egy hármas megfordításából szerettek volna kiindulni és így lépésről lépésre tovább haladni, de sajnos senkinek se jutott eszébe a megfelelő forgatási sorrend. Viszont pozitívum az, hogy itt nem történt meg az a félreértelmezés, mint az előző diákoknál, és senki se cserélte össze az 1 kék és 99 piros esetet az 1 piros 99 kék esettel.

Kiemelendő még, hogy többen a b.) feladatrész megoldásánál hivatkoztak arra a nagyon fontos következtetésre, hogy ha az a.) részt el tudjuk érni, akkor bármilyen állást elő tudunk majd állítani, mivel, ha el tudjuk érni, hogy a korongok közül pontosan csak egyet fordítsunk meg, akkor ezt akármelyik korongra el lehet érni, és így akármelyik állás előállítható lesz a megfelelő korongok „egyesével" való megforgatásával. Akkor is, mikor ennek a magyarázata vagy belátása nem is volt tökéletesen megfogalmazva, akkor is nagyon fontos az, hogy ezt az összefüggést észrevették.

Összegezve a két csoport teljesítményét, a második csapat megoldásaiban sokkal inkább látszott az, hogy van rutinuk hasonló jellegű feladatokban, és a megfogalmazás és leírás stílusa is sokkal összeszedettebb és átláthatóbb volt, mint az első csoport esetében. Ennek ellenére az emelt fakultáción résztvevők is szépen meg tudtak birkózni a feltett kérdésekkel, és százalékosan nézve mindkét csoportból ugyanannyian tudtak jó végeredményre jutni hiba nélkül. A feladat nagyon jó példa arra, hogy megmutassuk a diákjainknak hogyan kell egy megfeleltetést készíteniük két külön gondolat között, jelen esetben a korongok forgatása és a páros-páratlan számok között. Ezt nagyon sokan kihasználták a megoldásaik során, de kevesen voltak azok, akik ezt tudatosan hajtották végre. Ezért érdemes lehet tanárként időt szánni arra, hogy akár táblánál a feladat megoldása után beszélgessünk egy kicsit a diákjainkkal arról, hogy mi áll a dolgok hátterében. A feladat megoldása és az utána megtörténő elemzés arra is jó példa lehet, hogy milyen problémáknál fordul elő az, hogy tudatt alatt matematikai összefüggéseket és gondolatmenetet alkalmazunk, és bizonyíték lehet a diákok számára, hogy a matematika, mint tantárgy nem csupán képleteket tanít meg, hanem gondolkodási módszereket is, amit különböző élethelyzetekben tudunk majd használni.

Felhasznált irodalmak

1. Freud Róbert: *Lineáris Algebra* (2006), ELTE Eötvös Kiadó, Budapest
2. Kis Emil: *Bevezetés az Algebrába* (2007), Typotex eKiadó
3. Reiman István: *Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny matematikából és Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1997/98. tanév* (1999), Országos Közoktatási Szolgáltató Iroda