A GÖMBI TÁJÉKOZÓDÁS MATEMATIKÁJA

SZAKDOLGOZAT

Készítette: Czene Gábor

Angol nyelv és kultúra - Matematika osztatlan tanári szak

Témavezető: dr. Naszódi Márton, docens
ELTE TTK, Geometriai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2023

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A gömbi geometriával az egyetemi tanulmányaim során találkoztam először és rögtön megtetszettek az eltérő sajátosságai az Euklideszi geometriához képest. Azért is találtam érdekesebbnek ezt a fajta geometriát, mivel mi magunk is egy gömbhöz hasonló bolygón élünk, aminek köszönhetően a mindennapi életünkre is nagy hatással van a szerepe. Mind a hajózásban, mind pedig a repülésben jelentős szerepet tölt be az útvonalak meghatározásában. Mivel én is szeretek sokat utazni, ezért mindig is érdekelt, milyen matematika, szabályok álnak annak hátterében, hogy meghatározzuk merre járunk, hol is vagyunk a földfelszínen. Az érdeklődésemből fakadó motivációnak köszönhető, hogy ezt a témát választottam a szakdolgozatomhoz. A szakdolgozatomban ki fogok térni arra, hogy milyen ismereteken, számításokon alapszik a helymeghatározás matematikája a földfelszínen illetve, hogy a technológiai fejlődésének köszönhetően milyen módszereket használtak az egyes korokban a föld adatainak megbecsülésére, az azon való navigációban.

2. fejezet

A gömbi geometria alapfogalmai

Ebben a fejezetben bemutatom a szükséges szférikus geometriai alapokat. az [1] a [2] a [3] és [4] jegyzetek alapján.

2.1. Definíció. *Vegyünk egy O középpontú R sugarú gömbfelületet. A gömbfelület pontjait* a gömbi geometria pontjainak *nevezzük.*

2.2. Definíció. *A gömbfelület és egy tetszőleges (az O középponton nem átmenő) sík metszetét* gömbi körnek *nevezzük.*

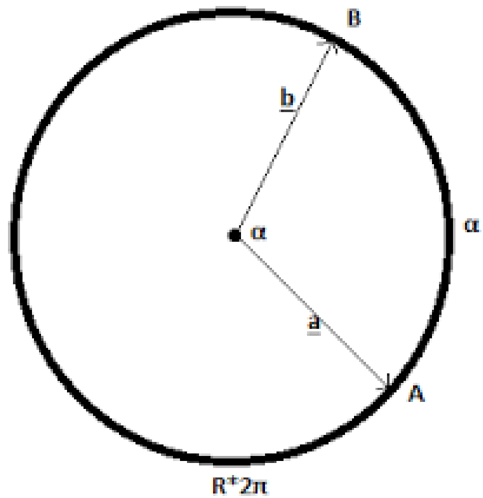
2.3. Definíció. *A gömbfelület és egy az O középponton átmenő sík metszetét* gömbi egyenesnek vagy másnéven főkörnek *nevezzük. Két egyenesnek mindig két metszéspontja van.*

2.4. Definíció. *Ha A és B a gömbfelület nem átellenes pontjai, akkor az AB* gömbi szakasz *alatt a rajtuk átmenő főkör rövidebb ívét értjük. Egy ilyen van.*

2.5. Definíció. *Ha A és B a gömbfelület átellenes pontjai, akkor az AB* gömbi szakasz *alatt az őket összekötő bármelyik félkörívet értjük. Végtelen sok van.*

2.6. Definíció. *A* és *B* pontok távolságát *az OA és az OB szakaszok által bezárt szöggel értelmezhetjük. Jelölje ezt a szöget a 2.1 ábrán α.*

2.7. Definíció. Két gömbi egyenes (főkör) szöge *alatt az egyik metszéspontjában vett érintők szögét értjük.*



2.1. ábra. Gömbi szakasz hossza. Forrás [11]

2.8. Definíció. *Három pont* nem kollineáris *a gömbfelületen, ha nincsenek egy főkörön.*

2.9. Definíció. *Három gömbi értelemben nem kollineáris pontot összekötő gömbi szakasz* gömbháromszöget *alkot. A gömbháromszög oldalai a gömbi szakaszok, általános jelölésük:* a, b, c,

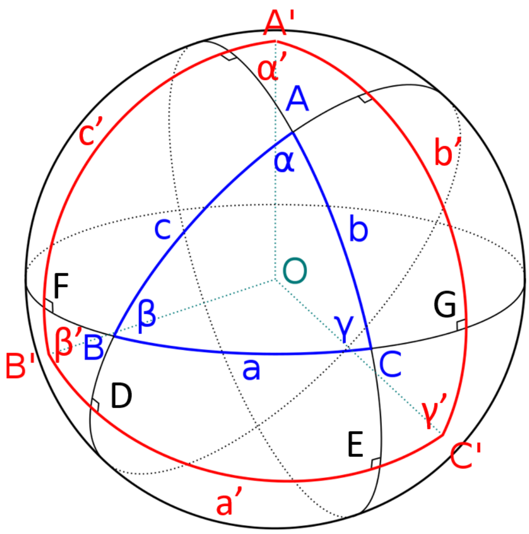
$0 < a, b, c < \pi$

2.10. Definíció. *A gömbháromszög két oldala által bezárt szög a gömbháromszög egyik szöge. Minden gömbháromszögnek három szöge van, általános jelölésük:* α, β, γ

$0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$

2.11. Definíció. *Adott egy főkör. Vegyük a főkör síkjára merőleges egyenest a gömb középpontjában. Ez az egyenes a gömböt két pontban metszi, amelyeket a főkör* póluspontjainak *nevezünk.*

2.12. Definíció. *Adott* A, B, C *gömbháromszög. Az a oldalegyenes két félgömbre osztja a gömböt. Az a oldalegyenes póluspontjai közül az lesz az* A, B, C *gömbháromszöghöz tartozó polárháromszög egyik csúcsa, amelyik egy félgömbön van az A csúccsal. Jelölje ezt a csúcsot:* A'. *Hasonlóan definiálható az eredeti háromszög másik két oladalával és csúcsával* B' *és* C'. *A gömbön az* A',B',C' *csúcsok által alkotott háromszög, az* A, B, C *gömbháromszöghöz tartozó* polárháromszög. *Lásd a 2.2 ábra.*



2.2. ábra. Polárháromszög. Forrás [12]

2.13. Állítás. *Legyen adott egy A, B, C háromszög a gömbfelületen, és a hozzátartozó A', B', C' polárháromszög, lásd a 2.2 ábra. Ekkor igazak a következő összefüggések:*

$$a' = (\pi - \alpha)$$

$$b' = (\pi - \beta)$$

$$c' = (\pi - \gamma)$$

$$\alpha' = (\pi - a)$$

$$\beta' = (\pi - b)$$

$$\gamma' = (\pi - c)$$

.

Bizonyítás: a [3] bizonyítás alapján. Vegyünk egy egység sugarú gömböt és rajta az A, B, C háromszöget, valamint a hozzátartozó A', B', C' polárháromszöget. Lásd a 2.2 ábra. Az AB és az AC főkörök D és E pontban metszik a $B'C'$ egyenest. Mind az AB, mind az AC főkör merőleges a $B'C'$ egyenesre, ezért $\alpha = DE$. Mive D az AB főkörön van ezért a C'-től vett távolsága $\frac{\pi}{2}$. Hasonlóan az E távolsága B' csúcstól szintén $\frac{\pi}{2}$.

Emiatt $a' = B'C' = B'E + DC' - DE = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - DE = \pi - \alpha$. Tehát $a' = \pi - \alpha$. Hasonlóan bizonyítható bármelyik másik oldalra.

A BC főkör F pontban metszi az $A'B'$ és G pontban metszi az $A'C'$ főkört. $\alpha' = FG$. A C csúcs $\frac{\pi}{2}$ távolságra van mind az A', mind pedig a B' csúcstól a polárháromszög tulajdonsága miatt. Emiatt $\frac{\pi}{2}$ távolságra van az $A'B'$ főkör minden pontjától, tehát F-től is. Emiatt az FC távolság $\frac{\pi}{2}$. Hasonló indoklással a BG távolság szintén $\frac{\pi}{2}$. Tehát $\alpha' = FG = FC + BG - BC = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - a = \pi - a$, vagyis $\alpha' = \pi - a$. Hasonlóan bizonyítható bármelyik másik szögre. $\square$

2.14. Állítás. *Az R sugarú gömbre illeszkedő gömbháromszög területe:*

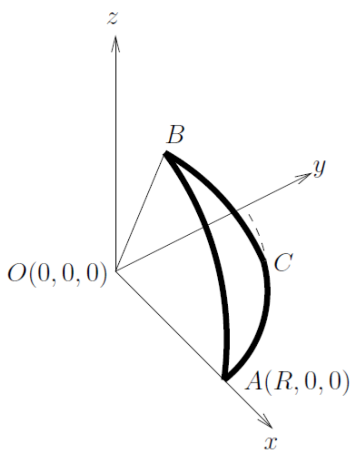
$$T = \frac{R^2\pi(\alpha + \beta + \gamma - 180°)}{180°},$$

ahol α, β, γ a gömbháromszög szögei fokban mérve.

2.15. Állítás. *Legyen adott egy háromszög a gömbfelületen az ABC csúcsokkal, ahol a C csúcsnál lévő szög derékszög. Ekkor igaz az alábbi egyenlőség:*

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b), \tag{2.1}$$

ahol a, b, c a gömbháromszög oldalai.



2.3. ábra. Forrás [4]

Bizonyítás: a [4] jegyzet alapján. Tekintsük a 2.3 ábrát. Vegyünk egy egység sugarú gömböt és az ezen fekvő A, B, C gömbháromszöget. Legyen O a gömb középpontja. Tegyük fel, hogy Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolva az O koordinátái $(0,0,0)$. A háromszöget elforgathatjuk úgy, hogy az A pont koordinátái $(1,0,0)$ legyenek, C csúcs pedig az xy síkban legyen. Ebből tudjuk, hogy az $\overrightarrow{OA} = (1,0,0)$. Egy z tengely körüli $\beta = AOC$ szögű forgatás az A csúcsot a C csúcsba viszi. A forgatás során a $\overrightarrow{OA}$ az xy síkban fordul el β szöggel, ezáltal: $\overrightarrow{OC} = (\cos(\beta), \sin(\beta), 0)$. Mivel a C csúcsnál derékszög van ezért az OBC pontokra illeszkedő sík merőleges az OAC pontokra illeszkedő síkra. Az OBC pontokra illeszkedő sík tartalmazza a z tengelyt. Egy ortonormált bázisa az OBC pontokra illeszkedő síknak megadható az $\overrightarrow{OC} = (\cos(\beta), \sin(\beta), 0)$ illetve az $\overrightarrow{OZ} = (0,0,1)$ vektorokkal. Ebben a síkban egy $\alpha = BOC$ szögű forgatás a C csúcsot a B csúcsba viszi, ezáltal: $\overrightarrow{OB} = \cos(\alpha)\overrightarrow{OC} + \sin(\alpha)\overrightarrow{OZ} = (\cos(\alpha)\cos(\beta), \cos(\alpha)\sin(\beta), \sin(\alpha))$. Vegyük a $\gamma = AOB$ szöget. $\cos(\gamma) = OA \cdot OB = \cos(\alpha)\cos(\beta)$. A gömbi háromszög oldalai: a, b, c. Tudjuk, hogy: $c = \gamma$, $b = \beta$, $a = \alpha$.

Így:

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b).$$

Ezt akartuk belátni. □

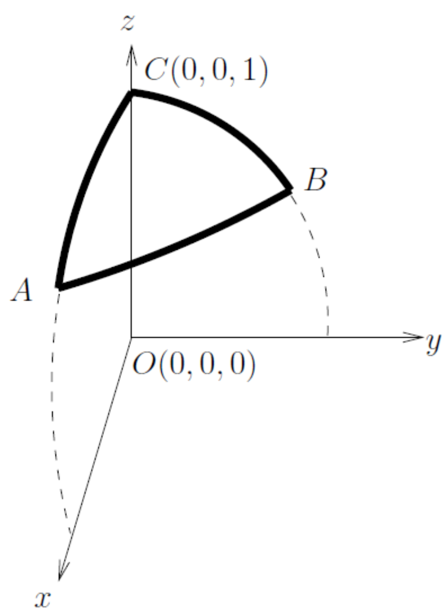
2.16. Állítás. *Legyen adott egy háromszög a gömbfelületen az ABC csúcsokkal, ahol a C csúcsnál lévő szög derékszög. Ekkor igazak az alábbi egyenlőségek:*

$$\sin(\alpha) = \frac{\sin(a)}{\sin(c)}, \tag{2.2}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\tan(b)}{\tan(c)}, \tag{2.3}$$

ahol a, b, c a gömbháromszög oldalai, α pedig a háromszög A csúcsánál lévő belső szöge.

Bizonyítás: a [4] jegyzet alapján. Tekintsük a 2.4 ábrát. Vegyünk egy egység sugarú gömböt, és az ezen fekvő A, B, C gömbháromszöget az a, b, c oldalakkal. Legyen O a gömb középpontja. Tegyük fel, hogy Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben



2.4. ábra. Forrás [4]

ábrázolva az O koordinátái$(0,0,0)$. Forgassuk el a háromszöget úgy, hogy a C csúcs koordinátái $(0,0,1)$ legyen, az A csúcs az xz síkba a B csúcs pedig az yz síkban legyen, ezáltal: $\overrightarrow{OC}=(0,0,1)$. Vegyünk egy forgatást az xz síkban a O pont körül $b = AOC$ szöggel. Ez a forgatás az C csúcsot az A csúcsba viszi. Ezáltal $\overrightarrow{OA}=(\sin(b),0,\cos(b))$. Egy hasonló O pont körüli forgatás az yz síkban $a = BOC$ szöggel a C csúcsot a B csúcsba viszi, ezáltal: $OB = (0,\sin(a),\cos(a))$. Vegyük az $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$ és az $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}$ vektorokat. Ezen vektorok által bezárt szög α. A kifejtési tétel alapján:

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(-\sin(a)\cos(b),-\sin(b)\cos(a),\sin(a)\sin(b)),$$

.

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}=(0,-\sin(b),0).$$

A vektoriális szorzat tulajdonsága miatt:

$$|(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\times(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC})|=|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|\times|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}|\cdot\sin(\alpha).$$

A bal oldal:

$$(-\sin(a)\cos(b), -\sin(b)\cos(a), \sin(a)\sin(b)) \times (0, -\sin(b), 0) =$$

$$= (\sin(a)\sin^2(b), 0, \sin(a)\sin(b)\cos(b)) = \sqrt{\sin^2(a)\sin^4(b) + \sin^2(a)\sin^2(b)\cos^2(b)} =$$

$$= \sin(a)\sin(b)\sqrt{\sin^2(b) + \cos^2(b)} = \sin(a)\sin(b),$$

felhazsnálva, hogy: $\sqrt{\sin^2(b) + \cos^2(b)} = 1$.

A jobb oldal: $\sin(b)\sin(c)\sin(\alpha)$, felhasználva, hogy: $|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \sin(c) = \sin(c)$ és $|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}| = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} \cdot \sin(b) = \sin(b)$. A bal és a jobb oldalt együtt nézve kapjuk, hogy

$$\sin(a)\sin(b) = \sin(b)\sin(c)\sin(\alpha).$$

Ezt leosztva $\sin(b)$-vel

$$\sin(a) = \sin(c)\sin(\alpha).$$

Majd osztva $\sin(c)$-vel kapjuk az első bizonyítandó egyenletet

$$\sin(\alpha) = \frac{\sin(a)}{\sin(c)}.$$

A második egyenlet bizonyításához vegyük:

$$(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}) = |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| \cdot |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}| \cos(\alpha).$$

Behelyettesítve:

$$\sin^2(b)\cos(a) = \sin(c)\sin(b)\cos(\alpha).$$

Átrendezve:

$$\cos(\alpha) = \frac{\sin(b) \cdot \cos(a)}{\sin(c)}.$$

A jobb oldalon a számlálót és a nevezőt $\cos(b)$, $\cos(c)$-vel bővítve kapjuk:

$$\cos(\alpha) = \frac{\sin(b)\cos(a)\cos(b)\cos(c)}{\sin(c)\cos(b)\cos(c)}.$$

A tangens definíciójából következik, hogy

$$\cos(\alpha) = \frac{\tan(b)}{\tan(c)} \cdot \frac{\cos(a)\cos(b)}{\cos(c)}.$$

Felhasználva, hogy $\cos(c) = \cos(a)\cos(b)$ kapjuk a bizonyítandó állítást.

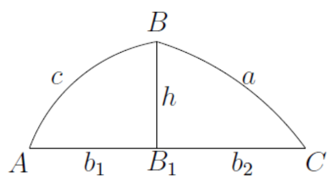
$$\cos(\alpha) = \frac{\tan(b)}{tan(c)}.$$

És ezt akartuk belátni. $\square$

2.17. Állítás. *(Gömbi szinusztétel): A gömbháromszög oldalainak szinuszai úgy aránylanak egymáshoz, mint a szemközti szögek szinuszai.*

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(a)} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(b)} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(c)},$$

ahol a, b, c a gömbháromszög oldalai, α a háromszög A csúcsánál, β a B csúcsánál, γ pedig C csúcsánál lévő belső szöge.



2.5. ábra. Forrás [4]

Bizonyítás: a [4] jegyzet alapján. Tekintsük a 2.5 ábrán látható ABC tetszőleges háromszöget. A háromszögben a h szakasz két darab derékszögű háromszögre osztja fel a háromszöget. Alkalmazzuk a 2.2 állítást az ABB_1 derékszögű háromszögben. Eszerint: $\sin(\alpha) = \frac{\sin(h)}{\sin(c)}$, amit átrendezve kapjuk, hogy: $\sin(h) = \sin(\alpha)\sin(c)$. Hasonlóan a CBB_1 derékszögű háromszögben: $\sin(h) = \sin(\gamma)\sin(a)$. Ezek alapján:

$$\sin(\gamma)\sin(a) = \sin(\alpha)\sin(c).$$

Ezt $\sin(a)$ és $\sin(c)$-vel osztva kapjuk, hogy:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(a)} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(c)}.$$

Hasonlóan bizonyítható bármely két szögre, így:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(a)} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(b)} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(c)}.$$

és ezt akartuk bizonyítani. □

2.18. Állítás. *(Gömbi koszinusztétel oldalakra): A gömbháromszög bármely oldala meghatározható a másik két oldal és az általuk közbe zárt szög segítségével:*

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\alpha),$$

ahol a, b, c a gömbháromszög oldalai, α a háromszög A csúcsánál , β a B csúcsánál, γ pedig C csúcsánál lévő belső szöge.

Bizonyítás: a [4] jegyzet alapján. Tekintsük a 2.5 ábrán látható ABC tetszőleges háromszöget. Alkalmazzuk a 2.1 összefüggést a BB_1C háromszögben: $\cos(a) = \cos(b_2)\cos(h)$. Tudjuk, hogy $b_2 = b - b_1$ ezt behelyettesítve az előbbi összefüggésbe és felhasználva, hogy $\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$ kapjuk, hogy

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(b_1)\cos(h) + \sin(b)\sin(b_1)\cos(h),$$

felhasználva a 2.1 összefüggést a BB_1A derékszögű háromszögben kapjuk, hogy $\cos(c) = \cos(b_1)\cos(h)$. Ezt átrendezve kapjuk, hogy: $\cos(h) = \frac{\cos(c)}{\cos(b_1)}$. A $\cos(a) = \cos(b)cos(b_1)\cos(h) + \sin(b)\sin(b_1)\cos(h)$ egyenlőségben a $\cos(h)$-kat helyettesíthetjük $\frac{\cos(c)}{\cos(b_1)}$-el, így kapjuk, hogy

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(b_1)\frac{\cos(c)}{\cos(b_1)},$$

ezt megszorozva $\frac{\sin(c)}{\sin(c)} = 1$-gyel, illetve a tangens definícióját felhasználva adódik, hogy

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\frac{\tan(b_1)}{\tan(c)}.$$

Végül használva a 2.3 összefüggést a BB_1A derékszögű háromszögben: $\cos(\alpha) = \frac{tan(b_1)}{tan(c)}$. Ezt behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\alpha).$$

Ezt akartuk belátni. $\square$

2.19. Állítás. *(Gömbi koszinusztétel szögekre): A gömbháromszög bármely szöge meghatározható a másik két szög és a keresett szöggel szemközti oldal segítségével:*

$$\cos(\alpha) = -\cos(\beta)\cos(\gamma) + \sin(\beta)\sin(\gamma)\cos(a),$$

ahol a, b, c a gömbháromszög oldalai, α a háromszög A csúcsánál , β a B csúcsánál, γ pedig C csúcsánál lévő belső szöge.

Bizonyítás: a [4] jegyzet alapján. Tekintsük a 2.5 ábrán látható ABC tetszőleges háromszöget. Vegyünk azt az $A'B'C'$ polár háromszöget, melynek oldalai a 2.13 állítás alapján: $a' = (\pi - \alpha)$, $b' = (\pi - \beta)$, $c' = (\pi - \gamma)$, szögei pedig $\alpha' = (\pi - a)$, $\beta' = (\pi - b)$, $\gamma' = (\pi - c)$. Írjuk fel a gömbi koszinusztételt az $A'B'C'$ háromszögben.

$$\cos(a') = \cos(b')\cos(c') + \sin(b')\sin(c')\cos(\alpha'),$$

behelyettesítve

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi - \beta)\cos(\pi - \gamma) + \sin(\pi - \beta)\sin(\pi - \gamma)\cos(\pi - a),$$

felhasználva, hogy $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ és $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ kapjuk, hogy

$$-\cos(\alpha) = -\cos(\beta)(-\cos(\gamma)) + \sin(\beta)\sin(\gamma)(-\cos(a)),$$

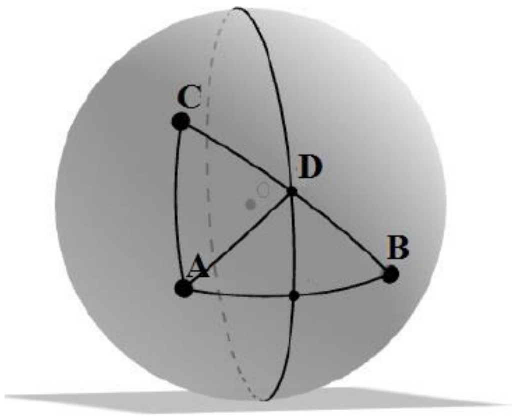
megszorozva (-1) -el kapjuk az eredeti állítást.

$$\cos(\alpha) = -\cos(\beta)\cos(\gamma) + \sin(\beta)\sin(\gamma)\cos(a),$$

ezt akartuk bebizonyítani. □

2.20. Állítás. *(Felezőmerőleges tétel) Legyenek adottak a gömbfelületen az A és B pontok, illetve az őket összekötő gömbi szakasz. Ezt a szakaszt merőlegesen felező főkör pontjai az A és B pontoktól egyenlő gömbi távolságra vannak.*

Bizonyítás: a [2] jegyzet alapján.



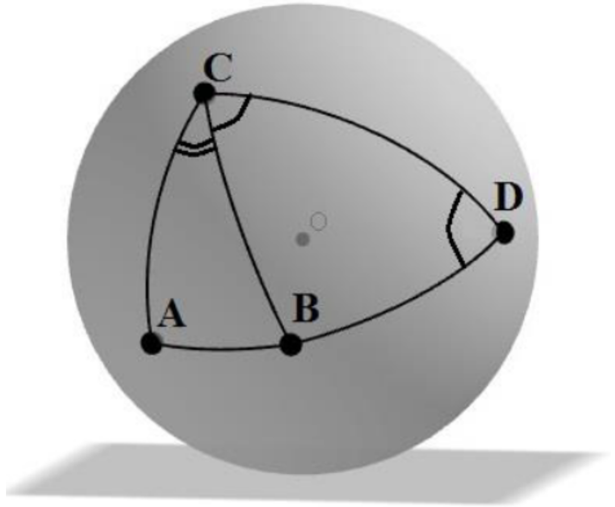
2.6. ábra. Forrás [2]

Tekintsük a 2.6 ábrát. Kössük össze az A és B pontokat egy egyenes szakasszal, majd vegyük a felezőmerőleges síkját. Tegyük fel, hogy a C pont nincsen rajta a síkon, hiszen ha rajta lenne, akkor egyenlő lenne az A, illetve B pontoktól vett távolsága. Tegyük fel, hogy C az A-t tartalmazó féltér egy belső pontja, tehát CB metszi a felezőmerőleges síkot a D pontban. D a felezőmerőleges síkon van tehát az ABD háromszög egyenlő szárú, vagyis a $DAB\angle$ és a $DBA\angle$ megegyeznek. Mivel az AD szakasz a $CAB\angle$ belsőjében halad, ezért a $DAB\angle < CAB\angle$, tehát az ABC háromszögben a $CBA\angle < CAB\angle$, ezáltal $CA < CB$. A húrok (térben vett távolságok), és a hozzájuk tartozó körívek (gömbi távolságok) kapcsolatára hivatkozva gömbön is érvényes lesz a kimondott tétel. □

2.21. Állítás. *Egy gömbháromszögben két oldal, és az ezekkel szemközti szögek vagy páronként egyenlők, vagy nem, és ekkor a nagyobb oldallal szemben van a nagyobb szög.*

Bizonyítás: a [2] jegyzet alapján. Tekintsük a 2.6 ábrát. Tekintsük az ABC gömbháromszög A és B csúcsánál elhelyezkedő szögeit és az azokkal szemközti oldalakat. Ha a C csúcs rajta van az AB oldalt merőlegesen felező főkörön, akkor a főkör síkjára vonatkozó szimmetriából következik, hogy a vizsgált szögek és oldalak egyenlők. Tegyük fel, hogy a C pont az A pontot tartalmazó félgömb belsejében van, ekkor az előző tétel szerint $BC > AC$, tehát a $CAB\angle > CBA\angle$-t kell bizonyítani. Mivel C az A-t tartalmazó félgömbön van, a BC oldal az AB gömbi szakasz felezőmerőleges főkörét egy D pontban metszi. Az AD szakasz kettévágja a $CAB\angle$-et. A már említett szimmetriából következik, hogy $CBA\angle$ egyenlő a $BAD\angle$-el, tehát az őt részeként tartalmazó $CAB\angle$-nél kisebb. Vagyis: $BC > AC$ esetén $CAB\angle > CBA\angle$, és ezt akartuk bizonyítani. □

2.22. Állítás. *(Gömbi háromszögegyenlőtlenség) Egy gömbháromszög bármely két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál.*



2.7. ábra. Gömbi háromszög egyenlőtlenség. Forrás [2]

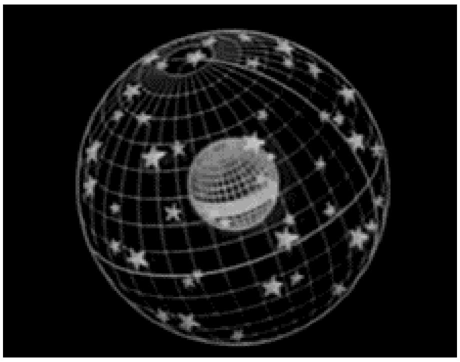
Bizonyítás: a [2] jegyzet alapján. Ha két oldal összege nagyobb, mint π, akkor egyértelműen igaz, hiszen egy gömbháromszög oldalának hossza 0 és π között mozog. Ellenkező esetben tekintsük a 2.7 ábrát. Azt szeretnénk bebizonyítani, hogy $AB + BC > AC$.

Hosszabbítsuk meg az AB oldalt BD szakasszal. Legyen $BD = BC$. Ezáltal a BCD háromszög D és C csúcsánál lévő szögek egyenlő nagyságúak, tehát az ACD háromszögben a C csúcsnál nagyobb szög van, mint a D csúcsnál. Az előző tétel miatt $AC < AD = AB + BD = AB + BC$. Azaz: $AC < AB + BC$, és ezt akartuk bebizonyítani. $\square$

3. fejezet

Az Éggömb

A következő fejezetben bemutatom az Éggömböt és a hozzá kapcsolódó legfontosabb fogalmakat az [5] és a [18] ismeretek alapján. Ezekkel a fogalmakkal a csillagászati jelenségeket, könnyen szimpla matematikai nyelvre fordíthatjuk, továbbá ezek a fogalmak nagy segítségünkre lesznek a 6 részben a földrajzi poziciónk meghatározásában.



3.1. ábra. Éggömb. Forrás [5]

A földi tájékozódásban a csillagok / bolygók állása nagyon nagy segítségünkre van. A csillagok / bolygók helyzetét úgy képzelhetjük el, mintha egy gömbfelületen helyezkednének el a Föld körül. Ezt nevezzük Éggömbnek, lásd a 3.1 ábra. A földi gömbfelület és az Éggömb között létrehozhatunk egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést. Ez a megfeleltetés nem más, mint egy középpontos vetítés a föld középpontját centrumként használva. Ezáltal az Éggömb minden pontjához egyértelműen hozzárendelhető egy, a földi gömbfelületen található pont. Hasonlóan a földfelület hosszúsági és szélességi köreihez, az Éggömbnek is meg tudunk feleltetni egy koordináta rendszert. Ennek a koordináta rendszernek a segítségével minden csillaghoz /bolygóhoz hozzárendelhetők koordináták az Éggömbön. A két adat, amely egyértelműen meghatározza az égitest helyzetét az Éggömbön a Deklináció és a GHA. **Legfontosabb fogalmak az Éggömbbel kapcsolatban:**

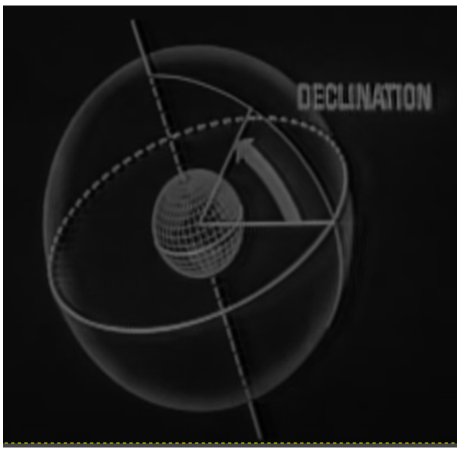
3.1. Definíció. *Azt a főkört az Éggömbön, amelyet a földi gömbre vetítve a földi Egyenlítőt kapjuk,* égi Egyenlítőnek *nevezzük.*

3.2. Definíció. *Azt a két pontot az Éggömbön, amelyet a földi gömbre vetítve a földi északi/déli sarkpontokat kapjuk,* égi Sarkpontnak *nevezzük.*

3.3. Definíció. *A* vizsgáló pozíciója *egy pont a gömbfelületen egy adott időpillanatban.*

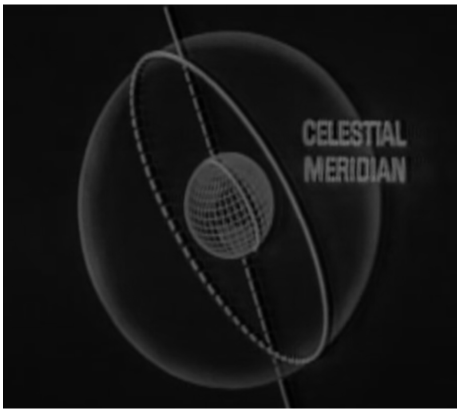
3.4. Definíció. *Az* égitest pozíciója*, vagy "égitest" az égitest középpontos vetületi képe az Éggömbre, egy adott időpillanatban.*

3.5. Definíció. *Vegyük azt a síkot, amely illeszkedik a föld középpontjára O, az égitestre G, illetve az égitesttel megegyező félgömbön található Sarkpontra Z. Ennek a síknak két metszéspontja van az égi egyenlítővel A_1 és A_2. Vegyük a GOA_1 és a GOA_2 szögek közül azt amelyik kisebb, mint $\frac{\pi}{2}$, ezt a szöget nevezzük az* égitest deklinációjának*, lásd a 3.2 ábra. (a földi szélességi körnek felel meg)*



3.2. ábra. Deklináció. Forrás [5]

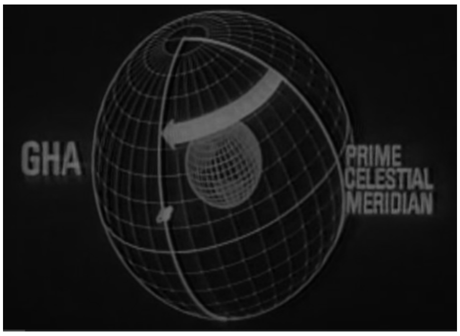
3.6. Definíció. *Az égi Egyenlítőre merőleges, Sarkpontokat metsző gömbi egyeneseket* meridiánnak *(hosszúsági körnek) nevezzük. 3.3*



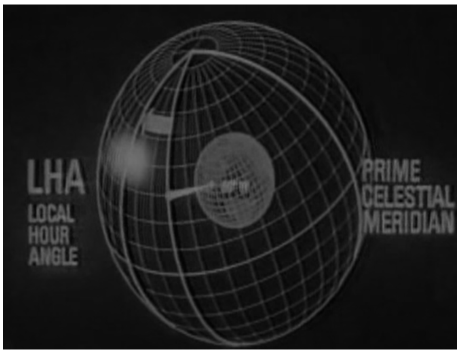
3.3. ábra. Meridián. Forrás [5]

3.7. Definíció. *Az Éggömbön azt a meridiánt, melyet a földi gömbre vetítve a 0 hosszúsági kört kapjuk,* elsődleges meridiánnak *nevezzük.*

3.8. Definíció. *Az a szög, amelyet az Éggömbön az elsődleges meridián és az égitestre illeszkedő égi hosszúsági kör bezár, a* GHA*: (Greenwich hour angle). 3.4 Míg a földi hosszúsági köröket keleti és nyugati irányba nézzük* 0°*-tól* 180°*-ig, addig a GHA-t mindig nyugati irányba merjük, értéke* 0° *és* 360° *között terjedhet.*



3.4. ábra. GHA. Forrás [5]



3.5. ábra. LHA. Forrás [5]

3.9. Definíció. *Az a szög, amelyet a megfigyelő pozíciójára illeszthető égi meridián és a vizsgált égitestre illeszkedő égi meridián zár be, az* LHA*: (Local hour angle). 3.5*

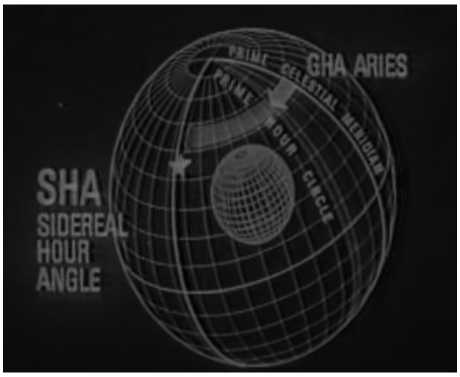
3.10. Definíció. *A Nap pályája egy év alatt spirális-szerű, Lissajous-görbéhez (lásd 3.6 ábra) hasonló pályát fut be. A pálya É-D és K-Ny irányú mozgásának aránya* $\frac{1}{365}$*, vagyis az Éggömbön nézve a Nap* 365*-ször kerüli meg a Földet, mire visszajut a kiinduló pontjába. A teljes pálya (1 év alatt) kétszer metszi az égi egyenlítőt, ezeknek a pontoknak a neve:* a Napéjegyenlőség pontjai vagy más néven equinox. *Ezekben a pontokban a Nap deklinációja 0.*

3.6. ábra. Lisajou görbe.

3.11. Definíció. *Az adott évben az equinoxokra illeszkedő égi meridián neve:* Prime hour circle*. Ismert, hogy az equinoxok a gömb két átellenes pontjai.*

3.12. Definíció. *Az elsődleges meridián és az adott évre vonatkozó Prime hour circle által bezárt szög neve:* GHA of Aries*. Nevét onnan kapta, hogy az ókori görödöknél a tavaszi Napéjegyenlőség pontja a Kos csillagképbe esett.*

3.13. Definíció. *Egy adott csillagra illeszthető égi meridián és az adott évre vonatkozó prime hour circle által bezárt szög neve:* SHA *(Siderial hour angle). Értéke rendkívül keveset (kb 1 szögpercnyit) változik egy év alatt, így az egyszerűség kedvéért tekintsük állandónak. 3.7*



3.7. ábra. SHA.Forrás [5]

3.14. Definíció. *Az a pont az Éggömbön, amely a horizonthoz képest pont* 90°*-os szögben látszik abból a pontból, ahol éppen állunk a Földön, a* Zenit*. 3.8*

3.8. ábra. Zenit. Forrás [5]

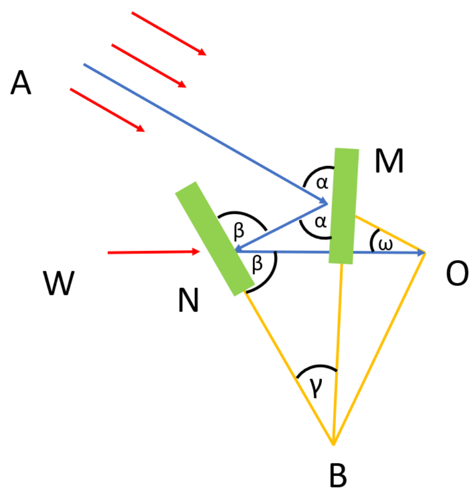
3.15. Definíció. *A horizont és az égitestet velünk összekötő egyenes által bezárt szöget nevezzük* az égitest látószögének.

3.16. Definíció. *Az égitestek Éggömbön vett koordinátáit a GHA és a deklináció által tudjuk meghatározni, ezt nevezzük GP-nek. A GHA és a deklináció bármely égitest esetén könnyedén fellelhető bármelyik hajózási vagy repülési Almanachban. Az Éggömbön vett GHA érték a földi hosszúsági körnek, az Éggömbön vett deklináció érték pedig a földi szélességi körnek feleltethető meg.*

Így kaphatjuk meg a GP (geographic position) pontját egy égitestnek. Ez a GP pont bármely égitest esetében az a pont a Földön, ahonnan az égitest 90°-os szögben látszik. Ebből következik, hogy ha egy égitestet vizsgálva pontosan 90°-ot mérünk, akkor az Almanachból rögtön kiolvasható lenne a pozíciónk. Ennek a valószínűsége rendkívül kicsi, ezért további számítások is szükségesek.

3.17. Állítás. *(Tengelyes tükrözések kompozítciója) Legyen adott a síkban két nem párhuzamos fix egyenes (tükör). Tükrözzünk egy az első egyenessel nem párhuzamos (e) egyenest (fénysugár) előbb az első egyenesre, majd pedig az így kapott tükörképet a második egyenesre is. Ekkor a kiindulási (e) egyenes és a második tükrözés után kapott tükörkép egyenes által bezárt szög (ω), kétszerese a fix egyenesek által bezárt (γ) szögnek.*

$$\omega = 2\gamma$$



3.9. ábra.

Bizonyítás: a [6] jegyzet alapján. Tekintsük a 3.9 ábrát. Először vizsgáljuk meg az NOM háromszöget. Könnyen látható, hogy az N csúcsnál lévő külső szög$= 2\beta$. Mivel a háromszög egyik külső szöge egyenlő a másik két belső szög összegével így adódik: $2\beta = \omega + 2\alpha$, M csúcsnál lévő belső szög 2α, a váltószögek tulajdonsága miatt. Hasonló adottságot vehetünk észre az NBM háromszögben is: az N csúcsnál lévő külső szög β. Ugyanazon okból, mint az előző háromszögben adódik, hogy $\beta = \alpha + \gamma$, ezt szorozva 2-vel kapjuk, hogy: $2\beta = 2\alpha + 2\gamma$. A két kapott egyenletünk: $2\beta = 2\alpha + 2\gamma$ és $2\beta = \omega + 2\alpha$. Ezekből adódik, hogy $2\alpha + 2\gamma = \omega + 2\alpha$. Vonjunk ki mindkét oldalból 2α-t, így kapjuk, hogy

$$2\gamma = \omega$$

és ezt szerettük volna belátni. $\square$

4. fejezet

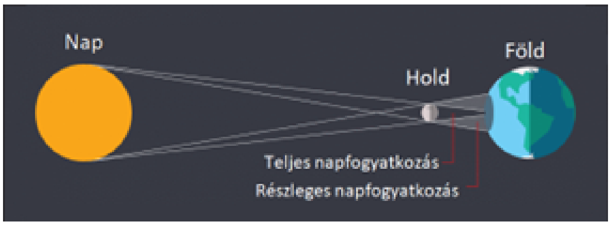
A Föld kerületének Eratoszthenész féle meghatározása

Ebben a fejezetben bemutatom a [7] forrás alapján, hogy az időszámításunk előtt pár száz évvel élt Eratoszthenész, hogyan sejtette meg a Föld valódi alakját és annak méreteit.

A legtöbb tudós már az időszámításunk előtti $200 - 300$-as években tisztában volt azzal a ténnyel, hogy földfelszín nem lapos, hanem gömbhöz hasonló alakot ölt. Erre a tényre a Holdat és a Napot vizsgálva következtettek. Vizsgálataik alapjául a teljes napfogyatkozás szolgált. Teljes napfogyatkozás esetén a Föld a Hold és a Nap egy egyenesen helyezkedik el. Lásd a 4.1 ábra. Ennek köszönhetően a Hold árnyékot vet a földre. A korabeli tudósok arra következtettek, hogy hasonló jelenségnek kell megtörténnie, amikor a Föld és a Hold egymáshoz képest helyet cserél, és a Föld vet árnyékot a Holdra. Megfigyelhető, hogy amint a bolygók egymáshoz képest elmozdulnak, a Holdra vetett árnyék gömb alakú, lásd a 4.2 árba. Ezáltal arra a következtetésre jutottak, hogy a Földnek is gömb alakúnak kell lennie.

Ezután a tudósok arra voltak kíváncsiak, hogy mennyire nagy is ez a bolygó, amin élünk. Ennek megállapítása meglehetősen nehézkesnek tűnt akkoriban, hiszen semmilyen hagyományos hosszúságmérő eszköz nem volt alkalmas a kérdés megválaszolására.

A problémára elsők között Eratoszthenész görög tudós adott választ, aki a következő ötletet alkalmazta, amikor a napsugarak beesési szögét vizsgálta egy Alexandria nevű egyiptomi városban tavaszi napéjegyenlőség idején. Egy kútban az árnyékképződést



4.1. ábra. Teljes napfogyatkozás. Forrás [13]

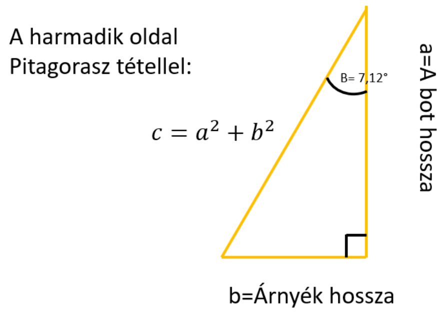
4.2. ábra. Holdállások. Forrás [14]

vizsgálva azt találta, hogy még délben is van a kút vizének egy része, amelyet árnyék borít, lásd a 4.3 ábra. Feltételezve, hogy a nap sugarai párhuzamosak egymással, arra a következtetésre jutott, hogy a napsugarak tavaszi napéjegyenlőség idején (amikor a leghosszabbak a nappalok az északi félgömbön) még dél idején sem merőlegesek a földfelszínre.

4.3. ábra. Alexandriai kútba beeső fénysugarak. Forrás [7]

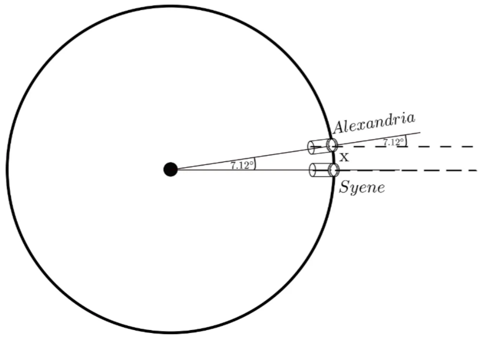
Szerette volna megállapítani tavaszi napéjegyenlőség idején pontosan délben (Alexandriában) hány fokos szöget zárnak be a beérkező napsugarak a földfelszínnel. Ennek megállapításához fogott egy botot és leszúrta a földbe a földfelszínre merőlegesen, majd megmérte, hogy a vizsgált időpontban milyen hosszú a bot árnyéka.

Matematikai nyelvre lefordítva a következő háromszöget kapta,(lásd a 4.4 ábra) melyben a β szöget szerette volna megállapítani. Mivel ismert az árnyék és a bot hossza, illetve tudjuk, hogy a botot merőlegesen szúrtuk le, így a szinusztétel segítségével ki tudjuk számítani a β szög nagyságát. Eredményül $\beta = 7.12°$-ot kapott.



4.4. ábra.

Évekkel később értesült róla, hogy egy Szüéné nevű településen, amely a Ráktérítő mentén található, tavaszi napéjegyenlőségkor délben egy kút belsejében egyáltalán nem látszik árnyék. Ez azt jelentette, hogy ez utóbbi településen a vizsgált időpontban a földfelszínre merőlegesen érkeztek be napsugarak. Ez az eltérés megerősítette abban, hogy a földfelszín nem lapos, hanem feltehetően gömb alakú. Ezután már csak az volt a kérdés a számára, hogy mekkora. Ahhoz, hogy ezt meghatározhassa szüksége volt még egy fontos információra, mégpedig az Alexandria és Szüéné közötti távolságra. Azt, hogy ezt hogyan állapította meg nem teljesen tisztázott. Feltehetően a teve karavánok általi ismeretekre hagyatkozott. Ami a lényeg, tisztában volt vele, hogy a két település közötti távolság nagyjából 5000 sztadium (korabeli mértékegység). Tegyük fel, hogy egy sztadium $\approx$ 185m. Mivel a sztadium mértékegység nem pontosan ismert, ezért a végeredmény pontosságát sem ismerjük. Feltételezve, hogy ezekkel az adatokkal számolt a következő eredményre juthatott. A két település közötti távolság (lásd a 4.5 ábra):



4.5. ábra. A két város távolsága. Forrás [7]

$$5000 \cdot 185 \approx 925925(m) \approx 925(km).$$

A két település közötti középponti szög:

$$\beta \approx 7.12°.$$

Jelölje K a Föld egy főkörének kerületét, így

$$\frac{360°}{7,12°} \approx \frac{K}{925}.$$

Ezt az egyenletet K-ra rendezve kapjuk, hogy

$$K \approx 46769(km).$$

Ez lehetett Eratoszthenész megoldása, amellyel feltehetően rendkívül közel járt a valósághoz.

A modern méréseknek köszönhetően már tudjuk, hogy a pontos adat $40075km$. Figyelembe véve, hogy Eratoszthenész időszámításunk előtt $200 - 300$ évvel végezte a számításait, az akkori lehetőségekhez mérten meglepően közel járthatott a valódi adathoz.

5. fejezet

A szextáns

A következő fejezetben bemutatom a [8], a [9], a [10] forrás alapján azt, hogy a szextáns feltalálása miben hozott újat a hajózási navigációban. Kitérek emelett arra is, hogy milyen matematika áll a működése hátterében és milyen következtetéseket tudunk levonni az szextánsal mért értékből, a pozíciónkra vonatkozóan.

5.1. A szextáns rövid története

A csillagokat már időszámításunk előtt használták tengeri helymeghatározásra. Már az ókori arabok birtokában voltak annak a matematikai tudásnak, hogy a csillagok állásából hogyan lehet helymeghatározást végezni. Az évszázadok során a különböző népek különböző eszközöket és számítási módszereket fejlesztettek ki annak érdekében, hogy a csillagok állásából meghatározzák, merre járnak a nyílt vizeken. Kezdetekben az Északi / Déli sarkcsillagra hagyatkoztak, hiszen az mindig az Északi/ Déli pólus fölött helyezkedik el. Megmérve, hogy milyen szögben látszik az Északi / Déli sarkcsillag a horizonthoz képest a pillanatnyi tartózkodási pozíciójukból meg tudták határozni, hogy milyen messze vannak az Északi / Déli pólustól, ezáltal észak-dél irányban meg tudták határozni, hogy merre is járnak.

Hozzá kell tenni, hogy a tengerészeti navigáció korabeli eszközeivel rendkívül pontatlanul lehetett mérni. A horizont fixen tartása bonyodalmat jelentett a korabeli eszközökkel. Legtöbbször a horizontot csak találomra sikerült belőni. Az oktáns és a szextáns feltalálása nagy mértékben javított a mérések pontosságán. Ezek az eszközök lehetővé tették, hogy egyazon pillanatban egyszerre lássuk a vizsgált égitestet és a horizontot is, ennek köszönhetően sokkal pontosabb méréseket lehetett végezni, mint a korábbi eszközökkel.

A szextánst a 18. századtól kezdve egészen a modern technológiai forradalomig, a GPS rendszer megalkotásáig, előszeretettel használták hosszabb hajóutak során. Feltalálója John Campbell kapitány, aki 1757-ben állt elő találmányával. A szextáns nem számított teljesen új találmánynak, hiszen elődjét, az oktánst már 1731-ben feltalálták és használták a hajózások során. Ezen eszközökkel könnyedén meg lehet állapítani, hogy egy adott égitest milyen szögben látszik a pillanatnyi pozíciónkból a horizonthoz képest, ebből pedig különböző számításokat végezve megállapítható, hogy körülbelül hol helyezkedünk el a földfelszínen. A szextáns annyiban hozott újdonságot, hogy még elődje, az oktáns csupán 90°-os látószögben tudott mérni, addig a szextánssal már 120°-os látószöget is tudtak mérni a tengerészek.

5.2. A szextáns felépítése

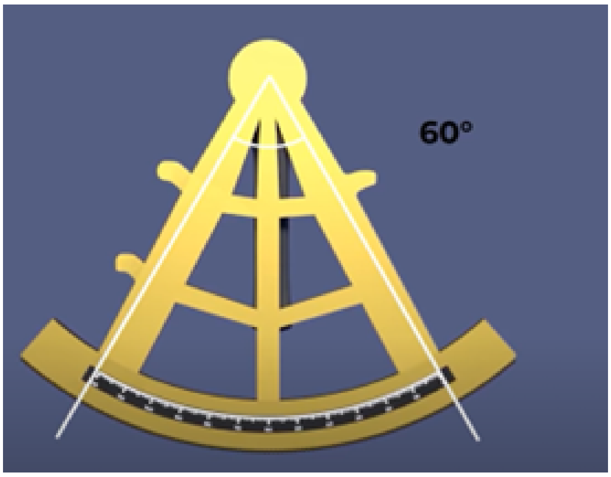
5.1. Állítás. *Szextáns törvény:*

Tétel: Amikor a fénysugár két egymás utáni tükrön reflektálóik, akkor a beeső és a tükrözött fénysugár hajlásszöge (ω), kétszerese a tükrök által bezárt szögnek (γ).

($\omega = 2\gamma$)

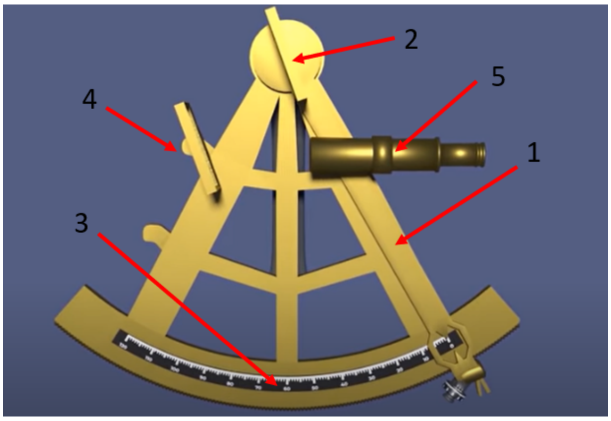
Ez az állítás a 3.17 tétel következménye.

A szextáns nevét a kerete alakjáról kapta, lásd az 5.1 ábra. A kerete 60° os szöget formáz. A keret alján egy skála található, amely $0° - 120°$-ig van beosztva. A szextáns törvény az oka annak, hogy bár a keret 60°-os szöget formál az alján lévő beosztás 120°-ig, azaz a kétszereséig terjed. Tekintsük az 5.2 ábrát. A keretre csatlakozik egy index kar (1). Ez a kar az eszköz tetején rögzített, és elfordul a keret síkja mentén. A kar rögzített végén található egy mozgatható tükör (2), amely merőleges a keret síkjára és párhuzamos a karral. A kar elfordításával maga a tükör is elfordul. A kar által a tükör $0° - 60°$-ig forgatható. A kar másik vége végig fut a skálán (3), amely érték megadja, hogy mekkora látószögben látunk egy adott égitestet. Az eszközön még fontos szerepet tölt be a másik (rögzített) tükör (4), illetve a távcső (5), amelybe fizikailag belenézünk. Ez a rögzített tükör, illetve a távcső a keret két ellentétes szárára



5.1. ábra. A szextáns kerete. Forrás [9]

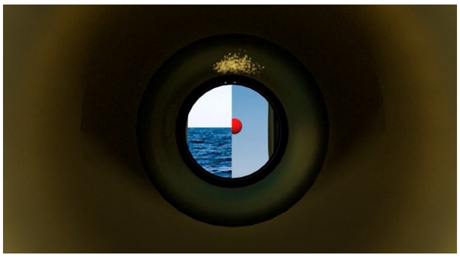
van rögzítve. Amennyiben az index kart 0 állásba állítjuk a két tükör párhuzamos egymással. A rögzített tükör, melyet egy függőleges egyenes választ ketté, két különböző anyagú üvegből készül. A bal oldali fele olyan üveg, amelyen átlátunk, a jobb oldali fele pedig olyan, amely visszatükrözi a forgatható tükörből érkező fényt. Ennek azért van jelentősége, hogy egyszerre lássuk a távcsőben a horizontot, illetve az általunk vizsgált égitestet – ezzel megoldva a szögmérések egyik korábbi fő problémáját. A távcső merőleges a keret vízszintes és hosszanti síkjára is.



5.2. ábra. A szextáns részei. Forrás [9]

5.3. Az eszköz használata

A szextáns használata a következőkön alapszik. A szextánssal meg tudjuk állapítani, hogy egy általunk kiszemelt égitest mekkora szöget zár be a horizonttal. A mért szög megegyezik a látószöggel, lásd a 3.15 definíció. Ehhez a szextáns távcsövén keresztül keressük meg a kiválasztott égitestet. Az eszközt úgy kell mozgatni, hogy a horizontot lássuk az egyik felén, mindeközben az index kart toljuk előre, annak érdekében, hogy az égitest is látható maradjon a távcső másik felében. Amikor egyszerre látjuk a horizontot és a kiválasztott égitestet a távcsövön keresztül (lásd az 5.3 ábra), akkor leolvashatjuk a skáláról, hogy az adott égitest milyen szöget zár be a horizonttal.

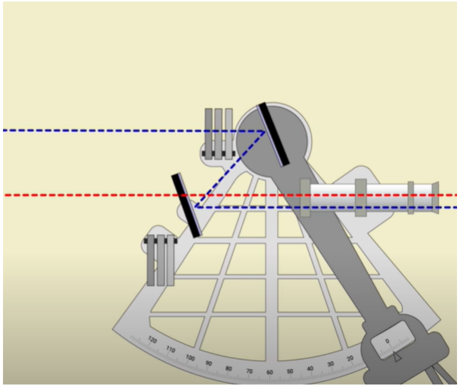


5.3. ábra. A szextáns távcsövén keresztül látható két kép. A bal oldalon a horizont, jobb oldalon pedig a vizsgált égitest látható. Forrás [10]

5.4. A szextáns jelentősége és működése

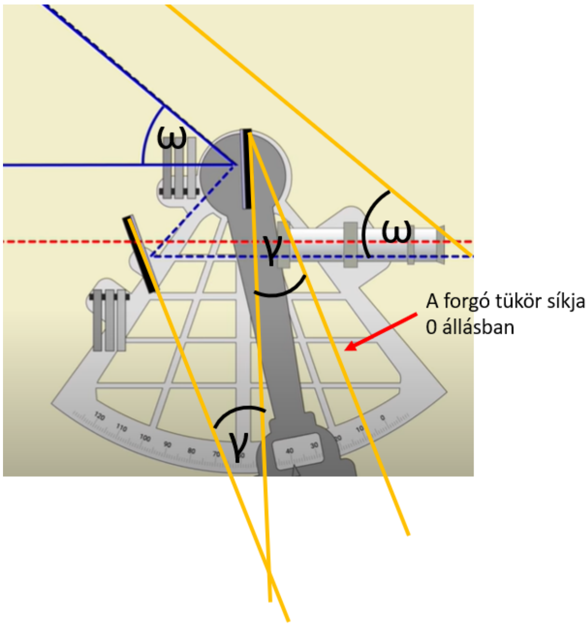
A szextáns elődjeihez képest két dologban hozott jelentős újdonságot. Egyfelől a korabeli eszközökhöz képest jóval pontosabban lehetett vele méréseket végezni. Ennek a pontosságnak az az oka, hogy a dupla tükör lehetővé teszi, hogy egyszerre lássuk a távcsövön keresztül a vizsgált égitestet, illetve a horizontot. Más részről a 120°-os skálatartomány lehetővé teszi, hogy bármely a szemünk által látható égitest pozícióját megvizsgáljuk.

A működési elve megértéséhez tekintsük az 5.4 ábrát. A szextáns távcsövében két képet látunk megjelenni, hiszen két különböző irányból érkezik be fény. Egyszer a horizont felől (piros vonal) másfelől az égitestről a két tükrön keresztül (kék vonal). A kék fénysugár kétszer tükröződik: először a mozgatható tükrön, majd a rögzített tükrön, így jut el a távcsőbe. A rögzített tükrön a fénysugár beesési szöge körülbelül



5.4. ábra. 0 fokú állás. Forrás [9]

15°. A piros fénysugár nem tükröződik, hanem áthatolva a rögzített tükrön közvetlenül a távcsőbe jut. Az index kart 0 állásba helyezve a két tükör párhuzamos egymással, ekkor a távcsőben látható két kép megegyezik egymással.



5.5. ábra. Amikor az index kart elmozdítjuk. Forrás [9]

Az index kart γ-szöggel előre tolva a mozgatható tükör elfordul a vízszintes tengelye mentén szintén γ szögnyit, lásd az 5.5 ábra. Az index kar elmozdítását követően γ lesz a két tükör által bezárt szög is. (A képen látható γ-k váltószögek) Az ábrán látható ω szög lesz az a szög (látószög), amely alatt az égitest a mi pozíciónkból látszik a horizonthoz képest. Ezt a szöget tudjuk leolvasni a skála beosztásáról. A skáláról leolvasott érték legyen ω. A szextáns törvény miatt tudjuk, hogy

$$\omega = 2\gamma$$

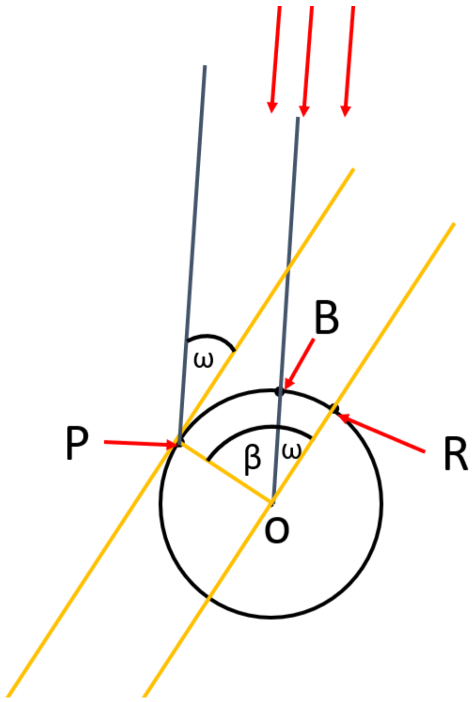
.

A szextánssal mért ω érték a következő jelentőséggel bír, lásd az 5.6 ábra. Szeretnénk megállapítani, hogy a földfelszínen (gömbi értelemben) milyen messze vannak a P és a B pontok, másszóval a β értéket. Legyenek:

P: helyzetünk a föld felszínén.

O: a föld geometriai középpontja.

B: A szextánssal vizsgált égitest GP-je.



5.6. ábra. ω jelentősége

Tudjuk, hogy a szextánssal (ω) szöget mértünk. OP szakasz illeszkedik a P-ben felvett zenith egyenesre, ami merőleges a horizontra. OP a gömb egy sugara is egyben. OR-re illeszkedő egyene párhuzamos a P-hez húzott érintővel (horizont). Így OR merőleges OP. Vegyük észre, hogy a RBO szög megegyezik ω- val, valamint $ROP = 90°$, ezáltal: $\beta = 90° - \omega$

6. fejezet

Tájékozódás a gömbfelületen

A következő részben azt fogjuk megnézni, hogy a szextánst, valamint az általa kinyert adatokat hogyan használhatjuk a helyzetünk meghatározására a Földön. Magával az eszközzel egyetlen dolgot tudunk csinálni: megállapítani egy égitestről (bolygók, csillagok), hogy milyen látószögben látszik a mi pozíciónkból. Ezt követően több lehetséges módja is van annak, hogy meghatározzuk, hol van a pozíciónk a gömb felületén. A két legfőbb a horizont rendszer és az intercept módszer. Ehhez a fejezethez az [5] és a [18] forrásokat használtam fel.

6.1. Horizont rendszer

Ez a számítási rendszer azon alapszik, hogy ha egy égitestet vizsgálva megkapjuk, hogy milyen látószögben látszik a mi pozíciónkból, akkor meg tudjuk mondani, hogy milyen messze vagyunk az adott égitest GP-jétől. Az, hogy milyen messze vagyunk az égitest GP-jétől, az pont azt jelenti, hogy rajta vagyunk egy az első égitesthez tartozó GP_1 középpontú, r sugarú körön a gömbfelszínen. Mivel ez még végtelen sok pontot jelent, ezért meg kell vizsgálnunk egy másik égitestet is, amelyből azt kapjuk, hogy rajta vagyunk a második égitesthez tartozó GP_2 középpontú s sugarú körön. Ennek a két körnek általában kettő metszéspontja lesz, ezáltal még mindig két lehetősége van a helyzetünknek. Amiatt, hogy egyértelműen megállapítható legyen, hogy a két lehetőség közül melyik a valódi helyzetünk, egy harmadik mérést is el kell végeznünk. Ez a harmadik mérés már egyértelműen meg fogja határozni, hogy a két lehetőség közül melyik van rajta a harmadik körön is, azaz melyik a valódi helyzetünk. Ezek a körök könnyen lerajzolhatóak egy síkbeli $2D$-s térképen is, így egyszerű körözéssel meghatározható a pozíciónk. Ugyanakkor, mivel nincsen távolság tartó leképezés a gömbről a sík térképre ezért, ezt a módszert akkor szeretik alkalmazni, amikor a helyzetünk a vizsgált égitest GP-éhez képest 300 tengeri mérföldön belül van. Más szóval a szextánssal mért szög 85°és 90° között van.

Egy fontos ismeret még a Zenith távolság. Ez a távolság megadja az Éggömbön a saját helyzetünk és a vizsgált égitest közötti távolságot fokban mérve. Jelöljük H-val azt a szöget, amit a szextánssal mertünk. A valóságban megkülönböztetünk H_s-t és H_o-t. Előbbi a szextánssal mért szög, utóbbi pedig ennek a korrekciója, amely az eszköz és a mérés hibáit küszöböli ki. Az egyszerűség kedvéért mi most eltekintünk ettől a korrekciótól és feltesszük, hogy hibátlan eszközzel és tökéletes körülmények között mértünk. A Zenit távolság a következő módon adódik.

$$\text{Zenit távolság} = 90^\circ - H_o$$

Ez azért igaz, mert minél közelebb vagyunk az égitest GP-éhez, annál nagyobb szögben látjuk az égitestet, és fordítva: minél messzebb vagyunk tőle, annál kisebb szögben látszik. Ha pont a GP-n állunk, akkor 90°-os szöget mérünk, így $90^\circ - 90^\circ = 0$ adódik a távolságra. Amikor pont a horizontunk vonalában van a vizsgált égitest, akkor 0°-ot mérünk. Ekkor $90^\circ - 0^\circ = 90^\circ$ adódik, és ez a legnagyobb távolság, amit mérhetünk, hiszen ha a horizont alatt van az égitest, akkor nem látható a szextánssal.

Most térjünk ki arra, hogy milyen megfeleltetés lehetséges a szextánssal mért szög és a tengeri mérföldek között. Ismert tény, hogy az egyenlítőtől az Északi sarkig egy adott meridián mentén 5400 tengeri mérföld a megtett távolság. Ugyanezen távolság szögben kifejezve 90°. Ezen arányokkal dolgozva állapítható meg, hogy ha egy égitest α szög alatt látszik a szextánssal, akkor az égitest GP- je milyen messze van tőlünk.

Nézzünk most erre egy példát: tegyük fel, hogy a szextánssal a napot vizsgáljuk 2025 március 5- én, 13:00-kor Greenwichi idő szerint. Ekkor azt kapjuk, hogy 87°-os szögben látjuk a Napot. Az Almanacból tudjuk, hogy a Nap koordinátái (GP) ekkor az Éggömbön:

$$\text{GHA} : 12^\circ 09.1$$

$$\text{Deklináció} : S50°49.8$$

Jelölje R, a távolságunkat ettől a ponttól. Tudjuk, hogy a távolságunk fokban mérve: $90° - 87° = 3°$ A fent említett arányokat használva azt kapjuk, hogy

$$\frac{3°}{90°} = \frac{x}{5400}.$$

Ebből kapjuk, hogy

$$x = 180 \text{ tengeri mérföld.}$$

Azaz 180 tengeri mérföld távolságra vagyunk a fent említett GP-től.

Ezt a módszert akkor érdemes használni, ha tudjuk, hogy a vizsgált égitest GP-jétől körülbelül 300 tengeri mérföldes távolságon belül vagyunk. Ha ez nem áll fenn, akkor is működik a módszer, viszont ekkor térképészeti okok miatt pontatlan eredményt kapnánk. Ebben az esetben az általunk rajzolt körök valójában nem körök lennének, ezért ilyenkor egy másik módszert, az intercept módszer-t szokás alkalmazni helyzetünk meghatározására. Mindkét módszer esetében azt vizsgáljuk, hogy egy adott ponttól milyen messze vagyunk (milyen r sugarú körön vagyunk rajta), azonban még a horizont rendszernél a sík térképen dolgozunk, addig az intercept módszer esetében a gömbfelületen számolunk.

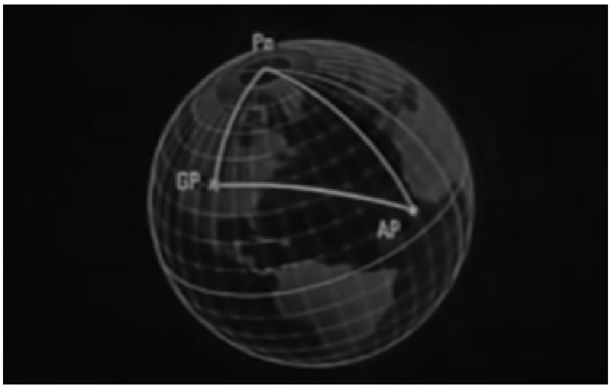
6.2. Intercept módszer

Amennyiben egy adott égitestet vizsgálva azt kapjuk, hogy a GP-je messzebb van 300 tengeri mérföldnél, vagyis a fenti formula alapján a szextánssal mért szög kisebb, mint 85°, ez a számolási metódus a célravezetőbb. Ez a metódus gömbi háromszögekben történő oldal és szögszámításon alapszik. Ezt a gömbi háromszöget az Éggömbön fogjuk meghatározni. Ehhez a gömbi háromszöghöz három pontra lesz szükségünk az Éggömbön. Ez a három pont a következők lesznek:

AP(Assumed position): Feltesszük, hogy ismerjük helyzetünket és annak koordinátáit az Éggömbön.

GP: A vizsgált égitest GP-e.

P_N: Az Északi/Déli sark az Éggömbön.



6.1. ábra. Forrás [5]

Ez a 3 pont egy háromszöget alkot az Éggömbön, lásd a 6.1 ábra. Vegyük észre, hogy ebben a háromszögben meg tudjuk határozni a $GP - P_N$ szakasz hosszát, illetve az $AP - P_N$ szakasz hosszát is. Mivel tudjuk a GP, illetve AP deklinációját.

$$\text{GP-}P_N \text{ szakasz hossza} = 90^\circ - \text{GP deklinációja}$$

$$\text{AP-}P_N \text{ szakasz hossza} = 90^\circ - \text{AP deklinációja}$$

Továbbá meg tudjuk határozni a P_N-nél lévő belső szöget is. LHA (Local Hour Angle): A P_N csúcsnál lévő belső szöge a háromszögnek. Az LHA meghatározásához a következő adatok ismeretére van szükségünk: GHA (GP) és GHA (AP).

Ezekből az adatokból már könnyedén meghatározható a LHA szög nagysága. Ha rendelkezésünkre állnak ezek az információk (a navigációs almanach tartalmazza ezeket), akkor meg tudjuk állapítani a Zenith távolságot az AP és a GP pontok között. A Zenith távolságból meghatározható a H_c (kiszámított látószög feltéve, hogy az AP a pozíciónk) értéket, amelyet a végén összevetünk a szextánssal mért Ho-val, hogy megállapítsuk mekkora az eltérés a AP és a tényleges helyzetünk között. Nézzük most meg, hogy az előbb említett adatokból, hogyan is lehet meghatározni a Zenith távolságot, azaz hogy a vélt helyzetünk AP és a vizsgált égitest GP-je között mekkora a távolság. Ehhez fogjuk felhasználnia gömbi koszinusztételt:

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(\gamma)$$

A mi esetünkben:

$c =$ Zenith távolság $= 90° - H_c$

$b = 90°$-GP deklinációja ($GP - P_N$ szakasz hossza)

$a = 90°$-AP deklinációja ($AP - P_N$ szakasz hossza)

γ=LHA

Behelyettesítve a koszinusz tétel képletébe:

$$\cos(\text{Zenith távolság}) = \cos(90° - (\text{AP deklinációja})\cos(90° - \text{GP deklinációja}) +$$

$$+ \sin(90° - (\text{AP deklinációja})\sin(90° - \text{GP deklinációja})\cos(LHA)$$

Felhasználva a következő trigonometrikus azonosságokat:

$$\cos(90° - \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\sin(90° - \alpha) = \cos(\alpha)$$

A jobb oldalon behelyettesítve kapjuk,hogy

$$\cos(\text{Zenith távolság}) = \sin(\text{AP deklinációja})\sin(\text{GP deklinációja}) +$$

$$+ \cos(\text{AP deklinációja})\cos(\text{GP deklinációja})\cos(LHA) \tag{6.1}$$

Ami egy fontos képlet lesz a későbbi feladatmegoldásoknál. Ezután a baloldalon is behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\sin(H_c) = \sin(\text{AP deklinációja})\sin(\text{GP deklinációja}) +$$

$$+ \cos(\text{AP deklinációja})\cos(\text{GP deklinációja})\cos(LHA)$$

$$(H_c) = \sin^{-1}(\sin(\text{AP deklinációja})\sin(\text{GP deklinációja}) +$$

$$+ \cos(\text{AP deklinációja})\cos(\text{GP deklinációja})\cos(LHA))$$

Az így kapott H_c-t kell összevetni a mért Ho-val. Ekkor két eset lehetséges:

$$H_c \text{ nagyobb, mint} H_o$$

$$H_o \text{ nagyobb, mint} H_c$$

Ahogy azt már korábban tárgyaltuk, minél nagyobb ez a számított vagy mért érték annál közelebb vagyunk a GP-jéhez az adott égitestnek. Amennyiben a H_c nagyobb, mint H_o, akkor a pozíciónk kívül esik egy GP közepű, $GP - AP$ sugarú körön. Amennyiben H_o nagyobb, mint H_c, akkor a pozíciónk belül esik egy GP közepű, $GP - AP$ sugarú körön. Ennél a módszernél is három mérés szükséges a konkrét pozítció meghatározásához.

7. fejezet

A GPS

A következő részben bemutatom a [15] és a [16] források alapján, hogy a számítógépek megjelenésével hogyan alakult át a navigáció. Mivel a számítógépek gyorsabb számolást tesznek lehetővé így a helymeghatározás sokkal pontosabb lett mint korábban. Másrészről a mögötte megbújó tudomány is jóval komplikáltabb, így ebben a részben csak a GPS rendszer matematikájának alapjaira fogok kitérni.

7.1. GPS története

A szextáns a 20. század második feléig maradt használatban a légi és a hajózási közlekedésben. Ezt követően a GPS rendszerek kezdtek elterjedni a technológia gyors fejlődésének köszönhetően. A GPS eszközökbe épített számítógépek még gyorsabb és pontosabb számításokat tettek lehetővé a korábbi eszközökhöz képest. Még a szextánssal akár kilométereket is lehetett tévedni egy esetleges pontatlan számolás során, addig a GPS $5 - 10$ méteres pontossággal meghatározza helyzetünket. A pontosság mellett az emberi hibát is kiküszöböli a számítási rendszerből. A GPS mai napig a legmeghatározóbb tájékozódási eszköz mind a civil, mind pedig a hadászati tájékozódásban.

7.2. A GPS működési elve

A ma ismert GPS rendszernek két meghatározó része van:

A föld körül keringő GPS műholdrendszer.

A GPS navigációs eszközök, melyek folyamatos kapcsolatban vannak a műholdrendszerrel.

A műholdrendszer tagjai a GPS vevőkhöz rádióhullámokat küldenek, melyek közel fénysebességgel terjednek. A műholdak a fölfelszín fölött körülbelül $20000km$ magasan köröznek, sebességük pedig nagyságrendileg $14000\frac{km}{h}$. Ennek köszönhetően egy nap alatt kétszer kerülik meg a bolygót. Jelenleg 24 műhold ($+6-8$ tartalék) kering a Föld körül hat különböző pályán, pályánkként négy műholddal. Ez az elrendezés teszi lehetővé, hogy bárhol is legyünk a földfelszínen legalább négy műholddal kommunikálni tudjon a GPS eszközünk.

7.3. A GPS rendszer matematikája

Amikor a GPS vevőnk egy műholddal kommunikál két fontos információ átadás zajlik.

A távolság a vevő egység és a műhold között.

A kommunikáció időpontja.

Mivel tudjuk, hogy milyen messze vagyunk egy adott M_1 műholdtól, így tudjuk, hogy rajta vagyunk egy M_1 középpontú R_1 sugarú gömbfelületen. A mérést megismételve egy az előzőtől különböző M_2 műholddal, szintén tudjuk, hogy rajta vagyunk egy M_2 középpontú R_2 sugarú gömbfelületen is. A két gömbfelület metszete egy kör (jelölje ezt a kört: K). Ezáltal a két mérés során leszűkítettük a lehetőségeket, de még mindig végtelen sok pontban lehetünk. Egy harmadik mérést végezve egy M_3 műholddal kapjuk, hogy rajta vagyunk egy M_3 középpontú R_3 sugarú gömbfelületen is. Ez az M_3 középpontú R_3 sugarú gömb a K kört legfeljebb 2 pontban metszi. Ezáltal még mindig van két opció arra, hogy hol is vagyunk. Egy negyedik mérést végezve egy M_4 műholddal tudjuk, hogy rajta vagyunk egy M_4 középpontú R_4 sugarú gömbfelületen is, ami az eddigi két lehetőséget egyre redukálja. A fentiek alapján négy műholddal kell egyidőben kommunikálnia a GPS vevőnknek ahhoz, hogy meg tudja határozni a pontos pozíciónkat.

8. fejezet

A téma átültetése a középiskolai tanításba

A téma akár a középiskolások számára is érdekes és hasznos lehet. Természetesen az érettségihez közel állóknál szakkör formájában lehet elképzelni a fentebbi ismeretek felvázolását. Úgy vélem öt-hat alkalom során megfelelő mértékben elsajátíthatóak a gömbi tájékozódás matematikai ismeretei és alkalmazásai. Ez a témakör nem csak a matematikából tehetségesek számára lehetne érdekes, hanem azok számára is, akiket vonz a hajózási, repülési közlekedés világa. Ez a téma nekik is egy újfajta megközelítést adhatna, amelyel bővíthetik ismereteiket a mindennapi élettel kapcsolatban.

Lehetséges tematika:

1. A gömbi alapismeretek elsajátítása, összehasonlítása az általánosan használt Euklideszi geometriai ismeretekkel.
2. A szextáns, mint tájékozódási eszköz bemutatása, használatának matematikai háttere, a gömbön való tájékozódás matematikája.
3. Föld adatainak megmérése.
4. GPS rendszerek működési elve.

Mindenképpen az alapismeretek átadásával érdemes kezdeni, hiszen fontos, hogy a diákok megértsék a gömbi geometria sajátosságait és rácsodálkozzanak azokra a tényekre, amelyek az addigi Euklideszi geometriai tanulmányaik során eltérő volt, például egyenesek párhuzamossága vagy a távolság fogalma. Ahhoz, hogy a diákok jobban megértsék a gömbi geometria működését egy-két bevezető feladatot is érdemes feladni nekik gondolkodásra.

Ilyenek lehetnek a következők:

Három különböző egyenes hány pontban metszheti egymást az Euklideszi síkon?

Három különböző főkör/ gömbi egyenes hány pontban metszheti egymást?

Milyen tartományokra bontja szét három egyenes vonal a síkot és három főkör a gömbfelületet?

Megoldás:

Az Euklideszi síkon négy különböző eset állhat elő:

Nincs metszéspont: Ekkor a három egyenes párhuzamos és négy tartomány keletkezik.

Egy metszéspont van: Egy pontban metszik egymást az egyenesek és hat tartomány keletkezik.

Két metszéspont van: Ekkor két egyenes párhuzamos egymással a harmadiknak pedig egy-egy metszéspontja van a párhuzamos egyenesekkel. Hat tartomány keletkezik.

Három metszéspont van: Ekkor a három egyenes közül semelyik kettő nem párhuzamos egymással és nincs a három egyenesnek egy közös metszéspontja. Hét tartomány keletkezik.

A gömbfelületen két esetet különböztetünk meg:

Két metszéspont van: A gömbfelületen bármely két egyenesnek van két metszéspontja, ekkor a három egyenes ugyanabban a két átellenes pontokban metszik egymást. Hat tartomány keletkezik.

Hat metszéspont van: Két egyenes a gömbön két pontban metszik egymást, a harmadik egyenes pedig, ha ezektől különböző pontokban metszi a másik két egyenest, akkor mindkét egyenest kétszer metszi. Ez még négy metszéspont, így jön ki a hat metszéspont összesen. Nyolc tartomány keletkezik.

Ha ezen ismeretek elsajátítása megtörtént, akkor lehet felvezetni a szextáns használatát és a földgömbön való tájékozódás matematikai alapjait. Ennél a résznél szintén hasonlóságok fedezhetőek fel az Euklideszi geometria, illetve a gömbi geometria között, például szinusztétel vagy koszinusztétel hasonló logikán alapszik mind a síkban, mind pedig a gömbfelületen. Az elméleti tudás elsajátítása után elsődlegesen általános gömbi geometriai feladatot, majd pedig ehhez hasonló gömbi tájékozódási feladatot érdemes megoldani.

Egy $R = 18m$ sugarú gömb felszínén lévő gömbháromszög egyik oldala $a = 12\pi$ (m), két szöge $\alpha = 110°$, $\beta = 70°$. Mekkora a gömbháromszög kerülete, ha területe $t = 108\pi m^2$? Forrás az [1] jegyzet.

Megoldás:

A háromszög területképletét kihasználva meghatározhatjuk a harmadik szöget:

$$T = \frac{R^2\pi(\alpha + \beta + \gamma - 180°)}{180°}$$

$$108\pi = \frac{18^2\pi(110° + 70° + \gamma - 180°)}{180°}$$

$$\gamma = 60°$$

Az a oldal méterben van megadva, ezt érdemes radiánba megadni: $R = 18m$ ebből tudjuk, hogy a gömb egy főkörének kerülete:

$$K = 2 \cdot 18 \cdot \pi = 36\pi$$

Arányosság miatt:

$$\frac{12\pi}{36\pi} = \frac{a}{360°}$$
$$a = 120°$$

Szinusztétel segítségével meghatározhatjuk az ismeretlen oldalait (b és c) a háromszögnek:

$$\frac{\sin(a)}{\sin(b)} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$$
$$\frac{\sin(120°)}{\sin(b)} = \frac{\sin(110°)}{\sin(70°)}$$
$$b = 60°$$

Hasonlóan:

$$\frac{\sin(a)}{\sin(c)} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}$$

$$\frac{\sin(120°)}{\sin(c)} = \frac{\sin(110°)}{\sin(60°)}$$

$$c = 53°$$

A b és a c oldalt méterbe átváltva:

$$\frac{b}{36\pi} = \frac{60°}{360°}$$

$$b = 6\pi(m)$$

$$\frac{c}{36\pi} = \frac{53°}{360°}$$

$$c = 5.3\pi(m)$$

A háromszög kerülete:

$$K = a + b + c = 12\pi + 6\pi + 5.3\pi = 23.3\pi(m) = 73.2(m).$$

Milyen messze van egymástól a földgömbön Budapest és Caracas városa? Forrás a [17] jegyzet.

Megoldás:

Budapest koordinátái (BP):É $47°30'$ és K $19°$

Caracas (CA): É $10°30' = 10,5°$ és Ny $66°55' = -66.92°$

A két város távolságát a 6.1 képlet segítségével számíthatjuk ki:

$$\cos(c) = \sin\left(\text{BP deklinációja}\right)\sin\left(\text{CA deklinációja}\right) +$$

$$+ \cos\left(\text{BP deklinációja}\right)\cos\left(\text{CA deklinációja}\right)\cos(\gamma)$$

Jelölje c a két várost összekötő szakaszt a gömbön. Jelölje (γ) a két város LHA szögét:

$$\gamma = 19^\circ - (-66.92^\circ) = 85.92^\circ$$

$$\cos(c) = \sin(47.5^\circ)\sin(10,5^\circ) + \cos(47.5^\circ)\cos(10,5^\circ)\cos(85.92^\circ)$$

$$c = 79.52^\circ$$

A föld sugara: $6371(km)$, a föld kerülete pedig: $12742\pi(km) = 40030(km)$

$$\frac{c}{40030} = \frac{79.53^\circ}{360^\circ}$$

$$c = 8843.3(km)$$

Megközelítőleg $8843(km)$ a két város távolsága.

Irodalomjegyzék

[1] Babos Cs. és Szabó G., *Geometriai példatár IV, Szférikus Geometria*, Nyugat-Magyarországi Egyetem, 2010.

[2] Rácz K., *Geometriai egyenlőtlenségek a gömbfelületen, Eötvös Loránd Tudományegyetem, 2016.*

[3] Polárháromszög bizonyítás. https://staff.imsa.edu/~fogel/ModGeo/PDF/03%20Spherical%20Geometry.pdf

[4] Gömbi koszinusztétel, gömbi szinusztétel bizonyítása. https://webpages.charlotte.edu/ghetyei/courses/old/S16.6118/spyth.pdf

[5] Nathaniels, *Celestial Navigation.* https://www.youtube.com/watch?v=UV1V9-nnaAs&t=567s

[6] Németh F., *A szextáns rövid leírása és kezelése.* http://leporollak.hu/tudomany/SZEXTANS.HTM

[7] W. Wieczorek, *How Eratosthenes Calculated the Circumference of The Earth, 2020.* https://www.cantorsparadise.com/how-eratosthenes-calculated-the-circumference-of-the-earth-612aff65b494

[8] J. Willoz-Egnor *Sextant with beveled scale, The Mariners' Museum.* https://www.ion.org/museum/item_view.cfm?cid=6&scid=5&iid=29

[9] Casual Navigation Academy, *The Principle of the Sextant.* https://www.youtube.com/watch?v=00ZEIZsl5xk

[10] Casual Navigation Academy, *Taking Sights With A Sextant.* https://www.youtube.com/watch?v=7wKhsOQlmCY

[11] Horváth L. Zs., *Gömbi geometria,Eötvös Loránd Tudományegyetem, 2014.* https://web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_mattan/2014/horvath_luca_zsoka.pdf

[12] Polárháromszög. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Polar_triangle_simple.svg

[13] Napfogyatkozás. https://csillagvizsgalo.blog.hu/2017/08/18/teljes_napfogyatkozas_kovetkezik

[14] Holdállások. https://www.nyugat.hu/cikk/holdfogyatkozas_jovo_het

[15] GPS Wikipedia. https://hu.wikipedia.org/wiki/Global_Positioning_System

[16] *Insights into Mathematics, The Geometry of Relativity and why your GPS works.* https://www.youtube.com/watch?v=YnG2ee0WZt4

[17] Demeter B., *A gömbi geometria, ELTE, 2020.* http://demebarnabas.web.elte.hu/doc/csillesz2/gombi.pdf

[18] Nautical Almanac, *2025.* https://thenauticalalmanac.com/TNARegular/2025_Nautical_Almanac.pdf

Eredetiségi nyilatkozat

Alulírott CZENE GÁBOR (név) VCWORZ (Neptun-kód) ezennel kijelentem és aláírásommal megerősítem, hogy az ELTE ANGOL NYELV ÉS KULTÚRA - MATEMATIKA osztatlan tanári mesterszakján írt jelen diplomamunkám saját szellemi termékem, melyet korábban más szakon még nem nyújtottam be szakdolgozatként és amelybe mások munkáját (könyv, tanulmány, kézirat, internetes forrás, személyes közlés stb.) idézőjel és pontos hivatkozások nélkül nem építettem be.

Budapest, 2023. 05. 01.

Czene Gábor

a hallgató aláírása