

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

---

# Mikrotangens halmazok

*Témavezető:*

Buczolich Zoltán

egyetemi tanár

*Szerző:*

Geng Máté

matematika MSc

---



*Analízis tanszék*

*Budapest, 2023*

# Bevezetés

$\mathbb{R}^m$  kompakt halmazaival való munkája során Fürstenberg [4] a következőképpen definiálta a mikroalmazt:  $A'$  mikroalmaza  $A$ -nak, ha léteznek  $\gamma_n \in \mathbb{R}$  arányok, és  $t_n \in \mathbb{R}^m$  eltolásvektorok, hogy  $\gamma_n A + t_n \in \mathbb{R}^m$  konvergál  $A'$ -höz a Hausdorff metrikában.

$\mathbb{R}^n$ -en adott  $\mu$  lokálisan véges Borel mérték és egy pont esetén, a mértéket a pont egy kis környezetében tekintve, azt megfelelően (pl. az egységkörlemezre) felnagyítva és 1-re normálva, vehetjük az ilyen nagyítások által definiált mértékek gyenge limeszét, ezt nevezik tangens mértéknek.

Ezen két definíció által motiválva alkotta meg Buczolicz Zoltán a mikrotangens halmaz fogalmát: vegyünk egy  $f$  folytonos függvényt és a grafikonján egy  $(x_0; f(x_0))$  pontot, majd nagyítsuk fel a pont környezetében látott grafikonrészletet. Ezt toljuk el úgy, hogy  $(x_0; f(x_0))$  éppen az origóba essen, majd a kapott halmazt szorítsuk meg a  $[-1, 1]^2$  négyzetre. Így kapunk egy kompakt halmazt. Ily módon, egyre nagyobb mértékű nagyítások által nyerhetjük síkbeli kompakt halmazok sorozatát, melynek vizsgálhatjuk a Hausdorff metrikában vett limeszét. Egy síkbeli kompakt halmazt az  $f$  függvény  $x_0$ -beli mikrotangens halmazának hívjuk, ha előáll alkalmas,  $(x_0; f(x_0))$  körüli nagyításokkal nyert kompakt halmazok Hausdorff limeszeként. Az  $(x_0; f(x_0))$  pontot  $f$  univerzális mikrotangens pontjának hívjuk, ha minden  $[-1, 1]$ -en vett, 0-ban 0 értéket felvevő folytonos függvény grafikonja mikrotangens halmaza  $x_0$ -nak, tehát minden ilyen folytonos függvényre létezik  $(x_0; f(x_0))$  olyan környezete, hogy  $f$  grafikonjának odaeső része nagyon hasonlít ezen folytonos függvény grafikonjára. Az univerzális mikrotangens pontok halmazát  $UMT(f)$ -el jelöljük.

Ezen dolgozat célja a folytonos függvények mikrotangens halmazairól szóló alapvető állítások ismertetése. Az eredmények nagy része az univerzális mikrotangens pontok halmazának méretéről szól, mértékelméleti és topológiai szemszögből. A fő, 1.16-os tétel például azt mondja ki, hogy a tipikus  $[0, 1]$ -en folytonos függvény grafikonjának tipikus pontja univerzális mikrotangens pont sőt,  $UMT(f)$ ,  $x$ -tengelyre vett vetülete teljes mértékű. Ezzel szemben látni fogjuk, hogy  $UMT(f)$  bármilyen más irányba vett vetülete már nullmértékű (és ez nem csak tipikus függvény esetén, hanem minden függvényre igaz). Ebből következik, hogy a tipikus  $f$ -re  $UMT(f)$  egy teljesen rektifikálhatatlan halmaz a síkon, így majdnem minden irányban nulla Hausdorff dimenziós a vetülete. Tehát tipikus folytonos függvényre  $UMF(f)$  vetülete majdnem minden irányban nulldimenziós. Felmerül a kérdés, hogy megcserélhető-e ez az állítás, azaz igaz-e, hogy majdnem minden irányban a tipikus folytonos függvényre  $UMT(f)$  nulldimenziós. Ez a probléma nyitott.

A szakdolgozatban két saját eredményt közlünk. Az első, miszerint minden nullmértékű kompakt halmazhoz létezik olyan nála bővebb nullmértékű halmaz, mely előáll alkalmas  $f$ -re  $UMT(f)$ ,  $y$ -tengelyre vett vetületeként.

Ezután némi előkészítés után a harmadik fejezetben bebizonyítjuk az 1.16 tétel  $c$ -Hölder- $\alpha$  függvények körében igaz variánsát.

# Köszönetnyilvánítás

Nagyon szépen köszönöm Buczolic Zoltán Tanár Úr segítségét a témaválasztásban, értékes észrevételeit és főleg hatalmas türelmét, amit ezen szakdolgozat megírásakor irányomban tanusított.

# Tartalomjegyzék

<b>1. Tipikus folytonos függvények mikrotangens halmazai</b>	<b>5</b>
1.1. Definíciók, jelölések . . . . .	5
1.2. Mikrotangens pontok a függvénygrafikonon . . . . .	10
1.3. UMT(f) topológiája . . . . .	12
1.4. UMT(f) vetületei . . . . .	13
1.5. Pakolási dimenzió . . . . .	23
<b>2. Hölder függvények</b>	<b>25</b>
<b>3. Hölder függvények mikrotangens halmazai</b>	<b>30</b>
3.1. Vetületek nagysága . . . . .	30

# 1. fejezet

## Tipikus folytonos függvények mikrotangens halmazai

### 1.1. Definíciók, jelölések

A dolgozat során az alábbi jelöléseket használjuk:

- $\mathbb{R}^2$  pontjait  $(x; y)$ -nal jelöljük, míg az  $x$  és  $y$  végpontú nyílt intervallumot  $(x, y)$ -nal. Adott  $A \subset \mathbb{R}^2$  esetén  $|A|$ ,  $int(A)$  és  $cl(A)$  jelöli az  $A$  halmaz átmérőjét, belsejét és lezártját, ebben a sorrendben.
- Az  $(x; y)$  középső  $2\delta > 0$  oldalú zárt négyzetet  $Q((x; y), \delta)$ -vel jelöljük, azaz  $Q((x; y), \delta) = \{(x'; y') : |x' - x| \leq \delta \text{ és } |y' - y| \leq \delta\}$ .
- Külön jelöljük  $Q((0; 0), 1)$ -et:  $Q^2$ .
- $graph(f)$ -fel jelöljük az  $f$  függvény grafikonját.
- $F \subset \mathbb{R}^2$  esetén  $CENT(F)$ -fel jelöljük  $F \cap Q^2$  azon összefüggőségi komponensét, amelyik tartalmazza a  $(0; 0)$  pontot. Az elnevezés eredete, hogy ezt a komponenst nevezzük a centrális komponensnek.
- A két koordinátatengelyre való vetítést  $\pi_x$ -szel és  $\pi_y$ -nal jelöljük.

- $C[-1, 1]_0$ -val jelöljük azon  $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények halmazát, melyekre  $g(0) = 0$ .
- $x \in \mathbb{R}^p$  esetén  $\|x\|$  jelöli  $x$  euklideszi normáját.

**1.1. Definíció.** Legyen  $(X, d)$  metrikus tér,  $A \subset X$

$$K_\varepsilon(A) = \{x \in X : d(x, A) \leq \varepsilon\}.$$

**1.2. Definíció.** Legyen  $(X, d)$  metrikus tér, és  $A, B \subset X$  kompakt halmazok.  $A$  és  $B$  Hausdorff távolsága:

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(A, B) = \inf\{\varepsilon : A \subset K_\varepsilon(B) \text{ és } B \subset K_\varepsilon(A)\}.$$

**1.3. Definíció.** ( $s$ -dimenziós Hausdorff mérték) Legyen  $(X, d)$  metrikus tér. Az  $A \subset X$  halmaz  $s$ -dimenziós Hausdorff előmértéke:

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^s : A \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i, \forall i : |A_i| < \delta\right\}.$$

A  $s$ -dimenziós Hausdorff mértéke:

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A).$$

**1.4. Definíció.** Egy  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt  $c$ -Hölder- $\alpha$ -nak nevezünk, ha

$$|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in [0, 1].$$

Ezen függvények terét  $C_c^\alpha([0, 1])$ -el jelöljük.

Mivel  $C_c^\alpha([0, 1])$  a  $C([0, 1])$ -nek zárt altere, így az örökölt topológiával teljes metrikus tér.

**1.5. Definíció.** Azt mondjuk, hogy  $f$  egy  $c^-$ -Hölder- $\alpha$  függvény, ha létezik  $c' < c$  úgy,

hogy  $f$ ,  $c'$ -Hölder- $\alpha$ .

**1.6. Definíció.** Legyen  $\eta : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  a standard magfüggvény:

$$\eta(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\frac{1}{1-\|x\|^2}\right\} & \text{ha } \|x\| \leq 1; \\ 0 & \text{különben;} \end{cases}$$

és legyen

$$\eta_r(x) = c_r \eta\left(\frac{x}{r}\right),$$

ahol  $c_r$ -t úgy választjuk meg, hogy  $\int_{\mathbb{R}^p} \eta_r(x) dx = 1$  teljesüljön.

Bizonyítás nélkül mondjuk ki a következő, alapvető fontosságú tételt (lásd [7], 8.4 tétel).

**1.7. Tétel.** (Baire-kategória tétel) Legyen  $X$  teljes metrikus tér és minden  $n \in \mathbb{N}$ -re  $U_n$  sűrű nyílt halmaz. Ekkor  $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$  sűrű.

Nem nehéz látni, hogy a Vitali lefedési tételnek ([8] 2.8 Tétel) a zárt négyzetekre megfogalmazott variánsa is igaz.

**1.8. Tétel.** (Vitali lefedési tétel) Legyen  $\mu$  egy Radon mérték  $\mathbb{R}^2$ -en,  $A \subset \mathbb{R}^2$  és  $\mathcal{Q}$  zárt négyzetek családja úgy, hogy  $A$  minden pontja tetszőlegesen kis sugarú négyzetnek középpontja  $\mathcal{Q}$ -ból, azaz

$$\forall (x; y) \in A, \quad \inf \left\{ r : Q((x; y), r) \in \mathcal{Q} \right\} = 0.$$

Ekkor léteznek diszjunkt  $Q_i \in \mathcal{Q}$  négyzetek, hogy

$$\mu\left(A \setminus \bigcup_i Q_i\right) = 0.$$

**1.9. Definíció.** Az  $f \in C[0, 1]$  függvény mikrotangens (MT) halmazainak rendszerét az  $x_0 \in (0, 1)$  pontban  $f_{MT}(x_0)$ -val jelöljük és a következőképpen definiáljuk:  $\delta_n > 0$



esetén legyen

$$F(f, x_0, \delta_n) = \frac{1}{\delta_n} \left( \left( \text{graph}(f) \cap Q((x_0; f(x_0)), \delta_n) \right) - (x_0; f(x_0)) \right)$$

tehát a  $\text{graph}(f)$  halmaz  $Q((x_0; f(x_0)), \delta_n)$ -be eső részét  $1/\delta_n$ -szeresére nagyítjuk, majd eltoljuk  $Q^2$ -be. Egy  $F$  halmaz az  $f$  mikrotangens halmaza (MT halmaza)  $x_0$ -ban, azaz  $F \in f_{MT}(x_0)$  ha létezik  $\delta_n \searrow 0$ , hogy  $F(f, x_0, \delta_n)$  konvergál  $F$ -hez a Hausdorff metrikában. Az  $F$  halmaz az  $f$  egy centrális mikrotangens (CMT) halmaza  $x_0$ -ban, azaz  $F \in f_{CMT}(x_0)$  ha létezik  $\delta_n \searrow 0$ , hogy  $CENT(F(f, x_0, \delta_n))$  konvergál  $F$ -hez a Hausdorff metrikában.

Könnyen látható, hogy ha  $f$  differenciálható  $x_0$ -ban, akkor  $f_{MT}(x_0) = f_{CMT}(x_0)$  és ez a halmaz egyedül az origón átmenő  $f'(x_0)$  meredekségű egyenesből áll. További információért lásd [6, 2.0.3 Állítás].

**1.10. Definíció.** Azt mondjuk, hogy  $x_0$  grafikonyszerű vagy centrális grafikonyszerű MT-pontja  $f$ -nek ha létezik  $g \in C[-1, 1]_0$  hogy  $\text{graph}(g) \cap Q^2 \in f_{MT}(x_0)$ , vagy  $\text{graph}(g) \cap Q^2 \in f_{CMT}(x_0)$ .

Legyen rendre

$$GLMT(f) := \left\{ (x_0; f(x_0)) : x_0 \in [0, 1], x_0 \text{ grafikonyszerű MT-pontja } f\text{-nek} \right\},$$

$$CGLMT(f) := \left\{ (x_0; f(x_0)) : x_0 \in [0, 1], x_0 \text{ centrális grafikonyszerű MT-pontja } f\text{-nek} \right\}$$

a grafikonyszerű és a centrális grafikonyszerű mikrotangens pontok halmaza. Nyilvánvalóan  $CGLMT(f) \supset GLMT(f)$ .

**1.11. Definíció.** Azt mondjuk, hogy  $x_0$  egy univerzális MT-pontja  $f$ -nek, ha  $\text{graph}(g) \cap Q^2 \in f_{MT}(x_0)$  minden  $g \in C[-1, 1]_0$ -ra.

Azon  $(x_0; f(x_0))$  pontok halmazát, melyekre  $x_0$  univerzális MT-pont,  $UMT(f)$ -el jelöljük.

**1.12. Definíció.** Rögzített  $g \in C[-1, 1]_0$  esetén rendre  $GLMT_g(f)$ -el és  $CGLMT_g(f)$ -el jelöljük azon  $(x_0; f(x_0))$  pontok halmazát, melyekre  $graph(g) \cap Q^2 \in f_{MT}(x_0)$ , illetve  $CENT(graph(g) \cap Q^2) \in f_{MT}(x_0)$ .

Nyilvánvalóan  $GLMT_g(f) \subset GLMT(f)$ ,  $GLMT_g(f) \subset CGLMT_g(f) \subset CGLMT(f)$ . Az utolsó tartalmazás azért teljesül, mert mindig tudunk olyan  $g_1 \in C[-1, 1]_0$ -t találni, amelyre  $graph(g_1) \cap Q^2 = CENT(graph(g) \cap Q^2)$ .

## 1.2. Mikrotangens pontok a függvénygrafikonon

Kezdjük egy eredménnyel, ami tetszőleges folytonos függvényre teljesül, nem csak egy reziduális halmazon. Ez a tétel mutatja, hogy egy  $f$  függvény grafikonján a grafikon-szerű és a centrális grafikon-szerű pontok mérhetőségi szemszögből nem alkothatnak túl nagy halmazt.

**1.13. Tétel.** *Bármely  $f \in C[0, 1]$  függvényre a  $GLMT(f)$  és a  $CGLMT(f)$  halmazok  $\sigma$ -véges  $\mathcal{H}^1$ -mértékűek.*

*Bizonyítás.* Mivel  $CGLMT(f) \supset GLMT(f)$ , így elegendő bebizonyítanunk a tételt  $CGLMT(f)$ -re. Adott  $\delta, \varepsilon > 0$  esetén jelölje  $E_{\delta, \varepsilon}$  azon  $(x_0; f(x_0))$  pontok halmazát, amelyekre a  $CENT(F(f, x_0, \delta))$  halmaz nem metszi az  $L_{1, \varepsilon} = \{(t; 1) : |t| \leq \varepsilon\}$  és az  $L_{-1, \varepsilon} = \{(t; -1) : |t| \leq \varepsilon\}$  szakaszokat. Felhasználva, hogy  $f$  folytonos és  $L_{1, \varepsilon} \cup L_{-1, \varepsilon}$  egy zárt halmaz, könnyen látható, hogy  $E_{\delta, \varepsilon}$  relatív nyílt  $graph(f)$ -ben.

Most tegyük fel, hogy  $g \in C[-1, 1]_0$  és  $graph(g) \cap Q^2 \in f_{CMT}(x_0)$ . Ekkor létezik olyan  $\varepsilon > 0$ , amire  $graph(g) \cap (L_{1, \varepsilon} \cup L_{-1, \varepsilon}) = \emptyset$ . Mivel a  $graph(g) \cap Q^2$  és  $L_{1, \varepsilon} \cup L_{-1, \varepsilon}$  halmazok kompaktnak, a háromszög-egyenlőtlenség miatt létezik olyan  $\varepsilon' > 0$ , amire ha  $\text{dist}_{\mathcal{H}}(graph(g) \cap Q^2, CENT(F(f, x_0, \delta))) < \varepsilon'$ , akkor  $CENT(F(f, x_0, \delta))$  nem metszi  $L_{1, \varepsilon} \cup L_{-1, \varepsilon}$ -t. Felhasználva  $f_{CMT}(x_0)$  definícióját, tudunk választani olyan  $\delta_n \searrow 0$  számokat, hogy  $CENT(F(f, x_0, \delta_n))$  nem metszi  $L_{1, \varepsilon} \cup L_{-1, \varepsilon}$ -t. Így

$$(x_0; f(x_0)) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{0 < \delta < \frac{1}{n}} E_{\delta, \varepsilon}.$$

$(x_0; f(x_0)) \in CGLMT(f)$ -ből következik, hogy

$$(x_0; f(x_0)) \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{0 < \delta < \frac{1}{n}} E_{\delta, \frac{1}{m}} = H_0.$$

Ezekután igazoljuk, hogy  $H_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{0 < \delta < \frac{1}{n}} E_{\delta, \frac{1}{m}}$  véges  $\mathcal{H}^1$ -mértékű minden  $m \geq 1$ -re. Ebből persze az is következni fog, hogy az ilyenek megszámlálható uniójaként

előálló  $H_0$ ,  $\sigma$ -véges  $\mathcal{H}^1$ -mértékű.

Az világos, hogy  $H_0$  és  $H_m$  Borel halmazok, így mérhetőek az egydimenziós Hausdorff mérték szerint. Tegyük fel indirekt, hogy  $\mathcal{H}^1(H_m) = \infty$ . Ekkor [3] 4.10-es tétele és 4.10-es feladata miatt bármely fix  $c$ -re tudunk választani egy  $H_c \subset H$  Borel halmazt úgy, hogy  $\mathcal{H}^1(H_c) = c$ . Legyen  $\eta > 0$  adott. Tekintsük minden  $(x_0; f(x_0))$  esetén azon  $Q\left((x_0; f(x_0)), \delta_{n,x_0}\right)$  négyzeteket, amelyekre  $\delta_{n,x_0} < \eta$  és  $CENT(F(f, x_0, \delta_{n,x_0}))$  nem metszi  $L_{1, \frac{1}{m}} \cup L_{-1, \frac{1}{m}}$ -et. Ezek a négyzetek  $H_c$  egy  $\mathcal{Q}$  Vitali-fedését adják. A Vitali lefedési tételt alkalmazva a  $\mu(A) = \mathcal{H}^1(A \cap H_c)$  mértékre, kapjuk a  $Q_k = Q\left((x_k; f(x_k)), \delta_k\right)$  négyzetek diszjunkt rendszerét, ahol  $(x_k; f(x_k)) \in H_c$ ,  $\delta_k \in (0, \eta)$  és ezen négyzetek átmérői kisebbek mint  $2\sqrt{2}\eta$ , valamint  $\mathcal{H}^1(H_c \setminus \cup_k Q_k) = 0$ .

Tehát azt kaptuk, hogy  $(x_k; f(x_k)) \in Q_k = Q\left((x_k; f(x_k)), \delta_k\right)$  minden  $x \in [x_k - \frac{1}{m}\delta_k, x_k + \frac{1}{m}\delta_k]$ -re. Így  $k \neq k'$  esetén az  $[x_k - \frac{1}{m}\delta_k, x_k + \frac{1}{m}\delta_k]$  és  $[x_{k'} - \frac{1}{m}\delta_{k'}, x_{k'} + \frac{1}{m}\delta_{k'}]$  intervallumok  $[0, 1]$  diszjunkt részintervallumai. Ebből következik, hogy  $\sum_k \frac{2}{m}\delta_k \leq 1$  és  $\sum_k |Q_k| = \sum_k 2\sqrt{2}\delta_k \leq \sqrt{2}m$ . Másrészt  $\mathcal{H}^1(H_c \setminus \cup_k Q_k) = 0$ -ból következik, hogy  $\sum_k |Q_k| > \frac{c}{2}$  kicsiny  $\eta$  értékekre, ami viszont lehetetlen, ha  $c > 2\sqrt{2}m$ .  $\square$

R.D. Mauldin és S.C. Williams [9] eredménye mutatja, hogy egy tipikus folytonos függvény grafikonja 1 Hausdorff dimenziós, de nem  $\sigma$ -véges  $\mathcal{H}^1$ -mértékű, így ebben az értelemben a grafikonyszerű, vagy centrális grafikonyszerű mikrotangens pontok halmaza egy kicsiny részét képezi a függvénygrafikonnak. Ahogy azt később látni fogjuk, kategória szempontból már más a helyzet. A következő három állítás mutatja, hogy ezen kicsiség ellenére a  $GLMT(f)$  és  $CGLMT(f)$  halmazok  $x$ -tengelyre eső vetülete egy reziduális függvényhalmazon teljes mértékű.

### 1.3. UMT(f) topológiája

**1.14. Lemma.** *Ha  $g \in C[-1, 1]_0$  és  $f \in C[0, 1]$ , akkor  $\text{graph}(f)$  topológiájában  $GLMT(f)$  egy  $G_\delta$  halmaz.*

*Bizonyítás.* Adott  $\varepsilon > 0$ -ra

$$E'_{q,\varepsilon} = \left\{ (x_0; f(x_0)) : \text{dist}_{\mathcal{H}}(F(f, x_0, q), \text{graph}(g) \cap Q^2) < \varepsilon \right\}.$$

Jelöljük  $E_{q,\varepsilon}$ -nal  $E'_{q,\varepsilon}$ -nak a  $\text{graph}(f)$  topológiájában vett belsejét. Ekkor világos, hogy

$$GLMT_g(f) \supset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{q < \frac{1}{m}} E_{q, \frac{1}{n}}.$$

Másrészt, ha  $(x_0; f(x_0)) \in GLMT_g(f)$  és  $n, m \in \mathbb{N}$  adottak, akkor választhatunk  $GLMT_g(f)$  definíciója alapján  $\delta < \frac{1}{m}$ -et, hogy  $\text{dist}_{\mathcal{H}}(F(f, x_0, \delta), \text{graph}(g) \cap Q^2) < \frac{1}{n}$ . Vegyük észre, hogy  $f$  csak megszámlálható sok intervallumon lehet konstans illetve csak megszámlálhatóan sok különböző szigorú lokális szélsőértéke lehet. Adott esetben választva egy picivel nagyobb  $q \in (\delta, \frac{1}{m})$  értéket, még mindig fennáll

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(F(f, x_0, q), \text{graph}(g) \cap Q^2) < \frac{1}{n} \tag{1.1}$$

és most már feltehetjük, hogy  $f$  nem konstans és nincs szigorú lokális szélsőértéke  $Q((x_0; f(x_0)), q)$  határán. Ekkor  $f$ ,  $x_0$ -beli folytonossága és (1.1) miatt választhatunk  $\delta' \in (0, q - \delta)$ -t, hogy  $\forall x' \in (x_0 - \delta', x_0 + \delta')$  esetén  $\text{dist}_{\mathcal{H}}(F(f, x, q), \text{graph}(g) \cap Q^2) < \frac{1}{n}$  és így  $(x_0; f(x_0)) \in E_{q, \frac{1}{n}}$ . Tehát kijött a másik irányú tartalmazás is, azaz

$$GLMT_g(f) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{q < \frac{1}{m}} E_{q, \frac{1}{n}}$$

□

## 1.4. UMT(f) vetületei

**1.15. Lemma.** *Adott  $g \in C[-1, 1]_0$  függvény esetén  $C[0, 1]$  egy sűrű  $G_\delta$  halmazát alkotják azon  $f \in C[0, 1]$  függvények, amelyekre  $\lambda(\pi_x(GLMT_g(f))) = \lambda(\pi_x(CGLMT_g(f))) = 1 = \lambda([0, 1])$ .*

Ezt a lemmát nem bizonyítjuk, mert a 3. fejezetben bebizonyítunk egy hasonló állítást a  $c$ -Hölder- $\alpha$  függvények körében, aminek a bizonyítása ezen a bizonyításon alapszik és ehhez nagyon hasonló. Az érdeklődő olvasó [1]-ben (Lemma 3) olvashat többet.

**1.16. Tétel.** *Létezik  $C[0, 1]$ -nek egy sűrű  $G_\delta$  részhalmaza  $\mathcal{G}$ , amire  $\lambda(\pi_x(UMT(f))) = 1$  minden  $f \in \mathcal{G}$ -re. Továbbá,  $UMT(f)$  egy sűrű  $G_\delta$  halmaz  $graph(f)$  topológiájában. Ezáltal a tipikus  $C[0, 1]$ -beli folytonos függvény esetén majdnem minden  $x \in [0, 1]$  univerzális MT-pont és  $graph(f)$  tipikus pontja  $UMT(f)$ -ben van.*

*Bizonyítás.* Legyen  $\{g_n\}_{n=1}^\infty$  egy megszámlálható sűrű rendszer  $C[-1, 1]_0$ -ban. Az 1.15 lemma alapján minden egyes  $g_n$ -hez létezik  $C[0, 1]$  egy  $\mathcal{G}^n$  sűrű  $G_\delta$  részhalmaza úgy, hogy  $\lambda\left(\pi_x\left(GLMT_{g_n}(f)\right)\right) = 1$  minden  $f \in \mathcal{G}^n$ -re. Legyen  $\mathcal{G} = \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{G}^n$ .

Tegyük fel, hogy  $f \in \mathcal{G}$  és  $g \in C[-1, 1]_0$  adottak. Azt szeretnénk megmutatni, hogy majdnem minden  $x_0 \in [0, 1]$ -re  $graph(g) \cap Q^2 \in f_{MT}(x_0)$ . Legyen

$$X = \bigcap_{n=1}^\infty \pi_x\left(GLMT_{g_n}(f)\right) = \pi_x\left(\bigcap_{n=1}^\infty GLMT_{g_n}(f)\right).$$

Ekkor  $\lambda(X) = 1$ . Tegyük fel, hogy  $x_0 \in X$  és  $\varepsilon > 0$  adott. Mivel  $\{g_n\}_{n=1}^\infty$  sűrű, választhatunk olyan  $g_n$ -t, amire

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}\left(graph(g_n) \cap Q^2, graph(g) \cap Q^2\right) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.2)$$

Mivel  $x_0 \in X$  és  $f \in \bigcap_{m=1}^\infty \mathcal{G}^m \subset \mathcal{G}^n$ , tudunk választani olyan  $\delta \in (0, \varepsilon)$ -t, hogy

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}\left(F(f, x_0, \delta) \cap Q^2, graph(g_n) \cap Q^2\right) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.3)$$

Így, (1.2)-t és (1.3)-t összevetve, bármely  $\varepsilon > 0$ -ra létezik  $\delta \in (0, \varepsilon)$ , hogy

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(F(f, x_0, \delta), \text{graph}(g) \cap Q^2) < \varepsilon.$$

Tehát  $\text{graph}(g) \cap Q^2 \in f_{MT}(x_0)$ .

A fentiekben igazából azt is megmutattuk, hogy ha  $(x_0; f(x_0)) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} GLMT_{g_n}(f)$ , akkor  $(x_0; f(x_0)) \in UMT(f)$ . A másik irányú tartalmazás pedig nyilvánvaló, így adódik, hogy

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} GLMT_{g_n}(f) = UMT(f).$$

Mivel  $f$  folytonos,  $\lambda(X) = 1$  miatt  $\bigcap_{n=1}^{\infty} GLMT_{g_n}(f)$  sűrű  $f$  grafikonjában. 1.14 miatt a  $\bigcap_{n=1}^{\infty} GLMT_{g_n}(f)$  metszet,  $\text{graph}(f)$  egy  $G_{\delta}$  részhalmaza. Ezekből következik, hogy az  $UMT(f)$  halmaz  $\text{graph}(f)$  egy sűrű  $G_{\delta}$  részhalmaza.  $\square$

Annak ellenére, hogy  $UMT(f)$ -nek nagy a vízszintes vetülete, megmutatjuk, hogy minden más irányban nullmértékű a vetülete. Így ez a halmaz teljesen rektifikálhatatlan. Ugyanis ha metszene egy rektifikálható halmazt, akkor a metszet egy olyan pozitív  $\mathcal{H}^1$ -mértékű Borel halmaz lenne, aminek a vetítési tételek értelmében majdnem minden irányba pozitív mértékű lenne a vetülete.

Jelöljük  $g_0$ -val a  $[-1, 1]$ -en azonosan 0 függvényt. Ez esetben persze  $CGLMT_{g_0}(f) = GLMT_{g_0}(f)$  minden  $f \in C[0, 1]$ -re.

**1.17. Lemma.** Minden  $f \in C[0, 1]$ -re  $\lambda(\pi_y(GLMT_{g_0}(f))) = 0$ .

*Bizonyítás.* Használjuk az 1.13 tétel jelöléseit: válasszunk  $\varepsilon = 1$ -et és figyeljük meg, hogy  $\varepsilon' \in (0, 1)$  esetén  $\text{dist}_{\mathcal{H}}(F(f, x_0, \delta), \text{graph}(g_0) \cap Q^2) < \varepsilon'$ -ből következik, hogy  $F(f, x_0, \delta)$  nem metszi az  $L_{1,1} \cup L_{-1,1}$  halmazt, sőt

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon'\delta \text{ is teljesül } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\text{-ra.} \quad (1.4)$$

Mivel  $GLMT_{g_0}(f)$  pontjairól van szó, minden ilyen  $x_0$  pontra és  $n$  pozitív egészre létezik  $\delta_{x_0, n} < \frac{1}{n}$ , hogy  $\text{dist}_{\mathcal{H}}(F(f, x_0, \delta_{x_0, n}), \text{graph}(g_0) \cap Q^2) < \varepsilon'$ . Emiatt alkalmazhadjuk a

Vitali lefedési tételt (1.8 tétel) a

$$\left\{ Q\left(\left(x_0; f(x_0)\right), \delta_{x_0, n}\right) : \left(x_0; f(x_0)\right) \in GLMT_{g_0}(f), n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

rendszerre. A tétel szerint léteznek  $Q_k = Q\left(\left(x_k; f(x_k)\right), \delta_k\right)$  négyzetek, melyek diszjunktak és  $\mathcal{H}^1\left(GLMT_{g_0}(f) \setminus \cup_k Q_k\right) = 0$ . Ebből következik, hogy

$$\lambda(\pi_y(GLMT_{g_0}(f) \setminus \cup_k Q_k)) = 0. \quad (1.5)$$

Két ilyen négyzetnek nem lehetnek egymás fölé eső részei, hiszen  $F(f, x_k, \delta_k)$  nem metszi az  $L_{1,1} \cup L_{-1,1}$  halmazt, így  $f$  nem lenne függvény. Ebből és a négyzetek diszjunktágából következik, hogy  $k \neq k'$  esetén  $[x_k - \delta_k, x_k + \delta_k]$  és  $[x_{k'} - \delta_{k'}, x_{k'} + \delta_{k'}]$  szintén diszjunktak. Így  $\sum_k 2\delta_k < 1$  és (1.4) miatt kapjuk, hogy

$$\lambda(\pi_y(\text{graph}(f) \cap \cup_k Q_k)) < \varepsilon' \sum_k 2\delta_k < \varepsilon'.$$

Ezt (1.5)-tel együtt felhasználva kapjuk, hogy  $\lambda(\pi_y(\text{graph}(f))) < \varepsilon'$  teljesül bármely  $\varepsilon' > 0$  számra és ezzel kész a bizonyítás.  $\square$

Egy vízszintestől különböző,  $m$  meredekségű egyenesre való vetítés esetén is alkalmazhatnánk ezt a gondolatmenetet, csak a  $g_0$  függvény helyett a  $g_m(x) = \frac{-1}{m} \cdot x$  lineáris függvényt, illetve  $GLMT_{g_m}(f)$ -et kellene vizsgálnunk.

**1.18. Tétel.** *Minden  $f \in C[0, 1]$ -re  $\lambda(\pi_y(UMT(f))) = 0$ . Tehát egy folytonos függvény esetében majdnem minden  $y$  ösképhalmaza nem tartalmaz  $UMT(f)$ -beli pontot.*

*Bizonyítás.* Mivel  $UMT(f) \subset GLMT_{g_0}(f)$ , így a tétel következik az 1.17 Lemmából.  $\square$

Azt megmutattuk, hogy  $UMT(f)$   $y$ -tengelyre eső vetülete csak nullmértékű lehet, felmerül azonban a kérdés, hogy előállhat-e minden nullmértékű halmaz ilyen módon.



Először vegyük észre, hogy mivel  $UMT(f)$  egy Borel halmaz, csakis analitikus nullmértékű halmazok jönnek szóba. Ebben a kérdésben a következő állítást sikerült belátni.

**1.19. Definíció.** Legyen  $K \subset \mathbb{R}$  nullmértékű kompakt halmaz.  $K$  egy fedőrendszerének nevezzük az  $\{I_n\}_{n=1}^\infty$  halmazokat, ha

- minden  $n$ -re  $K \subset I_n$
- $I_n$  véges sok diszjunkt zárt intervallum uniója:  $I_n = \cup_{i=1}^{k_n} I_{n,i}$
- $\sum_{i=1}^{k_n} |I_{n,i}| < \frac{1}{n}$
- $\forall n \geq 0, \forall 1 \leq l \leq k_n$  és  $\forall 1 \leq m \leq k_{n+1}$  esetén  $I_{n+1,m} \cap I_{n,l} = I_{n+1,m}$  vagy  $I_{n+1,m} \cap I_{n,l} = \emptyset$ .

A triadikus Cantor-halmaznak például egy fedőrendszerét kapjuk, ha  $I_n$ -nek vesszük a Cantor-halmaz definíciójában az  $n$ . szinten fellépő intervallumok unióját. Tetszőleges kompakt nullmértékű halmazhoz könnyen találhatunk fedőrendszert. Indukciót használva tegyük fel, hogy  $I_{n-1}$  már adott. A nullmértékűség definícióját felhasználva vegyünk egy  $1/n$ -nél kisebb összhosszúságú nyílt intervallumokból álló  $\{U_k\}_{k=1}^\infty$  fedést. A kompaktság miatt ebből kiválaszthatunk egy véges fedést, az ebben szereplő nyílt intervallumokhoz hozzávéve a végpontjaikat, kapunk véges sok zárt intervallumot, melyek unióját elmetszve  $I_{n-1}$ -gyel, egy  $I_n$ -nek megfelelő halmazt kapunk.

**1.20. Tétel.** Tetszőleges  $K \subset \mathbb{R}$  nullmértékű kompakt halmazhoz létezik olyan  $f \in C[0, 1]$  függvény, melyre  $K \subseteq \pi_y(UMT(f))$ .

*Bizonyítás.* Rögzítsük  $K$  egy fedőrendszerét  $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ -t. Konstruálni fogunk egy  $C \subset [0, 1]$  kompakt halmazt, amire  $f|_C(C) = K$  fog teljesülni, sőt  $f$  egy bijekció lesz  $C$  és  $K$  között. Minden  $x \in C$ -re  $(x; f(x)) \in UMT(f)$  lesz, így teljesülni fog, hogy  $K \subseteq \pi_y(UMT(f))$ . Igaz lesz továbbá, hogy  $C$ -nek létezik olyan fedőrendszere  $\{J_n\}_{n=1}^\infty$ , amihez létezik olyan  $\{s_n\}_{n=1}^\infty$  pozitív egész számokból álló szigorúan növény sorozat, hogy  $I_{s_n}$  és  $J_n$  ugyanannyi zárt intervallum uniójaként áll elő. Ez azt jelenti, hogy a két fedőrendszer viszonylag hasonló, ezen a hasonlóságon fog alapulni a bijekció.

Vegyük  $C[-1, 1]_0$  egy  $\{h_m\}_{m=1}^\infty$  sűrű részhalmazát. A mikrotangens pontok létrehozásánál elég, hogy ezen függvények grafikonjait közelítsük tetszőleges pontossággal. Soroljuk fel a  $h_m$  függvényeket oly módon, hogy mindegyik függvény végtelen sokszor szerepeljen a felsorolásban, amit  $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ -nel jelölünk.

A konstrukció  $n$ -edik lépésében meghatározzuk  $s_n$ -et,  $J_n = \bigcup_{i=1}^{k_{s_n}} J_{n,i}$ -t, a  $J_{n,i}$  zárt intervallumoknál nagyobb  $H_{n,i} \supset J_{n,i}$  (még mindig diszjunkt) intervallumokat, melyeknek pontosan a közepében fekszik  $J_{n,i}$ , és az  $f_n^*$  folytonos függvényt. A  $H_{n,i}$  halmazok meghatározása után, berajzoljuk fölérjük (az  $f_{n-1}^*$  függvénygrafikonjának a helyére) egy olyan  $\tilde{g}_n$  függvénygrafikonját, amellyel a kapott függvény  $J_{n,i}$  pontjai felett  $I_{s_n,i}$ -t veszi fel képként, és  $J_{n,i}$  pontjaiban, megfelelő nagyítás mellett a  $g_n$  függvényt  $\frac{1}{2^{n+1}}$ -gyel közelíti. Aztán a berajzolt grafikonrészleteket a két végüknél egy-egy kis intervallumon (tehát itt is átrajzolva az eddigi függvénygrafikont, ezt a zöld szakaszok jelzik az ábrán), folytonosan összekötjük a korábbi függvénygrafikon megmaradt részével. Így kapjuk meg az  $f_{n-1}^*$  függvényből az  $f_n^*$  függvényt (1.1 ábra), amire tehát a  $\tilde{g}_n$  fentebb leírt tulajdonsága miatt teljesül:

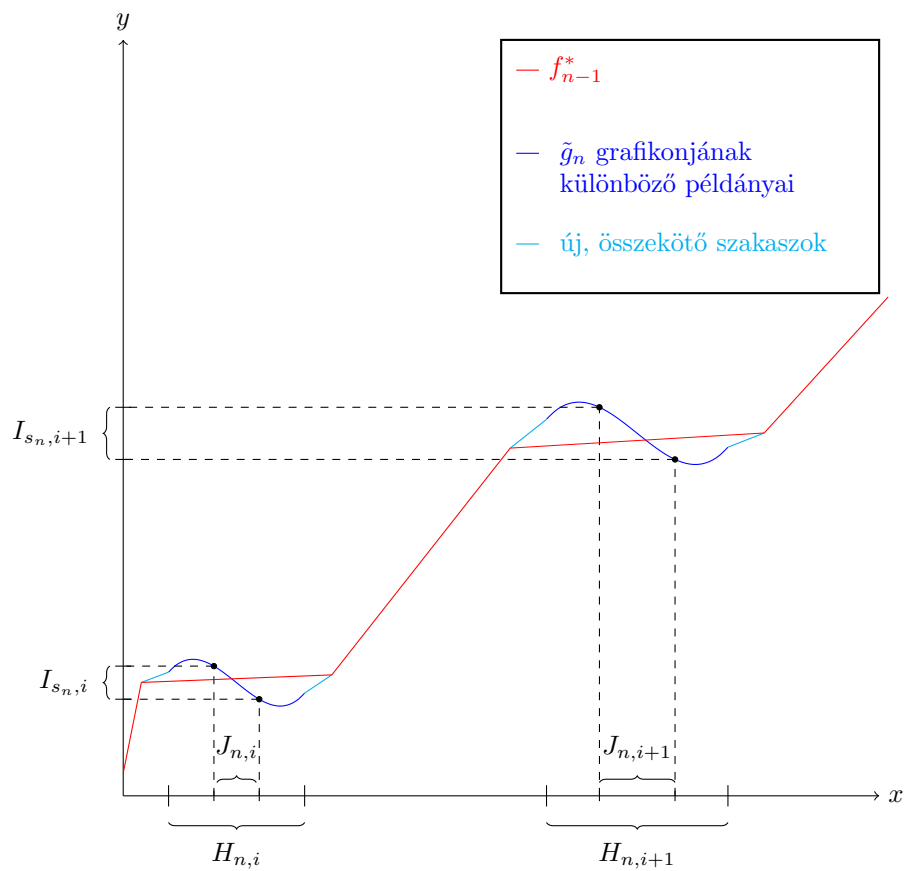
$$\text{dist}_{\mathcal{H}}\left(F(f_n^*, x, \eta), \text{graph}(g_n) \cap Q^2\right) < \frac{1}{2^{n+1}}, \quad x \in J_{n,i}, \quad \eta = \frac{|H_{n,i}| - |J_{n,i}|}{2}\text{-re.} \quad (1.6)$$

Az  $f_n^*$  függvények szuprémum normában Cauchy-sorozatot fognak alkotni, így egyenletesen konvergálnak. Jelöljük  $f$ -el a limeszt. A célunk, hogy az  $f$  legyen a tételben kevert függvény. Midőn az  $f_n^*$  függvényből átrajzolgatásokkal megkonstruáljuk az  $f_{n+1}^*$  függvényt, ügyelünk arra, hogy annyira kicsit változtassunk szuprémum normában  $f_n^*$ -en, hogy az (1.6) típusú közelítések ne romoljanak el túlságosan, azaz a konstrukció végén a

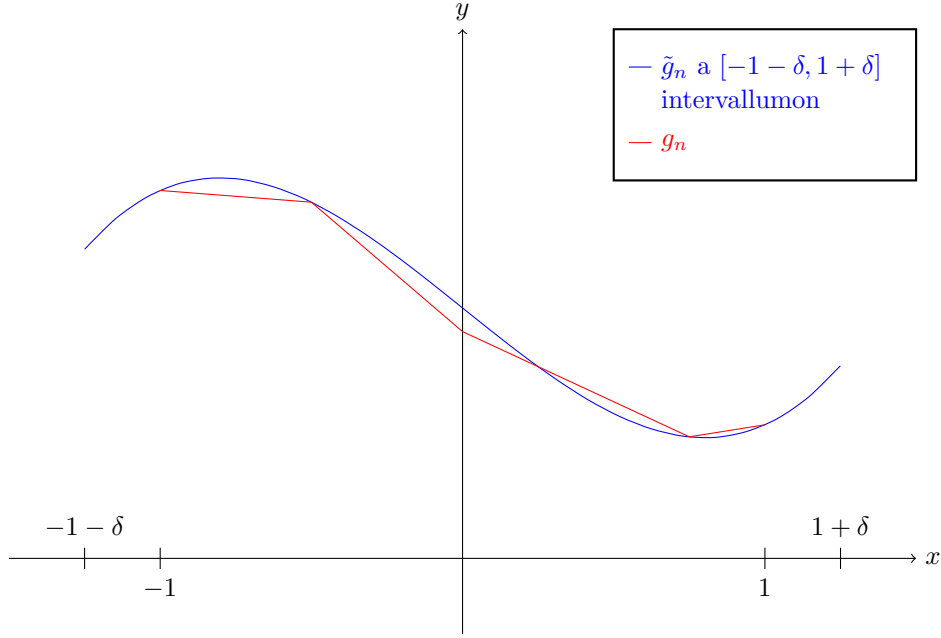
$$\text{dist}_{\mathcal{H}}\left(F(f, x, \eta), \text{graph}(g_n) \cap Q^2\right) < \frac{1}{2^n}, \quad x \in J_{n,i}, \quad \eta = \frac{|H_{n,i}| - |J_{n,i}|}{2}\text{-re.}$$

tulajdonságot kapjuk, minden  $n$ -re,  $i$ -re. Nézzük tehát akkor a konstrukciót.

Legyen  $\tilde{g}_n$  olyan folytonosan differenciálható  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, amely  $[-1, 1]$  semmi-



1.1. ábra.



1.2. ábra.

lyen részintervallumán nem konstans, a grafikonjának nincs szélsőértéke  $Q^2$ -en,  $\tilde{g}_n(0) = 0$ ,  $graph(\tilde{g}_n)$  nem megy át  $Q^2$  egyik csúcsán sem,

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}\left(graph(\tilde{g}_n) \cap Q^2, graph(g_n) \cap Q^2\right) = \text{dist}_{\mathcal{H}}\left(F(\tilde{g}_n, 0, 1), graph(g_n) \cap Q^2\right) < \frac{1}{2^{n+2}},$$

$x \in (-\infty, -1]$  esetén  $|\tilde{g}_n(x) - g_n(-1)| < \frac{1}{2^{n+2}}$ , valamint  $x \in [1, \infty)$  esetén  $|\tilde{g}_n(x) - g_n(1)| < \frac{1}{2^{n+2}}$  (1.2 ábra). A  $\tilde{g}_n$  függvény korlátos intervallumokon való egyenletes folytonossága alapján választhatunk  $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+2}}$ -höz  $\delta$ -t, így

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}\left(F(\tilde{g}_n, x, 1), F(\tilde{g}_n, 0, 1)\right) < \frac{1}{2^{n+2}}, \quad |x| \leq \delta\text{-ra.}$$

amiből így

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}\left(F(\tilde{g}_n, x, 1), graph(g_n) \cap Q^2\right) < \frac{1}{2^{n+1}}, \quad |x| \leq \delta\text{-ra.}$$

Legyen  $\varepsilon' = \left| \tilde{g}_n([- \delta, \delta]) \right|$ . Tegyük fel, hogy  $f_{n-1}^*$ ,  $J_{n-1}$ ,  $s_{n-1}$  adottak. A célunk az, hogy  $F(\tilde{g}_n, 0, 1 + \delta)$  halmaz arányosan kicsinyített mását tegyük be alkalmas  $H_{n,i}$  fölé úgy, hogy az eredetileg  $|x| \leq \delta$  halmaz fölé eső függvénygrafikon rész transzformáltja essen

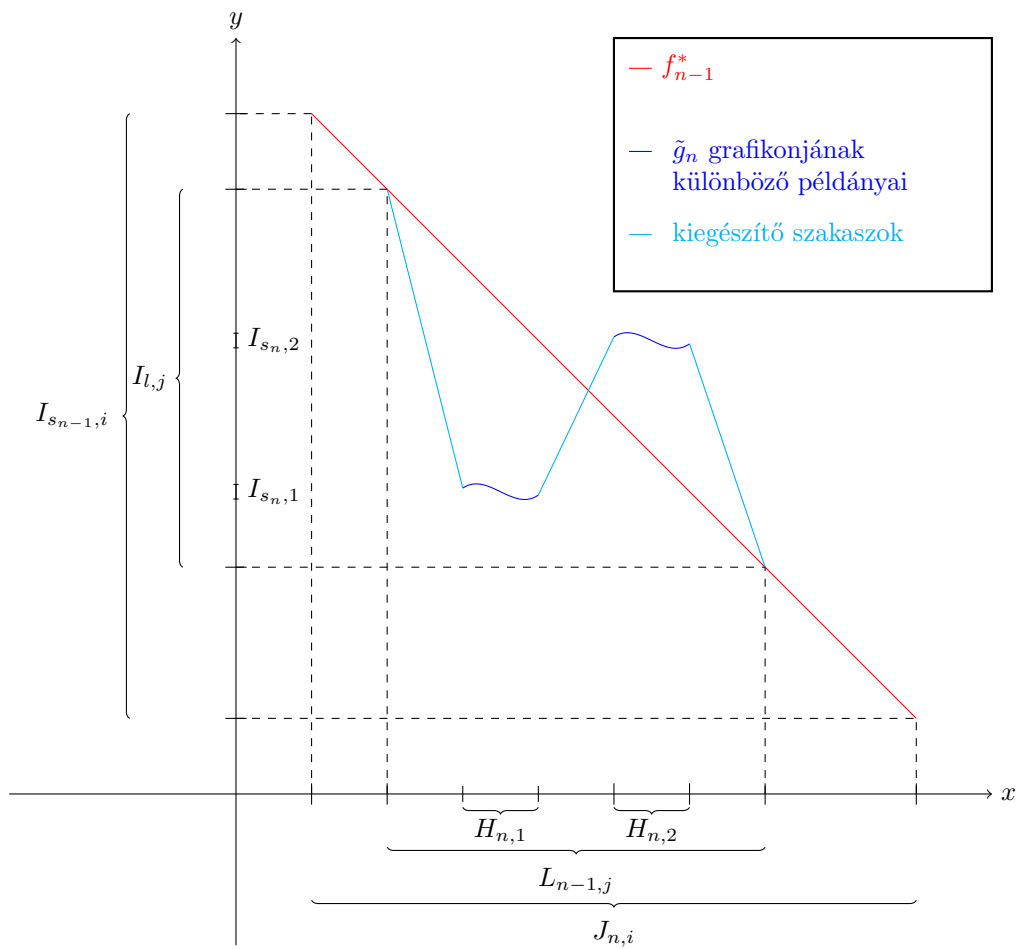
$J_{n,i}$  fölé, ráadásul olyan magasságba, hogy  $f_n^*(J_{n,i}) = I_{s_n,i}$  is teljesüljön. Ekkor valóban  $J_{n,i}$  pontjai lennének azok amelyekben  $\frac{1}{2^{n+1}}$ -gyel tudnánk közelíteni  $g_n$  grafikonját. Az eddigiek alapján teljesülnie kell  $\frac{|J_{n,i}|}{|H_{n,i}|} = \frac{\delta}{1+\delta}$ -nek, és mivel  $f_n^*(J_{n,i}) = I_{s_n,i}$ -t is szeretnénk, emiatt következik az is, hogy  $\frac{|I_{s_n,i}|}{|J_{n,i}|} = \frac{\varepsilon'}{\delta}$ . Ezekből  $\frac{|I_{s_n,i}|}{|H_{n,i}|} = \frac{\varepsilon'}{1+\delta}$ . Az is fontos számunkra, hogy  $i \neq j$  esetén  $H_{n,i} \cap H_{n,j} = \emptyset$  teljesüljön.

Legyen  $c = \min_i \left\{ \left( |H_{n-1,i}| - |J_{n-1,i}| \right) / 2 \right\}$ . Legyen  $l > s_{n-1}$  olyan, hogy minden  $1 \leq j \leq k_l$ -re,  $|I_{l,j}| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot c$ . Olyan  $I_{l,j}$ -k esetén, amelyek részei  $I_{s_{n-1},i}$ -nek, tudunk találni olyan  $L_{n-1,j} \subset J_{n-1,i}$  diszjunkt zárt intervallumokat, amelyek  $f_{n-1}^*$  általi képei pontosan az  $I_{l,j}$  intervallumok. Legyen  $d = \min_j \{ |L_{n-1,j}| \}$ . Válasszuk  $s_n > l$ -t olyannak, hogy  $\frac{1+\delta}{\varepsilon'} \cdot \sum_i |I_{s_n,i}| < d$  teljesüljön. Ezt meg tudjuk tenni, hiszen a fedőrendszer elemeinek mértéke tart 0-hoz.

A fedőrendszer tulajdonsága miatt minden  $k$ -ra létezik egyetlen  $j$ , hogy  $I_{s_n,k} \subset I_{l,j}$ . Ekkor legyen  $H_{n,k}$  olyan zárt intervallum, melynek méretére teljesül, hogy  $|H_{n,k}| = \frac{1+\delta}{\varepsilon'} \cdot |I_{s_n,k}|$ , és  $H_{n,k} \subset \text{int}(L_{n-1,j})$ . A fenti egyenlőtlenség alapján ezen intervallumok előírt hosszainak összege kisebb, mint  $|L_{n-1,j}|$ , így probléma nélkül meg tudjuk őket választani diszjunktaknak. Vegyük észre, hogy az  $|I_{l,j}|$ -re tett feltevések miatt az egész  $L_{n-1,j} \times I_{l,j}$  téglalapban rajzolhatunk át függvénygrafikont, még akkor is teljesülni fog  $|f_n^* - f_{n-1}^*| < \frac{1}{2^{n+1}} \cdot c$ , így az (1.6) típusú közelítések is maximum  $\frac{1}{2^{n+1}}$ -t romlanak (1.3 ábra). Ha esetleg  $I_{s_n,i}$  egyik végpontja megegyezne  $I_{l,j}$ -vel, akkor persze nem tudnánk úgy  $H_{n,i}$  fölé rajzolni  $\tilde{g}_n$  grafikonját, hogy az  $L_{n-1,j} \times I_{l,j}$  téglalapon belül maradjunk, de a kilógás nagyon kicsi lenne, maximum  $\left| \tilde{g}_n([-1 - \delta, 1 + \delta]) \right| \cdot |H_{n+1}|$ . Ha  $s_n$ -t úgy választjuk, hogy  $I_{s_n,i}$  átmérője elegendően kicsi legyen minden  $i$ -re, akkor  $H_{n+1}$  átmérője is kicsi lesz és ez a kilógás így elhanyagolható.

Természetesen ahogy kijelöltük a  $H_{n,k}$  halmazokat, azonnal adódnak a  $J_{n,k}$  halmazok is ( $1 \leq k \leq k_{s_n}$ ) hiszen ezek a  $H_{n,k}$ -k közepén fekszenek előírt hosszal. Most az összes  $H_{n,k}$  fölé rajzoljuk oda  $\tilde{g}_n$  arányosan kicsinyített mását úgy, hogy  $J_{n,k}$ -k fölött a kép legyen az  $I_{s_n,k}$  halmaz.

Bármely két szomszédos  $H_{n,k}$  halmaz között van egy kis hézag és az efölött a hézag fölött lévő függvénygrafikon persze nem csatlakozik folytonosan a  $H_{n,k}$ -k fölé rajzolt



1.3. ábra.

grafikonhoz, de egy alkalmasan kicsi  $\eta$  hosszúságú kis intervallumon lineárisan összeköthetjük ezeket, ráadásul  $H_{n,k} \subset \text{int}(L_{n-1,j})$  miatt ezek a kis intervallumok megválaszthatóak  $L_{n-1,j}$  belsejében is. Ez volt a konstrukció  $n$ . lépése.

Az egy lépésben átrajzolt részekben persze elcsúszik a függvény, de csak maximum  $\frac{1}{2^{n+1}} \cdot c$ -vel, hiszen  $H_{n,k} \subset L_{n-1,j}$  esetén  $f_{n-1}^*(L_{n-1,j}) = I_{l,j}$  és a  $H_{n,k}$  fölé odarajzolt grafikonnál is  $H_{n,k}$  képe részhalmaza lesz  $I_{l,j}$ -nek, amiről már korábban feltettük, hogy  $|I_{l,j}| < \frac{1}{2^{n+1}} \cdot c$ . Tehát  $|f_{n+1}^* - f_n^*| < \frac{1}{2^{n+1}} \cdot c$ . Ebből következik, hogy az egyes lépésekben létrejövő függvények egyenletesen konvergálnak, nevezzük a limeszt  $f$ -nek.

Ha  $y \in K$ , akkor léteznek  $I_{s_1, i_1}, I_{s_2, i_2}, \dots$  zárt halmazok úgy, hogy  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_n, i_n} = \{y\}$ . Mivel  $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_{n, i_n}$  egyelemű, jelöljük a metszetet  $x$ -szel. A konstrukció miatt  $f_n^*(J_{n, i_n}) = I_{s_n, i_n}$  illetve még az is teljesül, hogy  $|f - f_n^*| < \frac{1}{2^{n-1}}$ , tehát

$$f(x) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B\left(I_{s_n, i_n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_n, i_n} = y.$$

Megkaptuk tehát, hogy  $f(C) \supset K$ . Azt is könnyű látni, hogy ez valójában bijekció. Minden  $x \in J_n$  pontra teljesül, hogy

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}\left(F(f, x, \delta_x), \text{graph}(g_n) \cap Q^2\right) < \frac{1}{2^n}$$

alkalmas  $\delta_x$ -el. Tehát minden  $x \in C$  pontra igaz, hogy  $(x; f(x)) \in UMT(f)$ , így mivel  $f(C) = K$ ,  $K \subset \pi_y(UMT(f))$ .

□

## 1.5. Pakolási dimenzió

Ebben a részben az univerzális mikrotangens pontok pakolási dimenziójáról látunk be egy állítást. Ehhez idézzük fel a pakolási dimenzió definícióját:

Legyen

$$\mathcal{P}_\delta^s(F_i) = \sup \left\{ \sum_j |B_j|^s : \{B_j\} \text{ olyan diszjunkt, maximum } \delta \text{ sugarú gömbök családja,} \right. \\ \left. \text{melyek középpontjai } F_i\text{-ben fekszenek} \right\}$$

és  $\mathcal{P}_0^s(F_i) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{P}_\delta^s(F_i)$ . Végül  $\mathcal{P}^s(F)$ , az  $F$  Borel halmaz  $s$ -dimenziós pakolási mértéke a következő:

$$\mathcal{P}^s(F) = \inf \left\{ \sum_i \mathcal{P}_0^s(F_i) : F \subset \cup_i F_i \right\}. \quad (1.7)$$

P. Humke és G. Petruska [5] bizonyította be, hogy a tipikus folytonos függvény grafikonjának pakolási dimenziója 2. A következőkben látni fogjuk, hogy a tipikus folytonos függvény esetén pakolási dimenzió nézőpontból  $UMT(f)$  igencsak nagy halmaz.

Könnyen látható, hogy a tipikus  $f \in C[0, 1]$  függvény tetszőleges  $[a, b] \subset [0, 1]$ -re ( $a < b$ ) való megszorításának grafikonja is 2 pakolási dimenziójú.

**1.21. Tétel.** *A tipikus folytonos  $f \in C[0, 1]$  függvény esetén  $UMT(f)$  pakolási dimenziója 2.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy  $UMT(f)$ ,  $graph(f)$  egy sűrű  $G_\delta$  részhalmaza, illetve  $\mathcal{P}^s(UMT(f)) < \infty$ ,  $s < 2$ -re. Megmutatjuk, hogy létezik olyan  $[a, b] \subset [0, 1]$  intervallum, amelyen  $f$  grafikonjának a pakolási dimenziója kisebb vagy egyenlő, mint  $s$ . (1.7) és a Baire-kategória tétel miatt létezik egy olyan  $F$ -el jelölt  $\cup_i F_i$  fedés és olyan  $i$  index, amire  $graph(f) \subset F$ ,  $\mathcal{P}_0^s(F_i) < \infty$  és  $F_i$  sűrű  $graph(f)$  egy porciójában. Fixáljuk ezt az  $F$  fedést. Válasszunk egy  $[a, b] \subset [0, 1]$  (nemelfajuló) intervallumot, amire  $F_i$  sűrű az  $S = graph(f|_{[a,b]})$  halmazban. Mivel  $F \cap S$  sűrű  $S$ -ben, így a pakolási mérték



tulajdonsága miatt  $\mathcal{P}_0^s(F_i \cap S) = \mathcal{P}_0^s(S)$ . Így  $\mathcal{P}_0^s(S) < \infty$ , amiből következik, hogy  $\mathcal{P}^s(S) < \infty$  tehát  $S$  pakolási dimenziója kisebb, mint 2. Ez ellentmond annak, hogy a tipikus folytonos függvény esetén minden  $[a, b]$  intervallumra  $graph(f|_{[a,b]})$  pakolási dimenziója 2. □

## 2. fejezet

# Hölder függvények

Ebben a fejezetben a fő célunk az 2.4 Lemma bizonyítása, aminek segítségével tudjuk majd a 3. fejezetben bebizonyítani az 1.15 Lemma  $c$ -Hölder- $\alpha$  függvények körében igaz variánsát, a 3.1 Lemmát. Az alább közölt állítások kivétel nélkül [2] 4. fejezetéből valók.

**2.1. Lemma.** *Tegyük fel, hogy  $F \subset \mathbb{R}^p$  és  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  egy  $c$ -Hölder- $\alpha$  függvény. Ekkor létezik egy  $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$   $c$ -Hölder- $\alpha$  függvény úgy, hogy  $\forall x \in F$  esetén  $g(x) = f(x)$ .*

**2.2. Lemma.** *Tegyük fel, hogy  $F \subset \mathbb{R}^p$  kompakt és  $c > 0$  fix. Ekkor az  $F$ -ről képező Lipschitz,  $c$ -Hölder- $\alpha$  függvények az  $F$ -en értelmezett  $c$ -Hölder- $\alpha$  függvények egy sűrű nyílt részhalmazát alkotják.*

*Bizonyítás.* Vegyünk egy tetszőleges  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c$ -Hölder- $\alpha$  függvényt és fixáljunk egy  $\varepsilon > 0$ -t. A 2.1 tételt használva terjesszük ki a függvényt  $\mathbb{R}^p$ -re. Az így kapott  $c$ -Hölder- $\alpha$  függvényt is  $f$ -nek fogjuk nevezni. Köztudott a  $C^\infty$  függvények elméletéből, hogyha tekintjük az  $f_r = f * \eta_r$  konvolúciót ( $\eta_r$ -t 1.6-ban definiáltuk), ez egy  $C^\infty$  függvényt ad és  $f_r \rightarrow f$  a szuprémum normában  $\mathbb{R}^p$  bármely kompakt részhalmazán, amidőn  $r \rightarrow 0+$ . Ezenfelül  $f_r|_F$  is  $c$ -Hölder- $\alpha$ , ugyanis felhasználva a háromszögeyenlőtlenséget és a tényt, hogy  $\eta_r$  tartója a  $\{|z| < r\}$  halmaz,

$$|f_r(x) - f_r(y)| = \left| \int_{\mathbb{R}^p} \eta_r(z) f(x-z) dz - \int_{\mathbb{R}^p} \eta_r(z) f(y-z) dz \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\mathbb{R}^p} \eta_r(z) |f(x-z) - f(y-z)| dz = \int_{\{|z|<r\}} \eta_r(z) |f(x-z) - f(y-z)| dz \\
&= c|x-y|^\alpha \int_{\{|z|<r\}} \eta_r(z) dz = c|x-y|^\alpha.
\end{aligned}$$

Következésképpen le tudunk fixálni egy  $r$ -et, hogy  $f_r|_F$  egy olyan  $c$ -Hölder- $\alpha$  függvény legyen, ami az  $f$  függvény  $F$ -re vett megszorítása szuprémumnorma szerinti  $\varepsilon$ -környezetében van. Tegyük fel, hogy  $F'$  egy kompakt konvex halmaz, ami tartalmazza  $F$ -et. Minthogy  $f_r$  sima, a deriváltja  $F'$ -n korlátos. Következésképpen  $f_r$   $K$ -Lipschitz  $F' \supset F$ -en alkalmas  $K > 0$ -ra.  $\square$

**2.3. Definíció.** Egy függvény  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  szakaszonként affin  $F \subset \mathbb{R}^p$ -n, ha tudunk találni egy egymásba nem nyúló (páronként diszjunkt belsejű), nem-degenerált, zárt szimplexekből álló olyan  $\sigma$  rendszert, amelyre  $F \subset \bigcup_{S \in \sigma} S$  esetén az  $\{S \in \sigma : S \cap F \neq \emptyset\}$  halmaz véges minden korlátos  $B \subset \mathbb{R}^p$ -re, és bármely  $S \in \sigma$ -ra  $f$  megszorítása  $S \cap F$ -re megegyezik egy alkalmas affin függvény  $S \cap F$ -re való megszorításával.

**2.4. Lemma.** Legyen  $F$  kompakt,  $0 < \alpha < 1$  és  $0 < c$  fix. Ekkor az  $F$ -en lokálisan nemkonstans és szakaszonként affin  $c$ -Hölder- $\alpha$  függvények a  $c$ -Hölder- $\alpha$  függvényeknek egy sűrű részhalmazát alkotják.

Mielőtt ezt a lemmát bebizonyítanánk, szükségünk van a következő állításra:

**2.5. Állítás.** Tegyük fel, hogy  $S \subseteq \mathbb{R}^p$  egy nemdegenerált  $p$ -szimplex  $x_0, x_1, \dots, x_p$  csúcsokkal és  $\tilde{f} : \{x_0, \dots, x_p\} \rightarrow \mathbb{R}$  egy  $K$ -Lipschitz függvény alkalmas  $K > 0$ -val. Legyen  $S$  leghosszabb élének hossza  $a > 0$ , valamint legyen  $b = \min_{0 \leq i \leq p} b_i$ , ahol  $b_i$  a távolság  $x_i$  és a többi pont által feszített hipersík között. Ekkor az alábbi módon definiált  $\bar{f} : S \rightarrow \mathbb{R}$

$$\bar{f}(x) = \sum_{i=0}^p \gamma_i \tilde{f}(x_i)$$

függvény  $M$ -Lipschitz, ahol

$$x = \sum_{i=0}^p \gamma_i x_i, \quad \sum_{i=0}^p \gamma_i = 1$$

és

$$M = (p + 1) \cdot K \cdot \frac{a}{b}$$

tehát  $M$  csakis  $\frac{a}{b}$ -n keresztül függ  $S$ -től.

*Bizonyítás.* Minthogy  $S$  a csúcsainak konvex kombinációja és bármely két csúcs össze van kötve egy éllel, így  $|S| = a$ . Egy konstans hozzáadva  $\tilde{f}$ -hoz nem változik sem az állítás feltétele, sem a következménye, tehát feltehető, hogy  $\min \tilde{f} = 0$ , így a K-Lipschitz tulajdonság miatt  $\max \tilde{f} \leq Ka$  is teljesül.

Legyenek  $x, x' \in S$  tetszőleges pontok:

$$x = \sum_{i=0}^p \gamma_i x_i, \quad x' = \sum_{i=0}^p \gamma'_i x_i, \quad \sum_{i=0}^p \gamma_i = \sum_{i=0}^p \gamma'_i = 1$$

Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy  $|\gamma_0 - \gamma'_0|$  a maximális a  $|\gamma_i - \gamma'_i|$  távolságok közül ( $i = 0, 1, \dots, p$ ). Ekkor

$$|\bar{f}(x) - \bar{f}(x')| \leq \sum_{i=0}^p |\gamma_i - \gamma'_i| \cdot \tilde{f}(x_i) \leq (p + 1) \cdot |\gamma_0 - \gamma'_0| \cdot Ka. \quad (2.1)$$

Könnyen látható, hogy  $x$  távolsága az  $x_1, \dots, x_p$  pontok által meghatározott hipersíktól pontosan  $\gamma_0 b_0$ , míg  $x'$  távolsága ugyanettől a hipersíktól  $\gamma'_0 b_0$ . Ezekből következik, hogy

$$|x - x'| \geq |\gamma_0 - \gamma'_0| b_0 \geq |\gamma_0 - \gamma'_0| b. \quad (2.2)$$

Összevetve (2.1)-et és (2.2)-t kapjuk, hogy

$$|\bar{f}(x) - \bar{f}(x')| \leq (p + 1) \cdot |\gamma_0 - \gamma'_0| \cdot Ka \leq (p + 1) \cdot K \cdot \frac{a}{b} |x - x'| = M |x - x'|.$$

□

*A 2.4 lemma bizonyítása.* Tekintsünk egy tetszőleges  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c$ -Hölder- $\alpha$  függvényt és fixáljuk  $\varepsilon > 0$ -t. Mivel  $F$  kompakt, tudunk olyan  $0 < \gamma < 1$ -et választani, amelyre  $\|f - \gamma f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4}$ . Ekkor  $\gamma f$ ,  $c'$ -Hölder- $\alpha$  függvény  $F$ -en,  $c' = c\gamma < c$ -vel. Újra használva

a 2.1 lemmát, kiterjesztjük  $\gamma f$ -et  $\mathbb{R}^p$ -re úgy, hogy a kiterjesztés is  $c'$ -Hölder- $\alpha$  legyen. Válasszunk egy  $F'$  zárt  $p$ -dimenziós kockát, ami tartalmazza  $F$ -et a belsejében. A 2.2 lemma alapján valamilyen  $K > 0$ -val,  $F'$  értelmezési tartománnyal tudunk találni egy  $K$ -Lipschitz  $c'$ -Hölder- $\alpha$ ,  $\tilde{f}$  függvényt, amire  $\|\tilde{f} - \gamma f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4}$ , amiből következik, hogy  $\|\tilde{f} - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ .

A továbbiakban készítünk  $\tilde{f}$ -ből egy szakaszonként  $c$ -Hölder- $\alpha$  függvényt,  $\bar{f}$ -t, amire teljesülni fog

$$\|\bar{f} - f\|_\infty < \varepsilon \quad F\text{-en.} \quad (2.3)$$

Ezt részletezendő, fixáljuk a  $p$ -dimenziós egységkocka egy tetszőleges, egymásba nem nyúló, nem-degenerált  $p$ -szimplexekre való  $\mathcal{U}$  felosztását. (Ezen felbontás létezését nem részletezzük, egyszerű látni.) Most osszuk fel  $F'$ -t ugyanakkora, egymásba nem nyúló hiperkockákra úgy, hogy a kis kockák átmérője egy  $\delta > 0$  konstans alá essen, amit majd később határozunk meg. Osszuk tovább ezeket a hiperkockákat  $\mathcal{U}$ -nak megfelelően szimplexekre, azaz  $\Phi_Q$ -val jelölve az egységkockát  $Q$ -ba vivő hasonlóságot, tekintsük a  $\{\Phi_Q(S) : S \in \mathcal{U}\}$  felosztást minden létrejövő kisebb kockára. Most ha tekintünk egy ilyen módon létrejövő szimplexet amelynek csúcsai  $x_0, \dots, x_p$ , bármely  $x = \sum_{i=0}^p \gamma_i x_i$  konvex kombinációra legyen

$$\bar{f}(x) = \sum_{i=0}^p \gamma_i \tilde{f}(x_i).$$

Figyeljük meg, hogy

$$|\bar{f}(x) - f(x)| \leq \sum_{i=0}^p \gamma_i |\tilde{f}(x_i) - \tilde{f}(x)| + |\tilde{f}(x) - f(x)| \leq K\delta + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{3\varepsilon}{4} \quad (2.4)$$

ha  $\delta < \frac{\varepsilon}{4K}$ . A 2.5 állítás szerint az így létrejövő  $\bar{f}$  függvény Lipschitz tulajdonságú lesz bármely kis szimplexre megszorítva, a Lipschitz konstans pedig invariáns a hasonlóságokra. Viszont bármely ilyen kis szimplex hasonló egy alkalmas  $S \in \mathcal{U}$  szimplexhez, és mivel  $\mathcal{U}$  véges, így véges sok ilyen  $S$  van. Tehát  $\delta$ -tól függetlenül tudunk olyan  $M$ -et választani, hogy  $\bar{f}$ ,  $M$ -Lipschitz legyen bármelyik kis részre megszorítva.

Emiatt  $\bar{f}$  nyilvánvalóan  $M$ -Lipschitz  $F'$ -n is, hiszen bármely  $F'$ -ben lévő szakasz véges

unióként áll elő kisebb szimplexekben lévő szakaszokból.

Válasszunk ki és fixáljunk le egy  $c'' \in (c', c)$ -t. Tekintsünk most egy tetszőleges  $x, y \in F'$ -t.  $\bar{f}$  Lipschitz tulajdonsága miatt

$$|\bar{f}(x) - \bar{f}(y)| \leq M|x - y| = M|x - y|^{1-\alpha}|x - y|^\alpha \leq c''|x - y|^\alpha$$

ha  $|x - y| \leq \left(\frac{c''}{M}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ , azaz ha  $x$  és  $y$  elég közel vannak egymáshoz, akkor a Hölder korlát teljesül. Így a továbbiakban koncentrálhatunk olyan  $x, y$  párokra, amelyekre  $|x - y| > \left(\frac{c''}{M}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ .

Tudunk találni olyan  $x'$  és  $y'$  csúcsokat a kis szimplexekből, amik legfeljebb  $\delta$  távolságra vannak  $x$ -től és  $y$ -től. Ebből

$$|\bar{f}(x) - \bar{f}(y)| \leq |\bar{f}(x) - \bar{f}(x')| + |\bar{f}(x') - \bar{f}(y')| + |\bar{f}(y') - \bar{f}(y)|.$$

Az első és a harmadik tagot a Lipschitz tulajdonsággal, a másodikat a Hölder tulajdonsággal becsülve (minthogy  $\bar{f}(x') = \tilde{f}(x')$  és  $\bar{f}(y') = \tilde{f}(y')$ ) kapjuk, hogy

$$|\bar{f}(x) - \bar{f}(y)| \leq 2M\delta + c'|x' - y'|^\alpha \leq 2M\delta + c'(|x - y| + 2\delta)^\alpha.$$

Amidőn  $\delta \rightarrow 0+$ , a kifejezés a jobb oldalon tart  $c'|x - y|^\alpha$ -hoz. Következésképpen, mivel  $|x - y|$  alulról korlátos, ez a kifejezés elég kicsiny  $\delta$ -ra mindig kisebb, mint  $c''|x - y|^\alpha$ . Tehát megkaptuk, hogy  $\bar{f}$ ,  $c''$ -Hölder- $\alpha$ ,  $F'$ -n. Használva (2.4)-et, a szakaszonként affin  $\bar{f}$  függvény megperturbálható még egy kicsikét úgy, hogy egy lokálisan nem-konstans, szakaszonként affin  $c^-$ -Hölder- $\alpha$  függvényt kapjunk, amire már (2.3) teljesül.  $\square$

## 3. fejezet

# Hölder függvények mikrotangens halmazai

### 3.1. Vetületek nagysága

Amennyiben az 1.15 lemmának és az 1.16 tételnek a  $c$ -Hölder- $\alpha$  függvények körében hasonló variánsát próbálnánk megfogalmazni, elsőre arra gondolhatnánk, hogy módosítjuk  $UMT(f)$  definícióját és ahelyett, hogy az összes  $g \in C[-1, 1]_0$  függvény grafikonját közelítenénk, közelítsük csak az ebbe a térbe eső  $c$ -Hölder- $\alpha$  függvények grafikonjait. Ez persze gyengébb eredményt adna, hiszen a  $c$ -Hölder- $\alpha$  függvények nem alkotnak sűrű halmazt  $C[-1, 1]_0$ -ban, tehát ebből nem következne, hogy minden  $g \in C[-1, 1]_0$  függvény grafikonját is tudnánk közelíteni. A meglepő a következő eredményben, hogy nincs szükség megváltoztatni  $UMT(f)$  definícióját, a  $c$ -Hölder- $\alpha$  függvények grafikonjaiba belezoomolva is képesek leszünk közelíteni az összes  $g \in C[-1, 1]_0$  függvény grafikonját. Ebben a részben az első fejezetben szereplő 1.15 és 1.16 állítások, Hölder függvények körében megfelelő variánsait mondjuk ki és bizonyítjuk be.

**3.1. Lemma.** *Adott  $g \in C[-1, 1]_0$  függvény esetén azon  $f \in C_1^\alpha$  függvények halmaza, melyekre  $\lambda(\pi_x(GLMT_g(f))) = \lambda(\pi_x(CGLMT_g(f))) = \lambda([0, 1])$  egy sűrű  $G_\delta$  halmazt alkot  $C_1^\alpha$ -ban.*

*Bizonyítás.*  $GLMT_g(f) \subset CGLMT_g(f)$ -ből következően elég azt megmutatnunk, hogy  $\lambda(\pi_x(GLMT_g(f))) = 1$  minden  $f \in \mathcal{G}$ -re  $C_1^\alpha$  egy alkalmas  $\mathcal{G}$  sűrű  $G_\delta$  részhalmazára. Fixáljunk  $C_1^\alpha$ -ban egy  $\{f_m\}_{m=1}^\infty$  megszámlálható sűrű rendszert, amelynek elemei Lipschitz függvények és mindegyik  $1^-$ -Hölder- $\alpha$ . Ilyet a 2.4 lemma biztosít számunkra. Tegyük fel, hogy  $n \in \mathbb{N}$  fix. A célunk olyan  $\hat{f}_{m,n} \in C_1^\alpha$  függvényeket és olyan  $\hat{\eta}_{m,n} > 0$  számokat találni, melyekre minden  $f \in B(\hat{f}_{m,n}, \hat{\eta}_{m,n})$  esetén létezik olyan  $X_{m,n} \subset [0, 1]$ , hogy a következők teljesülnek:

- i.**  $\lambda([0, 1] \setminus X_{m,n}) < \frac{1}{2^n}$ ;
- ii.** bármely  $x_0 \in X_{m,n}$  esetén létezik  $\delta_{x_0} \in (0, \frac{1}{n})$ , amire  $\text{dist}_{\mathcal{H}}(F(f, x_0, \delta_{x_0}), \text{graph}(g) \cap Q^2) < \frac{1}{n}$ ;
- iii.**  $B(\hat{f}_{m,n}, \hat{\eta}_{m,n}) \subset B(f_m, \frac{1}{mn})$ .

Ezekután legyen  $\mathcal{G}_n = \bigcup_{m=1}^\infty B(\hat{f}_{m,n}, \hat{\eta}_{m,n})$  és  $\mathcal{G} = \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{G}_n$ .

Mivel  $\mathcal{G}_n$  egy sűrű nyílt halmaz  $C_1^\alpha$ -ban, hiszen egy sűrű ponthalmaz pontjai köré tettünk gömböket, így  $\mathcal{G}$  reziduális. Ha  $f \in \mathcal{G}$ , akkor léteznek  $\{\hat{f}_{m_n,n}\}_{n=1}^\infty$ ,  $\{\hat{\eta}_{m_n,n}\}_{n=1}^\infty$  sorozatok úgy, hogy  $\forall n$ -re  $f \in B(\hat{f}_{m_n,n}, \hat{\eta}_{m_n,n})$ .

Mivel  $\lambda([0, 1] \setminus X_{m_n,n}) < \frac{1}{2^n}$ , a Borel-Cantelli lemma szerint azon  $x_0 \in [0, 1]$  pontok, amelyek végtelen sok  $n$ -re benne vannak  $[0, 1] \setminus X_{m_n,n}$ -ben, nullmértékű halmazt alkotnak. Így, majdnem minden  $x_0 \in [0, 1]$ -re létezik egy  $N_{x_0}$  küszöbindex, hogy minden  $n \geq N_{x_0}$ -ra  $x_0 \in X_{m_n,n}$ . Ebből következik, hogy  $\text{graph}(g) \cap Q^2 \in f_{MT}(x_0)$ , azaz  $(x_0; f(x_0)) \in GLMT_g(f)$ .

Így aztán a lemma állításának bizonyításához elég megkonstruálnunk fix  $n, m \in \mathbb{N}$ -re az  $\hat{f}_{m,n}$  függvényeket, az  $\hat{\eta}_{m,n}$  számokat, és az  $X_{m,n}$  halmazokat. Legyen  $f_0^* = f_m$ ,  $\eta_0^* = \frac{1}{m}$ ,  $X_0^* = \emptyset$ , és  $\tau_1 = 1$ .

Rekurzívan fogjuk meghatározni az  $f_j^*$  függvényeket, az  $\eta_j^*$  számokat és az  $X_j^*$  halmazokat. A 2.4 lemma szerint  $f_0^*$  Lipschitz függvény, és alkalmas  $\varepsilon$ -ra  $(1 - \varepsilon)$ -Hölder- $\alpha$ . A konstrukció közben ügyelni fogunk arra, hogy a konstruálandó  $f_j^*$  függvény  $(1 - \frac{\varepsilon}{2^j})$ -Hölder- $\alpha$  és Lipschitz is legyen, a Lipschitz konstans  $L_j$ -vel elnevezve. A fő gondolat,



hogy a közelítendő  $g$  függvény grafikonjának arányosan kicsinyített példányait rajzoljuk rá  $f_j^*$ -re, ezt ismételve minél több darabon minél kisebb példányokkal. Ügyesen rajzolva, nemcsak a rárajzolt példányok középpontjaiban kapunk valamilyenféle jó közelítést, hanem azon pontok kis környezetében is. Legyen tehát

$$g_1(x) = \begin{cases} g(x) & \text{ha } -1 \leq x \leq 1; \\ g(-1) & \text{ha } x \leq -1; \\ g(1) & \text{ha } x \geq 1. \end{cases}$$

Mivel  $g \in C[-1, 1]_0$ , választhatunk olyan fix  $M$ -et, hogy  $|g|, |g_1| < M$ . Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy  $M \geq 1$ . A  $g_1$  kicsi módosításával készítsünk egy  $g_2 \in C(\mathbb{R})$  függvényt úgy, hogy

- $g_2(0) = 0$ ,
- $|g_2| < M$ ,
- $g_2$  folytonosan differenciálható,
- $g_2$  semmilyen intervallumon sem konstans,
- $\text{dist}_{\mathcal{H}}(\text{graph}(g_2) \cap Q^2, \text{graph}(g) \cap Q^2) = \text{dist}_{\mathcal{H}}(F(g_2, 0, 1), \text{graph}(g) \cap Q^2) < \frac{1}{2n}$ ,
- $g_2$ -nek nincs szélsőértéke  $Q^2$  határán, és
- $g_2$  grafikonja nem megy át  $Q^2$  egyetlen csúcsán sem.

A  $g_2$ -nek ezek a tulajdonságai azért kellenek, mert az intervallumon konstansság, lokális extrémum ... stb.  $Q^2$  határán ugrásokat okozhat a Hausdorff metrikában, amikor  $g_2$  vizsgálatáról áttérünk egy hozzá közeli  $g^*$  függvény vizsgálatára, vagy a 0 középponttól  $x$  középpontra.

Felhasználva  $g_2$  egyenletes folytonosságát korlátos intervallumokon, válasszunk  $\delta = \frac{1}{4n}$ -hez  $\varepsilon = \gamma$ -t. Ekkor minden  $g^* \in B(g_2, \frac{1}{4n})$  esetén

$$\begin{aligned} \text{dist}_{\mathcal{H}}\left(F(g^*, x, 1), F(g_2, 0, 1)\right) &< \text{dist}_{\mathcal{H}}\left(F(g^*, x, 1), F(g_2, x, 1)\right) \\ &+ \text{dist}_{\mathcal{H}}\left(F(g_2, x, 1), F(g_2, 0, 1)\right) < \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} = \frac{1}{2n} \text{ ha } |x| \leq \gamma. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Az első becslés a gömb sugara, a második az egyenletes folytonosság miatt teljesül.

A fenti egyenlőtlenség (3.1)-gyel együtt minden  $g^* \in B(g_2, \frac{1}{4n})$ -re implikálja, hogy

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}\left(F(g^*, x, 1), \text{graph}(g) \cap Q^2\right) < \frac{1}{n} \text{ ha } |x| \leq \gamma. \quad (3.2)$$

Tegyük fel, hogy  $f_j^*$ ,  $\eta_j^*$ ,  $X_j^*$  adott valamilyen  $j \geq 0$ -ra. Ezekből megkonstruáljuk  $f_{j+1}^*$ -et,  $\eta_{j+1}^*$ -et és  $X_{j+1}^*$ -et.

Végig feltételezni fogjuk, hogy  $X_j^*$  véges sok zárt intervallum uniója, és  $[0, 1] \setminus X_j$  minden maximális részintervallumának hossza legalább  $\tau_j$ .

Most válasszunk egy nagy 4-gyel osztható természetes számot  $\kappa_j$ -t úgy, hogy

$$\frac{1}{\kappa_j} < \min\left(\frac{\tau_j}{8}, \frac{\eta_j}{6M}\right), \quad (3.3)$$

és az  $f_j^*$  oszcillációja egy  $4/\kappa_j$  hosszú intervallumon legyen kisebb mint  $\eta_j^*/3$  (ez az utolsó feltétel is elérhető  $\kappa_j$  elég nagyra növelésével, úgyhogy létezik ilyen  $\kappa_j$ ). Tegyük fel, hogy  $k$  egy egész szám, és  $\frac{4k+2}{\kappa_j} \in [0, 1]$ . Ha  $x \in \left[\frac{4k+1}{\kappa_j}, \frac{4k+3}{\kappa_j}\right]$ , akkor

$$f_{j+1}^*(x) := f_j^*\left(\frac{4k+2}{\kappa_j}\right) + \frac{1}{\kappa_j(1+\gamma)} g_2\left(\kappa_j(1+\gamma)\left(x - \frac{4k+2}{\kappa_j}\right)\right), \quad (3.4)$$

azaz rajzoljuk rá az  $F(g_2, 0, 1+\gamma)$  halmaz arányos mását az  $f_j^*$  függvény grafikonjának  $\left[\frac{4k+1}{\kappa_j}, \frac{4k+3}{\kappa_j}\right]$  intervallum feletti részébe.

Tekintsük azt a  $h_1$  lineáris függvényt, ami  $4k/\kappa_j$ -ben 0-t vesz fel,  $(4k+1)/\kappa_j$ -ben pedig  $f_{j+1}^*\left(\frac{4k+1}{\kappa_j}\right) - f_j^*\left(\frac{4k+1}{\kappa_j}\right)$ -t. Ez természetesen Lipschitz függvény, illetve  $f_j^*$  is az volt

korábbi feltevésünk szerint, úgyhogy a kettő összege is az a  $\left[\frac{4k}{\kappa_j}, \frac{4k+1}{\kappa_j}\right]$  intervallumon.

Ha  $x \in \left[\frac{4k}{\kappa_j}, \frac{4k+1}{\kappa_j}\right]$  akkor legyen:

$$f_{j+1}^*(x) := f_j^*(x) + h_1(x).$$

Hasonlóan járunk el a  $\left[\frac{4k+3}{\kappa_j}, \frac{4k+4}{\kappa_j}\right]$  intervallum esetében is. Legyen  $h_2$  az a lineáris függvény, ami  $\frac{4k+3}{\kappa_j}$ -ben  $f_{j+1}^*\left(\frac{4k+3}{\kappa_j}\right) - f_j^*\left(\frac{4k+3}{\kappa_j}\right)$ -t vesz fel,  $\frac{4k+4}{\kappa_j}$ -ben pedig 0-t. Legyen  $\left[\frac{4k+3}{\kappa_j}, \frac{4k+4}{\kappa_j}\right]$  esetén:

$$f_{j+1}^*(x) := f_j^*(x) + h_2(x).$$

$f_{j+1}^*$ -et a  $\frac{4k+1}{\kappa_j}$  és  $\frac{4k+3}{\kappa_j}$  alakú pontokban (3.4) után most már másodszer is definiáltuk, de ez nem okoz problémát, mert ezekben a pontokban a két érték egybeesik.

Vegyük észre, hogy a  $\frac{4l}{\kappa_j}$  alakú pontokban egyáltalán nem is változik meg  $f_j^*$  értéke, így bár  $f_{j+1}^*\left(\frac{4l}{\kappa_j}\right)$ -nek két értéket is definiálunk ( $\frac{4(l-1)+4}{\kappa_j}$  és  $\frac{4l}{\kappa_j}$  alakban felírva), ez a kettő megegyezik, mégpedig  $f_j^*\left(\frac{4l}{\kappa_j}\right)$ -vel. Ahogy korábban említettük,  $f_{j+1}^*$  Lipschitz tulajdonságú  $\left[\frac{4k}{\kappa_j}, \frac{4k+1}{\kappa_j}\right]$ -n, hasonló érvelés miatt  $\left[\frac{4k+3}{\kappa_j}, \frac{4k+4}{\kappa_j}\right]$ -n is, és mivel megegyezik egy folytonosan differenciálható függvénnyel  $\left[\frac{4k+1}{\kappa_j}, \frac{4k+3}{\kappa_j}\right]$ -n, ezért ott is. Mivel a fenti definíciót minden  $\left[\frac{4k}{\kappa_j}, \frac{4(k+1)}{\kappa_j}\right]$  alakú intervallumban alkalmazzuk és ezek véges sokan vannak, ezért kijelenthető, hogy  $f_{j+1}^*$  Lipschitz  $[0, 1]$ -en.

Figyeljük meg, hogy ez a konstans nem függ attól, hogy mekkora  $\kappa_j$ -t választunk. A grafikonra rárajzolt  $g_2$  arányos mása kicsinyítéstől függetlenül ugyanakkora Lipschitz együtthatóval rendelkezik,  $f_j^*$ -nek is van egy rögzített Lipschitz konstansa, és a  $h_1$ ,  $h_2$  lineáris függvények meredeksége is legfeljebb  $\frac{M+L_j}{\kappa_j} / \frac{1}{\kappa_j} = M + L_j$ , úgyhogy ezen konstansok összege biztosan választható  $L_{j+1}$ -nek.

Mivel  $f_{j+1}^*\left(\frac{4k+2}{\kappa_j}\right) = f_j^*\left(\frac{4k+2}{\kappa_j}\right)$ , ezért tetszőleges  $x \in \left[\frac{4k+1}{\kappa_j}, \frac{4k+3}{\kappa_j}\right]$  pontra

$$\begin{aligned} |f_{j+1}^*(x) - f_j^*(x)| &\leq \left| f_{j+1}^*(x) - f_{j+1}^*\left(\frac{4k+2}{\kappa_j}\right) + f_{j+1}^*\left(\frac{4k+2}{\kappa_j}\right) - f_j^*(x) \right| \leq \\ &\left| f_{j+1}^*(x) - f_{j+1}^*\left(\frac{4k+2}{\kappa_j}\right) \right| + \left| f_{j+1}^*\left(\frac{4k+2}{\kappa_j}\right) - f_j^*(x) \right| \leq \frac{M}{\kappa_j} + \frac{L_j}{\kappa_j}. \end{aligned}$$

Mivel  $|h_1|$  maximuma  $\left|f_{j+1}^*\left(\frac{4k+1}{\kappa_j}\right) - f_j^*\left(\frac{4k+1}{\kappa_j}\right)\right| \leq \frac{M+L_j}{\kappa}$ , így a fenti becslés a  $\left[\frac{4k}{\kappa_j}, \frac{4k+1}{\kappa_j}\right]$  alakú intervallumokon is áll, hiszen  $x \in \left[\frac{4k}{\kappa_j}, \frac{4k+1}{\kappa_j}\right]$  esetén

$$|f_{j+1}^*(x) - f_j^*(x)| = |f_j^*(x) + h_1(x) - f_j^*(x)| = |h_1(x)| \leq \frac{M + L_j}{\kappa_j}.$$

Ugyanilyen érvelés működik a  $\left[\frac{4k+3}{\kappa_j}, \frac{4(k+1)}{\kappa_j}\right]$  alakú intervallumokra is.

Ezzel az jött ki, hogy a

$$|f_{j+1}^*(x) - f_j^*(x)| \leq \frac{M + L_j}{\kappa_j}$$

az egész  $[0, 1]$  intervallumon. Mivel  $M$  és  $L_j$  most rögzítettek, így  $\kappa_j$ -t előzetesen elég nagyra választva, ez a különbség tetszőlegesen kicsivé tehető, azaz elérhető, hogy

$$|f_{j+1}^*(x) - f_j^*(x)| \leq \frac{\eta_j^*}{2} \quad (3.5)$$

legyen  $[0, 1]$ -en. Ezzel utólagosan kaptunk egy újabb feltételt  $\kappa_j$  nagyságára vonatkozóan.

Térjünk rá  $f_{j+1}^*$   $1 - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$ -Hölder- $\alpha$  mivoltának tisztázására. Ha

$$|x - y| \leq \left(\frac{1}{L_j} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

akkor

$$|f_{j+1}^*(x) - f_{j+1}^*(y)| \leq L_j |x - y| \leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\right) |x - y|^\alpha.$$

Tehát "kis" távolságok esetén a Lipschitz tulajdonság szolgáltatja a Hölder tulajdonságot. "Nagy" távolságok esetén azt használjuk fel, hogy

$$|x - y| \geq \left(\frac{\left(1 - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\right)}{L_j}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

ezért ha

$$\frac{M + L_j}{\kappa_j} < \frac{\varepsilon}{2^{j+2}} \left(\frac{\left(1 - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\right)}{L_j}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

akkor

$$\begin{aligned}
|f_{j+1}^*(x) - f_{j+1}^*(y)| &= |f_{j+1}^*(x) - f_j^*(x) + f_j^*(x) - f_{j+1}^*(y) + f_j^*(y) - f_j^*(y)| \\
&< |f_{j+1}^*(x) - f_j^*(x)| + |f_{j+1}^*(y) - f_j^*(y)| + |f_j^*(x) - f_j^*(y)| < \\
&< 2 \cdot \frac{M + L_j}{\kappa_j} + \left(1 - \frac{\varepsilon}{2^j}\right) |x - y|^\alpha \\
&< \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \left(\frac{\left(1 - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\right)}{L_j}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + \left(1 - \frac{\varepsilon}{2^j}\right) |x - y|^\alpha \\
&< \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} |x - y|^\alpha + \left(1 - \frac{\varepsilon}{2^j}\right) |x - y|^\alpha < \left(1 - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\right) |x - y|^\alpha.
\end{aligned}$$

(3.5) és (3.2) miatt tetszőleges  $\eta_{j+1}^* < \min\{\frac{\eta_j^*}{2}, \frac{1}{4n}\}$ -re teljesülni fog, hogy bármely  $f \in B(f_{j+1}^*, \eta_{j+1}^*)$  függvény esetén

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}\left(F\left(f, x, \frac{1}{\kappa_j(1+\gamma)}\right), \text{graph}(g) \cap Q^2\right) < \frac{1}{n}$$

ha  $x \in \left[\frac{4k+2}{\kappa_j} - \frac{\gamma}{\kappa_j(1+\gamma)}, \frac{4k+2}{\kappa_j} + \frac{\gamma}{\kappa_j(1+\gamma)}\right]$  és  $B(f_{j+1}^*, \eta_{j+1}^*) \subset B(f_j^*, \eta_j^*)$ . Legyen

$$X_{j+1}^* = X_j^* \cup \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{4k+2}{\kappa_j} - \frac{\gamma}{\kappa_j(1+\gamma)}, \frac{4k+2}{\kappa_j} + \frac{\gamma}{\kappa_j(1+\gamma)}\right] \cap [0, 1].$$

(3.3)-ból és  $\tau_j$  definíciójából következik, hogy bármely maximális intervallum  $X_j$  komplementerében tartalmaz legalább egy  $[\frac{4k}{\kappa_j}, \frac{4(k+1)}{\kappa_j}]$  alakú intervallumot. Emiatt létezik egy olyan  $\gamma^*$  konstans, amely  $j$ -től nem függ, csakis  $\gamma$ -tól úgy, hogy

$$\mathcal{H}^1([0, 1] \setminus X_{j+1}^*) < (1 - \gamma^*) \mathcal{H}^1([0, 1] \setminus X_j^*).$$

Ezáltal, a fenti konstrukciót elég nagy  $j$ -ig ismételve eljuthatunk egy olyan  $X_j^*$  halmazhoz, amelyre  $\mathcal{H}^1([0, 1] \setminus X_{j+1}^*) < \frac{1}{2^n}$ . Ekkor megállunk és rögzítjük  $\hat{f}_{m,n} := f_j^*$ -t,  $\hat{\eta}_{m,n} := \eta_j^*$ -t és  $X_{m,n} := X_j^*$ -t.  $\square$

Ezután az 1.16 állítás Hölder variánsának bizonyítása szinte szóról szóra megegyezik az 1.16 állítás bizonyításával.

**3.2. Tétel.** *Létezik  $C_1^\alpha([0, 1])$ -nek egy sűrű  $G_\delta$  részhalmaza  $\mathcal{G}$ , amire  $\lambda(\pi_x(UMT(f))) = 1$  minden  $f \in \mathcal{G}$ -re. Ezáltal a tipikus  $C_1^\alpha([0, 1])$ -beli függvény esetén majdnem minden  $x \in [0, 1]$  univerzális MT-pont.*

*Bizonyítás.* Legyen  $\{g_n\}_{n=1}^\infty$  egy megszámlálható sűrű rendszer  $C[-1, 1]_0$ -ban. A 3.1 lemma alapján minden egyes  $g_n$ -hez létezik  $C_1^\alpha([0, 1])$  egy  $\mathcal{G}_n$  sűrű  $G_\delta$  részhalmaza úgy, hogy  $\lambda\left(\pi_x\left(GLMT_{g_n}(f)\right)\right) = 1$  minden  $f \in \mathcal{G}_n$ -re. Legyen  $\mathcal{G} = \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{G}_n$ .

Tegyük fel, hogy  $f \in \mathcal{G}$  és  $g \in C[-1, 1]_0$  adottak. Azt szeretnénk megmutatni, hogy majdnem minden  $x_0 \in [0, 1]$ -re  $graph(g) \cap Q^2 \in f_{MT}(x_0)$ . Legyen

$$X = \bigcap_{n=1}^\infty \pi_x\left(GLMT_{g_n}(f)\right) = \pi_x\left(\bigcap_{n=1}^\infty GLMT_{g_n}(f)\right).$$

Ekkor  $\lambda(X) = 1$ . Tegyük fel, hogy  $x_0 \in X$  és  $\varepsilon > 0$  adott. Mivel  $\{g_n\}_{n=1}^\infty$  sűrű, választhatunk olyan  $g_n$ -t, amire

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}\left(graph(g_n) \cap Q^2, graph(g) \cap Q^2\right) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.6)$$

Mivel  $x_0 \in X$  és  $f \in \bigcap_{m=1}^\infty \mathcal{G}^m \subset \mathcal{G}^n$ , tudunk választani olyan  $\delta \in (0, \varepsilon)$ -t, hogy

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}\left(F(f, x_0, \delta) \cap Q^2, graph(g_n) \cap Q^2\right) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.7)$$

Így, (3.6)-ot és (3.7)-et összevetve, bármely  $\varepsilon > 0$ -ra létezik  $\delta \in (0, \varepsilon)$ , hogy

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}\left(F(f, x_0, \delta), graph(g) \cap Q^2\right) < \varepsilon.$$

Tehát  $graph(g) \cap Q^2 \in f_{MT}(x_0)$ . □

# Hivatkozások

- [1] Zoltán Buczolich. Micro tangent sets of continuous functions. *Mathematica Bohemica*, 128(2):147–167, 2003.
- [2] Zoltán Buczolich, Balázs Maga, and Gáspár Vértesy. Generic hölder level sets on fractals. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 516(2):126543, 2022.
- [3] Kenneth Falconer. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons, 2004.
- [4] H. Furstenberg. *Ergodic theory and fractal geometry*, volume 120. American Mathematical Society, 2014.
- [5] P.D. Humke and G. Petruska. The packing dimension of a typical continuous function is 2. *Real Analysis Exchange*, 14(2):345–358, 1988.
- [6] Nagy István. Mikro-tangens halmazok. Bsc szakdolgozat, ELTE, 2020.
- [7] A. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1995.
- [8] Pertti Mattila. *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1995.
- [9] R. Daniel Mauldin and S. C. Williams. On the Hausdorff dimension of some graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, 298:793–803, 1986.