# Homologikus dimenziók, homologikus sejtések

Diplomamunka

**Írta: Kővári Péter Viktor**

Matematikus MSc

**Témavezető: Dr. Ágoston István**

egyetemi docens

Algebra és Számelmélet Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest, 2023.

# Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Dr. Ágoston Istvánnak, a hasznos tanácsait, illetve a segítőkészségét, amivel válaszolt a kérdéseimre. Továbbá szeretnék köszönetet mondani édesanyámnak, aki mindvégig támogatott a diplomamunka megírása alatt.

# Tartalomjegyzék

# 1. Bevezetés

A homologikus algebrai fogalmak, módszerek a topológiából erednek, azonban tisztán algebrai eszközökkel is felépíthetők és tárgyalhatók, illetve algebrai eredmények felhasználásával újabb állítások, tételek igazolhatók. A topológiából eredő homologikus algebrai módszerek a gyűrűelméleten belül is kiválóan alkalmazhatók, például a modulusok reprezentációelméletében (Auslander–Reiten-sorozatok és -gráfok).

Számos dimenziófogalom definiálható a homologikus algebrában. A diplomamunkám célja homologikus dimenziók bemutatása, illetve néhány hozzájuk kapcsolódó, jellemzően általánosan megoldatlan, azonban speciális esetekben igazolt sejtés ismertetése. Illusztrációként bemutatom az általánosított Nakayama-sejtés bizonyítását egy speciális esetben Dräxler és Happel nyomán.

A homologikus algebrában fontos szerepet játszanak a gráfalgebrák. Könnyen kezelhetők, és Gabriel tétele szerint az algebrák egy nagy osztálya megadható gráfalgebrák segítségével. Az ún. Nakayama-algebrák egyszerűségükből kifolyólag, mivel a gráfjuk könnyen leírható, széles körben alkalmazhatók az algebrában. A dolgozatomban körüljárok néhány Nakayama-algebrákhoz kapcsolódó fontosabb állítást. A véges dimenziós algebrák érdekes invariánsa a finitisztikus dimenzió. Nemrég találtak egy viszonylag egyszerű módszert, amellyel kiszámítható a finitisztikus dimenzió Nakayama-algebrák esetén. Ezt a módszert ismertetem Ringel cikke alapján, illetve saját példákat hozok az alkalmazására: minden $n$ természetes számra megadok egy olyan összefüggő Nakayama-algebrát, amelynek végtelen a globális dimenziója, és $n$ a finitisztikus dimenziója.

A dolgozatomban a gyűrűk mindig egységelemesek, a modulusok pedig, ha másként nem jelzem, jobb oldaliak. Mod-$R$, illetve $R$-Mod jelöli a jobb, illetve a bal oldali modulusok kategóriáját, továbbá mod-$R$, illetve $R$-mod jelöli a jobb, illetve a bal oldali végesen generált modulusok kategóriáját. Az algebrák mindig asszociatívak. Számos állítás, illetve sejtés megfogalmazható általánosabban, ún. Artin-algebrákra, azonban én az egyszerűség kedvéért véges dimenziós $K$-algebrákra mondom ki őket, ahol $K$ test. Az olvasóról feltételezem, hogy jártas a gyűrűelméletben, így az alapvető fogalmakat nem definiálom, illetve ismertebb állításokat bizonyítás nélkül használok. Így például az Ext funktorokat sem vezetem be külön, hiszen az alapoktól való felépítésük hosszadalmas lenne.

# 2. Homologikus dimenziók, homologikus sejtések

## 2.1. Alapfogalmak

Ebben az alfejezetben definiálok néhány fogalmat, amelyekre szükség lesz a homologikus algebrai problémák megértéséhez. Ezek a legtöbb gyűrűelmélettel, illetve homologikus algebrával foglalkozó könyvben megtalálhatók, lásd például [1, 16].

**2.1.1. Definíció.** Legyen $M$ modulus. Az $N \leq M$ részmodulusra azt mondjuk, hogy $M$ *lényeges részmodulusa*, ha fennáll, hogy $H \leq M$ és $H \cap N = 0$ esetén $H = 0$. Jelölés: $N \trianglelefteq M$.

**2.1.2. Definíció.** Legyenek $M$ és $I$ modulusok, $i : M \hookrightarrow I$ beágyazás. Azt mondjuk, hogy az $(I, i)$ pár az $M$ modulus *injektív burka*, ha $I$ injektív, és $M \simeq \operatorname{im} i \trianglelefteq I$. Jelölés: $I = I(M)$. Szokás az $I(M)$ modulust is az $M$ injektív burkának nevezni.

**2.1.3. Tétel.** Tetszőleges $M$ modulusnak létezik $I(M)$ injektív burka, és ez izomorfizmus erejéig egyértelmű.

**2.1.4. Megjegyzés.** Azt, hogy miért az $i$ beágyazással definiáljuk az injektív burkot, az alábbi példa magyarázza:

**2.1.5. Példa.** Létezhet $I(M)$-nek olyan $M$-mel izomorf részmodulusa, amelynek $I(M)$ nem injektív burka. Legyen például

$$N = \bigoplus_{j=1}^{\infty} M_j,$$

ahol $M_j \simeq M \not\simeq 0$ minden $j$-re. Legyen $I(N)$ az injektív burok az $i : N \hookrightarrow I(N)$ beágyazással. Tekintsük $N$ alábbi részmodulusát:

$$N' = 0 \oplus \bigoplus_{j=2}^{\infty} M_j.$$

Nyilván $N' \simeq N$, azonban $i(N') \ntrianglelefteq I(N)$, mivel

$$i(M_1 \oplus \bigoplus_{j=2}^{\infty} 0_j) \cap i(N') = 0,$$

ahol $0_j \simeq 0$ minden $j$-re, azonban

$$i(M_1 \oplus \bigoplus_{j=2}^{\infty} 0_j) \neq 0.$$

**2.1.6. Megjegyzés.** A továbbiakban, ha ez nem okoz félreértést, mi is az $I(M)$ modulusra fogunk hivatkozni az $M$ injektív burkaként.

**2.1.7. Definíció.** Legyen $M$ modulus. Az $N \leq M$ részmodulusra azt mondjuk, hogy $M$ *felesleges részmodulusa*, ha fennáll, hogy $H \leq M$ és $N + H = M$ esetén $H = M$. Jelölés: $N \ll M$.

**2.1.8. Definíció.** Legyenek $M$ és $P$ modulusok, $p : P \to M$ szürjektív homomorfizmus. Azt mondjuk, hogy a $(P, p)$ pár az $M$ modulus *projektív fedője*, ha $P$ projektív, és $\ker p \ll P$. Jelölés: $P = P(M)$. Szokás a $P(M)$ modulust is az $M$ projektív fedőjének nevezni.

**2.1.9. Tétel.** Nem minden modulusnak létezik projektív fedője, azonban ha létezik, akkor az izomorfizmus erejéig egyértelmű.

**2.1.10. Megjegyzés.** Amennyiben egyértelmű, hogy mi a $p : P \to P(M)$ szürjektív homomorfizmus, gyakran a $P(M)$ modulusra utalunk projektív fedőként.

**2.1.11. Megjegyzés.** A lényeges és a felesleges részmodulus, illetve az injektív burok és a projektív fedő duális fogalmak.

**2.1.12. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $R$ gyűrű *jobbperfekt*, ha minden $M_R$ modulusnak van projektív fedője. A *balperfekt* gyűrű ezzel analóg módon definiálható.

**2.1.13. Megjegyzés.** (Lásd [6].) Ha $R$ jobb-Artin-gyűrű, akkor $R$ jobbperfekt és balperfekt.

A jobbperfekt gyűrűk definíciójának a gyengítésével jutunk a szemiperfekt gyűrűk fogalmához:

**2.1.14. Definíció.** Az $R$ gyűrűt *szemiperfektnek* nevezzük, ha minden egyszerű $R$-modulusnak létezik projektív fedője. Ez a definíció azzal ekvivalens, hogy minden végesen generált $R$-modulusnak létezik projektív fedője, illetve azzal is, hogy $R$ Jacobson-radikálja szerinti faktora féligegyszerű, és az idempotens elemek felemelhetők modulo a Jacobson-radikál.

**2.1.15. Definíció.** Legyenek $X$ és $Y$ modulusok. Azt mondjuk, hogy az $f : X \to Y$ morfizmus *komagja* az $Y/\operatorname{im} f$ faktormodulus. Jelölés: $\operatorname{coker} f$.

**2.1.16. Definíció.** Az $M$ modulus *injektív (ko)feloldása* alatt az alábbi (véges vagy végtelen) egzakt sorozatot értjük:

$$0 \to M \to I_0 \to I_1 \to I_2 \to \dots,$$

ahol minden $n$ természetes számra $I_n$ injektív. Legyen $C_{n+2}$ az $I_n \to I_{n+1}$ morfizmus komagja, $C_1$ az $M \to I_0$ morfizmus komagja, míg $C_0 = M$. Ekkor azt mondjuk, hogy $C_n$ az *$n$-edik kosyzygymodulus*. Az *injektív kofeloldást minimálisnak* nevezzük, ha $C_n \trianglelefteq I_n$ injektív burok minden $n$-re.

**2.1.17. Megjegyzés.** Minden modulusnak létezik injektív kofeloldása, illetve minimális injektív kofeloldása, továbbá a minimális injektív kofeloldás (valamilyen természetes értelemben) egyértelmű. Vegyük észre, hogy a

$$0 \to C_n \to I_n \to C_{n+1} \to 0$$

sorozat minden $n$-re rövid egzakt sorozat.

**2.1.18. Definíció.** Az $M$ modulus *projektív feloldása* alatt az alábbi (véges vagy végtelen) egzakt sorozatot értjük:

$$\ldots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0,$$

ahol minden $n$ természetes számra $P_n$ projektív. Legyen $K_{n+2}$ a $P_{n+1} \to P_n$ morfizmus magja, $K_1$ a $P_0 \to M$ morfizmus magja, míg $K_0 = M$. Ekkor azt mondjuk, hogy $K_n$ az *$n$-edik syzygymodulus.* A *projektív feloldást minimálisnak* nevezzük, ha $P_n \xrightarrow{p_n} K_n \to 0$ projektív fedő minden $n$-re, azaz $\ker p_n = K_{n+1} \ll P_n$.

**2.1.19. Megjegyzés.** Minden modulusnak létezik projektív feloldása, illetve ha létezik a minimális projektív feloldás, akkor az (valamilyen természetes értelemben) egyértelmű. Ha $R$ jobbperfekt, akkor létezik minimális projektív feloldás. Vegyük észre, hogy a

$$0 \to K_{n+1} \to P_n \to K_n \to 0$$

sorozat minden $n$-re rövid egzakt sorozat.

**2.1.20. Állítás.** (Dimenzióeltolás) Legyen az $N$ modulus injektív kofeloldása az alábbi egzakt sorozat:

$$0 \to N \to I_0 \to I_1 \to I_2 \to \ldots,$$

továbbá $C_1, \ldots, C_n, \ldots$ a megfelelő kosyzygyk. Ekkor

$$\mathrm{Ext}^n(M, N) = \mathrm{Ext}^{n-1}(M, C_1) = \ldots = \mathrm{Ext}^1(M, C_{n-1})$$

tetszőleges $M$ modulusra, illetve $n$ pozitív egészre.

*Bizonyítás.* Legyen $C_0 = N$. $n = 1$-re nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $n \geq 2$, majd alkalmazzuk az Ext funktort az alábbi rövid egzakt sorozatokra:

$$0 \to C_i \to I_i \to C_{i+1} \to 0.$$

Ekkor $i = 0$ esetén az alábbi hosszú egzakt sorozatot kapjuk:

$$\ldots \to \mathrm{Ext}^{n-1}(M, N) \to \mathrm{Ext}^{n-1}(M, I_0) \to \mathrm{Ext}^{n-1}(M, C_1) \to$$

$$\to \mathrm{Ext}^{n}(M, N) \to \mathrm{Ext}^{n}(M, I_0) \to \mathrm{Ext}^{n}(M, C_1) \to \ldots$$

Mivel $I_0$ injektív, így

$$\mathrm{Ext}^{n-1}(M, I_0) = \mathrm{Ext}^{n}(M, I_0) = 0,$$

tehát

$$\mathrm{Ext}^{n}(M, N) \simeq \mathrm{Ext}^{n-1}(M, C_1).$$

$n = 2$ esetén kész vagyunk, így feltehető, hogy $n \geq 3$. Hasonlóan kapjuk $i = 1$ esetén az alábbi hosszú egzakt sorozatot:

$$\ldots \to \mathrm{Ext}^{n-2}(M, C_1) \to \mathrm{Ext}^{n-2}(M, I_1) \to \mathrm{Ext}^{n-2}(M, C_2) \to$$

$$\to \mathrm{Ext}^{n-1}(M, C_1) \to \mathrm{Ext}^{n-1}(M, I_1) \to \mathrm{Ext}^{n-1}(M, C_2) \to \ldots$$

Mivel $I_1$ injektív, így

$$\mathrm{Ext}^{n-2}(M, I_1) = \mathrm{Ext}^{n-1}(M, I_1) = 0,$$

tehát

$$\mathrm{Ext}^{n-1}(M, C_1) \simeq \mathrm{Ext}^{n-2}(M, C_2).$$

Az eddigiekhez hasonlóan folytatva ezt az eljárást kapjuk, hogy

$$\mathrm{Ext}^{n}(M, N) \simeq \mathrm{Ext}^{n-1}(M, C_1) \simeq \mathrm{Ext}^{n-2}(M, C_2) \simeq \ldots \simeq \mathrm{Ext}^{1}(M, C_{n-1}).$$

**2.1.21. Megjegyzés.** Projektív feloldásból kiindulva hasonló formula adódik dimenzióeltolásra.

Fontos algebraosztályt képeznek a gráfalgebrák, a segítségükkel számos példa konstruálható a homologikus algebrában.

**2.1.22. Definíció.** Legyen $\Gamma = (V, E)$ irányított (véges vagy végtelen) gráf, amely tartalmazhat hurok-, illetve többszörös éleket is. A szokásos módon $V$ a csúcsok, $E$ az élek halmaza. Legyen $K$ test, ekkor a $K\Gamma$ *gráfalgebra* az összes irányított útból álló bázis generátuma (mint vektortér). Út alatt itt irányított élek egymáshoz illeszkedő sorozatát értjük, szokás az ilyet pontosabban élsorozatnak is nevezni. A csúcsokat nulla hosszúságú, a hurokéleket pedig egy hosszúságú utaknak tekintjük (azonos kiindulási és végpontokkal). Két báziselem (irányított út) szorzatát értelmezzük az alábbi módon: ha az $a$ út végpontja megegyezik a $b$ út kiindulási pontjával, akkor az $ab$ szorzat a két út egymás után fűzésével kapott út, különben pedig 0. A gráfalgebrában a szorzást a báziselemeken megadott szorzás disztributív kiterjesztéseként definiáljuk.

Könnyen látható, hogy $K\Gamma$-nak pontosan akkor van egységeleme, ha $V$ véges; ekkor az egységelem az összes csúcs összege. $K\Gamma$ pontosan akkor véges dimenziós, ha $\Gamma$ véges (azaz $V$ és $E$ is véges) és aciklikus, azaz nincs benne irányított kör. A továbbiakban általában feltesszük, hogy a gráf véges, de azt nem feltétlenül, hogy aciklikus.

A $K\Gamma$ algebrának olyan $I$ ideáljait szeretnénk definiálni, amelyekre a $K\Gamma/I$ faktornak ugyanaz a gráfja, mint a $K\Gamma$ algebrának, és a faktor véges dimenziós. Az $I \lhd K\Gamma$ ideált *megengedhető ideálnak* nevezzük, ha létezik $n$ természetes szám, hogy $I$ tartalmazza az összes $n$ hosszú utat (ekkor az összes legalább $n$ hosszút is tartalmazza), továbbá $I$ generálható olyan elemek által, amelyek legalább 2 hosszú utak lineáris kombinációi. Az első feltétel azt garantálja, hogy a faktoralgebra véges dimenziós, míg a második feltételnek az a jelentősége, hogy a faktoralgebra ún. Gabriel-gráfja megegyezzen $\Gamma$-val.

A gráfalgebrák faktorainak jelentőségét illusztrálja Gabriel tétele. Mielőtt azonban ezt kimondanánk, szükségünk lesz az ún. bázisgyűrűk fogalmára.

**2.1.23. Definíció.** Az $R$ szemiperfekt gyűrűt *bázisgyűrűnek* nevezzük, ha a Jacobson-radikálja szerinti faktora előáll ferdetestek direkt összegeként. Ez a definíció azzal ekvivalens, hogy R direkt felbonthatatlanok direkt összegére való felbontásában a direkt felbonthatatlan összeadandók páronként nem izomorfak.

**2.1.24. Tétel.** (Gabriel) Ha $K$ algebrailag zárt, $A$ pedig $K$ feletti véges dimenziós bázisalgebra, akkor egyértelműen létezik $\Gamma$ irányított gráf, és létezik (nem feltétlenül egyértelműen) $I \lhd K\Gamma$ megengedhető ideál, hogy $A \simeq K\Gamma/I$. $\Gamma$-t az $A$ algebra Gabriel-gráfjának nevezzük.

**2.1.25. Megjegyzés.** Megmutatható, hogy tetszőleges $A$ véges dimenziós algebra moduluskategóriája ekvivalens egy $B$ bázisalgebra moduluskategóriájával. Azt mondjuk ilyenkor, hogy $A$ és $B$ *Morita-ekvivalensek*. Vagyis Gabriel tétele szerint algebrailag zárt test feletti algebra modulusait vizsgálhatjuk úgy, hogy egy gráfalgebra faktora feletti modulusokat tekintünk.

## 2.2. Homologikus dimenziók

Ebben az alfejezetben definiálok néhány fajta homologikus dimenziót, és bemutatok néhány klasszikus tételt, ezek megtalálhatók például a [16] könyvben.

**2.2.1. Definíció.** Legyen $M$ modulus. Azt mondjuk, hogy $M$ *injektív dimenziója* $n$ (jelölés: $\operatorname{id} M = n$), ha $M$-nek létezik

$$0 \to M \to I_0 \to \ldots \to I_n \to 0$$

$n$ hosszú injektív kofeloldása, de rövidebb nem. $M$ injektív dimenziója végtelen, ha nem létezik $M$-nek véges injektív kofeloldása (jelölés: $\operatorname{id} M = \infty$).

Az Ext funktor segítségével az alábbi módon jellemezhető az injektív dimenzió:

**2.2.2. Állítás.** Legyen az $M$ modulus injektív dimenziója véges. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:

1. $\mathrm{id}\, M = n$.
2. Létezik $N$ modulus, hogy $\mathrm{Ext}^n(N, M) \neq 0$, és minden $K$ modulusra $\mathrm{Ext}^{n+1}(K, M) = 0$.
3. Minden $i \leq n$-hez létezik $N_i$ modulus, hogy $\mathrm{Ext}^i(N_i, M) \neq 0$, és minden $K$ modulusra és $m > n$-re $\mathrm{Ext}^m(K, M) = 0$.

**2.2.3. Definíció.** Legyen $M$ modulus. Azt mondjuk, hogy $M$ *projektív dimenziója* $n$ (jelölés: $\mathrm{pd}\, M = n$), ha $M$-nek létezik

$$0 \to P_n \to \ldots \to P_0 \to M \to 0$$

$n$ hosszú projektív feloldása, de rövidebb nem. $M$ projektív dimenziója végtelen, ha nem létezik $M$-nek véges projektív feloldása (jelölés: $\mathrm{pd}\, M = \infty$).

Az Ext funktor segítségével az alábbi módon jellemezhető a projektív dimenzió:

**2.2.4. Állítás.** Legyen az $M$ modulus projektív dimenziója véges. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:

1. $\mathrm{pd}\, M = n$.
2. Létezik $N$ modulus, hogy $\mathrm{Ext}^n(M, N) \neq 0$, és minden $K$ modulusra $\mathrm{Ext}^{n+1}(M, K) = 0$.
3. Minden $i \leq n$-hez létezik $N_i$ modulus, hogy $\mathrm{Ext}^i(M, N_i) \neq 0$, és minden $K$ modulusra és $m > n$-re $\mathrm{Ext}^m(M, K) = 0$.

**2.2.5. Definíció.** (Lásd például [4].) Az $R$ gyűrű *jobb oldali globális dimenzióját* az alábbi módon definiáljuk:

$$\mathrm{r.gl.dim}\, R = \sup\{\mathrm{pd}\, M : M \in \text{Mod-}R\},$$

ehhez hasonlóan $R$ *bal oldali globális dimenziója*:

$$\mathrm{l.gl.dim}\, R = \sup\{\mathrm{pd}\, M : M \in R\text{-Mod}\}.$$

**2.2.6. Állítás.**

$$\sup\{\operatorname{pd} M : M \in \text{Mod-}R\} = \sup\{\operatorname{id} M : M \in \text{Mod-}R\}.$$

*Bizonyítás.* A 2.2.2 és a 2.2.4 állítás alapján látható, hogy mindkét szuprémum egyenlő az alábbi szuprémummal:

$$\sup\{n : \exists M, N \in \text{Mod-}R : \operatorname{Ext}^n(M, N) \neq 0\}.$$

Könnyen látható, hogy $\text{r.gl.dim}\, R$ pontosan akkor 0, ha minden $R$-modulus projektív, ami azzal ekvivalens, hogy $R$ féligegyszerű. A féligegyszerűség kétoldali feltétel, így az alábbi állítást kapjuk:

**2.2.7. Állítás.** Az alábbiak ekvivalensek:

1. $\text{r.gl.dim}\, R = 0$.
2. $R$ féligegyszerű.
3. $R^{op}$ féligegyszerű.
4. $\text{l.gl.dim}\, R = 0$.

Ebből következik, hogy amennyiben valamelyik globális dimenzió nem 0, akkor a másik sem az; továbbá Jategaonkar példáiból látható, hogy a kétféle dimenzió értéke tetszőleges $(k, l)$ lehet, ha $1 \leq k, l \leq \infty$. Pontosabban, Jategaonkar az alábbit igazolta:

**2.2.8. Megjegyzés.** (Lásd [11].) Legyen $R$ bal-Noether gyűrű. Ekkor

$$\text{l.gl.dim}\, R \leq \text{r.gl.dim}\, R.$$

Minden $(k, l)$ párhoz, ahol $1 \leq k \leq l \leq \infty$, létezik $R_{k,l}$ bal-Noether-gyűrű, hogy $\text{l.gl.dim}\, R_{k,l} = k$ és $\text{r.gl.dim}\, R_{k,l} = l$.

Ugyanakkor véges dimenziós $K$-algebrák esetén a $K$-dualitás miatt a jobb, illetve a bal oldali globális dimenzió megegyezik, ezért ilyenkor csak globális dimenzióról fogunk beszélni:

**2.2.9. Megjegyzés.** Ha $K$ test és $A$ véges dimenziós $K$-algebra, akkor $\mathrm{r.gl.dim}\, A = \mathrm{l.gl.dim}\, A$.

**2.2.10. Tétel.** (Auslander)

$$\mathrm{r.gl.dim}\, R = \sup\{\mathrm{pd}\, R/I : I_R \leq R_R\}.$$

*Bizonyítás.* Ha $\sup\{\mathrm{pd}\, R/I : I_R \leq R_R\} = \infty$, akkor $\mathrm{r.gl.dim}\, R = \infty$, tehát készen vagyunk. Tegyük fel, hogy a szuprémum véges: $\sup\{\mathrm{pd}\, R/I : I_R \leq R_R\} = n$. Ekkor minden $I$ jobbideálra $\mathrm{Ext}^{n+1}(R/I, -) = 0$. Ahhoz, hogy $\mathrm{r.gl.dim}\, R = n$ is teljesüljön, elég, ha $\mathrm{Ext}^{n+1}(-, N) = 0$ fennáll minden $N$ modulusra. Vegyük $N$ egy injektív kofeloldását:

$$0 \to N \to I_0 \to I_1 \to \ldots \to I_n \to I_{n+1} \ldots,$$

ahol $C_1, \ldots, C_n, \ldots$ a megfelelő kosyzygyk. Ekkor $\mathrm{Ext}^{n+1}(M, N)$-et felírhatjuk a kosyzygyk és alacsonyabb rendű Ext funktorok segítségével, a dimenzióeltolás szokásos módszerével:

$$\mathrm{Ext}^{n+1}(M, N) = \mathrm{Ext}^{n}(M, C_1) = \ldots = \mathrm{Ext}^{1}(M, C_n).$$

Legyen $M = R/I$, ekkor a korábbiak alapján

$$\mathrm{Ext}^{1}(R/I, C_n) = \mathrm{Ext}^{n+1}(R/I, N) = 0.$$

Lássuk be, hogy $C_n$ injektív, mert ekkor $\mathrm{Ext}^{1}(-, C_n) = 0$ miatt

$$\mathrm{Ext}^{n+1}(M, N) = \mathrm{Ext}^{1}(M, C_n) = 0$$

tetszőleges $M$ modulusra, azaz készen vagyunk. $C_n$ injektivitásához a Baer-kritériumot használjuk, azaz azt kell belátni, hogy tetszőleges $I$ jobbideálra az $f : I \to C_n$ morfizmus kiterjeszthető az $i : I \hookrightarrow R$ beágyazáson átvezetve egy $\bar{f} : R \to C_n$ morfizmussá. Tekintsük az alábbi diagramot:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & R \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] & R/I \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_n \arrow[r] & \tilde{R} \arrow[r] & R/I \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Az $\bar{f} : R \to C_n$ morfizmus pontosan akkor létezik, ha a második rövid egzakt sorozat felhasad. $\mathrm{Ext}^1(R/I, C_n) = 0$ miatt viszont a második rövid egzakt sorozat valóban felhasad, ezzel beláttuk a tételt.

**2.2.11. Tétel.** Legyen az $R$ gyűrű jobb-Artin, ekkor

$$\mathrm{r.gl.dim}\, R = \max\{\mathrm{pd}\, S : S \in \text{Mod-}R \text{ egyszerű}\}.$$

*Bizonyítás.* $R$ jobb-Artin, így a Hopkins–Levitzki-tétel szerint jobb-Noether is, tehát $R$ kompzícióláncának hossza véges. A Jordan–Hölder-tétel szerint a kompozíciófaktorok egyértelműek, továbbá minden egyszerű modulus előáll egy maximális jobbideál szerinti faktorként, így véges sok egyszerű modulus van, tehát a képlet jobb oldalán vehető maximum. Az előző tétel alapján elég az $R/I$ alakú ciklikus modulusokat vizsgálni, ezek jobb-Artinok, így véges hosszú a kompozícióláncuk. Ha

$$0 \to N \to K \to M \to 0$$

rövid egzakt sorozat, akkor $\mathrm{pd}\, K \leq \max\{\mathrm{pd}\, N, \mathrm{pd}\, M\}$. Ezt felhasználva, a kompozícióhosszra vonatkozó indukcióval kapjuk a tétel állítását.

**2.2.12. Példa.** Az előző tétel alapján tetszőleges $K$ test globális dimenziója 0, mivel egyedül $K$ egyszerű $K$-modulus, és $K$ projektív. Ez abból is következik, hogy $K$ féligegyszerű.

**2.2.13. Tétel.** Legyen $R$ gyűrű, $R[x]$ pedig a felette vett polinomgyűrű, ekkor

$$\operatorname{l.gl.dim} R[x] = \operatorname{l.gl.dim} R + 1,$$

ha valamelyik globális dimenzió végtelen, akkor a másik is az.

**2.2.14. Következmény.** (Hilbert syzygytétele) Legyen $K$ test, ekkor

$$\operatorname{l.gl.dim} K[x_1, \ldots, x_n] = n.$$

*Bizonyítás.* Alkalmazzuk $n$-szer az előző tételt kihasználva, hogy $K$-nak 0 a globális dimenziója.

**2.2.15. Definíció.** (Lásd [17, 3, 4, 6].) Az $R$ gyűrű *(kis, injektív) finitisztikus dimenzióját* az alábbi módon definiáljuk:

$$\operatorname{i.fin.dim} R = \sup\{\operatorname{id} M : M \in \text{mod-}R, \operatorname{id} M < \infty\},$$

ehhez hasonlóan $R$ *(kis, projektív) finitisztikus dimenziója*:

$$\operatorname{p.fin.dim} R = \sup\{\operatorname{pd} M : M \in \text{mod-}R, \operatorname{pd} M < \infty\}.$$

**2.2.16. Definíció.** (Lásd [17, 6].) Az $R$ gyűrű *(nagy, injektív) finitisztikus dimenzióját* az alábbi módon definiáljuk:

$$\operatorname{i.Fin.dim} R = \sup\{\operatorname{id} M : M \in \text{Mod-}R, \operatorname{id} M < \infty\},$$

ehhez hasonlóan $R$ *(nagy, projektív) finitisztikus dimenziója*:

$$\operatorname{p.Fin.dim} R = \sup\{\operatorname{pd} M : M \in \text{Mod-}R, \operatorname{pd} M < \infty\}.$$

Néhány éve találtak egy viszonylag egyszerű módszert a finitisztikus dimenzió kiszámítására az ún. Nakayama-algebrák esetében, ezt később bemutatom, illetve példákat is hozok az alkalmazására.

**2.2.17. Definíció.** (Lásd [19].) Legyen $A$ véges dimenziós $K$-algebra. *$A$ domináns dimenzióját* az alábbi módon definiáljuk: Vegyük $A$ minimális injektív kofeloldását (amennyiben ez véges, tekintsünk rá olyan végtelen kofeloldásként, amelynek egy indextől kezdve minden tagja 0):

$$0 \to A \to I_0 \to I_1 \to I_2 \to \dots .$$

*$A$ domináns dimenziója* legyen

$$\operatorname{domdim} A = \inf\{n : \operatorname{pd} I_n > 0\}.$$

## 2.3. Homologikus sejtések

Számos sejtést lehet megfogalmazni a különféle homologikus dimenziókkal kapcsolatban, a továbbiakban ismertetek néhányat. Ezek közül az egyik legérdekesebb a régóta megoldatlan finitisztikusdimenzió-sejtés. A következő sejtéseket kicsit általánosabb esetben is lehetne vizsgálni, ún. Artin-algebrákra (amelyeket alább definiálok); azonban az egyszerűség kedvéért a továbbiakban véges dimenziós $K$-algebrákkal fogok foglalkozni. Az itt ismertetett definíciók megtalálhatók például a [16] könyvben.

**2.3.1. Definíció.** Azt mondjuk, hogy $A$ *Artin-algebra*, ha $A$ algebra és $A_R$ végesen generált $R$-modulus az $R$ kommutatív Artin-gyűrű felett.

**2.3.2. Sejtés.** (Finitisztikusdimenzió-sejtés, lásd például [21].) Legyen $A$ véges dimenziós $K$-algebra. A sejtés szerint $\text{p.fin.dim}\, A$ ($\text{i.fin.dim}\, A$) véges, illetve az erősebb verzió szerint $\text{p.Fin.dim}\, A$ ($\text{i.Fin.dim}\, A$) véges.

**2.3.3. Sejtés.** (Lásd például [21].) Egy másik sejtés szerint (korábban ezt is emlegették finitisztikusdimenzió-sejtésként)

$$\text{p.fin.dim}\, A = \text{p.Fin.dim}\, A \quad (\text{i.fin.dim}\, A = \text{i.Fin.dim}\, A).$$

Ez a sejtés azonban nem igaz. Zimmermann-Huisgen adott először példát olyan véges dimenziós $K$-algebrákra, amelyeknek a kis, illetve a nagy finitisztikus dimenziója nem egyenlő [20]. Néhány évvel később Smalø megmutatta, hogy a nagy, illetve a kis finitisztikus dimenzió különbségének a szuprémuma valójában végtelen [18]. Természetesen ettől függetlenül még lehet mindkét finitisztikus dimenzió véges.

**2.3.4. Sejtés.** (Nakayama-sejtés, lásd [14, 13, 5].) Legyen $A$ véges dimenziós $K$-algebra. A sejtés szerint, ha $\text{domdim}\, A = \infty$, azaz $A$ minimális injektív kofeloldásában minden modulus projektív, akkor $A$ öninjektív, azaz az $A_A$ modulus injektív.

**2.3.5. Sejtés.** (Általánosított Nakayama-sejtés, lásd [5].) Legyen $A$ véges dimenziós $K$-algebra, továbbá legyen

$$0 \to A \to I_0 \to I_1 \to I_2 \to \dots$$

a minimális injektív kofeloldása. A sejtés szerint minden direkt felbonthatatlan injektív $A$-modulus valamely $I_n$ direkt összeadandója, ahol $I_n$ az egyik a minimális injektív kofeloldásban előforduló modulus.

Az általánosított Nakayama-sejtésből valóban következik a Nakayama-sejtés [5, 8]. A finitisztikusdimenzió-sejtésből szintén következik a Nakayama-sejtés [6, 7]. A finitisztikusdimenzió-sejtést számos speciális esetben sikerült igazolni, például az alábbiban:

**2.3.6. Tétel.** (Green, Zimmermann-Huisgen, lásd [10].) Legyen $A$ bázisalgebra és bal-Artin-gyűrű, amelyre $J^3 = 0$, ahol $J$ a Jacobson-radikált jelöli. Ekkor $A$ finitisztikus dimenziója véges, azaz $\text{p.fin.dim}\, A < \infty$.

Itt az általánosított Nakayama-sejtés bizonyítását mutatom be egy speciális esetre. Ehhez először a reprezentációvéges algebrák fogalmát definiálom:

**2.3.7. Definíció.** Legyen $A$ $K$-algebra. Azt mondjuk, hogy $A$ *reprezentációvéges*, ha a direkt felbonthatatlan modulusok véges sok izomorfiatípusba sorolhatók.

**2.3.8. Tétel.** (Dräxler, Happel, lásd [7].) Legyen $A$ véges dimenziós $K$-algebra, jelölje $J$ a Jacobson-radikált. Ha $J^{2l+1} = 0$, és $A/J^l$ reprezentációvéges valamely $l$ természetes számra, akkor $A$-ra igaz az általánosított Nakayama-sejtés.

**2.3.9. Megjegyzés.** $J^3 = 0$ esetén, mivel $A/J$ automatikusan reprezentációvéges, így ekkor igaz az általánosított Nakayama-sejtés.

A jobb oldali általánosított Nakayama-sejtés szerint minden direkt felbonthatatlan injektív modulus valamely $I_n$ direkt összeadandója. A direkt felbonthatatlan injektív modulusok az egyszerű modulusok injektív burkai, így ez azzal ekvivalens, hogy minden $S_A$ egyszerűre $I(S)$ valamely $I_n$ direkt összeadandója. Ezt dualizálva (a $D = \mathrm{Hom}_K(-, K)$ szokásos dualitással) az $A$ injektív kofeloldásából $DA$ projektív feloldását kapjuk, ahol $P_n = D(I_n)$, így a sejtés azzal ekvivalens, hogy minden ${}_AS$ egyszerűre $P(S)$ valamely $P_n$ direkt összeadandója. Jelölje $\Omega^n M$ $M$ minimális projektív feloldásának az $n$-edik syzygyjét. Használjuk a dimenzióeltolást. Mivel $S$ egyszerű, Hom-ig is elmehetünk. Továbbá használjuk ki, hogy

$$P_n/\mathrm{rad}\, P_n \simeq \Omega^n DA/\mathrm{rad}\, (\Omega^n DA).$$

Így azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{Ext}^n(DA, S) \simeq \mathrm{Ext}^1(\Omega^{n-1} DA, S) \simeq \mathrm{Hom}(\Omega^n DA, S) \simeq \mathrm{Hom}(P_n, S).$$

Ezek alapján a jobb oldali általánosított Nakayama-sejtés azzal ekvivalens, hogy minden $S$ egyszerű bal oldali $A$-modulushoz létezik egy $n$ nemnegatív egész, amelyre $\mathrm{Ext}^n(DA, S) \neq 0$ . Dräxler és Happel ebben a formájában bizonyítja az előző tételt [7].

*Bizonyítás.* Indirekt tegyük fel, hogy létezik a feltételeket kielégítő $A$ algebra és $S$ egyszerű bal oldali $A$-modulus, amelyre $\mathrm{Ext}^i(DA, S) = 0$ minden $i$ nemnegatív egészre. Legyen $S$ injektív burka $Q_0$, $E \leq Q_0$ pedig arra nézve maximális részmodulusa $Q_0$-nak, hogy minden kompozíciófaktora izomorf $S$-sel. Ekkor nyilván $\mathrm{Hom}(S, Q_0/E) = 0$, illetve $\mathrm{Ext}^i(DA, E) = 0$ minden $i$ nemnegatív egészre. $E$ minimális injektív kofeloldása az alábbi alakban írható fel:

$$0 \to E \to Q_0 \to Q_1 \to Q_2 \to \dots$$

Legyen $\nu^- = \mathrm{Hom}_A(DA, -)$ az inverz Nakayama-funktor. Ezt a funktort az előbbi injektív kofeloldásra alkalmazva az alábbi egzakt sorozatot kapjuk:

$$0 \to \nu^- Q_0 \xrightarrow{\alpha_0} \nu^- Q_1 \xrightarrow{\alpha_1} \nu^- Q_2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots$$

Legyen $X_i = \mathrm{im}\, \alpha_i$ minden $i$-re. Ekkor az alábbi egzakt sorozatokat kapjuk:

$$0 \to \nu^- Q_0 \xrightarrow{\alpha_0} \nu^- Q_1 \xrightarrow{\alpha_1} \dots \nu^- Q_i \xrightarrow{\alpha_i} X_i \to 0$$

Ez $E$ injektív kofeloldásának a minimalitása miatt minden $i$-re $X_i$ minimális projektív feloldása. Jelölje $\Sigma^i M$ az $M$ minimális injektív kofeloldásának az $i$-edik kosyzygyjét. $J^{2l+1} Q_0 = 0$ és a

$$0 \to E \to Q_0 \to Q_0/E \to 0$$

rövid egzakt sorozat miatt $\Sigma^1 E = Q_0/E$-re $J^{2l} \Sigma^1 E = 0$. Ehhez hasonlóan a többi kosyzygyre is $J^{2l} \Sigma^i E = 0$, így az inverz Nakayama-funktor alkalmazása után $J^{2l} \nu^- \Sigma^i E = 0$. Ezek alapján $J^{2l} X_i = 0$. $Q_0$ és $E$ választása miatt

$$\mathrm{Hom}(\nu^- Q_0, S) \simeq \mathrm{Hom}(S, Q_0) \neq 0$$

és

$$\mathrm{Hom}(\nu^- Q_1, S) \simeq \mathrm{Hom}(S, Q_1) = 0.$$

$A/J^l$ reprezentációvéges, így megadható a direkt felbonthatatlan véges dimenziós $A/J^l$-modulusok izomorfiatípusai reprezentánsainak egy véges gyűjteménye: $\{C_1, \ldots, C_n\}$. Legyen $M$ tetszőleges véges dimenziós $A$-modulus, amelyre $J^{2l}M = 0$. Ekkor a

$$0 \to J^l M \to M \to M/J^l M \to 0$$

rövid egzakt sorozatban $J^l M$ és $M/J^l M$ tekinthetők $A/J$-modulusoknak is. Ekkor $M_1 := J^l M$ és $M_2 := M/J^l M$ felírható néhány $C_i$ direkt felbonthatatlan modulus direkt összegeként, azaz

$$M_1 \simeq \bigoplus_{j=1}^{n} C_j^{s_j}$$

és

$$M_2 \simeq \bigoplus_{j=1}^{n} C_j^{t_j}.$$

Tegyük fel, hogy $\mathrm{pd}\, M \leq p$ valamely $p$ természetes számra. Tekintsük az alábbi hosszú egzakt sorozatot:

$$\ldots \to \mathrm{Ext}^i(M_2, S) \to \mathrm{Ext}^i(M, S) \to \mathrm{Ext}^i(M_1, S) \to$$

$$\to \mathrm{Ext}^{i+1}(M_2, S) \to \mathrm{Ext}^{i+1}(M, S) \to \mathrm{Ext}^{i+1}(M_1, S) \to \ldots$$

Mivel minden $i > p$-re $\mathrm{Ext}^i(M, S) = 0$, így ilyenkor

$$0 \to \mathrm{Ext}^i(M_1, S) \to \mathrm{Ext}^{i+1}(M_2, S) \to 0$$

egzaktsága miatt $\mathrm{Ext}^i(M_1, S) \simeq \mathrm{Ext}^{i+1}(M_2, S)$, tehát a $K$-dimenziójuk egyenlő. Ezek alapján az $(s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Q}^{2n}$ vektorra minden $i > p$-re fennáll az alábbi egyenlőség:

$$\sum_{j=1}^{n} a(i, j) s_j = \sum_{j=1}^{n} a(i+1, j) t_j,$$

ahol $a(i,j) := \dim_K \operatorname{Ext}^i(C_j, S)$. Legyen ${}_{\mathbb{Q}}L_p \leq {}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}^{2n}$ az az altér, amely azon $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{Q}^{2n}$ alakú vektorokból áll, amelyek kielégítik a

$$\sum_{j=1}^{n} a(i,j)x_j = \sum_{j=1}^{n} a(i+1,j)y_j$$

egyenlőséget minden $i > p$-re. Ekkor $(s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_n) \in L_p$.

Mivel $(L_p)_{p\in\mathbb{N}}$ alterek egy növő sorozata $\mathbb{Q}^{2n}$-ben, létezik $p_0$ természetes szám, hogy $L_p \subseteq L_{p_0}$ minden $p \in \mathbb{N}$-re. Legyen $M := X_{p_0+2}$, ekkor $\operatorname{pd} M = \operatorname{pd} X_{p_0+2} = p_0 + 2$, így $(s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_n) \in L_{p_0+2} \subseteq L_{p_0}$. Tekintsük az alábbi egzakt sorozatot:

$$\dots \to \operatorname{Ext}^{p_0+1}(M, S) \xrightarrow{\alpha} \operatorname{Ext}^{p_0+1}(M_1, S) \to \operatorname{Ext}^{p_0+2}(M_2, S) \to \operatorname{Ext}^{p_0+2}(M, S) \to$$

$$\to \operatorname{Ext}^{p_0+2}(M_1, S) \to \operatorname{Ext}^{p_0+3}(M_2, S) \to \operatorname{Ext}^{p_0+3}(M, S) = 0.$$

$L_{p_0+2} \subseteq L_{p_0}$ miatt

$$\dim_K \operatorname{Ext}^{p_0+2}(M_1, S) = \dim_K \operatorname{Ext}^{p_0+3}(M_2, S),$$

így az

$$\operatorname{Ext}^{p_0+2}(M_1, S) \to \operatorname{Ext}^{p_0+3}(M_2, S)$$

epimorfizmus injektív. Ezek alapján

$$\operatorname{Ext}^{p_0+2}(M, S) \xrightarrow{0} \operatorname{Ext}^{p_0+2}(M_1, S),$$

és felírható az alábbi egzakt sorozat:

$$0 \to \operatorname{Ext}^{p_0+1}(M, S)/\ker\alpha \to \operatorname{Ext}^{p_0+1}(M_1, S) \to$$

$$\to \operatorname{Ext}^{p_0+2}(M_2, S) \to \operatorname{Ext}^{p_0+2}(M, S) \to 0$$

Mivel az egzakt sorozatban szereplő vektorterek $K$-dimenzióit váltakozó előjellel összeadva 0-t kapunk, és $L_{p_0+1} \subseteq L_{p_0}$ miatt

$$\dim_K \operatorname{Ext}^{p_0+1}(M_1, S) = \dim_K \operatorname{Ext}^{p_0+2}(M_2, S),$$

így

$$\dim_K \operatorname{Ext}^{p_0+1}(M,S)/\ker\alpha = \dim_K \operatorname{Ext}^{p_0+2}(M,S),$$

azaz

$$\dim_K \operatorname{Ext}^{p_0+2}(M,S) \leq \dim_K \operatorname{Ext}^{p_0+1}(M,S).$$

Ezek alapján az alábbi ellentmondáshoz jutunk:

$$0 \neq \dim_K \operatorname{Hom}(\nu^- Q_0, S) = \dim_K \operatorname{Ext}^{p_0+2}(M,S) \leq$$

$$\leq \dim_K \operatorname{Ext}^{p_0+1}(M,S) = \dim_K \operatorname{Hom}(\nu^- Q_1, S) = 0.$$

Ezzel beláttuk a tétel állítását.

# 3. Nakayama-algebrák

## 3.1. Uniszeriális modulusok, jobbszeriális algebrák

Számos általánosabb probléma jól kezelhető az ún. Nakayama-algebrák esetében, azonban a Nakayama-algebrák tanulmányozásához elengedhetetlen az uniszeriális modulusok és a jobbszeriális algebrák ismerete, így ebben az alfejezetben ezekkel fogok foglalkozni. Bemutatom a fontosabb tulajdonságaikat és néhány alapvető tételt a [2] könyv alapján. Innentől kezdve (a dolgozat végéig) $A$ algebra alatt $K$ test feletti véges dimenziós algebrát értek, továbbá a modulusok végesen generáltak, azaz véges dimenziósak.

**3.1.1. Definíció.** Legyen $A$ véges dimenziós algebra egy $K$ test felett, továbbá $M \in \text{mod-}A$. Ekkor az

$$M \supset \operatorname{rad} M \supset \operatorname{rad}^2 M \supset \ldots \supset 0$$

részmodulusláncot $M$ *radikálláncának* vagy *csökkenő Loewy-sorozatának* nevezzük. $M$ véges dimenziós $K$-vektortér, így véges a kompozíciólánca, tehát létezik olyan $m$, amelyre $\operatorname{rad}^m M = 0$. A legkisebb $m$-et, amelyre ez teljesül a *radikállánc hosszának* nevezzük, és $rl(M)$-mel jelöljük.

**3.1.2. Definíció.** Legyen $M$ modulus. $M$ *talpának* azt a modulust nevezzük, amelyet $M$ egyszerű részmodulusai generálnak. Jelölés: $\operatorname{soc} M$.

**3.1.3. Definíció.** A 3.1.1 definíció duálisa a *talplánc* vagy *növő Loewy-sorozat*:

$$0 \subset \operatorname{soc} M \subset \operatorname{soc}^2 M \subset \ldots \subset M.$$

$\operatorname{soc}^i M$-t induktívan definiáljuk. Legyen $\operatorname{soc}^0 M = 0$, továbbá ha $\operatorname{soc}^i M$-t már definiáltuk, akkor legyen

$$\operatorname{soc}^{i+1} M = p^{-1}(\operatorname{soc}(M/\operatorname{soc}^i M),$$

ahol

$$p : M \to M/\mathrm{soc}^i M$$

a megfelelő kanonikus faktorleképezés. Ekkor a definíció alapján $\mathrm{soc}^{i+1} M \supset \mathrm{soc}^i M$. $M$ véges dimenziós $K$-vektortér, így véges a kompozíciólánca, tehát létezik olyan $m$, amelyre $\mathrm{soc}^m M = M$. A legkisebb $m$-et, amelyre ez teljesül a *talplánc hosszának* nevezzük, és $sl(M)$-mel jelöljük.

**3.1.4. Megjegyzés.** A definíció alapján látható, hogy $rl(M)$, illetve $sl(M)$ legfeljebb az $M$ modulus $l(M)$ kompozícióhosszával egyenlő.

**3.1.5. Definíció.** Belátható, hogy $rl(M) = sl(M)$, és ezt a közös értéket $M$ *Loewy-magasságának* nevezzük, és $ll(M)$-mel jelöljük. Meg lehet ugyanis mutatni, hogy mind $rl(M)$, mind $sl(M)$ megegyezik a legkisebb $m$-mel, amelyre $M\mathrm{rad}^m A = 0$.

**3.1.6. Megjegyzés.** A radikállánc definíciójából könnyen látható, hogy $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_k$ esetén $ll(M) = \max\{ll(M_1), \ldots, ll(M_k)\}$.

**3.1.7. Definíció.** Legyen $M \in$ mod-$A$. Azt mondjuk, hogy $M$ *uniszeriális*, ha egyértelmű a kompozíciólánca, azaz a részmodulushálója egy lánc.

**3.1.8. Megjegyzés.** Ha $M$ uniszeriális, akkor minden részmodulusa és faktora is az, továbbá a duálisa, $DM$ uniszeriális bal oldali modulus.

**3.1.9. Állítás.** Az alábbiak ekvivalensek $M \in$ mod-$A$-ra:

1. $M$ uniszeriális.

2. Az $M \supset \mathrm{rad}\, M \supset \mathrm{rad}^2 M \supset \ldots \supset 0$ radikállánc egy kompozíciólánc.

3. A $0 \subset \mathrm{soc}\, M \subset \mathrm{soc}^2 M \subset \ldots \subset M$ talplánc egy kompozíciólánc.

4. $l(M) = ll(M)$.

*Bizonyítás.* Először az 1. és a 2. állítás ekvivalenciáját látjuk be.

1.-ből következik 2. Alkalmazzunk teljes indukciót az $l(M)$ kompozícióláncra. $l(M) = 1$ esetén $M$ egyszerű, és az állítás triviálisan teljesül. Tegyük fel, hogy igaz az állítás minden $t$-nél kisebb kompozícióhosszra, és legyen $M$ olyan modulus, amelyre $l(M) = t$. Mivel $M$ uniszeriális, egyértelmű maximális részmodulusa van, ami nyilván $\operatorname{rad} M$. $\operatorname{rad} M \leq M$, így $\operatorname{rad} M$ is uniszeriális. Az indukciós feltevés alapján

$$\operatorname{rad} M \supset \operatorname{rad}^2 M \supset \ldots \supset 0$$

$\operatorname{rad} M$ egy kompozíciólánca, így

$$M \supset \operatorname{rad} M \supset \operatorname{rad}^2 M \supset \ldots \supset 0$$

$M$ egy kompozíciólánca.

A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t = 0$$

és

$$M = N_0 \supset N_1 \supset \ldots \supset N_t = 0$$

$M$ egy-egy kompozíciólánca (a hosszuk a Jordan–Hölder-tétel szerint megegyezik). $i$-re vonatkozó indukcióval megmutatjuk, hogy $M_i = N_i = \operatorname{rad}^i M$ minden $0 \leq i \leq t$-re. $i = 0$-ra ez triviális. Tegyük fel, hogy teljesül az állítás valamely $i \leq 0$-ra. Mivel $\operatorname{rad}^i M/\operatorname{rad}^{i+1} M$ egyszerű, $\operatorname{rad}^i M$-nek egyértelmű maximális részmodulusa van, ami nyilván $\operatorname{rad}^{i+1} M$, így $M_{i+1} = N_{i+1} = \operatorname{rad}^{i+1} M$.

Az 1. és a 3. állítás ekvivalenciája hasonlóan látható be.

A 2. állításból közvetlenül kövekezik a 4.

4.-ből következik 2. Tegyük fel, hogy $m = l(M) = ll(M)$. Tudjuk, hogy

$$m = \sum_{i=1}^{m-1} l(\operatorname{rad}^i M/\operatorname{rad}^{i+1} M),$$

így
$$l(\mathrm{rad}^{\,i} M/\mathrm{rad}^{\,i+1} M) = 1$$
minden $i$-re, mivel
$$l(\mathrm{rad}^{\,i} M/\mathrm{rad}^{\,i+1} M) \neq 0$$
minden $i$-re. Ezek alpján a radikállánc egy kompozíciólánc.

**3.1.10. Definíció.** Az $A$ algebrát *jobbszeriálisnak* nevezzük, ha minden direkt felbonthatatlan projektív jobb oldali modulus uniszeriális. Az $A$ algebrát *balszeriálisnak* nevezzük, ha minden direkt felbonthatatlan projektív bal oldali modulus uniszeriális.

**3.1.11. Definíció.** Legyen $M$ modulus. *$M$ tetejének* az $M/\mathrm{rad}\, M$ modulust nevezzük. Jelölés: $\mathrm{top}\, M$.

**3.1.12. Állítás.** Az $A$ algebra pontosan akkor jobbszeriális, ha minden $P$ direkt felbonthatatlan projektív jobb oldali modulusra $\mathrm{rad}\, P/\mathrm{rad}^{\,2} P$ egyszerű modulus vagy 0.

*Bizonyítás.* Az egyik irány belátásához tegyük fel, hogy $A$ jobbszeriális, és $P$ direkt felbonthatatlan projektív. Az uniszeriális modulusok jellemzése szerint
$$P \supset \mathrm{rad}\, P \supset \mathrm{rad}^{\,2} P \supset \ldots \supset 0$$
kompozíciólánc, így $\mathrm{rad}\, P/\mathrm{rad}^{\,2} P$ valóban vagy egyszerű modulus, vagy 0.

A másik irány belátásához tegyük fel, hogy minden $P$ direkt felbonthatatlan projektívre $\mathrm{rad}\, P/\mathrm{rad}^{\,2} P$ egyszerű modulus vagy 0. Az uniszeriális modulusok jellemzése szerint azt kell megmutatni, hogy a
$$P \supset \mathrm{rad}\, P \supset \mathrm{rad}^{\,2} P \supset \ldots \supset 0$$
radikállánc egy kompozíciólánc. $\mathrm{top}\, P = P/\mathrm{rad}\, P$ egyszerű, mivel $P/\mathrm{rad}\, P$ féligegyszerű, és $P$ direkt felbonthatatlan. $1 \leq i$-re vonatkozó teljes indukcióval

belátjuk, hogy $\mathrm{rad}^{i-1}P/\mathrm{rad}^{i}P$ egyszerű vagy 0. $i = 1,2$-re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $\mathrm{rad}^{i-1}P/\mathrm{rad}^{i}P$ egyszerű vagy 0. Ha 0, akkor készen vagyunk, így feltehető, hogy egyszerű. Legyen

$$f : P' \to \mathrm{rad}^{i-1}P$$

projektív fedő,

$$p : \mathrm{rad}^{i-1}P \to \mathrm{rad}^{i-1}P/\mathrm{rad}^{i}P$$

pedig a kanonikus epimorfizmus. Ekkor

$$pf : P' \to \mathrm{rad}^{i-1}P/\mathrm{rad}^{i}P.$$

Mivel $\ker f \ll P'$, mert $(P', f)$ projektív fedő, illetve $\ker p \ll \mathrm{rad}^{i-1}P$, mert $\mathrm{rad}^{i}P = \mathrm{rad}\,(\mathrm{rad}^{i-1}P)$, ezért a kompozícióra $\ker pf \ll P'$. Az indukciós feltevés szerint $\mathrm{rad}^{i-1}P/\mathrm{rad}^{i}P$ egyszerű, így $P'$ direkt felbonthatatlan. Az $f$ epimorfizmus megszorítható

$$f_1 : \mathrm{rad}\,P' \to \mathrm{rad}^{i}P,$$

illetve

$$f_2 : \mathrm{rad}^{2}P' \to \mathrm{rad}^{i+1}P$$

epimorfizmusokká, mivel tetszőleges $f : M \to N$ epimorfizmusra

$$f(\mathrm{rad}\,M) = f(M\mathrm{rad}\,A) = f(M)\mathrm{rad}\,A = N\mathrm{rad}\,A = \mathrm{rad}\,N.$$

A komagokat felírva az

$$\bar{f} : \mathrm{rad}\,P'/\mathrm{rad}^{2}P' \to \mathrm{rad}^{i}P/\mathrm{rad}^{i+1}P$$

egyértelmű epimorfizmust kapjuk az alábbi, egzakt sorokkal rendelkező kommutatív diagram alapján:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{rad}^2 P' & \longrightarrow & \mathrm{rad}\, P' & \longrightarrow & \mathrm{rad}\, P'/\mathrm{rad}^2 P' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_2} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \bar{f}} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{rad}^{i+1} P & \longrightarrow & \mathrm{rad}^{i} P & \longrightarrow & \mathrm{rad}^{i} P/\mathrm{rad}^{i+1} P & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Mivel $P'$ direkt felbonthatatlan projektív, a feltétel szerint $\mathrm{rad}\, P'/\mathrm{rad}^2 P'$ egyszerű vagy 0, így $\mathrm{rad}^i P/\mathrm{rad}^{i+1} P$ is az.

**3.1.13. Tétel.** Legyen $A$ véges dimenziós $K$ feletti bázisalgebra, ahol $K$ algebrailag zárt, továbbá legyen $\Gamma$ az $A$ algebra Gabriel-gráfja. $A$ pontosan akkor jobbszeriális, ha $\Gamma$ minden $a$ pontjához legfeljebb egy irányított él tartozik, aminek $a$ a kiindulási pontja.

*Bizonyítás.* Legyen $e_a \in A$ az $a$ csúcshoz tartozó idempotens. Az előző állítás alapján $A$ pontosan akkor jobbszeriális, ha minden $a \in \Gamma$ csúcsra

$$\mathrm{rad}\,(e_a A)/\mathrm{rad}^2(e_a A) = e_a(\mathrm{rad}\, A/\mathrm{rad}^2 A)$$

egyszerű vagy 0, azaz legfeljebb egydimenziós mint $K$-vektortér. Ez azzal ekvivalens, hogy legfeljebb egy $b \in \Gamma$ csúcs létezik, amelyre $e_a(\mathrm{rad}\, A/\mathrm{rad}^2 A)e_b \neq 0$, és ez a $K$-vektortér legfeljebb egydimenziós. Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha legfeljebb egy $b \in \Gamma$ csúcs létezik, amelyre létezik $a \to b$ irányított él, és legfeljebb egy ilyen irányított él létezik.

**3.1.14. Megjegyzés.** Könnyen belátható, hogy a tétel feltételeinek eleget tevő összefüggő irányított gráf az alábbi típusú gráfok egyike lehet:

1. Fa pontosan egy nyelővel.

2. Olyan gráf, amely pontosan egy irányított kört tartalmaz, és ezen kör pontjaiból nem mennek a kör pontjaitól különböző pontokba nyilak (csak a kör pontjaiba mehetnek nyilak).

**3.1.15. Megjegyzés.** Ha $A$ jobbszeriális, és $A \simeq K\Gamma/I$, akkor a fenti tétel csak a $\Gamma$ gráfra ad meg feltételt, míg az $I$ megengedhető ideál tetszőleges lehet.

**3.1.16. Állítás.** Legyen $A$ véges dimenziós $K$ feletti bázisalgebra, ahol $K$ algebrailag zárt, továbbá $A \simeq K\Gamma/I$, ahol $\Gamma$ összefüggő irányított gráf, $I$ pedig megengedhető ideál. Minden $a \in \Gamma$ csúcshoz rendelhető egy $S(a)$ egyszerű modulus, amely $\operatorname{top} e_a A$-val izomorf mint $A$-modulus, ahol $e_a A$ az $a$ csúcshoz tartozó direkt felbonthatatlan projektív. Másrészt $S(a)$ izomorf $K$-val mint $K$-vektortér. Ekkor $\{S(a) : a \in \Gamma\}$ reprezentálja az egyszerű $A$-modulusok izomorfiatípusait.

**3.1.17. Jelölés.** Legyen $M$ uniszeriális $A$-modulus az alábbi radikálllánccal:

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t = 0.$$

$\operatorname{top} M_i = M_i/M_{i+1} \simeq S(a_i)$ valamely $a_i \in \Gamma$ csúcsra, ahol $0 \leq 1 < t$. Mivel az uniszeriális modulusokat egyértelműen meghatározza izomorfizmus erejéig a kompozícióláncuk, az $M$ modulusra az alábbi jelölést alkalmazhatjuk:

$$M = \begin{smallmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{t-1} \end{smallmatrix}.$$

## 3.2. Nakayama-algebrák

Ebben az alfejezetben a Nakayama-algebrákkal fogok foglalkozni. Ez az alfejezet is a [2] könyvön alapszik.

**3.2.1. Definíció.** Az $A$ algebrát *Nakayama-algebrának* nevezzük, ha jobb- és balszeriális is.

**3.2.2. Megjegyzés.** Az $A$ algebra pontosan akkor Nakayama, ha $A^{\mathrm{op}}$ Nakayama-algebra.

**3.2.3. Tétel.** Legyen $A$ olyan bázisalgebra, amelynek a $\Gamma$ gráfja összefüggő. $A$ pontosan akkor Nakayama-algebra, ha $\Gamma$ (véges) lánc (azaz egy irányított út) vagy irányított kör.

*Bizonyítás.* A 3.1.13 tétel alapján $A$ pontosan akkor Nakayama, ha minden $a \in \Gamma$ csúcs legfeljebb egy él kiindulási pontja, és legfeljebb egy él végpontja. Ez alapján nyilvánvaló az állítás.

**3.2.4. Állítás.** Legyen $A$ egy algebra és $I \lhd A$ egy valódi ideálja. Ha $A$ jobbszeriális, akkor $A/I$ is jobbszeriális.

*Bizonyítás.* Legyen

$$A = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i,$$

ahol $P_i$ direkt felbonthatatlan projektív minden $i$-re. Ekkor

$$A/I = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i/P_iI,$$

ahol $P_i/P_iI$ direkt felbonthatatlan vagy 0 minden $i$-re. Minden $P'$ direkt felbonthatatlan projektív $A/I$-modulushoz létezik $i$, hogy $P' \simeq P_i/P_iI$, így $P'$ uniszeriális, mert a $P_i$ uniszeriális modulus faktora.

**3.2.5. Állítás.** Legyen $A$ egy algebra és $I \lhd A$ egy valódi ideálja. Ha $A$ Nakayama-algebra, akkor $A/I$ is Nakayama-algebra.

*Bizonyítás.* Az előző állításból és a duálisából következik.

**3.2.6. Állítás.** Legyen $A$ Nakayama-algebra, és legyen $P$ egy olyan direkt felbonthatatlan projektív $A$-modulus, amelyre $ll(P) = ll(A)$. Ekkor $P$ injektív is.

*Bizonyítás.* Legyen $P$ injektív burka mod-$A$-ban $I$. $P$ uniszeriális, így $\operatorname{soc} P$ egyszerű, tehát $\operatorname{soc} I$ is az. Mivel $A$ Nakayama-algebra, $I$ uniszeriális. Ezek alapján felírhatjuk az alábbi egyenlőtlenségláncot:

$$ll(A) = ll(P) = l(P) \leq l(I) = ll(I) \leq ll(A).$$

Ebből az következik, hogy $l(P) = l(I)$, azaz $P \simeq I$, így $P$ injektív.

**3.2.7. Lemma.** Legyen $f : M \to N$ (modulus)epimorfizmus. Ekkor $ll(M) \geq ll(N)$.

*Bizonyítás.*

$$f(\operatorname{rad} M) = f(M \operatorname{rad} A) = f(M)\operatorname{rad} A = N \operatorname{rad} A = \operatorname{rad} N$$

miatt $f(\operatorname{rad}^i M) = \operatorname{rad}^i N$ minden $i$ természetes számra, így $rl(M) \geq rl(N)$, azaz $ll(M) \geq ll(N)$.

**3.2.8. Tétel.** Legyen $A$ olyan bázisalgebra, ami Nakayama-algebra is, és a $\Gamma$ gráfja összefüggő, továbbá legyen $M$ direkt felbonthatatlan $A$-modulus. Ekkor létezik $P$ direkt felbonthatatlan projektív $A$-modulus, valamint $t$ egész szám, amelyre $1 \leq t \leq ll(P)$, hogy $M \simeq P/\operatorname{rad}^t P$. Speciálisan, $A$ reprezentációvéges.

*Bizonyítás.* Legyen $P$ direkt felbonthatatlan projektív, $t$ pedig olyan egész, amelyre $1 \leq t \leq ll(P)$ teljesül. Ekkor $P/\operatorname{rad}^t P$ uniszeriális, és emiatt direkt felbonthatatlan is. Legyen $M$ olyan $A$-modulus, amelynek $ll(M) = t$ a Loewy-magassága. $0 = \operatorname{rad}^t M = M \operatorname{rad}^t A$ alapján látható, hogy $M$-et annullálja $\operatorname{rad}^t A$, így $M$ $A/\operatorname{rad}^t A$-modulus. Hasonlóan, $\operatorname{rad}^{t-1} M \neq 0$ miatt $\operatorname{rad}^{t-1} A \neq 0$. Ezek alapján $ll(A/\operatorname{rad}^t A) = t$. A 3.2.5-ből következik, hogy $A/\operatorname{rad}^t A$ is Nakayama-algebra, továbbá az alábbi direktösszeg-felbontás írható fel:

$$A/\operatorname{rad}^t A \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} P_i/P_i \operatorname{rad}^t A = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i/\operatorname{rad}^t P_i,$$

ahol $P_i/\operatorname{rad}^t P_i$ direkt felbonthatatlan minden $i$-re.

Legyen

$$f : P' = \bigoplus_{j=1}^{r} P'_j \to M$$

$M$ projektív fedője mod-$A/\operatorname{rad}^t A$-ban, ahol $P'_j$ direkt felbonthatatlan minden $j$-re. Ekkor az alábbi összefüggés írható fel:

$$t = ll(A/\operatorname{rad}^t A) \geq \max\{ll(P'_1), \ldots, ll(P'_t)\} \geq ll(M) = t.$$

Ebből következik, hogy létezik $j$ index, amelyre $1 \leq j \leq r$ teljesül, hogy $ll(P'_j) = t$. Feltehető, hogy $ll(P'_j) = t$ minden $1 \leq j \leq s$-re, valamint $ll(P'_j) < t$ minden $s < j \leq r$-re. Jelölje $f_j$ az $f$ homomorfizmus $f|_{P'_j}$ megszorítását $P'_j$-re (itt $P'_j \leq P'$, ahol a direkt összeg minden koordinátája 0, kivéve a j-edik). Ha nincs $1 \leq j \leq s$, amelyre $f_j$ injektív, akkor $ll(\operatorname{im} f_j) < t$ minden $1 \leq j \leq s$-re, míg az $f$ által indukált

$$\bigoplus_{j=1}^{r} \operatorname{im} f_j \to M$$

homomorfizmus szürjektív. Ekkor viszont az előző lemma szerint $t > ll(M)$, ami ellentmondás. Ezek alapján létezik $1 \leq q \leq s$, amelyre $f_q : P'_q \to M$ injektív. $ll(P'_q) = t = ll(A/rad^t A)$, így a 3.2.6 állítás szerint $P'_q$ injektív $A/rad^t A$-modulus. Ezek alapján $f_q : P'_q \to M$ egy felhasadó beágyazás. Mivel $M$ direkt felbonthatatlan, $f_q$ izomorfizmus. $P'_q$ direkt felbonthatatlan projektív $A/rad^t A$-modulus, így létezik $1 \leq i \leq n$, hogy $P'_q \simeq P_i/\operatorname{rad}^t P_i$, azaz $M \simeq P_i/\operatorname{rad}^t P_i$.

**3.2.9. Következmény.** A direkt felbonthatatlan $A$-modulusok izomorfiatípusainak száma:

$$\sum_{i=1}^{n} ll(P_i) \leq n \cdot ll(A),$$

ahol $n$ az $A$ gráfjában a csúcsok száma, azaz az egyszerű $A$-modulusok izomorfiaosztályainak a száma.

**3.2.10. Megjegyzés.** Ha $M \simeq P/\operatorname{rad}^t P$ valamely $P$ direkt felbonthatatlan projektív modulusra, és $1 \leq t \leq ll(P)$, akkor $P$ a $P \to M$ kanonikus epimorfizmussal projektív fedő.

**3.2.11. Megjegyzés.** Legyen $M$ direkt felbonthatatlan modulus. Ekkor $M$-et izomorfizmus erejéig egyértelműen meghatározza az egyszerű teteje, $\operatorname{top} M$ (az egyszerű talpa, $\operatorname{soc} M$) és a kompozícióhossza, $l(M)$ (ami $ll(M)$-mel egyenlő, mivel $M$ uniszeriális).

**3.2.12. Következmény.** Legyen $A$ olyan bázisalgebra, aminek a $\Gamma$ gráfja összefüggő. $A$ pontosan akkor Nakayama-algebra, ha minden direkt felbonthatatlan $A$-modulus uniszeriális.

*Bizonyítás.* Az egyik irány a definíció, a másik irány a 3.2.8 tétel következménye.

# 4. Finitisztikus dimezió és Nakayama-algebrák

## 4.1. Újabb homologikus dimenziók

Az utóbbi években definiáltak újabb, modulusokhoz, illetve algebrákhoz rendelhető mennyiségeket – ha úgy tetszik, homologikus dimenziókat –, amelyek segítségével a különféle finitisztikus dimenziókra felső, illetve alsó becsléseket lehet adni. Különösen érdekes a Gélinas által bevezetett ún. *kihurkolási szám (delooping level)* [9], amelyről Ringel is ír [15]. Az alábbi alfejezetben több dimenzió jellegű mennyiséget mutatok be Ringel [15] cikke alapján.

**4.1.1. Definíció.** Legyen $M \in \text{mod-}A$. Ekkor $\operatorname{add} M \subseteq \text{mod-}A$ az a részkategória, amely $M$ direkt összeadandóinak véges direkt összegeit tartalmazza.

**4.1.2. Definíció.** Legyen $M$ végesen generált modulus. $M$-re a $\operatorname{del} M$ *kihurkolási szám (delooping level)* az alábbi módon definiálható: Jelölje $\Omega^d M$ $M$ minimális projektív feloldásának a $d$-edik syzygyjét. Legyen $\operatorname{del} M = d$, ha $d$ a legkisebb olyan természetes szám – feltéve, hogy ilyen létezik –, amelyre $\Omega^d M \in \operatorname{add} A_A \oplus \Omega^{d+1} M'$ valamely $M' \in \text{mod-}A$-ra. Vegyük észre, hogy ha $\Omega^d M \in \operatorname{add} A_A \oplus \Omega^{d+1} M'$ valamely $M' \in \text{mod-}A$-ra, akkor $\Omega^{d+1} M \in \operatorname{add} A_A \oplus \Omega^{d+2} M'$. Ha nem létezik ilyen $d$, akkor legyen $\operatorname{del} M = \infty$.

**4.1.3. Definíció.** Legyen $A$ algebra. $A$-ra a $\operatorname{del} A$ *kihurkolási szám (delooping level)* az alábbi módon definiálható:

$$\operatorname{del} A = \max_S \operatorname{del} S,$$

ahol $S$ végigfut az egyszerű $A$-modulusokon.

**4.1.4. Megjegyzés.** Ha az $A$-ra $A$-modulusként tekintünk, akkor $\operatorname{del} A_A = 0$, így vigyázni kell, hogy az $A$-ra mint algebrára $\operatorname{del} A$-t másként definiáljuk.

A *kihurkolási szám* duálisa a *kiakasztási szám*, amelyet az alábbi módon definiálhatunk:

**4.1.5. Definíció.** Legyen $M$ végesen generált modulus. $M$-re a $\operatorname{des} M$ *kiakasztási szám (desuspending level)* az alábbi módon definiálható: Jelölje $\Sigma^d M$ $M$ minimális injektív kofeloldásának a $d$-edik kosyzygyjét. Legyen $\operatorname{des} M = d$, ha $d$ a legkisebb olyan természetes szám – feltéve, hogy ilyen létezik –, amelyre $\Sigma^d M \in \operatorname{add} D({}_A A) \oplus \Sigma^{d+1} M'$ valamely $M' \in$ mod-$A$-ra. Vegyük észre, hogy ha $\Sigma^d M \in \operatorname{add} D({}_A A) \oplus \Sigma^{d+1} M'$ valamely $M' \in$ mod-$A$-ra, akkor $\Sigma^{d+1} M \in \operatorname{add} D({}_A A) \oplus \Sigma^{d+2} M'$. Ha nem létezik ilyen $d$, akkor legyen $\operatorname{des} M = \infty$.

**4.1.6. Definíció.** Legyen $A$ algebra. $A$-ra a $\operatorname{des} A$ *kiakasztási szám (desuspending level)* az alábbi módon definiálható:

$$\operatorname{des} A = \max_S \operatorname{des} S,$$

ahol $S$ végigfut az egyszerű $A$-modulusokon.

**4.1.7. Állítás.** (Gélinas) Legyen $M$ végesen generált modulus. Ha létezik $N$ (nem feltétlenül végesen generált) modulus $d$ injektív dimenzióval, amelyre $1 \leq d < \infty$, illetve $\operatorname{Ext}^d(M, N) \neq 0$, akkor $d \leq \operatorname{del} M$.

*Bizonyítás.* Legyen $N$ olyan modulus, amelyre $\operatorname{id} N = d$, ahol $1 \leq d < \infty$. Ekkor $\operatorname{Ext}^{d+1}(X, N) = 0$ minden $X$ modulusra. Legyen $M$ végesen generált modulus, és tegyük fel, hogy $\operatorname{del} M < d$. Ekkor definíció szerint $\Omega^{d-1} M \in \operatorname{add} A_A \oplus \Omega^d M'$ valamely végesen generált $M'$-re. A dimenzióeltolás alapján $\operatorname{Ext}^d(M, N) = \operatorname{Ext}^1(\Omega^{d-1} M, N)$, továbbá $\operatorname{Ext}^1(\Omega^{d-1} M, N) \in \operatorname{Ext}^1(\operatorname{add} A_A \oplus \Omega^d M', N)$. Ekkor

$$\operatorname{Ext}^1(\operatorname{add} A_A \oplus \Omega^d M', N) = \operatorname{Ext}^1(\Omega^d M', N) = \operatorname{Ext}^{d+1}(M', N) = 0,$$

a második egyenlőségnél újra a dimenzióeltolást használtuk. Ezek szerint $\operatorname{Ext}^d(M, N) = 0$, ami ellentmondás.

**4.1.8. Tétel.** Legyen $A$ algebra. Ekkor $\mathrm{i.Fin.dim}\, A \leq \operatorname{del} A$.

*Bizonyítás.* Legyen $N$ tetszőleges modulus, amelyre $\operatorname{id} N = d$ véges. Azt kell megmutatni, hogy létezik $S$ egyszerű modulus, amelyre $d \leq \operatorname{del} S$. Ha $d = 0$, akkor ez tetszőleges $S$-re teljesül. Tegyük fel, hogy $d \geq 1$. $\operatorname{id} N = d$ miatt létezik $S$ egyszerű modulus, amelyre $\operatorname{Ext}^d(S, N) \neq 0$. Az előző állítás szerint ezzel beláttuk a tételt.

Hasonlóan látható be ezeknek a duálisa:

**4.1.9. Állítás.** Legyen $M$ végesen generált modulus. Ha létezik $N$ (nem feltétlenül végesen generált) modulus $d$ projektív dimenzióval, amelyre $1 \leq d < \infty$, illetve $\operatorname{Ext}^d(N, M) \neq 0$, akkor $d \leq \operatorname{des} M$.

**4.1.10. Tétel.** Legyen $A$ algebra. Ekkor $\mathrm{p.Fin.dim}\, A \leq \operatorname{des} A$.

**4.1.11. Állítás.** Legyen $M$ végesen generált modulus, továbbá $N \leq M$ részmodulus. Ekkor $\operatorname{del} N \leq \operatorname{pd} M$.

*Bizonyítás.* Legyen $\operatorname{pd} M = d$. Feltehető, hogy $d$ véges, különben triviálisan igaz az állítás. A patkólemmát a

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0$$

rövid egzakt sorozatra alkalmazva az alábbi egzakt sorozatot kapjuk:

$$0 \to \Omega^d N \to P' \oplus \Omega^d M \to \Omega^d(M/N) \to 0,$$

ahol $P'$ projektív. $M$ projektív dimenziójából látható, hogy $\Omega^d M$ projektív, így $E = P' \oplus \Omega^d M$ is projektív. Legyen $\Omega^d(M/N)$ projektív fedője $P(\Omega^d(M/N))$. Ekkor $P(\Omega^d(M/N))$ direkt összeadandója $E$-nek, azaz $E = P'' \oplus P(\Omega^d(M/N))$ valamely $P''$ projektívre. Ezek alapján, mivel $P''$ benne van az $E \to \Omega^d(M/N)$ magjában, továbbá

$$0 \to \Omega(\Omega^d(M/N)) \to P(\Omega^d(M/N)) \to \Omega^d(M/N) \to 0$$

egzakt, ezért

$$\Omega^d N = P'' \oplus \Omega(\Omega^d(M/N)) = P'' \oplus \Omega^{d+1}(M/N),$$

így $\operatorname{del} N \leq d$.

A duális állítás hasonlóan látható be:

**4.1.12. Állítás.** Legyen $M$ végesen generált modulus, továbbá $M/N$ a faktora valamely $N \leq M$ részmodulusra. Ekkor $\operatorname{des}(M/N) \leq \operatorname{id} M$.

**4.1.13. Tétel.** Tegyük fel, hogy minden $S$ egyszerű modulus része egy $M_S$ végesen generált modulusnak, melyre $\operatorname{pd} M_S < \infty$. Legyen $d = \max_S \operatorname{pd} M_S$. Ekkor

$$\text{i.Fin.dim}\, A \leq \operatorname{del} A \leq d \leq \text{p.fin.dim}\, A.$$

*Bizonyítás.* Az első egyenlőtlenség a 4.1.8 tétel állítása. A 4.1.11 állítás szerint $\operatorname{del} S \leq \operatorname{pd} M_S$, így

$$\operatorname{del} A = \max_S \operatorname{del} S \leq \max_S \operatorname{pd} M_S = d.$$

A finitisztikus dimenzió definíciója szerint $\operatorname{pd} M_S \leq \text{p.fin.dim}\, A$, így $d = \max_S \operatorname{pd} M_S \leq \text{p.fin.dim}\, A$.

A tétel duálisa:

**4.1.14. Tétel.** Tegyük fel, hogy minden $S$ egyszerű modulus faktora egy $N_S$ végesen generált modulusnak, melyre $\operatorname{id} N_S < \infty$. Legyen $d' = \max_S \operatorname{id} N_S$. Ekkor

$$\text{p.Fin.dim}\, A \leq \operatorname{des} A \leq d' \leq \text{i.fin.dim}\, A.$$

Az előző két tétel kombinálásával kapjuk az alábbi tételt:

**4.1.15. Tétel.** Tegyük fel, hogy minden $S$ egyszerű modulus része egy $M_S$ végesen generált modulusnak, melyre $\operatorname{pd} M_S < \infty$, továbbá $S$ faktora egy $N_S$ végesen generált modulusnak, melyre $\operatorname{id} N_S < \infty$. Legyen $d = \max_S \operatorname{pd} M_S$ és $d' = \max_S \operatorname{id} N_S$. Ekkor

$$\text{p.fin.dim}\, A = \text{i.fin.dim}\, A = \text{p.Fin.dim}\, A = \text{i.Fin.dim}\, A = \operatorname{del} A = \operatorname{des} A = d = d'.$$

## 4.2. Finitisztikus dimezió és Nakayama-algebrák

Az alábbi alfejezetben bemutatom, hogyan lehet kiszámolni viszonylag egyszerűen a Nakayama-algebrák finitisztikus dimenzióját, majd a módszer alkalmazására hozok saját példákat. Az elméleti részt ebben az alfejezetben is Ringel [15] cikke alapján ismertetem.

**4.2.1. Definíció.** Az $A$ Nakayama-algebrát *lineárisnak* mondjuk, ha létezik egyszerű projektív $A$-modulus, különben $A$-t *ciklikusnak* nevezzük. Érdemes megjegyezni, hogy összefüggő Nakayama-algebránál az elnevezés arra utal, hogy lineáris Nakayama-algebrának a Gabriel-gráfja út, ciklikusé pedig kör.

**4.2.2. Definíció.** Legyen $A$ Nakayama-algebra, továbbá $M$ olyan direkt felbonthatatlan $A$-modulus, amelynek véges a projektív dimenziója. Azt modjuk, hogy $M$ *páros*, ha $\operatorname{pd} M$ páros, illetve azt mondjuk, hogy $M$ *páratlan*, ha $\operatorname{pd} M$ páratlan.

**4.2.3. Definíció.** Jelölje $D\mathrm{Tr}$ és $\mathrm{Tr}\, D$ a szokásos Auslander–Reiten-eltolásokat mod-$A$-ban. Ha $M$ direkt felbonthatatlan és nem projektív, akkor $\tau M = D\mathrm{Tr}\, M$ az $M$ eltoltja. Ha $M$ direkt felbonthatatlan és nem injektív, akkor $\tau^{-} M = \mathrm{Tr}\, DM$ az $M$ inverz eltoltja. Tetszőleges $M$ modulusra jelölje $IM$ az $M$ injektív burkát, továbbá $PM$ az $M$ projektív fedőjét. Definiáljuk a $\psi$, illetve a $\gamma$ leképezéseket az alábbi módon: Legyen $S$ egyszerű modulus. Amennyiben $\operatorname{top} IS$ nem injektív, legyen $\psi S = \tau^{-}\operatorname{top} IS$. Amennyiben $\operatorname{soc} PS$ nem projektív, legyen $\gamma S = \tau \operatorname{soc} PS$.

**4.2.4. Definíció.** Legyen $A$ ciklikus Nakayama-algebra. *$m$ hosszú $\psi$-útnak* nevezzük egyszerű modulusok egy $(S_1, \ldots, S_m)$ sorozatát, ha $S_{i+1} = \psi S_i$ minden $1 \leq i \leq m-1$-re. $S_1$ a *$\psi$-út kiindulási*, míg $S_m$ a *végpontja*. Azt mondjuk, hogy $S$ a *$\psi$-megelőzője* $T$-nek, ha $\psi S = T$. Hasonló fogalmakat definiálhatunk $\gamma$ segítségével: *$m$ hosszú $\gamma$-útnak* nevezzük egyszerű modulusok egy $(S_1, \ldots, S_m)$ sorozatát, ha $S_{i+1} = \gamma S_i$ minden $1 \leq i \leq m-1$-re. $S_1$ a *$\gamma$-út kiindulási*, míg $S_m$ a *végpontja*. Azt mondjuk, hogy $S$ a *$\gamma$-megelőzője* $T$-nek, ha $\gamma S = T$.

**4.2.5. Definíció.** Legyen $A$ ciklikus Nakayama-algebra, $S$ pedig egyszerű modulus. Legyen $a(S)$ az $S$-ben végződő $\psi$-utak hosszainak a szuprémuma, továbbá $a'(S)$ az $S$-ben végződő $\gamma$-utak hosszainak a szuprémuma.

**4.2.6. Definíció.** Legyen $A$ ciklikus Nakayama-algebra, $S$ pedig egyszerű modulus. Azt mondjuk, hogy $S$ *$\psi$-ciklikus*, ha $a(S) = \infty$. Ezzel ekvivalens, hogy létezik $e$ pozitív egész, amelyre $\psi^e S = S$. Ehhez hasonlóan azt mondjuk, hogy $S$ *$\gamma$-ciklikus*, ha $a'(S) = \infty$. Ezzel ekvivalens, hogy létezik $e$ pozitív egész, amelyre $\gamma^e S = S$.

**4.2.7. Definíció.** Legyen $A$ ciklikus Nakayama-algebra. Definiáljuk $a(A)$-t azon $a(S)$ értékek maximumaként, ahol $S$ egyszerű és nem $\psi$-ciklikus. Megmutatható, hogy $a(A)$ megegyezik azon $a'(S)$ értékek maximumával, ahol $S$ egyszerű és nem $\gamma$-ciklikus.

**4.2.8. Megjegyzés.** Megmutatható, hogy $a(A) = 0$ esetén $A$ öninjektív, azaz $A_A$ injektív.

A következőkben bizonyítás nélkül kimondok néhány állítást, amelyek megtalálhatók Madsen [12] cikkében.

**4.2.9. Állítás.** (Madsen, lásd [12].) Legyen $A$ Nakayama-algebra, $A$ és $B$ pedig direkt felbonthatatlan modulusok.

1. Ha $A$ része $B$-nek, akkor $\Omega B$ faktora $\Omega A$-nak.

2. Ha $A$ faktora $B$-nek, akkor $\Omega B$ része $\Omega A$-nak.

**4.2.10. Állítás.** (Madsen, lásd [12].) Legyen $A$ Nakayama-algebra, $M$ pedig direkt felbonthatatlan modulus.

1. Ha $N$ része $M$ egy faktorának, és $M$ páratlan, akkor $N$ is páratlan, és $\operatorname{pd} N \leq \operatorname{pd} M$.

2. Ha $N$ része $M$ egy faktorának, és $N$ páros, akkor $M$ is páros, és $\operatorname{pd} M \leq \operatorname{pd} N$.

**4.2.11. Következmény.** Legyen $N \subseteq M$, $N, M$ direkt felbonthatatlanok. Ha $M$ páratlan, akkor $\operatorname{pd} N \leq \operatorname{pd} M$, ha $M$ páros, akkor $\operatorname{pd} IN \leq \operatorname{pd} M$.

*Bizonyítás.* Az 1. állítás a 4.2.10 1. állításának a speciális esete. A 2. állításhoz vegyük észre, hogy $M \subseteq IM = IN$, majd használjuk a 4.2.10 2. állítását. Ezek szerint $\operatorname{pd} IN \leq \operatorname{pd} M$.

**4.2.12. Állítás.** (Madsen, lásd [12].) Legyen $A$ Nakayama-algebra, $S, S'$ pedig egyszerű modulusok. $\psi S' = S$ pontosan akkor teljesül, ha $S'$ kompozíciófaktora $\Omega^2 S$-nek.

**4.2.13. Tétel.** Legyen $A$ Nakayama-algebra, $M$ pedig direkt felbonthatatlan modulus. $M$ pontosan akkor páratlan, ha minden kompozíciófaktora páratlan; ekkor

$$\operatorname{pd} M = \max_S \operatorname{pd} S,$$

ahol $S$ végigfut $M$ kompozíciófaktorain.

*Bizonyítás.* Legyen $M$ direkt felbonthatatlan. Először tegyük fel, hogy $M$ páratlan. Ekkor a 4.2.10 1. állítása szerint $M$ tetszőleges $S$ kompozíciófaktora páratlan, továbbá $\operatorname{pd} S \leq \operatorname{pd} M$. Legalább az egyik $S$ kompozíciófaktorra $\operatorname{pd} S = \operatorname{pd} M$, mivel a legfeljebb $\operatorname{pd} M$ projektív dimenziójú modulusok osztálya bővítésre zárt. Ezután tegyük fel, hogy $M$ tetszőleges $S$ kompozíciófaktora páratlan. Madsen [12] cikkének az egyik állításának a következménye, hogy

$$\operatorname{pd} M = \max_S \operatorname{pd} S,$$

ahol $S$ végigfut $M$ kompozíciófaktorain.

**4.2.14. Következmény.** Legyen $A$ Nakayama-algebra. Ekkor tetszőleges páratlan $1 \leq i \leq \text{p.fin.dim}\, A$-ra létezik $S$ egyszerű modulus, amelyre $\operatorname{pd} S = i$.

*Bizonyítás.* Létezik $M$ (végesen generált) modulus, amelyre $\operatorname{pd} M = d = \text{p.fin.dim}\, A$, így tetszőleges $0 \leq i \leq d$-re létezik $M_i$ direkt felbonthatatlan modulus, amelyre $\operatorname{pd} M_i = i$, például $\Omega^{d-i} M$ egy direkt felbonthatatlan direkt összeadandója. Legyen $i$ ezenfelül páratlan. Ekkor az előző tétel szerint $M_i$-nek van $S$ kompozíciófaktora, amelyre $\operatorname{pd} S = i$.

A következő tétel a 4.2.12 állítás, illetve a 4.2.13 tétel felhasználásával bizonyítható. A bizonyítás $A$ Auslander–Reiten-gráfját, illetve az alfejezet elején definiált fogalmakat (például $\psi$-utakat) használja; ennek az ismertetésétől eltekintek.

**4.2.15. Tétel.** Legyen $A$ ciklikus Nakayama-algebra, $S$ pedig egyszerű modulus.

1. $a(S)$ pontosan akkor véges, ha $\operatorname{pd} S$ páratlan; ekkor $\operatorname{pd} S = 2a(S) - 1$. Ha $a(S)$ végtelen, akkor $\operatorname{pd} IS$ páros, és $\operatorname{pd} IS \leq 2a(A)$.

2. $a'(S)$ pontosan akkor véges, ha $\operatorname{id} S$ páratlan; ekkor $\operatorname{id} S = 2a'(S) - 1$. Ha $a'(S)$ végtelen, akkor $\operatorname{id} PS$ páros, és $\operatorname{id} PS \leq 2a(A)$.

**4.2.16. Tétel.** Legyen $A$ Nakayama-algebra, $S$ pedig egyszerű modulus. Ekkor $S$ páratlan, vagy $IS$ páros, tehát $S$ és $IS$ közül legalább az egyiknek véges a projektív dimenziója.

*Bizonyítás.* Feltehető, hogy $A$ gráfja összefüggő. Tegyük fel, hogy $S$ nem páratlan, ekkor $\operatorname{pd} S$ páros vagy végtelen. Ha $\operatorname{pd} S$ páros, akkor a 4.2.10 2. állítása alapján $\operatorname{pd} IS$ páros, azaz $IS$ páros. Ha $\operatorname{pd} S$ végtelen, akkor $A$ ciklikus, így a 4.2.15 tétel 1. állítása alapján $a(S)$ végtelen, továbbá $\operatorname{pd} IS$ páros.

A tétel duálisa:

**4.2.17. Tétel.** Legyen $A$ Nakayama-algebra, $S$ pedig egyszerű modulus. Ekkor $\operatorname{id} S$ páratlan, vagy $\operatorname{id} PS$ páros, tehát $S$ és $PS$ közül legalább az egyiknek véges az injektív dimenziója.

**4.2.18. Tétel.** Legyen $A$ Nakayama-algebra. Ekkor minden $S$ egyszerű modulus része egy $M_S$ direkt felbonthatatlan modulusnak, melyre $\operatorname{pd} M_S < \infty$, továbbá $S$ faktora egy $N_S$ direkt felbonthatatlan modulusnak, melyre $\operatorname{id} N_S < \infty$.

*Bizonyítás.* Legyen $S$ egyszerű. A 4.2.16 tétel szerint $\operatorname{pd} S$ vagy $\operatorname{pd} IS$ véges, így $S$ része egy $M_S$ direkt felbonthatatlan modulusnak, melyre $\operatorname{pd} M_S < \infty$. Hasonlóan a 4.2.17 tétel miatt $\operatorname{id} S$ vagy $\operatorname{id} PS$ véges, így $S$ faktora egy $N_S$ direkt felbonthatatlan modulusnak, melyre $\operatorname{id} N_S < \infty$.

**4.2.19. Tétel.** Legyen $A$ Nakayama-algebra, $S$ pedig egyszerű modulus. Legyen $M_S = S$, ha $\operatorname{pd} S < \infty$, különben pedig legyen $M_S = IS$. Legyen $N_S = S$, ha $\operatorname{id} S < \infty$, különben pedig legyen $N_S = PS$. Legyen $d = \max_S \operatorname{pd} M_S$, illetve $d' = \max_S \operatorname{id} N_S$. Ekkor

$$\text{p.fin.dim}\, A = \text{i.fin.dim}\, A = \text{p.Fin.dim}\, A = \text{i.Fin.dim}\, A = \operatorname{del} A = \operatorname{des} A = d = d'.$$

*Bizonyítás.* A 4.2.16, illetve a 4.2.17 alapján látható, hogy $M_S$-nek véges a projektív dimenziója, illetve $N_S$-nek véges az injektív dimenziója minden $S$ egyszerű modulusra. Ekkor alkalmazható a 4.1.15 tétel, ezzel beláttuk a tétel állítását.

**4.2.20. Definíció.** (Gélinas) Legyen $A$ Nakayama-algebra, $M$ pedig direkt felbonthatatlan modulus. Ekkor $M$ *beágyazási dimenzióját* az alábbi módon definiáljuk:

$$e(M) = \min\{\operatorname{pd} N : N \in \text{mod-}A, M \subseteq N\}.$$

**4.2.21. Állítás.** Legyen $A$ Nakayama-algebra, $M$ pedig direkt felbonthatatlan modulus. Ekkor

$$e(M) = \min\{\operatorname{pd} M, \operatorname{pd} IM\},$$

továbbá

$$\operatorname{del} M \leq e(M).$$

Ha $S$ egyszerű, akkor

$$e(S) < \infty$$

is teljesül.

*Bizonyítás.* Legyen $N$ olyan végesen generált modulus, amelyre $M \subseteq N$, továbbá $\operatorname{pd} N$ minimális. $\operatorname{soc} M$ egyszerű, így feltehető, hogy $N$ direkt felbonthatatlan, mivel $N = \bigoplus N_i$ esetén ($N_i$ direkt felbonthatatlan minden $i$-re) $M$ része valamely $N_i$-nek, és $\operatorname{pd} N_i \leq \operatorname{pd} N$. Ha $\operatorname{pd} N$ végtelen, akkor $\operatorname{pd} N$ minimalitása miatt tetszőleges $M \subseteq N'$-re $\operatorname{pd} N' = \infty$, tehát $\operatorname{pd} M = \operatorname{pd} IM = \infty$, így $e(M) = \min\{\operatorname{pd} M, \operatorname{pd} IM\}$. Ha $N$ páratlan, akkor a 4.2.10 1. állítása alapján $M \subseteq N$ miatt $\operatorname{pd} M \leq \operatorname{pd} N$, így $\operatorname{pd} N$ minimalitása miatt $\operatorname{pd} M = \operatorname{pd} N$, azaz $e(M) = \min\{\operatorname{pd} M, \operatorname{pd} IM\}$. Ha $N$ páros, akkor a 4.2.10 2. állítása alapján $N \subseteq IN = IM$ miatt $\operatorname{pd} IM \leq \operatorname{pd} N$, így $\operatorname{pd} N$ minimalitása miatt $\operatorname{pd} IM = \operatorname{pd} N$, azaz $e(M) = \min\{\operatorname{pd} M, \operatorname{pd} IM\}$.

A 4.1.11 állítás miatt $\operatorname{del} M \leq e(M)$.

Legyen $S$ egyszerű. Ekkor a 4.2.16 tétel alapján $\operatorname{pd} S$ vagy $\operatorname{pd} IS$ véges, tehát $e(S)$ véges.

**4.2.22. Megjegyzés.** $\operatorname{pd} N = \infty$ valóban lehetséges. Tekintsük az alábbi Nakayama-algebrát:

$$A_A = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}.$$

Ekkor

$$(DA)_A \simeq \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}.$$

Vegyük az

$$M_A = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$$

modulust. $IM = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$, és $\operatorname{pd} M = \operatorname{pd} IM = \infty$, így $e(M) = \infty$, azaz tetszőleges $M \subseteq N$-re $\operatorname{pd} N = \infty$.

**4.2.23. Tétel.** Legyen $A$ Nakayama-algebra. Ekkor

$$\mathrm{p.fin.dim}\, A = \max_S \min\{\mathrm{pd}\, S, \mathrm{pd}\, IS\},$$

ahol $S$ végigfut az egyszerű $A$-modulusokon.

*Bizonyítás.* $\mathrm{del}\, S \leq e(S)$ minden $S$ egyszerűre, így

$$\mathrm{p.fin.dim}\, A = \mathrm{del}\, A = \max_S \mathrm{del}\, S \leq \max_S e(S).$$

A 4.2.16 tétel alapján $\mathrm{pd}\, S$ vagy $\mathrm{pd}\, IS$ véges, tehát

$$\max_S e(S) \leq \mathrm{p.fin.dim}\, A.$$

Ezek szerint

$$\mathrm{p.fin.dim}\, A = \max_S e(S),$$

így a 4.2.21 állítás alapján beláttuk a tételt.

Ezzel a tétellel kaptunk egy egyszerű formulát a Nakayama-algebrák finitisztikus dimenziójára. Ha egy Nakayama-algebra globális dimenziója véges, akkor az megegyezik a finitisztikus dimenziójával, így a végtelen globális dimenziójú Nakayama-algebrák izgalmasabbak. Az alábbiakban saját példákat hozok erre az esetre. Mutatok minden $n$ természetes számra olyan Nakayama-algebrát, amelynek végtelen a globális dimenziója és $n$ a finitisztikus dimenziója.

**4.2.24. Példa.** $n = 0$-ra jó példa az alábbi jól ismert Nakayama-algebra:

$$A_A = {\scriptstyle\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}} \oplus {\scriptstyle\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}}.$$

$\mathrm{r.gl.dim}\, A = \infty$, mivel $\mathrm{pd}\, 1 = \infty$.

$$(DA)_A \simeq {\scriptstyle\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}} \oplus {\scriptstyle\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}},$$

így $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$, illetve $\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$ injektív is. $I(1) = \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$, továbbá $I(2) = \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$, így $\mathrm{pd}\, I(1) = \mathrm{pd}\, I(2) = 0$, tehát $\mathrm{p.fin.dim}\, A = 0$.

**4.2.25. Példa.** Legyen $n = 2k-1$ alakú, ahol $k \geq 1$. Tekintsük az alábbi Nakayama-algebrát:

$$A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\\4\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\4\\5\end{smallmatrix} \oplus \ldots \oplus \begin{smallmatrix}3k-2\\3k-1\\3k\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3k-1\\3k\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3k\\1\end{smallmatrix}.$$

r.gl.dim $A = \infty$, mivel pd $1 = \infty$.

$$(DA)_A \simeq \begin{smallmatrix}3k-1\\3k\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\\4\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\4\\5\end{smallmatrix} \oplus \ldots \oplus \begin{smallmatrix}3k-2\\3k-1\\3k\end{smallmatrix}.$$

Látható, hogy az 1, illetve a $3, 4, \ldots, 3k-1, 3k$ egyszerű modulusok injektív burka projektív is, így a finitiszikus dimenzió meghatározásához elegendő a 2 egyszerű modulust, illetve az $I(2) = \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$ modulust vizsgálni. pd $2 = 2k-1$, valamint pd $I(2) = \infty$, így p.fin.dim $A = 2k-1$.

**4.2.26. Példa.** Legyen $n = 2k$ alakú, ahol $k \geq 1$. Tekintsük az alábbi Nakayama-algebrát:

$$A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\\4\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\4\\5\end{smallmatrix} \oplus \ldots \oplus \begin{smallmatrix}3k-2\\3k-1\\3k\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3k-1\\3k\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3k\\1\\2\\3\end{smallmatrix}.$$

r.gl.dim $A = \infty$, mivel pd $1 = \infty$.

$$(DA)_A \simeq \begin{smallmatrix}3k-1\\3k\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3k\\1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3k\\1\\2\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\\4\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\4\\5\end{smallmatrix} \oplus \ldots \oplus \begin{smallmatrix}3k-2\\3k-1\\3k\end{smallmatrix}.$$

Látható, hogy az 1, illetve a $3, 4, \ldots, 3k-1, 3k$ egyszerű modulusok injektív burka projektív is, így a finitiszikus dimenzió meghatározásához elegendő a 2 egyszerű modulust, illetve az $I(2) = \begin{smallmatrix}3k\\1\\2\end{smallmatrix}$ modulust vizsgálni. pd $2 = \infty$, valamint pd $I(2) = 2k$, így p.fin.dim $A = 2k$.

# Hivatkozások


[1] Frank W Anderson and Kent R Fuller. *Rings and categories of modules*, volume 13. Springer Science & Business Media, 2012.

[2] Ibrahim Assem, Daniel Simson, and Andrzej Skowroński. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Volume 1: Techniques of Representation Theory*. Cambridge University Press, 2006.

[3] Maurice Auslander and David A Buchsbaum. Homological dimension in noetherian rings. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 42(1):36–38, 1956.

[4] Maurice Auslander and David A Buchsbaum. Homological dimension in local rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 85(2):390–405, 1957.

[5] Maurice Auslander and Idun Reiten. On a generalized version of the Nakayama conjecture. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 52(1):69–74, 1975.

[6] Hyman Bass. Finitistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 95(3):466–488, 1960.

[7] Peter Dräxler and Dieter Happel. A proof of the generalized Nakayama conjecture for algebras with $J^{2l+1} = 0$ and $A/J^l$ representation finite. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 78(2):161–164, 1992.

[8] Kent R Fuller and Birge Zimmermann-Huisgen. On the generalized nakayama conjecture and the cartan determinant problem. *Transactions of the American Mathematical Society*, 294(2):679–691, 1986.

[9] Vincent Gélinas. The depth, the delooping level and the finitistic dimension. *Advances in Mathematics*, 394:108052, 2022.

[10] Edward L Green and Birge Zimmermann-Huisgen. Finitistic dimension of Artinian rings with vanishing radical cube. *Mathematische Zeitschrift*, 206:505–526, 1991.

[11] Arun Vinayak Jategaonkar. A counter-example in ring theory and homological algebra. *Journal of Algebra*, 12(3):418–440, 1969.

[12] Dag Madsen. Projective dimensions and Nakayama algebras. *Representations of algebras and related topics*, pages 247–265, 2005.

[13] Bruno J Müller. The classification of algebras by dominant dimension. *Canadian Journal of Mathematics*, 20:398–409, 1968.

[14] Tadasi Nakayama. On algebras with complete homology: To Emil Artin on his 60th birthday. In *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, volume 22, pages 300–307. Springer, 1958.

[15] Claus Michael Ringel. The finitistic dimension of a Nakayama algebra. *Journal of Algebra*, 576:95–145, 2021.

[16] Joseph J Rotman. An introduction to homological algebra (2009).

[17] Jean-Pierre Serre. Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noethériens. In *Proceedings of the international symposium on algebraic number theory, Tokyo & Nikko*, volume 1956, pages 175–189, 1955.

[18] Sverre Smalø. The supremum of the difference between the big and little finitistic dimensions is infinite. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 126(9):2619–2622, 1998.

[19] Hiroyuki Tachikawa. On dominant dimensions of QF-3 algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 112(2):249–266, 1964.

[20] Birge Zimmermann-Huisgen. Homological domino effects and the first finitistic dimension conjecture. *Inventiones mathematicae*, 108(1):369–383, 1992.

[21] Birge Zimmermann-Huisgen. The finitistic dimension conjectures – a tale of 3.5 decades. In *Abelian Groups and Modules: Proceedings of the Padova Conference, Padova, Italy, June 23–July 1, 1994*, pages 501–517. Springer, 1995.