

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

# Rendszer identifikációs módszerek adaptív racionális ortogonális függvények segítségével

Matematikus MSc diplomamunka

Készítette: Szabari Mátyás Márton  
ELTE TTK  
Matematika MSc

Témavezető: Dr. Kovács Péter  
Habilitált egyetemi docens  
ELTE IK, Numerikus Analízis Tanszék



**ELTE**  
EÖTVÖS LORÁND  
TUDOMÁNYEGYETEM

Budapest, 2023.06.07.

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>2</b>
1.1. Köszönetnyilvánítás . . . . .	2
1.2. Bevezetés a Matematikus MSc diplomamunkához . . . . .	3
1.3. Bevezetés az Informatikatudományi OTDK dolgozathoz . . . . .	4
<b>2. Matematikai háttér</b>	<b>7</b>
2.1. Hardy-terek struktúrája . . . . .	7
2.2. Komplex racionális függvények . . . . .	12
2.2.1. Möbius transzformációk . . . . .	12
2.2.2. Blaschke-függvények . . . . .	15
2.2.3. Malmquist-Takenaka rendszerek . . . . .	19
2.3. SISO LTI rendszerek . . . . .	26
2.3.1. Racionális átviteli függvények . . . . .	31
2.4. Adaptív Projekciók módszere . . . . .	32
2.4.1. Lineáris approximáció . . . . .	32
2.4.2. Adaptív projekciók módszere . . . . .	34
<b>3. A javasolt algoritmus</b>	<b>36</b>
3.1. Valós Malmquist-Takenaka rendszerek . . . . .	37
3.2. A valós Malmquist-Takenaka rendszer deriválása . . . . .	42
3.3. Numerikus szimulációk . . . . .	50
3.3.1. Összehasonlítás más módszerekkel . . . . .	51
3.3.2. Átviteli függvény közelítése . . . . .	53
3.3.3. Empirikus átviteli függvény becslése . . . . .	55
<b>4. Összefoglalás</b>	<b>59</b>

# 1. fejezet

## Bevezetés

### 1.1. Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Dr. Kovács Péternek a kiváló tématevezést, továbbá Dózsa Tamás Gábornak az OTDK kutatáshoz és dolgozathoz - mely ezen diplomamunka alapja - nyújtott segítségét. Továbbá szeretném megköszönni Gyúró Noéminek a biztatást, mely nélkül nem kezdtem volna el az egyetemi tanulmányaim és munka mellett kutatni is.

## 1.2. Bevezetés a Matematikus MSc diplomamunkához

A rendszeridentifikáció egy a matematika és az informatika határán elhejezkedő terület. A matematika jellege abból adódik, hogy az benne vizsgált objektumok dinamikai rendszerek - azonban egy klasszikustól eltérő felírásban. A célja, hogy a valóságban mérhető dinamikai rendszerekhez numerikusan keressen egy azt minél jobban leíró matematikai modellt. Erre a problémára az évek során számos algoritmust fejlesztettek - melynek számát növeltem eggyel a ezen dolgozattal és a hozzá kapcsolódó egyéb munkákkal.

Az utóbbi két évtized során a gradiens alapú optimalizálási módszerek hatalmas népszerűsége tettek szert, és kevés olyan (folytonos) optimalizáláshoz kapcsolódó terület van, ahol ne lehetne velük találkozni. Azonban a SISO LTI rendszerek identifikációjára szolgáló eddigi algoritmusok más elven működnek, ezért a dolgozat lényege egy új típusú felírásban rejlik, mely lehetővé teszi a gradiens alapú módszerek használatát rendszeridentifikációban. Erről egy részletesebb összefoglalást adok a következő *Bevezetés az Informatikatudományi OTDK dolgozathoz* részben.

A diplomamunka eredeti változatát az OTDK Informatikatudományi szekciójára készítettem, ahol a Jelfeldolgozás és beágyazott rendszerek tagozatban indultam. Emiatt a dolgozatban elért eredmény is inkább informatikai mintsem matematikai jellegű. A tagozaton belül a pályamunkámat II. helyezéssel díjazták, továbbá elnyerte a Nokia Young Scientist, és a Pro Scientia Reménység Kitűző különdíjat.

Továbbá fontos megjegyezni, hogy míg a matematika területén írt publikációkban és dolgozatokban a többszám használata az elterjedt, addig az informatikában ez nem szokás, csak a ténylegesen több szerző által készített művekben. Emiatt a diplomamunka bizonyos szakaszaiban a matematikusi szokástól eltérően egyszámú fogalmazok.

## 1.3. Bevezetés az Informatikatudományi OTDK dolgozathoz

Az irányításelmélet alapvető feladata dinamikai rendszerek irányítása a rendszer paramétereitől. Azonban ahhoz, hogy egy rendszert ily módon befolyásoljunk nélkülözhetetlen ismerni a rendszer belső működését. Ha rendelkezünk elegendő információval, a rendszer viselkedésére pontos matematikai modellt alkoshatunk, azonban gyakran előfordul, hogy különböző okok miatt ezek az információk részben vagy egészben nem elérhetőek számunkra. Ilyenkor a rendszer előzetes vizsgálatához egyéb módszerekhez kell folyamodnunk. A rendszer identifikáció egy adatvezérelt megközelítés dinamikai rendszerek viselkedésének modellezésére. Ezen területen belül a legtöbb algoritmus egy fekete dobozként kezeli a rendszert, azaz egyedül a bemeneti és kimeneti adatokra támaszkodik. Az identifikáció történhet akár az idő- akár a frekvenciatartományban, melyeknek megvannak a maguk előnyei és hátrányai.

Ebben a dolgozatban bemutatok egy új módszert diszkrét, egydimenziós be- és kimenetű (single input single output, SISO), lineáris és időinvariáns (linear time invariant, LTI) rendszerek identifikációjára. Az identifikációt frekvenciatartományban fogom végezni, mely lehetőséget ad arra, hogy a problémát függvényapproximációs feladatként fogalmazzuk meg. A rendszer stabilitása és kauzalitása elégséges feltételt ad arra, hogy a rendszert leíró átviteli függvény a  $H^2(\mathbb{T})$  Hardy-tér eleme legyen. A javasolt módszer ezen feltételek mellett ad egy flexibilis módszert az átviteli függvény közelítésére. A  $H^2(\mathbb{T})$ -beli klasszikus trigonometrikus bázis mellett, a '90-es évektől kezdve foglalkoztak az úgynevezett általánosított ortogonális bázisfüggvények rendszer identifikációs alkalmazásaival [1]. A dolgozatban bevezetett identifikációs eljárás kapcsolódik ezekhez az eredményekhez, ugyanis a javasolt módszerben a pólusok elhelyezkedését szabad paraméterekként kezeltük és egy nemlineáris optimalizálási feladatként fogalmaztuk meg. Az átviteli függvény közelítése  $H^2(\mathbb{T})$ -ben a pólusok optimalizálásának segítségével egy szeparábilis nemlineáris legkisebb négyzetes problémát eredményez, melynek megoldásához a Golub és Pereyra által kidolgozott Adaptív Projekciók módszerét használtuk fel [2, 3].

A dolgozat egyes fejezeteiben az alábbi témaköröket mutatjuk be. A 2. fejezetben áttekintem a probléma megfogalmazásához szükséges matematikai fogalmakat. Először áttekintjük a Möbius-transzformációkat, majd ezek speciális esetével foglalkozunk, az úgynevezett Blaschke-függvényekkel. A Blaschke-függvények segítségünkre lesznek abban, hogy a  $H^2(\mathbb{T})$  térben definiálhassunk egy racionális általánosított

bázisfüggvény-rendszert. Ezeket a függvényeket Malmquist-Takenaka rendszereknek hívják és a paramétereire vonatkozó megfelelő feltétel teljesülése esetén (lásd 2.2.16) teljes orthonormált rendszert alkotnak  $H^2(\mathbb{T})$ -ben, mely elméleti alapot nyújt az átviteli függvény Malmquist-Takenaka függvényekkel való hatékony approximációjára.

A 2.3 alfejezetben röviden áttekintem a SISO LTI rendszerek fontosabb tulajdonságait, majd ismertetem az átviteli függvények és a Hardy-terek matematikai kapcsolatát. Ez az összefüggés adja a TDK dolgozatban elért eredmények matematikai alapját is. Az alfejezet végén felvázolom a SISO LTI rendszerek differenciaegyenletekből levezethető felírását. Ezen rendszerek átviteli függvénye egy racionális függvény, melynek pólusait a Malmquist-Takenaka függvények szerinti nemlineáris közelítés segítségével tudjuk megtalálni. Mérnöki szempontból egy rendszer differenciaegyenlettel való megadása kiemelkedően fontos, ugyanis a gyakorlatban ezen keresztül írják le a rendszer viselkedését. A fejezet végén, a 2.4.2. alfejezetben a póluskeresési feladatot egy szeparábilis nemlineáris legkisebb négyzetes problémává fogalmazom át, amit az Adaptív Projekciók módszerével oldok meg. Így a SISO LTI rendszer pólusainak meghatározása visszavezethető az átviteli függvényt leíró Malmquist-Takenaka rendszer paramétereinek optimalizálására.

A dolgozatban elért fő elméleti és gyakorlati eredmények bemutatását a 3. fejezet tartalmazza. A fejezetben levezetem a felhasznált Malmquist-Takenaka függvények néhány, a TDK eredményei szempontjából fontos tulajdonságát, majd bemutatom a javasolt módszer hatékonyságát igazoló numerikus kísérleteket. A tesztek során szintetikus generáltunk átviteli függvényeket SISO LTI rendszerekhez, majd zaj hozzáadása után próbáltuk a függvényt közelíteni. Annak érdekében, hogy a valóságban előforduló identifikációs feladatokat is szimuláljunk, a generált átviteli függvényekhez tartozó állapottér reprezentációkat is implementáltuk, melynek a be- és kimenetei alapján számolt empirikus átviteli függvényét közelítettük. Továbbá a javasolt módszert összehasonlítottuk egyéb, a szakirodalomban megtalálható módszerekkel is. Az elvégzett tesztek eredményei azt igazolják, hogy a javasolt rendszer identifikációs eljárás az új elméleti megközelítés mellett komoly potenciált mutat a gyakorlati alkalmazhatóság szempontjából is. A dolgozat végén összefoglaljuk az eredményeket és ismertetjük a kutatás jelenlegi állapotát, illetve a felmerülő még nyitott kérdéseket.

A problémát megoldó numerikus algoritmusokat, és a teszteléshez használt keretrendszert MATLAB-ban valósítottam meg. A TDK eredményeiből eddig egy nemzetközi publikáció készült, amit az AMIE22 nemzetközi konferencián is előadtam:

- Szabari M.: System identification with rational orthogonal functions, *Academia-Industry Matching Event (AIME) – Artificial Intelligence, Technology, and Qu-*

*antum Communication*, Budapest, 2022.11.17-18.

- Dózsa T., Szabari M., Soumelidis A., Kovács P.: Pole identification using discrete Laguerre expansion and variable projection, *22nd World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC)*, pp. 1–6, Yokohama, Japan, 2023.07.09-14 (elfogadva).

## 2. fejezet

# Matematikai háttér

### 2.1. Hardy-terek struktúrája

Ebben a fejezetben egy rövid áttekintést adok a Hardy-terek elméletéről. Mint később látni fogjuk, ezen téma szorosan kapcsolódik a rendszer-identifikáció és irányításelektémaköréhez. A fejezetben több olyan témát és tételt is tárgyalok, melyeket a későbbiek során nem fogunk közvetlen felhasználni, azonban ez nem jelenti azt, hogy a rendszer-identifikáció szempontjából ezek ne lennének fontosak, csupán azt, hogy ezek túlmutatnak a dolgozat keretein.

A dolgozatban a komplex egységkörlapra a  $\mathbb{D}$  jelölést, az egységkörre a pedig a  $\mathbb{T}$  jelölést fogom használni, melyen  $\sigma$ -val jelölöm a (nem normalizált) Lebesgue-mértéket. A  $\mathbb{T}$  jelölés használata  $S^1$  helyett onnan adódik, hogy magasabb dimenziós esetben az egységkörrel analóg szerepet a  $\mathbb{T}^d$  magasabb dimenziós tóruszok töltenek be, nem pedig az  $S^d$  gömbök.

**2.1.1. Definíció.** Adott  $1 \leq p \leq \infty$ -re a  $H^p(\mathbb{D})$  (egységkörlapon értelmezett) **Hardy-tér** azon  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorf függvényekből áll, melyekre

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{D})} := \sup_{0 < r < 1} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

$p < \infty$  esetén, és

$$\|f\|_{H^\infty(\mathbb{D})} := \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| < \infty,$$

ha  $p = \infty$ .

Ezen függvények nyilvánvalóan vektorteret alkotnak, melyeken könnyen ellenőrizhető, hogy a  $\|\cdot\|_{H^p(\mathbb{D})}$  leképezés norma. Sőt a maximum-elv miatt teljesül, hogy a defi-



nícióban szereplő  $\sup$ -ot kicserélhetjük  $\lim_{r \rightarrow 1^-}$ -ra. Ezen felül világos a

$$H^1(\mathbb{D}) \supset H^p(\mathbb{D}) \supset H^q(\mathbb{D}) \supset H^\infty(\mathbb{D})$$

trtalmazás, ahol  $q > p$ .

A Hardy-tereket azonban egy másik megközelítésből is lehet definiálni, mely - mint később látni fogjuk - kiemeli ezen terek azon tulajdonságát, ami miatt a rendszerelméletben, illetve Fourier-analízisben hasznosak.

**2.1.2. Definíció.** Legyen  $1 \leq p \leq \infty$ , ekkor a  $H^p(\mathbb{T})$  (egységkörön értelmezett) **Hardy-tér** azon  $f \in L^p(\mathbb{T})$  komplex függvényekből áll, melyekre

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(z) z^n d\sigma(z) = 0,$$

ha  $n < 0$  vagyis a negatív Fourier-együtthatók eltűnnek, továbbá  $H^p(\mathbb{T})$  normája az  $L^p(\mathbb{T})$ -ből örökölt norma.

Azt állítjuk, hogy ez a két tér valamilyen értelemben ugyan az. Csakhogy ez némi megfontolást igényel, mert már maguk a tér elemei más típusú objektumok: az első definícióban  $\mathbb{D}$ -n értelmezett függvényekkel, míg a másodikban  $\mathbb{T}$ -n értelmezettekkel foglalkozunk. Azonban annál lehet többet mondani, minthogy a két definícióbeli tér között létezik egy izometrikus izomorfia. Csupán az egyszerűbb  $p = 2$  esetet vizsgálom meg részletesebben, ugyanis számunkra ez lesz a legfontosabb.

**2.1.3. Állítás.** Legyen  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorf függvény, melyre  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ . Ekkor  $f \in H^2(\mathbb{D})$  pontosan akkor, ha

$$\|(a_n)\|_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty,$$

továbbá

$$\|(a_n)\|_{\ell^2} = \|f\|_{H^2(\mathbb{D})}$$

.

*Bizonyítás.* Legyen  $z = re^{it} \in \mathbb{D}$ . Ekkor

$$|f(z)|^2 = |f(re^{it})|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} r^{n+m} e^{i(n-m)t}.$$

Ezt  $t$  szerint integrálva a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}. \quad (2.1.1)$$

Így ha  $\|(a_n)\|_{\ell^2} < \infty$ , akkor minden  $r \in [0, 1)$  esetén

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt \leq \|(a_n)\|_{\ell^2},$$

tehát  $f \in H^2(\mathbb{D})$ .

Visszafelé, ha  $f \in H^2(\mathbb{D})$ , viszont  $\|(a_n)\|_{\ell^2} = \infty$ , akkor a 2.1.1 egyenlet jobb oldala akkarmekkora nagyra tehető megfelelő  $r \in [0, 1)$  választásával, ami ellentmond a feltevésnek.

Továbbá az Abel-féle szummációs eljárásból adódik, hogy ha  $\|(a_n)\|_{\ell^2} < \infty$ , akkor

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \|(a_n)\|_{\ell^2},$$

tehát  $\|(a_n)\|_{\ell^2} = \|f\|_{H^2(\mathbb{D})}$ . □

Ezáltal kaphatunk egy természetes izometrikus megfeleltetést a  $H^2(\mathbb{D})$  és  $H^2(\mathbb{T})$  között azáltal, hogy egy adott hatványsorral rendelkező  $H^2(\mathbb{D})$ -beli függvényt megfeleltetünk annak a  $H^2(\mathbb{T})$ -beli függvénynek, melynek a Fourier-együtthatói megegyeznek az előző hatványsorának együtthatóival. Továbbá mint függvények a következő elvárható kapcsolat áll fent köztük.

**2.1.4. Állítás.** *Legyen  $f \in H^2(\mathbb{D})$ , melynek hatványsora a 0-ban  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  és legyen  $\tilde{f} \in H^2(\mathbb{T})$ , melynek Fourier-sora  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int}$ . Továbbá  $0 < r < 1$  esetén definiáljuk az*

$$f_r(e^{it}) = f(re^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int}$$

*függvényeket. Ekkor  $f_r \rightarrow \tilde{f}$  a  $H^2(\mathbb{T})$  normájában.*

*Bizonyítás.* Először is nyilvánvaló, hogy  $f_r$  eleme  $H^2(\mathbb{T})$ -nek.

Legyen  $\varepsilon > 0$  adott. Mivel  $(a_n) \in \ell^2$ , ezért létezik  $n_0 \in \mathbb{N}$ , hogy  $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|^2 < \varepsilon$ .

Továbbá választhatunk egy  $s_\varepsilon \in (0, 1)$  számot, melyre  $r \in (s_\varepsilon, 1)$  esetén

$$\sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n|^2 (1 - r^n)^2 < \varepsilon.$$

Ekkor fennáll a következő becslés:

$$\begin{aligned}
\|f_r - \tilde{f}\|^2 &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_n r^n) e^{int} \right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (1 - r^n)^2 \\
&= \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n|^2 (1 - r^n)^2 + \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|^2 (1 - r^n)^2 \\
&\leq \varepsilon + \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|^2 \\
&\leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Ismeretes, hogy általánosan egy függvénysorozat  $L^2$ -beli konvergenciából nem következik a majdnem mindenhol való folytonosság, csupán annyi, hogy létezik a sorozatnak olyan részsorozata, amely majdnem mindenhol konvergens. Azonban a Carleson-tétel kimondja, hogy egy  $L^2(\mathbb{I})$ -beli - sőt, általánosan  $L^p(\mathbb{I})$ -beli, ahol  $1 < p \leq \infty$  - függvény Fourier-sora majdnem mindenütt konvergens. Ebből pedig, könnyen látható, hogy  $f_r$  tart  $f$ -hez majdnem mindehol.

A 2.1.4 állításban definiált  $f_r$  függvény valójában nem más, mint a komplex függvénytanból tanult Poisson-integrálja az  $f$ -nek. A Poisson-kernelt a következő három ekvivalens módon is lehet definiálni:

$$P_r(e^{it}) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} = \operatorname{Re} \left( \frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}} \right),$$

ahol  $0 \leq r < 1$ .

2.1.5. *Megjegyzés.* A Poisson-kernelt  $\mathbb{T}$ -n definiáltam, de sokszor célszerűbb  $\mathbb{R}$ -en definiálni mint  $2\pi$  periodikus függvényt a  $P_r'(t) = P_r(e^{it})$  képlettel. Mivel ez nem okoz különösebb problémát, a két változatra nem fogok külön jelölést használni.

A  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}$  egyenletes konvergenciája miatt

$$\hat{P}_r(n) = \int_0^{2\pi} P_r(e^{it}) e^{-int} dt = r^{|n|}.$$

Ekkor egy  $(a_n)$  Fourier-sorú  $f \in H^2(\mathbb{T})$  esetén

$$(\widehat{P_r * f})(n) = \hat{P}_r(n)\hat{f}(n) = r^{|n|}a_n,$$

így mivel a Fourier-soruk megegyezik, ezért a  $P_r * f$  és az  $f_r$  függvények megegyeznek.

A Poisson-kernelről továbbá könnyen belátható, hogy "jó" kernel, vagyis eleget tesz a következő három tulajdonságnak:

1. Létezik  $M$ , hogy minden  $0 \leq r < 1$  esetén  $\int_0^{2\pi} |P_r(t)| dt \leq M$ ,
2. minden  $0 \leq r < 1$  esetén  $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = 1$ ,
3. és minden  $\varepsilon > 0$  és  $\pi > \eta > 0$  értékre létezik  $r_0 < 1$ , hogy minden  $1 > r > r_0$  esetén

$$\int_A P_r(t) dt < \varepsilon,$$

ahol  $A = [-\pi, \pi] \setminus [-\eta, \eta]$ .

Vagyis az azt jelenti, hogy a  $\{P_r\}_{r \in [0,1]}$  egy approximatív egység az  $(L^1(\mathbb{T}), *)$  és  $(H^1(\mathbb{T}), *)$  Banach-algebrákban.

A Poisson-kernel segítségével (bizonyítás nélkül) kimondhatjuk a következő két tételt, melyek biztosítják a megfeleltetést  $H^p(\mathbb{T})$  és  $H^p(\mathbb{D})$  között. Természetesen fontos, hogy a kettő, elenkező irányú megfeleltetés egymás inverze legyen, azonban ezt nem mindig hangsúlyozzák a szakirodalomban.

**2.1.6. Tétel** (Fatou tétele). *Legyen  $0 \leq p \leq \infty$  és  $\tilde{f} \in H^p(\mathbb{T})$ . Ekkor az  $f(re^{it}) = (P_r * \tilde{f})(e^{it})$  függvény eleme  $H^p(\mathbb{D})$ -nek és  $P_r * \tilde{f}$  tart  $\tilde{f}$ -hez majdnem mindenhol. Továbbá  $\|P_r * \tilde{f}\|_{H^p(\mathbb{T})} \leq \|\tilde{f}\|_{H^p(\mathbb{T})}$  és abban az esetben, ha  $p \neq \infty$ , akkor  $\lim_{r \rightarrow 1^-} \|P_r * \tilde{f} - \tilde{f}\|_{H^p(\mathbb{T})} = 0$ . Ha pedig  $p = \infty$ , akkor minden olyan intervallumon, ahol  $\tilde{f}$  folytonos, ott  $P_r * \tilde{f}$  egyenletesen tart  $\tilde{f}$ -hez.*

A megfeleltetés másik irányát a következő tétel létesíti.

**2.1.7. Tétel** (Reisz Frigyes és Marcell tétele). *Legyen  $f \in H^p(\mathbb{D})$  valamilyen  $1 \leq p \leq \infty$  esetén. Ekkor  $\tilde{f}(e^{it}) = \lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{it})$  létezik majdnem minden  $t$ -re és  $\tilde{f} \in H^p(\mathbb{T})$ , továbbá  $f(re^{it}) = (P_r * \tilde{f})(e^{it})$ .*

Fontos megjegyezni, hogy *Reisz Frigyes és Marcell tételének* sokszor a  $p = 1$  esetet szokták nevezni. Ugyanis lehet beszélni a  $h^p(\mathbb{D})$  harmonikus Hardy-terekről, melyek definíciójában csupán a függvények harmonikusságát követeljük meg a holomofitásuk

helyett. Ekkor  $p \neq 1$  esetén  $h^p(\mathbb{D})$  megfeleltethető  $L^p(\mathbb{T})$ -nek a Poisson-kernel segítségével. Azonban  $p = 1$  esetén nem minden  $f \in h^1(\mathbb{D})$ -re létezik ilyen  $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{T})$ , melynek Poisson-integrálja az  $f$ . Ennek a háttérében az áll, hogy az  $L^1(\mathbb{T})$  tér nem duálisa egy másik Banach-térnek. Azonban az már igaz, hogy tetszőleges  $f \in h^1(\mathbb{D})$ -re létezik egy  $\mu$  komplex reguláris Borel mérték  $\mathbb{T}$ -n, melynek Poisson-integrálja az  $f$ , vagyis:

$$f(re^{it}) = (P_r * \mu)(e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} P_r(e^{i(t-\tau)}) d\mu(e^{i\tau})$$

Ezt a  $\mu$  mértéket megkaphatjuk mint az  $w^*$ - $\lim_{r \rightarrow 1^-} f_r \sigma$  határértéket a reguláris Borel mértékek terében, ahol a gyenge- $*$  topológia a  $C(\mathbb{T})$  folytonos függvények teréből származik. Így mértékekkel megfogalmazva Reisz F. és M. tétele a következő alakban mondható ki.

**2.1.8. Tétel.** *Tegyük fel, hogy  $\mu$  egy komplex reguláris Borel mérték  $\mathbb{T}$ -n, melynek a negatív Fourier-együtthatói eltűnnek, vagyis:*

$$\hat{\mu}(n) = \int_{\mathbb{T}} e^{-in\tau} d\mu(e^{i\tau}) = 0,$$

ha  $n < 0$ . Ekkor  $\mu$  abszolút folytonos a  $\sigma$  Lebesgue-mértékre nézve és  $\frac{d\mu}{d\sigma} \in H^1(\mathbb{T})$ .

Ezen megfeleltetésekből könnyen látszik, hogy  $H^p(\mathbb{D})$  valóban Banach-tér, ugyanis izomorf  $H^p(\mathbb{T})$ -vel, viszont

$$H^p(\mathbb{T}) = \bigcap_{n < 0} \ker \phi_n,$$

ahol  $\phi_n$  az  $f \mapsto \int_{\mathbb{T}} fz^n d\sigma(z)$  folytonos leképezést jelöli. Emiatt speciálisan  $H^2(\mathbb{D})$  Hilbert-tér. A Hardy-terek ezen szép megfeleltethetősége miatt a későbbiekben nem fogjuk megkülönböztetni  $H^p(\mathbb{D})$ -t és  $H^p(\mathbb{T})$ -t.

## 2.2. Komplex racionális függvények

### 2.2.1. Möbius transzformációk

Ebben a részben röviden felidézem a komplex analízisből tanult Möbius transzformációkat. Ezen transzformációk speciális esetei az úgynevezett Blaschke-függvények (lásd 2.2.2 alfejezet), melyek a Malmquist-Takenaka függvényrendszer definiálásához és vizsgálatához szükségesek.

**2.2.1. Definíció.** Tekintsük az  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  komplex számokat, melyekre teljesül, hogy  $ad - bc \neq 0$ . Ekkor a komplex sík **Möbius transzformációjának** nevezzük az

$$M_{a,b,c,d} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

függvényt.

Azonban abban az esetben, ha  $c \neq 0$  az  $M_{a,b,c,d}$  nem jól definiált a  $z = -\frac{d}{c}$  pontban, hiszen ekkor nullával osztanánk. Ezért érdekesebb a Möbius transzformációkat a  $\overline{\mathbb{C}}$  kiterjesztett komplex síkon vagy más néven a Riemann gömbön értelmezni. A Riemann gömböt sokféleképpen lehet realizálni, azonban a legegyszerűbb a  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  módon, ahol az aritmetikai műveleteket a következő módon definiáljuk:

$$z + \infty = \infty, \quad \text{és} \quad \frac{z}{\infty} = 0, \quad (z \in \mathbb{C}),$$

$$z \cdot \infty = \infty \quad \text{és} \quad \frac{z}{0} = \infty, \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

A Riemann gömb kifejezés azért indokolt, mert topologikusan a konstrukció nem más mint a sík egy-pontú kompaktifikációja, így a Riemann gömb ténylegesen egy kétdimenziós gömbfelület.

Ekkor a Möbius transzformációkat kiterjeszthetjük a Riemann gömbre:

Ha  $c = 0$ :

$$M_{a,b,c,d}(\infty) = \infty$$

Ha pedig  $c \neq 0$ :

$$M_{a,b,c,d}\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \quad \text{és} \quad M_{a,b,c,d}(\infty) = \frac{a}{c}.$$

Természetesen a fenti értékek pontosan úgy lettek definiálva, hogy a Möbius transzformációk folytonos  $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  transzformációk legyenek.

Továbbá egyszerű számolással adódik, hogy:

$$M_{a,b,c,d}^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a} = M_{d,-b,-c,a}(z).$$

**2.2.2. Állítás.** *A Möbius transzformációk folytonosak, invertálhatóak és az inverzüik is invertálható, ezért egy Möbius transzformáció a  $\overline{\mathbb{C}}$  egy homeomorfizmusa.*

Felmerülhet a kérdés, hogy vajon két Möbius transzformáció kompozíciója is felírható-e Möbius transzformációként. A következő számolás mutatja, hogy a kérdésre a válasz igen:

$$\begin{aligned} M_{e,f,g,h}(M_{a,b,c,d}(z)) &= \frac{e\frac{az+b}{cz+d} + f}{g\frac{az+b}{cz+d} + h} = \frac{e(az+b) + f(cz+d)}{g(az+b) + h(cz+d)} = \frac{(ea+fc)z + eb+fd}{(ga+hc)z + gb+hd} = \\ &= M_{ea+fc, eb+fd, ga+hc, gb+hd}(z) \end{aligned}$$

Mivel definíció szerint  $ad - bc \neq 0$  és  $eh - fg \neq 0$ , ezért

$$(ea+fc)(gb+hd) - (eb+fd)(ga+hc) = (ad-bc)(eh-fg) \neq 0,$$

így a kompozíció valóban Möbius transzformáció.

**2.2.3. Következmény.** *A Möbius transzformációk **Möb** halmaza csoportot alkot a kompozícióra nézve, melyben az egységelem  $M_{1,0,0,1}$ .*

A Möbius transzformációk fentebb bemutatott tulajdonságai, mint például a definícióban szereplő feltétel, az inverzre és a kompozícióra felírt képlet emlékeztethetnek  $2 \times 2$ -es mátrixok tulajdonságaira. Ez nem véletlen, az  $ad - bc \neq 0$  feltétel pontosan azt jelenti egy  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  mátrixra nézve, hogy a determinánsa nem nulla. A kompozíciós és inverziós képlettel pedig a következő állítást bizonyítottuk:

**2.2.4. Állítás.** *A  $GL(2, \mathbb{C})$  általános lineáris csoporton, vagyis a nem-nulla determinánsú  $2 \times 2$ -es mátrixokon értelmezett*

$$\begin{aligned} \Upsilon : GL(2, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbf{Möb} \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &\longmapsto M_{a,b,c,d} \end{aligned}$$

*leképezés egy csoportomorfizmus.*

A homomorfizmus-tétel alapján tudjuk, hogy  $GL(2, \mathbb{C}) / \ker \Upsilon \simeq \mathbf{Möb}$ .  $\ker \Upsilon$  azokból a mátrixokból áll, amik  $M_{1,0,0,1}$ -be képződnek, melyek nem mások, mint a

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

alakú mátrixok. Ezek a mátrixok a  $GL(2, \mathbb{C})$  centrumát alkotják, vagyis a Möbius transzformációk **Möb** csoportja nem más mint  $PGL(2, \mathbb{C})$ , mely csoportot úgy kapunk, hogy megfeleltetjük egymásnak azokat a  $GL(2, \mathbb{C})$ -beli mátrixokat, melyek (nem-nulla) skalárszorosai egymásnak.

2.2.5. *Megjegyzés.* Könnyen látható, hogy  $PGL(2, \mathbb{C})$  és így **Möb** ugyan az mint  $PSL(2, \mathbb{C})$ , ugyanis tetszőleges  $N \in PGL(2, \mathbb{C})$  esetén létezik  $c \in \mathbb{C}$ , melyre  $c^2 = \det N$ , így  $M_{c^{-1}, 0, 0, c^{-1}} N \in PSL(2, \mathbb{C})$ , azonban  $M_{c^{-1}, 0, 0, c^{-1}} \in \ker \Upsilon$ .

## 2.2.2. Blaschke-függvények

A továbbiakban a Möbius transzformációk egy speciális részcsoportjára lesz szükségünk, az úgynevezett Blaschke-függvényekre. A továbbiakban a  $\mathbb{D}$  jelölést használom a komplex sík nyílt egységkörlapjára,  $\overline{\mathbb{D}}$ -t a zártra, és  $\mathbb{T}$ -t az egységkörre.

2.2.6. **Definíció.** Legyen  $a \in \mathbb{D}$  egy tetszőleges komplex szám, ekkor a

$$B_a : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \quad B_a : z \mapsto \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

függvényt az  $a$  paraméterű **Blaschke-függvénynek** nevezzük.

A korábbi jelöléseinket használva  $B_a = M_{1, -a, -\bar{a}, 1}$ . A definícióból könnyen látható, hogy

$$B_a(a) = 0 \quad \text{és} \quad B_a(1/\bar{a}) = \infty,$$

ezért az  $1/\bar{a}$  pontot a  $B_a$  **pólusának**, az  $a$ -t pedig az **inverz pólusának** fogjuk nevezni. Az elnevezést az indokolja, hogy az  $1/\bar{a}$  az  $a$  egységkörre vett tükörképe.

2.2.7. **Állítás.** *Tetszőleges  $a, z \in \mathbb{C}$ -re fennáll a következő egyenlőség:*

$$1 - |B_a(z)|^2 = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |a|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2}.$$

*Bizonyítás.*

$$\begin{aligned} 1 - |B_a(z)|^2 &= 1 - \frac{|z - a|^2}{|1 - \bar{a}z|^2} = \frac{(1 - \bar{a}z)(1 - \bar{a}\bar{z}) - (z - a)(z - a)}{|1 - \bar{a}z|^2} \\ &= \frac{(1 - \bar{a}z - a\bar{z} + |az|^2)(|z|^2 - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2} \\ &= \frac{(1 + |az|^2)(|z|^2 - |a|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2} = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |a|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2}. \end{aligned}$$



□

Legyen  $\mathbf{a} \in \mathbb{D}$ . Ekkor ha  $z \in \overline{\mathbb{D}}$ , akkor

$$|B_{\mathbf{a}}(z)|^2 = 1 - \frac{(1 - |z|^2)(1 - |\mathbf{a}|^2)}{|1 - \bar{\mathbf{a}}z|^2} \leq 1$$

miatt  $B_{\mathbf{a}}(z) \in \overline{\mathbb{D}}$ . Továbbá  $z \in \mathbb{D}$  esetén  $|B_{\mathbf{a}}(z)|^2 < 1$  és  $z \in \mathbb{T}$  esetén pedig  $|B_{\mathbf{a}}(z)|^2 = 1$ .

Mivel  $B_{\mathbf{a}}$  egy speciális Möbius transzformáció, ezért az inverzét is fel tudjuk írni mint Möbius transzformáció, mégpedig:

$$B_{\mathbf{a}}^{-1} = M_{1, -\mathbf{a}, -\bar{\mathbf{a}}, 1}^{-1} = M_{1, \mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}, 1} = B_{-\mathbf{a}}.$$

Vagyis egy Blaschke függvény inverze is Blaschke függvény, melyre szintén fennáll a fentebb bizonyított egyenlőség/egyenlőtlenség, így kimondhatjuk az alábbi következményt.

**2.2.8. Következmény.** A  $B_{\mathbf{a}}|_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , a  $B_{\mathbf{a}}|_{\overline{\mathbb{D}}} : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$  és a  $B_{\mathbf{a}}|_{\mathbb{T}} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  leképezések homeomorfizmusok.

Ugyan (a  $\mathbb{D}$ -vel paraméterezett) Blaschke-függvények kompozíciója kivezet a Blaschke-függvények köréből, azonban ezt meg lehet javítani, mert a kompozícióval kapott függvény mod  $\mathbb{T}$  Blaschke (vagyis  $\varepsilon B_{\mathbf{a}}$  alakú, ahol  $\varepsilon \in \mathbb{T}$  és  $\mathbf{a} \in \mathbb{D}$ ). Vagyis  $\mathbb{D} \times \mathbb{T}$  segítségével be lehet vezetni egy csoportstruktúrát:

$$\mathfrak{B} := \{B_{\mathbf{a}} := \varepsilon B_{\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} := (\mathbf{a}, \varepsilon) \in \mathbb{D} \times \mathbb{T}\}$$

A  $\mathbf{a}_1 = (\mathbf{a}_1, \varepsilon_1)$  és  $\mathbf{a}_2 = (\mathbf{a}_2, \varepsilon_2)$   $\mathbb{D} \times \mathbb{T}$ -beli elemekre  $B_{\mathbf{a}} = B_{\mathbf{a}_1} \circ B_{\mathbf{a}_2}$ , ahol:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a}, \varepsilon) = \left( \bar{\varepsilon}_2 \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \varepsilon_2}{1 + \mathbf{a}_1 \bar{\mathbf{a}}_2 \varepsilon_2}, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{1 + \mathbf{a}_1 \bar{\mathbf{a}}_2 \varepsilon_2}{1 + \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \varepsilon_2} \right).$$

Az  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}, \varepsilon)$  esetén pedig  $B_{\mathbf{a}}$  inverze  $B_{\mathbf{a}^{-1}}$ , ahol  $\mathbf{a}^{-1} = (-\varepsilon \mathbf{a}, \bar{\varepsilon})$ .

**2.2.9. Megjegyzés.** Ha a  $\mathbb{D}$ -n tekintjük a hiperbolikus sík Poincaré-féle körlap modelljét, akkor a  $\mathfrak{B}$  csoport elemei ennek az irányítástartó izometriái lesznek. Mint a Riemann-gömbön ható transzformációk, ezek pontosan azok a Möbius transzformációk, melyek az egységkört és az egységkörlapot önmagukba képzik.

A későbbi alkalmazásokhoz (lásd 3 fejezet) a Blaschke-függvények egységkörön felvett értékeit fogjuk használni, ezért a folytatásban explicit képletet adunk a  $B_{\mathbf{a}}|_{\mathbb{T}}$  függvényre.

Mivel a  $B_a|_{\mathbb{T}}$  függvény homeomorfizmus, ezért egy megfelelő  $\beta_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény segítségével felírható az alábbi alakban:

$$B_a|_{\mathbb{T}}(e^{it}) = e^{i\beta_a(t)},$$

ahol  $t \in \mathbb{R}$  tetszőleges valós szám. Tetszőleges  $s \in \mathbb{R}_+$ -ra legyen:

$$\hat{\gamma}_s(t) = \begin{cases} 2 \arctan(s \tan(t/2)), & \text{ha } t \in (-\pi, \pi) \\ -\pi, & \text{ha } t = -\pi \\ \pi, & \text{ha } t = \pi \end{cases}$$

és definiáljuk a  $\gamma_s$  függvényt a  $\hat{\gamma}_s$  olyan  $t$ -beli kiterjesztéseként, melyre  $\gamma_s|_{[-\pi, \pi]} = \hat{\gamma}_s$  és  $\gamma_s(t + 2\pi) = \gamma_s(t) + 2\pi$ .

Továbbá definiáljuk az  $s : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $s : r \mapsto \frac{1+r}{1-r}$  függvényt. Ekkor a következőt állíthatjuk:

**2.2.10. Állítás.** *A  $\gamma_{s(r)}(t)$  függvény ( $t$ -szerinti) deriváltja a Poisson magfüggvény, vagyis:*

$$\gamma'_{s(r)}(t) = P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} \quad t \in \mathbb{R}, r \in [0, 1).$$

*Bizonyítás.*

$$\begin{aligned} \gamma'_{s(r)}(t) &= \frac{1}{s(r)^2 \tan^2(t/2) + 1} \cdot \frac{s(r)}{\cos^2(t/2)} = \frac{s(r)}{s(r)^2 \sin^2(t/2) + \cos^2(t/2)} \\ &= \frac{\frac{1+r}{1-r}}{\frac{(1+r)^2}{(1-r)^2} \sin^2(t/2) + \cos^2(t/2)} = \frac{(1-r)(1+r)}{(1+r)^2 \sin^2(t/2) + (1-r)^2 \cos^2(t/2)} \\ &= \frac{1-r^2}{1+r^2 + 2r(\sin^2(t/2) - \cos^2(t/2))} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t) + r^2} \end{aligned}$$

□

Az előző állítást segítségével explicit formulát adhatunk a fentebb említett  $\beta_a$  függvényre.

**2.2.11. Tétel.** *Tetszőleges  $a = re^{i\alpha} \in \mathbb{D}$  esetén a  $B_a$  Blaschke-függvényre teljesül, hogy  $\beta_a(t) = \gamma_{s(r)}(t - \alpha) + \alpha$ , vagyis:*

$$B_a(e^{it}) = e^{i\beta_a(t)} = e^{i(\gamma_{s(r)}(t-\alpha) + \alpha)}.$$

*Bizonyítás.* Először is megmutatjuk, hogy teljesül az azonosság, ha az  $\alpha$  inverz pólust a  $[0, 1)$  intervallumról választjuk ( $\alpha = 0$ ), azaz:

$$B_r(e^{it}) = e^{i\gamma_s(t)}.$$

Ehhez elnevezzük a két oldalt, melyek segítségével átláthatóbb lesz a bizonyítás:

$$f(t) := B_r(e^{it}), \quad g(t) := e^{i\gamma_s(r)(t)}.$$

Ekkor először is azt állítjuk, hogy:

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{g'(t)}{g(t)}.$$

Az állítás értelmes, mert természetesen se  $f$ , se  $g$  nem lehet 0. Ehhez számoljuk ki őket külön-külön:

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{i\gamma'_{s(r)}(t)e^{i\gamma_s(r)(t)}}{e^{i\gamma_s(r)(t)}} = i \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}$$

Másrészt:

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = ie^{it} \left( \frac{1}{e^{it}-r} + \frac{r}{1-re^{it}} \right) = i \frac{(1-r^2)e^{it}}{(e^{it}-r)(1-re^{it})} = i \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t) + r^2}$$

Ebből adódóan:

$$\left( \frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{f'g - fg \frac{f'}{f}}{g^2} = 0.$$

Vagyis az  $\frac{f}{g}$  állandó, azonban  $t = 0$ -ban mindkét függvény 1-et vesz fel, ezért  $f = g$ . Tetszőleges  $\alpha = re^{i\alpha} \in \mathbb{D}$  esetén pedig vissza tudjuk vezetni a tételt az imént bizonyított  $\alpha = 0$  esetre:

$$B_\alpha(e^{it}) = \frac{e^{it} - re^{i\alpha}}{1 - re^{i(t-\alpha)}} = e^{i\alpha} \frac{e^{i(t-\alpha)} - r}{1 - re^{i(t-\alpha)}} = e^{i(\alpha + \gamma_s(r)(t-\alpha))}.$$

□

### 2.2.3. Malmquist-Takenaka rendszerek

Ebben részben ismertetek egy a  $H^2(\mathbb{D})$  Hardy térben teljes ortonormált rendszert alkotó függvényrendszert, a **Malmquist-Takenaka rendszert**, melyet a későbbiekben rendszerek átviteli függvényének közelítésére fogok alkalmazni.

Jelölje  $\mathbb{D}^{\mathbb{N}}$  a természetes számokkal indexelt  $\mathbb{D}$ -beli sorozatok terét. Legyen  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots) \in \mathbb{D}^{\mathbb{N}}$  sorozat. Jelölje  $m_n$  az  $a_n$  elem előfordulásainak a számát  $n \in \mathbb{N}$ -ig, vagyis  $m_n = \#\{k \mid k \in \mathbb{N}, k \leq n, a_k = a_n\}$ . Ekkor definiáljuk a következő,  $\mathbf{a}$  által meghatározott racionális függvények sorozatát ( $n$  szerint):

$$q_{a_n, m_n-1}(z) = \frac{z^{m_n-1}}{(1 - \bar{a}_n z)^{m_n}}$$

**2.2.12. Állítás.** *Tetszőleges  $n \in \mathbb{N}$  számra és  $f \in H^2(\mathbb{D})$  Hardy-tér-beli függvényre*

$$\langle f, q_{a,n} \rangle = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

*Bizonyítás.* A skalárszorzatot kiírva és felhasználva a Cauchy-formulát a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \langle f, q_{a,n} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{-it})e^{-int}}{(1 - ae^{-it})^{n+1}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{-it})e^{it}}{(e^{it} - a)^{n+1}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz \\ &= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \end{aligned}$$

□

Vagyis az előző tétel azt jelenti, hogy egy  $a \in \mathbb{D}$  és  $n \in \mathbb{N}$  esetén a  $q_{a,0}, \dots, q_{a,n-1}$  függvények által kifeszített altér merőleges kiegészítő altere pontosan azokból a függvényekből áll, melyeknek  $n$ -szeres gyökük van  $a$ -ban. Így speciálisan  $n = 0$ -ra a  $k(x, y) = q_{y,0}(x)$  a  $H^2(\mathbb{D})$  reprodukáló magfüggvénye.

**2.2.13. Definíció.** Egy  $\mathbf{a} \in \mathbb{D}^{\mathbb{N}}$  sorozat által generált **Malmquist-Takenaka rendszernek** a

$$\Phi_n^{\mathbf{a}}(z) = \frac{\sqrt{1 - |\mathbf{a}_n|^2}}{1 - \bar{a}_n z} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z} = R_{a_n}(z) \prod_{k=0}^{n-1} B_{a_k}(z)$$

függvényrendszert nevezzük.

Ez a függvényrendszer - ahogyan nemsokára látni fogjuk - nem más, mint a  $\mathfrak{q}_{\mathbf{a}_n, m_n-1}$  rendszerből a  $H^2(\mathbb{D})$  skalárszorzatára vett Gram-Smidt ortogonalizációval kapott rendszer. Speciális esetként, ha  $\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$  minden  $n$ -re, akkor a hatványfüggvényeket kapjuk.

**2.2.14. Tétel.** *Tekintsük az  $\mathbf{a} \in \mathbb{D}^{\mathbb{N}}$  sorozatot. Ekkor az ehhez tartozó MT-rendszer ortonormált a  $H^2(\mathbb{D})$  skalárszorzatára, vagyis minden  $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}$ -re:*

$$\langle \Phi_{\mathbf{m}}^{\mathbf{a}}, \Phi_{\mathbf{n}}^{\mathbf{a}} \rangle = \delta_{\mathbf{n}, \mathbf{m}}.$$

*Bizonyítás.* Feltehetjük, hogy  $\mathbf{n} < \mathbf{m}$ . Ekkor definiáljuk az

$$L(z) = \prod_{l=\mathbf{n}}^{\mathbf{m}-1} B_{\mathbf{a}_l}(z)$$

függvényt. Mivel egy Blaschke-függvény értéke az egységkörön 1 abszolút értékű, ezért:

$$\langle \Phi_{\mathbf{m}}^{\mathbf{a}}, \Phi_{\mathbf{n}}^{\mathbf{a}} \rangle = \langle LR_{\mathbf{a}_m}, R_{\mathbf{a}_n} \rangle = \sqrt{1 - |\mathbf{a}_m|^2} \sqrt{1 - |\mathbf{a}_n|^2} \langle Lq_{\mathbf{a}_m, 0}, q_{\mathbf{a}_n, 0} \rangle$$

Ekkor, ha  $\mathbf{n} \neq \mathbf{m}$ , akkor  $L(\mathbf{a}_n) = 0$ , és így a 2.2.12 állítás alapján azt kapjuk, hogy  $\langle \Phi_{\mathbf{m}}^{\mathbf{a}}, \Phi_{\mathbf{n}}^{\mathbf{a}} \rangle = 0$ . Ellenkező esetben pedig

$$\langle \Phi_{\mathbf{n}}^{\mathbf{a}}, \Phi_{\mathbf{n}}^{\mathbf{a}} \rangle = (1 - |\mathbf{a}_n|^2) \langle q_{\mathbf{a}_n, 0}, q_{\mathbf{a}_n, 0} \rangle = (1 - |\mathbf{a}_n|^2) q_{\mathbf{a}_n, 0}(\mathbf{a}_n) = (1 - |\mathbf{a}_n|^2) \frac{1}{1 - \mathbf{a}_n \mathbf{a}_n} = 1.$$

□

**2.2.15. Állítás.** *Adott  $\mathbf{a} \in \mathbb{D}^{\mathbb{N}}$ , és rögzített  $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$  esetén a  $\Phi_0^{\mathbf{a}}, \Phi_1^{\mathbf{a}}, \dots, \Phi_{\mathbf{n}}^{\mathbf{a}}$  és a  $q_{\mathbf{a}_0, m_0}, q_{\mathbf{a}_1, m_1}, \dots, q_{\mathbf{a}_n, m_n-1}$  függvények által kifeszített altér megegyezik.*

*Bizonyítás.* Az állítás közvetlenül következik 2.2.19-ből. □

Az előző állítás és 2.2.14 együttes következménye, hogy (egységsszorzótól eltekintve) a  $\Phi_{\mathbf{n}}^{\mathbf{a}}$  rendszer valóban megkapható a  $q_{\mathbf{a}_{n-1}, m_{n-1}}$  függvényekből Gram-Smidt ortogonalizációval.

Az ortonormáltság lehetővé teszi, hogy a gyakorlatban könnyen ki lehessen számolni a Malmquist-Takenaka rendszerek által kifeszített alterekre való projekciót. Azonban ahhoz, hogy érdemben lehessen függvény-approximációra használni, szükség van a rendszer teljességére is. A teljességre ad ekvivalens feltételt a következő tétel:

**2.2.16. Tétel** (Szász-feltétel). *Valamilyen  $\mathbf{a} \in \mathbb{D}^{\mathbb{N}}$ -ra a  $\Phi_{\mathbf{n}}^{\mathbf{a}}$  függvényrendszer pontosan akkor teljes  $H^2(\mathbb{D})$ -ben, ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |\mathbf{a}_n|) = \infty.$$

A feltétel informálisan annyit mond, hogy a sorozat nem tart "túl gyorsan" a körlap pereméhez. A gyakorlatban ez mindig teljesül, hiszen numerikusan csak véges sok indexig tudjuk sorbafejteni a függvényünket, és véges sok elem nem befolyásolja a feltételt.

Komplex függvénytanból tanult tétel, hogy ha egy  $\mathbb{D}^{\mathbb{N}}$  sorozatra nem teljesül a Szász-feltétel, akkor a

$$\prod_{k=0}^n \frac{|\mathbf{a}_k|}{\mathbf{a}_k} B_{\mathbf{a}_k}(z)$$

szorzat kompakt halmazokon egyenletesen konvergens  $\mathbb{D}$ -n (ahogy  $n \rightarrow \infty$ ) és eleme a  $H^{\infty}(\mathbb{D})$  Hardy-térnek. Ez a tétel arra a kérdésre ad választ, hogy adott (akár végtelen sok) egységkörön belüli pontok esetén mikor létezik olyan holomorf függvény, melynek pontosan a megadott pontok a nullhelyei. Ezt, vagyis a Szász-feltétel ellenétét nevezik *Blaschke-feltételnek*, és az ezt kielégítő sorozatot *Blaschke-sorozatnak*. Továbbá egy Szegő Gábor által bizonyított fontos tétel alapján az is igaz, hogy tetszőleges  $f \in H^1(\mathbb{D})$  esetén az  $f$  zérushelyei (multiplicitással számolva) kielégítik a Blaschke-feltételt. Ezek felhasználásával bizonyíthatjuk a 2.2.16 tételt.

*Bizonyítás (Szász-feltétel).* Először is tegyük fel, hogy  $\Phi_{\mathbf{n}}^{\mathbf{a}}$  nem teljes, vagyis létezik  $f \in H^2(\mathbb{D})$ , melyre

$$\langle f, \Phi_{\mathbf{n}}^{\mathbf{a}} \rangle = 0$$

minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén. Ekkor 2.2.15 miatt  $f$  merőleges a  $\mathbf{q}_{\mathbf{a}_n, m_n-1}$  függvényekre is, így 2.2.12 alapján  $f$ -nek legalább  $m_n$ -szeres gyöke van  $\mathbf{a}_n$ -ben. Ekkor Szegő tétele alapján az  $\mathbf{a}$  sorozatra teljesül a Blaschke-feltétel.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy az  $\mathbf{a}$  sorozatra a Blaschke-feltétel teljesül. Ekkor az általa meghatározott  $B_{\mathbf{a}}$  Blaschke-sorozat eleme a  $H^{\infty}(\mathbb{D})$  Hardy-térnek (és így persze  $H^2(\mathbb{D})$ -nek is). A  $B_{\mathbf{a}}$  gyökei pedig pontosan az  $\mathbf{a}_n$  pontok (megfelelő multiplicitással), ezért az összes  $\mathbf{q}_{\mathbf{a}_n, m_n-1}$  függvényre merőleges. Így  $\mathbf{q}_{\mathbf{a}_n, m_n-1}$  nem teljes, tehát  $\Phi_{\mathbf{n}}^{\mathbf{a}}$  sem. □

Egy tetszőleges  $f \in H^2(\mathbb{D})$  függvény Malmquist-Takenaka rendszer szerinti Fourier-együtthatóira bevezethetjük a következő jelölést:

$$\hat{f}_{\mathbf{a}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \quad \hat{f}_{\mathbf{a}} : \mathbf{n} \mapsto \langle f, \Phi_{\mathbf{n}}^{\mathbf{a}} \rangle$$

**2.2.17. Következmény.** Ha az  $\mathbf{a} \in \mathbb{D}^{\mathbb{N}}$  sorozat teljesíti a Szász-feltételt, akkor egy tetszőleges  $f \in H^2(\mathbb{D})$  függvény MT-Fourier sora előállítja  $f$ -et, vagyis:

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \Phi_k^{\mathbf{a}} \rangle \Phi_k^{\mathbf{a}} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_{\mathbf{a}}(k) \Phi_k^{\mathbf{a}}.$$

Mikor a 3. fejezetben fel fogjuk használni a Malmquist-Takenaka rendszert, az  $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_+$  (dimenzió) paramétert rögzítettnek fogjuk tekinteni, ezért elegendő egy  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1}) \in \mathbb{D}^{\mathbf{n}}$  véges inverz pólus vektort használnunk. Ekkor a Szász-feltétel következtében a  $\Phi_k^{\mathbf{a}}$  függvények ortonormáltak, így egy ortonormált bázist alkotnak  $H^2(\mathbb{D})$  egy  $\mathbf{n}$ -dimenziós alterében. Ekkor felmerül a kérdés, hogy hogyan jellemezhetőek ezek a véges dimenziós alterek. Ehhez tekintsük a  $\Phi_k^{\mathbf{a}}$  függvények ( $0 \leq k \leq \mathbf{n} - 1$ ) egy tetszőleges lineáris kombinációját, és hozzuk a tagokat közös nevezőre:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} c_k \Phi_k^{\mathbf{a}}(z) &= \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} c_k \frac{\sqrt{1 - |\mathbf{a}_k|^2}}{1 - \bar{\mathbf{a}}_k z} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{z - \mathbf{a}_j}{1 - \bar{\mathbf{a}}_j z} \\ &= \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} c_k \frac{\sqrt{1 - |\mathbf{a}_k|^2} \prod_{j=0}^{k-1} (z - \mathbf{a}_j)}{\prod_{j=0}^k (1 - \bar{\mathbf{a}}_j z)} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} c_k \sqrt{1 - |\mathbf{a}_k|^2} \prod_{j=0}^{k-1} (z - \mathbf{a}_j) \prod_{j=k+1}^{\mathbf{n}-1} (1 - \bar{\mathbf{a}}_j z)}{\prod_{j=0}^{\mathbf{n}-1} (1 - \bar{\mathbf{a}}_j z)} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} c_k \sqrt{1 - |\mathbf{a}_k|^2} P_k(z)}{\prod_{j=0}^{\mathbf{n}-1} (1 - \bar{\mathbf{a}}_j z)} \end{aligned}$$

A számlálóban  $\mathbf{n}$  darab  $\mathbf{n} - 1$ -edfokú polinom, míg a nevezőben pedig egy  $\mathbf{n}$ -edfokú polinom szerepel. A számlálóban szereplő  $P_k$  polinomokról a következő állítás mondható el.

**2.2.18. Állítás.** A  $P_k$  polinomok lineárisan függetlenek és így kifeszítik a legfeljebb  $\mathbf{n} - 1$ -edfokú polinomok vektorterét.

*Bizonyítás.* Az állítást indirekt bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy léteznek olyan  $c_k$  nem-mind-nulla együtthatók, hogy

$$\sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} c_k P_k = 0.$$

Ekkor válasszuk ki a legkisebb  $l$  indexet, melyre  $c_l \neq 0$ . Így felírhatjuk  $P_l$ -t a következő alakban:

$$P_l(z) = \prod_{j=0}^{l-1} (z - \alpha_j) \prod_{j=l+1}^{n-1} (1 - \bar{\alpha}_j z) = \frac{-1}{c_l} \left( \sum_{k=0}^{n-1} c_k \sqrt{1 - |\alpha_k|^2} \prod_{j=0}^{k-1} (z - \alpha_j) \prod_{j=k+1}^{n-1} (1 - \bar{\alpha}_j z) \right).$$

Ez ellentmondás, ugyanis  $P_l$ -ben az  $z - \alpha_l$  faktor pontosan  $(m_l - 1)$ -szer szerepel, míg a jobb oldalon legalább  $m_l$ -szer.  $\square$

**2.2.19. Következmény.** *Legyen  $Q \in H^2(\mathbb{D})$  egy szigorúan valódi (strictly proper) racionális függvény, azaz egy olyan racionális függvény, melynek a nevezőjében szereplő polinom foka szigorúan magasabb a számlálóban lévő polinom fokánál, és tegyük fel, hogy  $Q$  olyan, hogy a pólusai az egységkörön kívülre esnek. Jelölje  $n$  a nevező fokszámát. Ekkor létezik olyan  $\mathbf{a} \in \mathbb{D}^n$ , hogy a  $Q$  benne van a  $\Phi_k^{\mathbf{a}}$  ( $0 \leq k < n$ ) Malmquist-Takenaka függvények által kifeszített altérben.*

*Bizonyítás.* Jelölje  $q_0, \dots, q_{n-1}$  a  $Q$  függvény pólusait. Mivel  $Q$  eleme a  $H^2(\mathbb{D})$  Hardy-térnek, ezért tudjuk, hogy  $|q_k| > 1$ . Ekkor  $\alpha_k = 1/\bar{q}_k$  inverz pólusok választásával, az előző állítás miatt  $Q$  valóban felírható  $\Phi_k^{\mathbf{a}}$ -k lineáris kombinációjaként.  $\square$

A 2.2.19 következményben feltettük, hogy a  $Q$  pólusai kívülesnek az egységkörön, azonban a következő állítás alapján ez automatikusan teljesül.

**2.2.20. Állítás.** *Tegyük fel, hogy  $Q \in H^2(\mathbb{D})$  egy racionális függvény,  $q_0, \dots, q_{n-1}$  pólusokkal. Ekkor minden  $0 \leq i < n$  esetén  $|q_i| > 1$ .*

*Bizonyítás.* A  $H^2(\mathbb{D})$ -beliség miatt triviális, hogy  $|q_i| \geq 1$ .

Tegyük fel, hogy  $q_i \in \mathbb{T}$  valamilyen  $i$ -re, és vizsgáljuk meg, hogy egy  $f \in H^2(\mathbb{D})$  függvény abszolút értéke milyen gyorsan nőhet, ha tartunk  $\mathbb{T}$ -hez. Legyen  $f$  hatvány-sora  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ . Ekkor

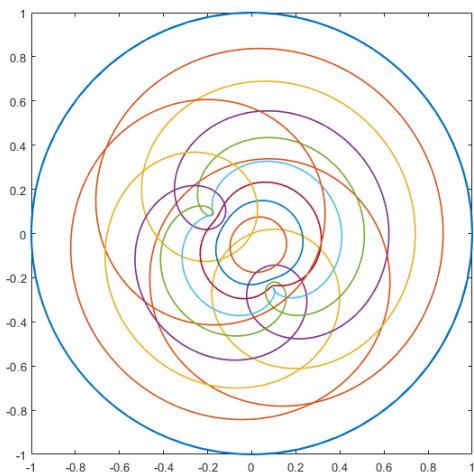
$$|f(z)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \leq \left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} |z^n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\|f\|_2}{\sqrt{1 - |z|^2}}.$$

Azonban, ha  $z_j \in \mathbb{D}$  egy sorozat, mely tart  $q_i$ -hez, akkor  $|f(z_j)|$  legalább  $O\left(\frac{1}{|z_j - q_i|}\right)$  nagyságrendben nő, ami ellentmond a fenti becslésnek.  $\square$

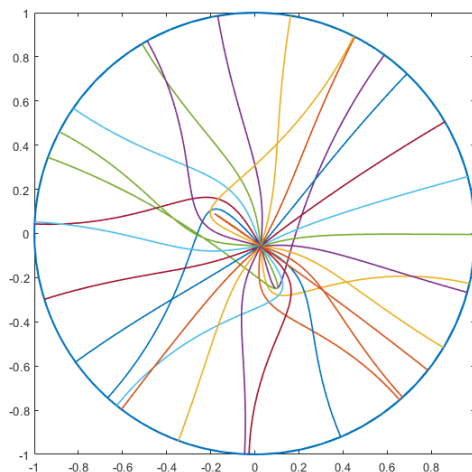
A 2.2.19 következmény jelentősége abban rejlik, hogy, mint később látni fogjuk, azok a rendszerek, melyeknek az átviteli függvényét identifikálni akarjuk, pontosan



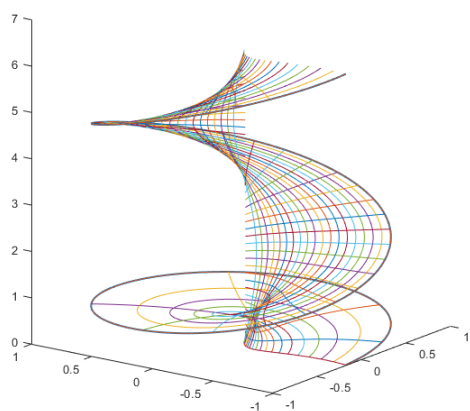
azok, melyek átviteli függvénye egy szigorúan valódi racionális függvény. Eszerint, ha elegendően nagy  $n$ -et választunk az inverz pólus vektor dimenziójának (legalább akkorát, mint amennyi pólusa van az átviteli függvénynek), akkor egy ilyen rendszer átviteli függvényét közvetlenül elő tudjuk állítani a Malmquist-Takenaka függvények segítségével.



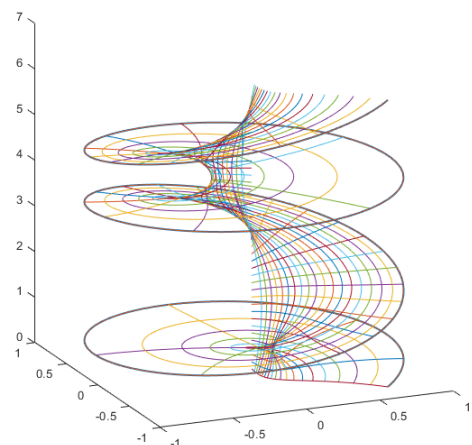
(a) A polárkoordináták köreinek képe egy harmadfokú Blaschke-szorzatnál.



(b) A polárkoordináták sugarainak képe egy harmadfokú Blaschke-szorzatnál.



(c) Egy másodfokú Blaschke-szorzat hatása az egységkörlapon, polárkoordinátákkal ábrázolva.



(d) Egy harmadfokú Blaschke-szorzat hatása az egységkörlapon, polárkoordinátákkal ábrázolva.

2.1. ábra. Egy Blaschke-szorzat tekinthető a gyökfüggvény általánosításának, abban az értelemben, hogy egy  $d$ -edfokú Blaschke-szorzatnál minden  $\mathbb{D}$ -beli pontnak pontosan  $d$  darab ősképe van (multiplicitással számolva). A leképezés egy ennél szigorúbb feltételt is teljesít, ugyanis a  $\mathbb{D}$  Riemann-felület elágazó fedése (lásd (c) és (d) ábra) [4].

## 2.3. SISO LTI rendszerek

Ebben a részben felvázolom a diszkrét SISO LTI (Single Input Single Output, Linear Time Invariant), azaz egy számsorozathoz számsorozatot rendelő, lineáris és időinvariáns rendszerek fogalmát, továbbá ismertetem néhány tulajdonságukat, melyek szoros kapcsolatot teremtenek az előző alfejezetekkel.

Legyen  $\ell = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  az egész számokkal indexelt komplex értékű sorozatok vektortere. A gyakorlati alkalmazások szempontjából kiemelten fontosak a valós értékű sorozatok, azonban az elméletet nem kell ezekre megszorítanunk. Ekkor egy **diszkrét rendszert** az alábbi

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \ell &\longrightarrow \ell \\ x &\longmapsto \mathcal{H}(x) = y \end{aligned}$$

leképezéssel azonosíthatunk. Az  $x$  változót a rendszer **inputjának** vagy **bemenetének**, az  $y = \mathcal{H}(x)$ -et a rendszer **outputjának** vagy **kimenetének** hívjuk. A rendszert **lineárisnak** nevezzük, ha  $\mathcal{H}$  egy vektortér-homomorfizmus, vagyis:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\lambda x) &= \lambda \mathcal{H}(x) \\ \mathcal{H}(x_1 + x_2) &= \mathcal{H}(x_1) + \mathcal{H}(x_2). \end{aligned}$$

Definiáljuk az  $n \in \mathbb{Z}$ -re az  $e_n \in \ell$ ,  $e_n[k] = \delta_{n,k}$  sorozatot, ahol  $\delta_{n,k}$  a Kronecker-delta. Egy lineáris rendszert le tudunk írni egy végtelen nagy  $\mathbf{H}$  mátrixszal, melynek  $n, m \in \mathbb{Z}$ -re az  $n, m$ -edik eleme a  $\mathcal{H}(e_m)$  output sorozat  $n$ -edik értéke. Vagyis:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \mathbf{H}_{-1,-1} & \mathbf{H}_{-1,0} & \mathbf{H}_{-1,1} & \dots \\ \dots & \mathbf{H}_{0,-1} & \mathbf{H}_{0,0} & \mathbf{H}_{0,1} & \dots \\ \dots & \mathbf{H}_{1,-1} & \mathbf{H}_{1,0} & \mathbf{H}_{1,1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \mathcal{H}(e_{-1})[-1] & \mathcal{H}(e_{-1})[0] & \mathcal{H}(e_{-1})[1] & \dots \\ \dots & \mathcal{H}(e_0)[-1] & \mathcal{H}(e_0)[0] & \mathcal{H}(e_0)[1] & \dots \\ \dots & \mathcal{H}(e_1)[-1] & \mathcal{H}(e_1)[0] & \mathcal{H}(e_1)[1] & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Ekkor a rendszer leírható mátrixszorzással:

$$y[n] = \mathcal{H}(x)[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}_{n,m} x[m].$$

Mind a gyakorlatban mind pedig az elméletben fontos szerepet töltenek be az úgynevezett időinvariáns, vagy más néven eltolásinvariáns rendszerek. Ehhez vezessük be az úgynevezett (jobb-) eltolás-operátort.

$$S : \ell \longrightarrow \ell \quad (Sx)[n] = x[n - 1]$$

Ekkor egy  $\mathcal{H}$  rendszert **időinvaránsnak** hívunk, ha kommutál az eltolás-operátorral, vagyis:

$$\mathcal{H}S = S\mathcal{H} \quad \text{azaz} \quad \mathcal{H}(Sx) = S(\mathcal{H}(x))$$

minden  $x \in \ell$ -re. Adot  $n \in \mathbb{Z}$ -re ez azt jelenti, hogy  $\mathcal{H}(Sx)[n] = \mathcal{H}(x)[n - 1]$ , vagyis ha eltoljuk az inputot az output is csupán az eredeti output eltoltja lesz. Könnyen bizonyítható, hogy ha  $\mathcal{H}$  kommutál  $S$ -sel, akkor kommutál az  $S$  hatványaival és az  $S^{-1}$  (baleltolás) operátorral is, így valóban indokolt az időinvariáns elnevezés, mert tetszőleges  $k \in \mathbb{Z}$ -ra:

$$\mathcal{H}(S^k x)[n] = \mathcal{H}(x)[n - k].$$

Speciálisan az  $x = e_m$  kanonikus egységvektorok sorozatára felírva az egyenlőséget, a  $\mathbf{H}$  mátrix elemeire azt az azonosságot kapjuk, hogy

$$\mathbf{H}_{n-k,m} = \mathbf{H}_{n,m+k} \quad \text{vagyis} \quad \mathbf{H}_{n,m} = \mathbf{H}_{n+k,m+k}.$$

Ekkor  $k = -m$  helyettesítéssel azt kapjuk hogy  $\mathbf{H}_{n,m} = \mathbf{H}_{n-m,0}$ , melyet  $h_{n-m}$ -mel jelölhetünk. Eszerint a rendszer mátrixa a következő alakú:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \dots & h_0 & h_{-1} & h_{-2} & \dots \\ \dots & h_1 & h_0 & h_{-1} & \dots \\ \dots & h_2 & h_1 & h_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \end{bmatrix}$$

Az ilyen mátrixokat Toeplitz-mátrixoknak hívják, és szoros kapcsolatban vannak az Hardy-tereken értelmezett Toeplitz-operátorokkal. Ez alapján

$$y[n] = \mathcal{H}(x)[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}_{n,m} x[m] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}_{n-m,0} x[m] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_{n-m} x[m].$$

Ha a  $h_n$ -re is úgy tekintünk, mint egy  $\ell$ -beli sorozatra, akkor azt kaptuk, hogy

az LTI rendszerünket a  $\mathbf{h}$  és  $\mathbf{x}$  konvolúciójával tudjuk leírni, vagyis

$$\mathbf{y}[\mathbf{n}] = \mathcal{H}(\mathbf{x})[\mathbf{n}] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathbf{h}[\mathbf{n} - m] \mathbf{x}[m] = (\mathbf{h} * \mathbf{x})[\mathbf{n}].$$

A  $\mathbf{h}$  sorozatot a rendszer **impulzus-válasz függvényének** nevezük, és könnyen látható, hogy meghatározza a  $\mathcal{H}$  rendszert. Az elnevezés onnan adódik, hogy a korábban definiált  $\mathbf{e}_0$  sorozatra (egységimpulzusra) a rendszer kimenete  $\mathbf{h}$ .

A gyakorlatban vizsgált rendszerek egy további fontos tulajdonsága a kauzalitás. Azt mondjuk, hogy a  $\mathcal{H}$  rendszer **kauzális**, ha  $\mathbf{h}[\mathbf{n}] = 0$  minden  $\mathbf{n} < 0$  esetén. Ez informálisan azt jelenti, hogy  $\mathbf{y}[\mathbf{n}]$  nem függ az  $\mathbf{x}$  bemenet  $\mathbf{n}$ -nél későbbi elemeitől, vagyis a "jövőtől". Ezzel a tulajdonsággal a gyakorlatban felmerülő rendszerek gyakran rendelkeznek. A kauzális jelek terére az  $\ell_{\mathbb{N}}$  jelölést fogjuk használni.

A továbbiakban a teljes  $\ell$  tér helyett leginkább az  $\ell^1$ ,  $\ell^2$  és  $\ell^\infty$  alterekkel fogunk foglalkozni. A fizikai és mérnöki eredetű alkalmazásokban  $\ell^2$  teret a véges energiájú jelek terének, az  $\ell^\infty$  teret pedig a korlátos jelek terének nevezik [5]. Ismeretes, hogy ezek a terek Banach-terek, vagyis teljeselek a definíciójukban szereplő normával, továbbá  $\ell^1 \subset \ell^2 \subset \ell^\infty$ .

Ismeretes, hogy az  $\ell^2$  tér egy Hilbert-tér és izometrikusan izomorf a komplex  $L^2(\mathbb{T})$  Hilbert-térrel. Egy ilyen  $L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^2$  izomorfizmust ad a klasszikus komplex Fourier-sorfejtés. Adott  $f \in L^2(\mathbb{T})$ -re:

$$(\mathcal{F}(f))[\mathbf{n}] = \langle f, z^n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(z) z^{-n} d\sigma(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\tau}) e^{-in\tau} d\tau \quad (\mathbf{n} \in \mathbb{Z}).$$

Mivel a Fourier-sorfejtés egy izometrikusan izomorf leképezés, ezért invertálható és  $\mathbf{x} = \mathcal{F}(f)$  esetén az inverze

$$(\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{x}))(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{x}[\mathbf{n}] z^n \quad (z \in \mathbb{T}).$$

A Hilbert terek elméletéből tudjuk, hogy ez a sor  $L^2$ -konvergens, és a Carleson-tételből pedig, hogy majdnem mindenhol. Azonban ezt a sort tekinthetjük egy tetszőleges komplex számra, mely nem feltétlen  $\mathbb{T}$ -n helyezkedik el. Továbbá az  $\mathbf{x}$  sorozatot is választhatjuk nem feltétlen  $\ell^2$ -belinek. Ekkor viszont ügyelnünk kell a konvergenciára, azonban ez a mi esetünkben nem probléma, minket olyan sorozatok fognak érdekelni, melyek nem esnek ki  $\ell^\infty$ -ból, így a konvergenciasugár legalább 1.

Ezt a transzformációt **Z-transzformációnak** nevezzük, és  $\mathcal{Z}$ -vel jelöljük. Ez eltér az irodalomban használt definíciótól abban, hogy a klasszikus definícióban  $z^n$ -nek helyett  $z^{-n}$ -ek szerepelnek. Ahogyan a későbbiekben látni fogjuk, az itt használt definíció megkönnyíti a Hardy-terek matematikai elméletének felhasználását.

Egy  $\mathbf{h} \in \ell$  impulzus-válasz függvény esetén a  $\mathbf{H} = \mathcal{Z}(\mathbf{h})$  függvényt nevezzük a rendszer **átviteli függvényének** és a  $\mathbb{T}$ -re való megszorítását a rendszer **frekvencia-válasz függvényének**. Továbbá átviteli függvények vizsgálatakor a  $\mathbb{T}$  komplex egyégszögkörre a rendszer **frekvenciatartományként** is hivatkozunk.

A  $\mathcal{Z}$ -transzformáció egy könnyen látható tulajdonsága, hogy  $\mathbf{x}$  és  $\mathbf{y}$  sorozatok esetén

$$\mathcal{Z}(\mathbf{x} * \mathbf{y}) = \mathcal{Z}(\mathbf{x})\mathcal{Z}(\mathbf{y}).$$

Ennek következménye, hogy ha rendszereket komponálunk, akkor az összetett rendszer átviteli függvénye a komponensek átviteli függvényének szorzata. Ez továbbá átjárást biztosít a rendszer időtartománya és frekvenciatartománya között. Ha  $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ , akkor  $\mathcal{Z}(\mathbf{h}) \neq \mathbf{0}$ , és egy nem-nulla holomorf függvény nullhelyei seholsem sűrű részhalmazzal alkotnak az értelmezési tartományban. Így, ha a rendszer  $\mathbf{y} = \mathbf{h} * \mathbf{x}$  kimenete nem nulla, akkor a

$$\mathbf{H} = \mathcal{Z}(\mathbf{h}) = \frac{\mathcal{Z}(\mathbf{y})}{\mathcal{Z}(\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{X}}$$

egyenlőség majdnem mindenütt teljesül. Ez lehetőséget biztosít arra, hogy egy rendszer átviteli függvényét pusztán a bemenet és a kimenet által matematikailag meghatározzuk. A gyakorlatban azonban az osztás és a sorozatok végessége miatt nem tudjuk numerikus hiba nélkül meghatározni a frekvencia-válasz függvényt. Az így meghatározott átviteli függvényt empirikus átviteli függvénynek nevezik [1, 6].

A rendszerelmélet egy további fontos tulajdonsága a stabilitás, mely szoros kapcsolatban áll a lineáris leképezések folytonosságával (korlátosságával). A különbség csupán a felfogásbéli, ugyanis mérnöki általában egy tágabb téren lehet értelmezni a rendszert, melynek aztán egy kiemelt (és normával ellátott) altere alapján definiálják a stabilitást. Legyen  $\mathcal{H} : \ell \rightarrow \ell$  egy lineáris operátor és  $\mathbf{K} \subset \ell$  normált altér. Ekkor azt mondjuk, hogy a  $\mathcal{H}$  rendszer **K-stabil**, ha  $\mathcal{H}\mathbf{K} \subset \mathbf{K}$  és  $\mathcal{H}|_{\mathbf{K}}$  korlátos. Az esetek döntő többségében a  $\mathbf{K} = \ell^1$ ,  $\ell^2$  és  $\ell^\infty$ , mely utóbbi esetén a rendszert BIBO-stabilnak (Bounded Input Bounded Output) nevezik. A következő tétel jellemzi az olyan LTI rendszereket, melyek ezekben az esetekben stabilak.

**2.3.1. Tétel.** *Tekintsük  $\mathbf{h} \in \ell$  esetén, a  $\mathbf{h}$  által (konvolúcióval) definiált  $\mathcal{H} : \ell^p \rightarrow \ell^p$  rendszert. Ekkor  $p = 1, \infty$  esetén  $\mathcal{H}$  pontosan akkor folytonos, ha  $\mathbf{h} \in \ell^1$ , és ekkor*

$\|\mathcal{H}\| = \|\mathbf{h}\|_1$ . Ha pedig  $p = 2$ , akkor  $\mathcal{H}$  pontosan akkor folytonos, ha  $\mathbf{H} = \mathcal{Z}(\mathbf{h}) \in L^\infty$ , és ezen esetben  $\|\mathcal{H}\| = \|\mathbf{H}\|_\infty$ .

*Bizonyítás.* Először tekintsük az  $\ell^1$  esetet. Tudjuk, hogy  $(\ell^1, *)$  egy Banach-algebra, ezért ha  $\mathbf{h} \in \ell^1$ , akkor  $\|\mathbf{h} * \mathbf{x}\|_{\ell^1} \leq \|\mathbf{h}\|_{\ell^1} \|\mathbf{x}\|_{\ell^1}$ . Visszafele, ha  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{h} * \mathbf{x}$  folytonos, akkor  $\|\mathbf{h} * \mathbf{e}_0\|_{\ell^1} < \infty$ , azonban  $\|\mathbf{h} * \mathbf{e}_0\|_{\ell^1} = \|\mathbf{h}\|_{\ell^1}$ .

Az  $\ell^\infty$  esethez ha feltesszük, hogy  $\mathbf{h} \in \ell^1$ , akkor

$$|\mathbf{x}(t)| \leq \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{h}[t-s] \mathbf{x}[s] \leq \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{h}[t-s] \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{h}\|_1 \|\mathbf{x}\|_\infty,$$

és egyenlőség teljesül, ha az  $\mathbf{x}$  a konstans 1 sorozat. Visszafele, ha  $\mathcal{H}$  folytonos, a konstans egy sorozattal való konvolúció alapján  $\mathbf{h} \in \ell^1$ .

Az  $\ell^2$  eset pedig a Hilbert-terek elméletéből következik. Ugyanis  $L^2(\Omega)$  felett egy  $f$  szimbólumú  $M_f$  multiplier-operátor pontosan akkor folytonos, ha  $f \in L^\infty(\Omega)$ . Ekkor az állítás ezen része csupán annyit mond, hogy  $\mathcal{H}$  akkor folytonos, ha a  $\mathcal{Z}$ -transzformáció egy összekötő operátor  $\mathcal{H}$  és valamilyen folytonos  $M_f$  között (vagyis  $\mathcal{Z}^{-1} M_f \mathcal{Z} = \mathcal{H}$ ). Mivel a  $\mathcal{Z}$ -transzformáció ezen terek között izometria, ezért emiatt a normára vonatkozó állítás is teljesül. □

**2.3.2. Megjegyzés.** Természetesen  $\ell^2$ -stabilitás esetén, ha a rendszer kauzális, a feltétel a  $\mathcal{Z}(\mathbf{h}) \in H^\infty$  állítással ekvivalens. Mivel  $\ell^1 \subset \ell^2$ , ezért  $\mathbf{h} \in \ell^1$  esetén  $\mathcal{Z}(\mathbf{h}) \in L^\infty$ . Az  $\ell^1$  képe  $L^\infty$ -ben egy Banach\*-algebra - azon függvények algebrája, melyek Fourier-sora abszolút konvergens - melyet Wiener-algebrának neveznek. Ezen függvények továbbá folytonosak is, ez onnan látszik, hogy  $\ell^1$ -en a  $\mathcal{Z}$ -transzformáció nem más mint  $\ell^1$  Gelfand-transzformáltja. Azonban a leképezés nem izometria, az előretolt norma szigorúan erősebb a  $\|\cdot\|_\infty$  normánál.

**2.3.3. Megjegyzés.** Mint korábban említettük, az irodalomban a  $\mathcal{Z}$ -transzformáltat a

$$(\tilde{\mathcal{Z}}(\mathbf{x}))(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{x}[n] z^{-n}$$

képlettel szokták definiálni. A két transzformáció között a  $z \mapsto 1/z$  leképezés teremt kapcsolatot, azaz

$$(\tilde{\mathcal{Z}}(\mathbf{x}))(z) = (\mathcal{Z}(\mathbf{x}))\left(\frac{1}{z}\right).$$

Ha  $x \in \ell_{\mathbb{N}}^2$  kauzális sorozat, akkor  $\tilde{Z}(x)$  függvény a  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  tartományon, vagyis az egységkörön kívül lesz analitikus. Ezen függvények tere a konstans függvények egydimenziós alterétől eltekintve a  $H^2(\mathbb{T})$  merőleges kiegészítő altere  $L^2(\mathbb{T})$ -ben.

### 2.3.1. Racionális átviteli függvények

A folytonos és diszkrét idejű SISO rendszereket kifejezhetjük differenciál- illetve differenciaegyenletek segítségével is. A differenciaegyenletekkel való megadásnak számos előnye van. Egyfelől gyakran intuitívan közelebb áll a fizikai, modellezett rendszerhez, másfelől ez az alak könnyebben implementálható [7], 2. fejezet. Egy differenciaegyenlettel felírt kauzális rendszert a következő (speciális) alakban szokás megadni:

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_N y[n-N] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots + b_M x[n-M] \quad (2.3.1)$$

ahol  $x$  az input sorozat,  $y$  pedig az az output sorozat, mely minden  $n$ -re teljesíti a fenti egyenletet. A gyakorlatban a  $N$  és az  $M$  egy véges számok, aminek az eredménye, hogy a rendszer átviteli függvénye egy racionális függvény.

2.3.4. *Megjegyzés.* Az (2.3.1) differenciaegyenlet által meghatározott rendszer automatikusan kauzális, ugyanis a képlet alapján  $y[n]$  kimenet nem függ semelyik  $x[n+j]$  tagtól,  $j > 0$  esetén.

Vizsgálatunk fő tárgyát az úgynevezett **szigorúan valódi** (*strictly proper*) rendszerek képzik, melyek esetében  $M < N$ . Az egyenlet átrendezve a következő alakra hozható:

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

mely segítségével explicit implementációt adhatunk. Az eredeti egyenletet sorozatokra felírva

$$\sum_{k=0}^N a_k S^k y = \sum_{k=0}^M b_k S^k x$$

egyenletet kapjuk. Felhasználva, hogy egy tetszőleges  $x$  sorozatra  $\mathcal{Z}(S^k x)(z) = z^k \mathcal{Z}(x)(z)$ , az egyenlet  $\mathcal{Z}$ -transzformáltja

$$\sum_{k=0}^N a_k Y(z) z^k = \sum_{k=0}^M b_k X(z) z^k$$



alakú. Ebből pedig osztással fejezhetjük ki a rendszer átviteli függvényét:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^k}{\sum_{k=0}^N a_k z^k} = \frac{b_M(z - q_1)(z - q_2) \dots (z - q_M)}{a_N(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_N)}$$

Az általánosság elvesztése nélkül feltehető, hogy  $p_k \neq q_l$ , vagyis a fenti racionális függvény nem egyszerűsíthető. Ekkor a  $p_k$  komplex számokat a rendszer pólusainak, a  $q_k$  számokat pedig a rendszer zérusainak nevezzük.

A rendszer stabilitása, azaz a  $H \in H^\infty(\mathbb{D})$  tulajdonság, pontosan azzal egyezik meg, hogy a  $H$  összes pólusa az egységkörön kívül esik. Vagyis, ahogyan a Malmquist-Takenaka rendszereknél említettük, ha  $H$  szigorúan valódi és stabil, akkor megfelelő inverz pólusok választásával elő tudjuk állítani Malmquist-Takenaka függvények lineáris kombinációjaként.

2.3.5. *Megjegyzés.* A  $\mathcal{Z}$ -transzformáció klasszikus definíciójával a  $H$  stabilitása pontosan annak felel meg, hogy analitikus a  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  tartományon, vagyis  $H$  pólusai az egységkörön belülre esnek.

## 2.4. Adaptív Projekciók módszere

Ebben a részben bemutatok egy speciális nemlineáris függvény-approximációs módszert, amit SISO LTI rendszerek átviteli függvényének közelítésére használtunk. A legjobb lineáris approximáció kérdésköre Hilbert-terekben egybe esik az absztrakt Fourier-sorok elméletével. Gyakorlati feladatok esetében jellemzően speciális függvényterekben (pl.  $L^2$ ,  $H^2$ ) keressük a legjobban közelítő elemet a tér egy véges dimenziós alteréből. A legjobban közelítő elem előállító numerikus algoritmusok során a problémát diszkretizáljuk, és így egy speciális lineáris legkisebb négyzetek problémává alakítjuk át. Azonban a lineáris közelítés nem mindig elég hatékony alacsony dimenziós közelítés esetén, továbbá nem feltétlen alkalmas egy SISO LTI rendszer átviteli függvényének egyéb tulajdonságainak leírására. Ezért a lineáris közelítés klasszikus elméletének bemutatása után, vázolom az általunk használt szeparábilis nemlineáris közelítés, az Adaptív Projekciók (*Variable Projection*) módszerét [2, 3].

### 2.4.1. Lineáris approximáció

Legyen  $\mathcal{H}$  egy függvényekből álló Hilbert-tér. Ha adva van egy  $\phi_n$  ( $n \in \mathbb{N}_+$ ) teljes ortonormált rendszer, akkor tetszőleges  $f \in \mathcal{H}$  függvénynek az (absztrakt) Fourier-sora

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k$$

ahol  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a  $\mathcal{H}$ -beli skaláris szorzat. Az absztrakt Fourier-sorok alaptétele azt mondja ki, hogy ez a sor konvergens  $\mathcal{H}$ -ban és  $f$ -hez tart, vagyis a

$$\sum_{k=1}^n \langle f, \phi_k \rangle \phi_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$$

részletösszegek közelítik  $f$ -et a  $\mathcal{H}$  metrikájában. Ha  $\mathcal{S}_n = \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \subset \mathcal{H}$  véges dimenziós altér és  $P_n$  az  $\mathcal{S}_n$ -re való ortogonális projekció a Riesz-féle vetítési tétel alapján, az  $\mathcal{S}_n$  altér zártasága miatt, ez az operátor egyértelműen létezik. Továbbá felírhatjuk a következő alakban:

$$P_n f = \sum_{k=1}^n \langle f, \phi_k \rangle \phi_k.$$

Könnyen belátható, hogy egy véges dimenziós altérben egyértelműen létezik az  $f$ -et legjobban közelítő elem, vagyis  $g \in \mathcal{S}_n$  amire a  $\text{dist}(f, g) = \text{dist}(f, \mathcal{S}_n)$ , és ez az elem pontosan az  $\mathcal{S}_n$ -re való ortogonális projekció, így

$$\text{dist}(f, \mathcal{S}_n) = \inf_{g \in \mathcal{S}_n} \|g - f\| = \min_{g \in \mathcal{S}_n} \|g - f\| = \|P_n f - f\|.$$

Folytonos jeleket diszkrétizálva tudunk numerikusan közelíteni. Ekkor az  $f$  függvényhez hozzá tudunk rendelni egy  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathbb{K}^m$  vektort, mely az  $f$  függvény  $t_i$  időpontokban vett mintavételezése, azaz  $f_i = f(t_i)$ .

A legkisebb négyzetek problémájában adott  $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n \in \mathbb{R}^m$  ( $n \leq m$ ) lineárisan független vektorrendszer a  $\mathbb{K}^m$  valós vagy komplex Euklideszi térben, melyekre mint valamilyen  $\phi_k$  folytonos függvények diszkrétizáltjaira gondolunk. Ekkor szeretnénk azokat a  $c_k$  lineáris együtthatókat megtalálni, melyekre a

$$\left\| \mathbf{f} - \sum_{k=1}^n c_k \Phi_k \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^m \left| f_i - \sum_{k=1}^n c_k (\Phi_k)_i \right|^2$$

távolságfüggvény minimális. Legyen  $\Phi \in \mathbb{K}^{m \times n}$  az a mátrix, melynek a  $k$ -adik oszlopa  $\Phi_k$  és  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$  lineáris paramétervektor. Feltesszük továbbá, hogy  $m \geq n$  és a  $\Phi$  mátrix rangja  $n$ , azaz a feladat túlhatározott. Ekkor a probléma megoldása

$$\mathbf{c}^* = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{f} = \Phi^+ \mathbf{f}, \quad (2.4.1)$$

ahol  $\Phi^+ = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T$  a  $\Phi$  mátrix Moore-Penrose pszeudoinverze [2]. Ekkor a  $\Phi \mathbf{c}^*$  vektor a legjobban közelítő elem a  $\Phi_k$  vektorok által kifeszített altérben, vagyis

$$P_n = \Phi \Phi^+$$

a  $\Phi_k$  vektorok alterére vett ortogonális projekció. A legjobban közelítő  $\mathbf{f}^*$  elemet

$$\mathbf{f}^* = \Phi \Phi^+ \mathbf{f} = P_n \mathbf{f}$$

alakban adhatjuk meg.

Megjegyezzük, hogy tetszőleges  $\Psi \in \mathbb{K}^{p \times q}$  ( $p, q \in \mathbb{N}_+$ ) mátrixnak létezik a  $\Psi^+ \in \mathbb{K}^{q \times p}$  pszeudoinverze. Továbbá,  $\Psi$  teljes rangú mátrix esetén, ha  $p > q$  akkor  $\Psi^+ \Psi = I \in \mathbb{K}^{q \times q}$  és ha  $p < q$  akkor  $\Psi \Psi^+ = I \in \mathbb{K}^{p \times p}$ . A teljes rangú,  $p = q$  esetre felírt pszeudoinverz egybeesik  $\Psi^{-1}$ -el. A pszeudoinverz általában előállítható a  $\Phi$  mátrix szinguláris felbontásából. Gyakorlati számítások esetében is érdemes a (2.4.1) közvetlen implementálása helyett a  $\Phi$  speciális felbontásaiból (pl. SVD, QR) kiindulni a performancia növelésének érdekében.

Továbbá ha a  $\Phi_k$  vektorok nem csak lineárisan függetlenek, hanem ortonormáltak, akkor a  $\Phi^+$  nem más mint  $\Phi^T$ , így

$$\mathbf{c}^* = \Phi^T \mathbf{f}.$$

## 2.4.2. Adaptív projekciók módszere

Habár a lineáris approximáció nagyon sok esetben hasznos, azonban bizonyos esetekben nem elég rugalmas és nem elég hatékony. Nevezetesen ahhoz, hogy pontosabb közelítést kapjunk, sokszor lényegesen meg kell emelnünk a bázisfüggvényink számát. Ennek elkerülése érdekében, a  $\Phi_n$  folytonos, illetve a  $\Phi_n$  diszkrétizált függvényeket lecseréljük egy  $\Phi_n^\eta \in \mathcal{H}$ , illetve  $\Phi_n(\eta) \in \mathbb{R}^m$  függvénycsaládra, ahol  $\eta \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$  a függvénycsalád egy nemlineáris, differenciálható paraméterezése.

Ha feltesszük, hogy a  $\Phi_n^\eta$  Hilbert-térbeli függvénycsalád teljes ortonormált rendszer minden  $\eta \in \mathcal{U}$  esetén, akkor a legjobb közelítés problémája a következő alakú:

$$\inf_{\eta \in \mathcal{U}} \|f - P_{S_n^\eta} f\|^2 = \inf_{\eta \in \mathcal{U}} \left\| f - \sum_{k=0}^{n-1} \langle f, \Phi_k^\eta \rangle \Phi_k^\eta \right\|^2 = \inf_{\eta \in \mathcal{U}} \left\| f - \sum_{k=0}^{n-1} c_k(\eta) \Phi_k^\eta \right\|^2. \quad (2.4.2)$$

A (2.4.2) képletet úgy értelmezhetjük, hogy ha rögzítjük az  $\eta$  paraméterünket, akkor a probléma redukálódik a klasszikus lineáris approximáció problémájára. Mivel a lineáris  $\mathbf{c}_k(\eta)$  paramétereket könnyen meg tudjuk határozni, ezért gondolhatunk úgy a problémára, hogy az elsődleges feladatunk meghatározni azt az  $\eta$  paramétert, mellyel a legjobb lineáris közelítést lehet elérni.

Diszkrét esetben a probléma

$$\begin{aligned} \inf_{\eta \in \mathcal{U}} \min_{\mathbf{c}(\eta) \in \mathbb{R}^m} \left\| \mathbf{f} - \sum_{k=1}^n \mathbf{c}_k(\eta) \Phi_k(\eta) \right\|^2 &= \inf_{\eta \in \mathcal{U}} \|\mathbf{f} - \mathbf{\Phi}(\eta) \mathbf{\Phi}(\eta)^+ \mathbf{f}\| \\ &= \inf_{\eta \in \mathcal{U}} \|\mathbf{f} - \mathbf{P}_n(\eta) \mathbf{f}\| \\ &= \inf_{\eta \in \mathcal{U}} \|\mathbf{P}_n^\perp(\eta) \mathbf{f}\| \end{aligned}$$

ahol  $\mathbf{\Phi}(\eta)$  a  $\Phi_k(\eta)$  vektorokból álló paraméteres mátrix,  $\mathbf{P}_n(\eta)$  pedig a  $\Phi_k(\eta)$  függvények által kifeszített altérre,  $\mathbf{P}_n^\perp(\eta)$  pedig az erre merőleges altérre való projekció. Mivel az  $\eta$  paramétereket általában nem lehet explicit meghatározni, ezért függvény minimalizálásához nemlineáris optimalizálást kell használni [8, 3]. Golub és Pereyra 1973-as cikkükben [2] explicit képletet adtak az  $r(\eta) = \|\mathbf{f} - \mathbf{P}_n(\eta) \mathbf{f}\|^2$  hibafüggvény gradiensének meghatározására:

$$\frac{1}{2} \nabla r(\eta)_j = -\mathbf{f}^T \mathbf{P}_n^\perp(\eta) (\mathbf{P}_n^\perp(\eta) \mathbf{D}_j \mathbf{\Phi}^+(\eta) + (\mathbf{\Phi}^+)^T \mathbf{D}_j^T \mathbf{P}_n^\perp(\eta)) \mathbf{f}, \quad (2.4.3)$$

ahol  $\mathbf{D}_j$  az  $\eta_j$  szerinti parciális deriváltja a  $\mathbf{\Phi}(\eta)$  mátrixnak, vagyis:

$$\mathbf{D}_j = \frac{\partial \mathbf{\Phi}(\eta)}{\partial \eta_j}.$$

A képlet fő haszna, hogy ha ki tudjuk számolni a függvénycsaládunk  $\eta_j$ -k szerinti parciális deriváltjait a  $\mathbf{t}_i$  mintavételezési pontokban, azaz a  $\mathbf{D}_j$  mátrixokat, akkor közvetlenül alkalmazhatunk klasszikus nemlineáris optimalizálási algoritmusokat, mint például a gradiens-módszert vagy Levenberg-Marquardt algoritmust [9].

## 3. fejezet

# A javasolt algoritmus

A kutatásom alapvető motivációja SISO LTI rendszerek átviteli függvényének az identifikációja volt. Ezt a rendszer kimeneti és bemeneti adatai alapján tettem az empirikus átviteli függvény alapján. Mivel egy racionális átviteli függvényű LTI rendszer tulajdonságait nagyban meghatározzák a pólusainak az elhelyezkedései ezért az elsődleges célom a rendszer pólusainak az identifikációja volt. Azonban mikor egy SISO LTI rendszer átviteli függvényét szeretnénk közelíteni racionális függvényekkel, nem elegendő, hogy lineáris alterekben minimalizáljuk a (tapasztalati) átviteli függvénytől vett négyzetes eltérést, ugyanis az ilyenfajta közelítések különböző tulajdonságai (pl. pólusok elhelyezkedése) különbözhetnek az eredeti rendszerétől. Egészen konkrétan ezzel a módszerrel nem lehet meghatározni a rendszer pólusait (és zérusait), mert rögzített racionális függvényekkel való approximáció esetén a pólusok csak rögzített helyeken fordulhatnak elő.

Ennek a problémának a megoldására használtam az Adaptív Projekciók (2.4.2) nemlineáris approximációs módszerét. Ehhez bázisfüggvényeknek a Malmquist-Takenaka függvényeket használtam, melyeket a komplex egységkörön belüli sorozatokkal lehet paraméterezni. Ez azért volt célravezető, mert a Malmquist-Takenaka függvények paramétereiből az egységkörre való tükrözéssel közvetlenül meg lehet kapni a függvény pólusait. Így az Adaptív Projekciók módszerének nemlineáris paramétereit maguknak a rendszer pólusainak (pontosabban azok tükörképeinek, inverz pólusainak) választottam meg, és így a pólusok elhelyezkedésének optimalizálásával tudtam a rendszer átviteli függvényét minél jobban approximálni. Az átviteli függvényt a komplex egységkörön felvett értékein, vagyis a rendszer frekvencia-válasz függvényén keresztül közelítettem. Ezzel a módszerrel sikerült egy matematikailag már kidolgozott elméletet, a Malmquist-Takenaka rendszerek elméletét az Adaptív Projekciók módszerén

keresztül összekapcsolni és felhasználni a lineáris rendszerek identifikációjában.

A megadott módszerrel a SISO LTI rendszerek egy speciális osztályát tudjuk nagy pontossággal identifikálni. Egyrészt a rendszernek stabilnak és kauzálisnak kell lennie. Ez biztosítja, hogy az frekvencia-válasz függvény benne van a  $H^2(\mathbb{T})$  térben, és így tudjuk közelíteni. Továbbá az approximáción túlmutatóan, a pólusok identifikációjához szükséges, hogy a rendszert egy szigorúan valódi differenciaegyenlet írja le. Ilyen esetben a 2.2.19 következmény miatt, a paraméterek optimalizálása azzal ekvivalens, hogy meghatározzuk  $H^2(\mathbb{T})$  egy Malmquist-Takenaka függvények által kifeszített véges dimenziós alterét, amelyik tartalmazza a frekvencia-válasz függvényt.

A Malmquist-Takenaka rendszerek közvetlen használatának az Adaptív Projekciók módszerében több akadálya is adódott. Az egyik ilyen, hogy az Adaptív Projekciók módszerének legmegbízhatóbb MATLAB implementációja, a VarPro [8], csak valós paraméterek optimalizációjára alkalmas, míg a Malmquist-Takenaka függvények paraméterei komplexek. Ezt úgy hidaltam át, hogy a komplex egységkör lap pontjait polárkoordinátákkal paramétereztem. Egy másik probléma abból adódott, hogy egy rendszer átviteli függvénye komplex értékű függvény, míg a VarPro-val valós függvényeket tudunk közelíteni valós függvényekkel. Ezt a problémát úgy oldottam meg, hogy a Malmquist-Takenaka rendszerek egy valós változatát használtam, mely a komplex Fourier-sorokból képzett valós Fourier-sorokhoz hasonlóan egy teljes rendszert alkot  $L^2(\mathbb{T})$ -ben. Ekkor a Titchmarsh-tétel (3.1.2, [10]) biztosítja, hogy elegendő az empirikus átviteli függvény valós részét közelíteni, mert a Hilbert-transzformáció segítségével abból elő tudjuk állítani a keresett komplex analitikus függvényt.

### 3.1. Valós Malmquist-Takenaka rendszerek

Hogy megfogalmazzhassuk a problémát valós Malmquist-Takenaka rendszerekkel, először definiálnunk kell a Hilbert-transzformált fogalmát. Ha  $f \in L^2(\mathbb{T})$  függvény, melynek a klasszikus Fourier-sora

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{T}),$$

akkor az  $f$  Hilbert-transzformáltja:

$$\text{Hf}(z) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sign}(n) a_n z^n \quad (z \in \mathbb{T}).$$

3.1.1. *Megjegyzés.* Sok helyen [11, 12] egy periodikus ( $\mathbb{T}$ -n értelmezett) függvény Hilbert-transzformáltját a fenti definícióval ekvivalens

$$\mathcal{H}f(e^{it}) = \int_0^{2\pi} f(\tau) \cot\left(\frac{t-\tau}{2}\right) d\tau$$

módon definiálják.

A Hilbert-transzformáció lehetőséget fog adni arra, hogy egy Hardy-tér-beli függvény valós részéből elő tudjuk állítani az eredeti komplex függvényt. Erre a következő tétel ad elméleti alapot.

**3.1.2. Tétel** (Titchmarsh-tétel). *Tegyük fel, hogy  $f \in L^2(\mathbb{T})$  függvény. Ekkor a következő két állítás ekvivalens:*

$$f \in H^2(\mathbb{T}),$$

$$\Re(f) = -\mathcal{H}(\Im(f)) \text{ és } \Im(f) = \mathcal{H}(\Re(f)),$$

ahol  $\Re$  és  $\Im$  a valós és képzetes részt jelöli.

A fentiek alapján ha adott egy  $f \in L^2$  jelünk, mely egy kauzális átviteli függvény valós része, ki tudjuk belőle számolni az átviteli függvényt az

$$F = f + i\mathcal{H}f \tag{3.1.1}$$

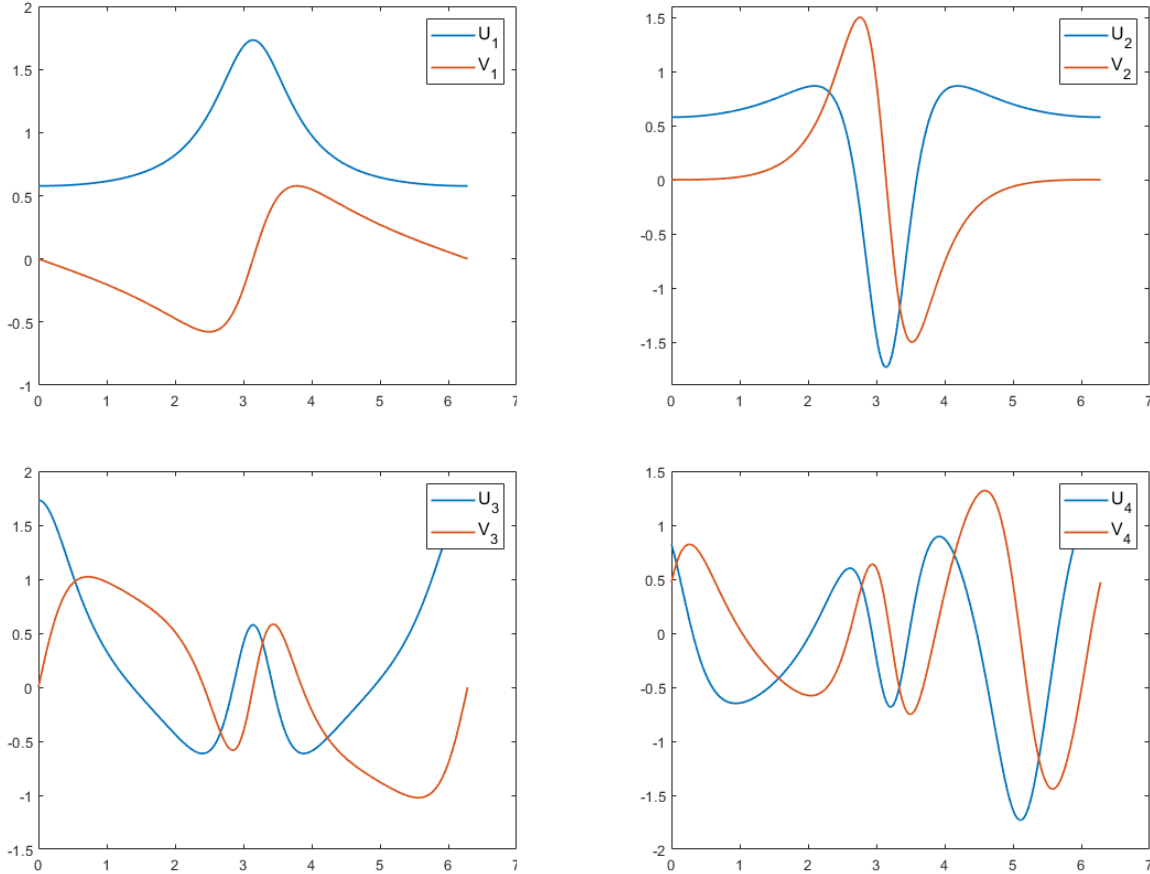
képlet alapján. Továbbá általánosan, ha  $f$  valós értékű, akkor  $\mathcal{H}(f)$  is valós értékű függvény lesz.

3.1.3. *Megjegyzés.* A Titchmarsh-tétel ezen alakja könnyen következik a  $H^2(\mathbb{T})$  Hardy-tér nulla Fourier-együtthatós és a Hilbert-transzformáció fent megadott definíciójából, azonban Titchmarsh a tételt eredetileg  $L^2(\mathbb{R})$ -beli függvényekre bizonyította, az  $\mathbb{R}$ -en értelmezett Hilbert-transzformációval [10].

Legyen  $\mathbf{a} \in \mathbb{D}^{\mathbb{N}}$  egy inverz pólusokból álló sorozat, melyre  $\mathbf{a}_0 = 0$ . Ekkor **valós Malmquist-Takenaka rendszernek** hívjuk a

$$U_0 := 1, \quad V_0 := 0, \quad U_k := \Re(\Phi_k^{\mathbf{a}}), \quad V_k := \Im(\Phi_k^{\mathbf{a}}), \quad (k \in \mathbb{N}_+)$$

függvényrendszert.



3.1. ábra. Az  $\mathbf{a} = (1/2e^{i\pi}, 1/2e^{i\pi}, -1/2e^{i\pi}, -1/2e^{i2})$  inverz pólus vektorhoz tartozó első négy Malmquist-Takenaka függvény valós és képzetes része.

A valós Malmquist-Takenaka függvényekre a következő tétel teljesül.

**3.1.4. Tétel.** Legyen  $\mathbf{a} \in \mathbb{D}^{\mathbb{N}}$ ,  $\mathbf{a}_0 = 0$ , és tegyük fel hogy  $\mathbf{a}$  teljesíti a Szász-feltételt (2.2.16). Ekkor az  $\mathbf{a}$ -hoz tartozó

$$u_0, \sqrt{2}u_k, \sqrt{2}v_k \quad (k \in \mathbb{N}_+)$$

sorozat teljes ortonormált rendszert alkot az  $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ , valós értékű négyzetesen integrálható függvények Hilbert-térben.

Legyen  $F = f + iHf \in H^2(\mathbb{T})$  Hardy-tér-beli függvény, ahol  $f$  valós. Ekkor  $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_+$ -ra és  $\mathbf{a} \in \mathbb{D}^{\mathbf{n}}$ -re a komplex Malmquist-Takenaka rendszer szerinti Fourier-sorának  $\mathbf{n}$ -edik részletösszege:

$$S_{\mathbf{n}}^{\mathbf{a}}F = \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} \langle F, \Phi_k^{\mathbf{a}} \rangle \Phi_k^{\mathbf{a}}.$$



A részletösszeg valós részének kiszámolásához, először számoljuk ki a  $\langle F, \Phi_k^a \rangle$  valós részét.

Ehhez szükségünk lesz a következő állításra.

**3.1.5. Állítás.** *Legyen  $f \in L^2(\mathbb{T})$  valós értékű és  $G \in H^2(\mathbb{T})$  melyre  $\int_{\mathbb{T}} G = 0$ . Ekkor a következő egyenlőségek teljesülnek:*

$$\langle f, G \rangle = i \langle Hf, G \rangle, \quad \langle f, \bar{G} \rangle = -i \langle Hf, \bar{G} \rangle.$$

*Bizonyítás.* Írjuk fel  $f$ -et

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k \quad (z \in \mathbb{T})$$

Fourier-sorban, ekkor

$$Hf(z^k) = -i \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sign}(k) c_k z^k. \quad (z \in \mathbb{T})$$

Mivel valós jelekre teljesül, hogy  $c_{-k} = \bar{c}_k$ , ezért

$$F(z) = f(z) + iHf(z) = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k. \quad (z \in \mathbb{T})$$

Továbbá mivel  $G$ -re teljesül a  $\int_{\mathbb{T}} G = 0$  tulajdonság, vagyis a 0-dik Fourier együtthatója 0, ezért felírható

$$G(z^k) = \sum_{k=1}^{\infty} d_n z^k \quad (z \in \mathbb{T})$$

alakban. Ekkor a skalárszorzat tulajdonságai alapján:

$$\begin{aligned} \langle f, G \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} c_n \bar{d}_n, & \langle f, \bar{G} \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_n d_n, \\ \langle Hf, G \rangle &= -i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} c_n \bar{d}_n, & \langle Hf, \bar{G} \rangle &= i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_n d_n. \end{aligned}$$

Ez alapján már behelyettesítéssel következik az állítás. □

Mivel a  $\Phi_k^a$  Malmquist-Takenaka függvény teljesíti a  $\int_{\mathbb{T}} \Phi_k^a = 0$  feltételt, ezért  $G = \Phi_k^a$  helyettesítéssel:

$$\langle f, \Phi_k^a \rangle = i \langle Hf, \Phi_k^a \rangle, \quad \langle f, \overline{\Phi_k^a} \rangle = -i \langle Hf, \overline{\Phi_k^a} \rangle$$

Továbbá ebből a  $\Phi_k^a$  valós és képzetes részére a következő azonosságokat kapjuk:

$$\langle Hf, \mathbf{U}_0 \rangle = 0, \quad \langle f, \mathbf{U}_k \rangle = \langle Hf, \mathbf{V}_k \rangle, \quad \langle f, \mathbf{V}_k \rangle = -\langle Hf, \mathbf{U}_k \rangle$$

A fentiekből az  $F \in H^2(\mathbb{T})$  és a  $\Phi_k^a = \mathbf{U}_k + i\mathbf{V}_k$  függvény skalárszorzata:

$$\begin{aligned} \langle F, \Phi_k^a \rangle &= \langle f + i \cdot Hf, \mathbf{U}_k + i \cdot \mathbf{V}_k \rangle = \\ &= (\langle f, \mathbf{U}_k \rangle + \langle Hf, \mathbf{V}_k \rangle + i \cdot (\langle Hf, \mathbf{U}_k \rangle - \langle f, \mathbf{V}_k \rangle)) = \\ &= 2 \cdot (\langle f, \mathbf{U}_k \rangle - i \cdot \langle f, \mathbf{V}_k \rangle) \end{aligned}$$

Így az  $S_n^a F$  részletösszeg  $k$ -adik tagja:

$$\begin{aligned} \langle F, \Phi_k^a \rangle \Phi_k^a &= 2 \cdot (\langle f, \mathbf{U}_k \rangle - i \cdot \langle f, \mathbf{V}_k \rangle) (\mathbf{U}_k + i \cdot \mathbf{V}_k) = \\ &= 2 \cdot (\langle f, \mathbf{U}_k \rangle \mathbf{U}_k + \langle f, \mathbf{V}_k \rangle \mathbf{V}_k + i \cdot (\langle f, \mathbf{U}_k \rangle \mathbf{V}_k - \langle f, \mathbf{V}_k \rangle \mathbf{U}_k)) \end{aligned}$$

Ez alapján a részletösszeg valós és képzetes részét felírhatjuk a következő alakban:

$$\begin{aligned} s_n^a f &:= \Re(S_n^a F) = \Re \left( \sum_{k=0}^{n-1} \langle F, \Phi_k^a \rangle \Phi_k^a \right) = \\ &= \langle f, \mathbf{U}_0 \rangle \mathbf{U}_0 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (\langle f, \mathbf{U}_k \rangle \mathbf{U}_k + \langle f, \mathbf{V}_k \rangle \mathbf{V}_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_n^a Hf &= \Im(S_n^a F) = \Im \left( \sum_{k=0}^{n-1} \langle F, \Phi_k^a \rangle \Phi_k^a \right) = \\ &= 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (\langle f, \mathbf{U}_k \rangle \mathbf{V}_k - \langle f, \mathbf{V}_k \rangle \mathbf{U}_k) = \\ &= \langle Hf, \mathbf{U}_0 \rangle \mathbf{U}_0 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (\langle Hf, \mathbf{U}_k \rangle \mathbf{U}_k + \langle Hf, \mathbf{V}_k \rangle \mathbf{V}_k) \end{aligned}$$

A fenti egyenletek bizonyítják, hogy ha egy  $F \in H^2(\mathbb{T})$  átviteli függvényt szeretnénk közelíteni, és meghatározni a pólusait, akkor elegendő az  $f = \Re(F)$  függvényt közelíteni a  $\mathbf{U}_0, \sqrt{2}\mathbf{U}_k, \sqrt{2}\mathbf{V}_k$  rendszerrel. Vagyis, ha megtaláljuk az optimá-

lis  $\mathbf{a} = (0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n_1}) \in \mathbb{D}^n$  inverz pólus vektort az  $f$  közelítéséhez, akkor az  $\mathbf{a}$  optimális az eredeti  $F$  átviteli függvény leírására is. A valós Malmquist-Takenaka függvények egyéb tulajdonságai a [13] jegyzetben vannak bemutatva.

### 3.2. A valós Malmquist-Takenaka rendszer deriválása

Ahogy a fejezet elején említettem, ahhoz, hogy az Adaptív Projekciók módszerét használhassuk átviteli függvény közelítésére, szükséges megadnunk a valós Malmquist-Takenaka rendszert valós polárkoordinátás alakban. Továbbá az Adaptív Projekciók hibafüggvényének optimalizálásához szükséges, hogy megadjuk az  $U_k, V_k$  függvények parciális deriváltjait a polárkoordináták szerint a  $t_i$  mintavételezési pontokban.

Korábban láttuk, hogy egy  $\mathbf{a} \in \mathbb{D}$  inverz pólusra a  $B_{\mathbf{a}}(e^{it})$  Blaschke-függvény a  $\mathbb{T}$  egységkörön megadható

$$B_{\mathbf{a}}(e^{it}) = e^{i\beta_{\mathbf{a}}(t)} \quad (t \in \mathbb{R})$$

alakban. Ekkor az  $\mathbf{a}$  inverz pólust felírva  $\mathbf{a} = r e^{i\alpha}$  egyenlettel, ahol  $r = |\mathbf{a}| \in [0, 1)$ ,  $\beta_{\mathbf{a}}$  argumentum-függvényre, tetszőleges  $\vartheta \in [-\pi, \pi)$ -vel teljesül, hogy

$$\beta_{\mathbf{a}}(t) := \vartheta + \alpha + \gamma_s(t - \alpha) \quad (t \in \mathbb{R}),$$

ahol

$$s := s(r) := \frac{1+r}{1-r},$$

$$\gamma_s(t) := 2 \arctan(s \tan(t/2)).$$

Legyen  $\mathbf{a} = (0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1}) \in \mathbb{D}^n$  inverz pólus vektor és jelölje

$$\boldsymbol{\alpha} = [r_1, \alpha_1, \dots, r_{n-1}, \alpha_{n-1}] \in ([0, 1) \times [0, 2\pi))^n$$

a polárkoordinátás átírását. Definiáljuk a

$$\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) := \sum_{j=0}^{k-1} \beta(r_j, \alpha_j; t) := \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{r_j e^{i\alpha_j}}(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{\mathbf{a}_j}(t)$$

függvényt, melynek segítségével fel tudjuk írni a  $k$ -adik Malmquist-Takenaka függvényt polárkoordinátás alakban:

$$\Phi_k^a(z) = \frac{\sqrt{1 - |\alpha_k|^2}}{1 - \bar{\alpha}_k z} \prod_{j=0}^{k-1} B_{a_j}(z) = \frac{\sqrt{1 - r_k^2}}{1 - r_k e^{i(t - \alpha_k)}} \cdot e^{i\beta_k(\alpha; t)}, \quad (z = e^{it})$$

ugyanis a hatványozás azonosságai miatt:

$$\prod_{j=0}^{k-1} B_{a_j}(e^{it}) = e^{i\beta_k(\alpha; t)}.$$

Ennek segítségével kiszámoltuk az  $U_k, V_k$  valós Malmquist-Takenaka függvényeket az inverz pólusok polárkoordinátái alapján.

**3.2.1. Állítás.** *Legyen  $\mathbf{a} \in \mathbb{D}^n$ ,  $\mathbf{a}_0 = 0$ ,  $\mathbf{a}_k = r_k e^{i\alpha_k}$  és  $\boldsymbol{\alpha} = [r_1, \alpha_1, \dots, r_{n-1}, \alpha_{n-1}]^T$  a polár koordinátás átírás. Ekkor*

$$\begin{aligned} U_k(\boldsymbol{\alpha}; e^{it}) &:= R(r_k, \alpha_k; t) \cdot (\cos(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) - r_k \cdot \cos(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t)), \\ V_k(\boldsymbol{\alpha}; e^{it}) &:= R(r_k, \alpha_k; t) \cdot (\sin(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) - r_k \cdot \sin(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t)), \end{aligned}$$

ahol

$$R(r_k, \alpha_k; t) := \frac{\sqrt{1 - r_k^2}}{1 - 2r_k \cos(t - \alpha_k) + r_k^2}.$$

*Bizonyítás.* Mivel a  $\sqrt{1 - r_k^2}$  valós faktor mind az eredeti komplex formulában, mind a valós és képzetes részekben szerepel, ezért ettől eltekintek az átláthatóbb számolások érdekében. Továbbá, mivel nem lesz szükség átalakítani a  $\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)$  argumentum-függvényt, ezért helyettük röviden  $\beta_k$ -t fogok írni a számolások során.

Tetszőleges  $z \in \mathbb{C}$  nem-nulla komplex számra  $1/z = \bar{z}/|z|^2$ , ezért

$$\frac{1}{1 - r_k e^{i(t - \alpha_k)}} = \frac{1 - r_k e^{i(\alpha_k - t)}}{|1 - r_k e^{i(t - \alpha_k)}|^2}.$$

Felhasználva a

$$\begin{aligned} \cos(x + y) &= \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y) \\ \sin(x + y) &= \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y) \end{aligned}$$

trigonometrikus azonosságokat,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 - r_k e^{i(t-\alpha_k)}} e^{i\beta_k} &= \frac{1 - r_k \cos(\alpha_k - t) - i r_k \sin(\alpha_k - t)}{|1 - r_k e^{i(t-\alpha_k)}|^2} (\cos(\beta_k) + i \sin(\beta_k)) \\
&= \frac{1}{|1 - r_k e^{i(t-\alpha_k)}|^2} (\cos(\beta_k) + i \sin(\beta_k) \\
&\quad - r_k \cos(\alpha_k - t) \cos(\beta_k) - i r_k \cos(\alpha_k - t) \sin(\beta_k) \\
&\quad - i r_k \sin(\alpha_k - t) \cos(\beta_k) + r_k \sin(\alpha_k - t) \sin(\beta_k)) \\
&= \frac{1}{|1 - r_k e^{i(t-\alpha_k)}|^2} (\cos(\beta_k) - r_k \cos(\alpha_k - t) \cos(\beta_k) \\
&\quad + r_k \sin(\alpha_k - t) \sin(\beta_k) + i \sin(\beta_k) \\
&\quad - i r_k \cos(\alpha_k - t) \sin(\beta_k) - i r_k \sin(\alpha_k - t) \cos(\beta_k)) \\
&= \frac{1}{|1 - r_k e^{i(t-\alpha_k)}|^2} (\cos(\beta_k) - r_k \cos(\beta_k + \alpha_k - t) \\
&\quad + i(\sin(\beta_k) - r_k \sin(\beta_k + \alpha_k - t))).
\end{aligned}$$

A fenti konstans-szorozót pedig a következőképpen írhatjuk át:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|1 - r_k e^{i(t-\alpha_k)}|^2} &= \frac{1}{(1 - r_k e^{i(t-\alpha_k)})(1 - r_k e^{-i(t-\alpha_k)})} \\
&= \frac{1}{1 - r_k e^{i(t-\alpha_k)} - r_k e^{-i(t-\alpha_k)} + r_k^2 e^{i(t-\alpha_k)} e^{-i(t-\alpha_k)}} \\
&= \frac{1}{1 - 2\Re(r_k e^{i(t-\alpha_k)}) + r_k^2} \\
&= \frac{1}{1 - 2r_k \cos(t - \alpha_k) + r_k^2}.
\end{aligned}$$

A fenti egyenletekből pedig következik az állításban szereplő képlet.

□

A 3.2.1 állítás segítségével már fel tudjuk írni az  $U_k, V_k$  függvények polárkoordináták szerinti parciális deriváltjait, melyeket már be fogunk tudni helyettesíteni az Adaptív Projekciók hibafüggvényének gradiensére felírt képletbe.

Ehhez először az  $R$  függvény parciális deriváltjait számolom ki.

**3.2.2. Állítás.** Az  $R(r, \alpha; t)$  függvény  $\alpha$  szerinti parciális deriváltja:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} R(r, \alpha; t) = \frac{2r\sqrt{1-r^2} \sin(t - \alpha)}{(1 - 2r \cos(t - \alpha) + r^2)^2}.$$

*Bizonyítás.* Mivel  $\alpha$  csak a nevezőben szerepel, ezért  $\cos'(\alpha) = -\sin(\alpha)$  és  $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$  alapján a képlet közvetlenül adódik.  $\square$

**3.2.3. Állítás.** Az  $R(r, \alpha; t)$  függvény  $r$  szerinti parciális deriváltja:

$$\frac{\partial}{\partial r} R(r, \alpha; t) = \frac{r^3 - 3r + 2 \cos(t - \alpha)}{\sqrt{1 - r^2} (1 - 2r \cos(t - \alpha) + r^2)^2}.$$

*Bizonyítás.* Legyen

$$u(r) := \sqrt{1 - r^2} \quad \text{és} \quad v(r) = 1 - 2r \cos(t - \alpha) + r^2.$$

Ekkor

$$u'(r) = -2r \frac{1}{2\sqrt{1 - r^2}} = \frac{-r}{\sqrt{1 - r^2}},$$

és

$$v'(r) = 2(r - \cos(t - \alpha)).$$

Ekkor az  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$  deriválási azonosság miatt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} R(r, \alpha; t) &= \frac{u'(r)v(r) - v'(r)u(r)}{v^2(r)} \\ &= \frac{\frac{-r}{\sqrt{1 - r^2}}(1 - 2r \cos(t - \alpha) + r^2) - 2(r - \cos(t - \alpha))\sqrt{1 - r^2}}{(1 - 2r \cos(t - \alpha) + r^2)^2} \\ &= \frac{-r(1 - 2r \cos(t - \alpha) + r^2) - 2(r - \cos(t - \alpha))(1 - r^2)}{\sqrt{1 - r^2}(1 - 2r \cos(t - \alpha) + r^2)^2} \\ &= \frac{-r + 2r^2 \cos(t - \alpha) - r^3 - 2r + 2 \cos(t - \alpha) + 2r^3 - 2r^2 \cos(t - \alpha)}{\sqrt{1 - r^2}(1 - 2r \cos(t - \alpha) + r^2)^2} \\ &= \frac{r^3 - 3r + 2 \cos(t - \alpha)}{\sqrt{1 - r^2} (1 - 2r \cos(t - \alpha) + r^2)^2} \end{aligned}$$

$\square$

Ezzel készen vagyunk a 3.2.1 állítás képleteiben szereplő  $R(r, \alpha; t)$  függvények deriváltjaival. A képletek második feléhez először is vezessük le a  $\beta_k$  deriváltjait, melyet a korábban definiált

$$\beta_a(t) = \vartheta + \alpha + 2 \arctan \left( \frac{1 + r}{1 - r} \tan \left( \frac{t - \alpha}{2} \right) \right)$$

függvények segítségével adtuk meg, ahol  $\mathbf{a} = r e^{i\alpha}$ .

### 3.2.4. Állítás.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \beta_a(t) = 1 - \frac{1 - r^2}{r^2 - 2r \cos(t - \alpha) + 1} = 1 - \sqrt{1 - r^2} \cdot R(r, \alpha; t).$$

*Bizonyítás.* Egy egyszerűsített alakot fogok deriválni, amiből már látható az állítás. Mivel  $\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}$  és  $\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ , ezért felhasználva a  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  és  $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$  trigonometrikus azonosságokat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\arctan(s(r) \tan(x))) &= \\ &= \frac{\frac{s(r)}{\cos^2(x)}}{1 + s(r)^2 \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} \\ &= \frac{s(r)}{\cos^2(x) + s(r)^2 \sin^2(x)} \\ &= \frac{\frac{1+r}{1-r}}{\cos^2(x) + \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2 \sin^2(x)} \\ &= \frac{1 - r^2}{(1 - r)^2 \cos^2(x) + (1 + r)^2 \sin^2(x)} \\ &= \frac{1 - r^2}{r^2(\sin^2(x) + \cos^2(x)) - 2r(\sin^2(x) - \cos^2(x)) + \sin^2(x) + \cos^2(x)} \\ &= \frac{1 - r^2}{r^2 - 2r \cos(2x) + 1}. \end{aligned}$$

Ha az  $x = \frac{t-\alpha}{2}$ -t helyettesítést elvégezzük, a lánc-szabály alapján a fenti derivált  $-1/2$ -vel szorzódik, melyből adódik a képlet.

□

Az  $r$ -szerinti parciális deriváltra a következő képletet írhatjuk fel.

### 3.2.5. Állítás.

$$\frac{\partial}{\partial r} \beta_a(t) = \frac{2 \sin(t - \alpha)}{r^2 - 2r \cos(t - \alpha) + 1} = \frac{2 \sin(t - \alpha)}{\sqrt{1 - r^2}} R(r, \alpha; t).$$

*Bizonyítás.* Az  $\frac{1+r}{1-r}$  függvény deriváltja  $\frac{2}{(1-r)^2}$ , ezért :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} \left( \theta + \alpha + 2 \arctan \left( \frac{1+r}{1-r} \tan(x) \right) \right) &= \frac{2 \frac{2}{(1-r)^2} \tan(x)}{1 + \left( \frac{1+r}{1-r} \tan(x) \right)^2} \\
&= \frac{2 \frac{2}{(1-r)^2} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{1 + \frac{(1+r)^2 \sin^2(x)}{(1-r)^2 \cos^2(x)}} \\
&= \frac{4 \sin(x) \cos(x)}{((1-r)^2 \cos^2(x) + (1+r)^2 \sin^2(x))} \\
&= \frac{2 \sin(2x)}{r^2 - 2r(\sin^2(x) - \cos^2(x)) + 1} \\
&= \frac{2 \sin(2x)}{r^2 - 2r \cos(2x) + 1}.
\end{aligned}$$

Ebből  $x := \frac{t-\alpha}{2}$  helyettesítéssel megkapjuk az állítást. □

A 3.2.1-3.2.5 azonosságok felhasználásával már fel tudjuk írni az MT rendszerek valós  $U_k$  és képzetes  $V_k$  részének a parciális deriváltjait is.

**3.2.6. Állítás.** *Legyen  $0 \leq i, k < n$ , ekkor*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r_i} \beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) &= \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r_i} \beta_{a_i}(t), & \text{ha } i < k \\ 0, & \text{különben.} \end{cases} \\
\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) &= \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \beta_{a_i}(t), & \text{ha } i < k \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}
\end{aligned}$$

*Bizonyítás.* A  $\beta_k$  definíciójából triviálisan következik, ugyanis

$$\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{a_j}(t),$$

vagyis  $r_i$  és  $\alpha_i$  csak az  $i$ -edik tagban szerepel, és  $\beta_k$ -ban csak  $k-1$ -ig adjuk össze a  $\beta_{a_i}$  függvényeket. □

Így összegezve az eddigi eredményeket az  $r_i$  szerinti deriváltak:

- ha  $i > k$ :

$$\frac{\partial}{\partial r_i} U_k(t) = 0, \quad \text{és} \quad \frac{\partial}{\partial r_i} V_k(t) = 0$$



- ha  $i = k$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r_i} U_k(t) &= \frac{\partial}{\partial r_k} (\mathcal{R}(r_k, \alpha_k; t) (\cos(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) - r_k \cos(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t))) \\
&= \frac{\partial}{\partial r_k} (\mathcal{R}(r_k, \alpha_k; t)) (\cos(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) - r_k \cos(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t)) \\
&\quad - \mathcal{R}(r_k, \alpha_k; t) \cos(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r_i} V_k(t) &= \frac{\partial}{\partial r_k} (\mathcal{R}(r_k, \alpha_k; t) (\sin(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) - r_k \sin(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t))) \\
&= \frac{\partial}{\partial r_k} (\mathcal{R}(r_k, \alpha_k; t)) (\sin(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) - r_k \sin(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t)) \\
&\quad - \mathcal{R}(r_k, \alpha_k; t) \sin(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t)
\end{aligned}$$

- ha  $i < k$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r_i} U_k(t) &= \frac{\partial}{\partial r_i} (\mathcal{R}(r_k, \alpha_k; t) (\cos(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) - r_k \cos(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t))) \\
&= \mathcal{R}(r_k, \alpha_k; t) \frac{\partial}{\partial r_i} (\cos(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) - r_k \cos(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t)) \\
&= \mathcal{R}(r_k, \alpha_k; t) \left( -\frac{\partial}{\partial r_i} (\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) (\sin(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) \right. \\
&\quad \left. + r_k \frac{\partial}{\partial r_i} (\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) \sin(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t)) \right) \\
&= \mathcal{R}(r_k, \alpha_k; t) \frac{\partial}{\partial r_i} (\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) (r_k \sin(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t) - \sin(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t))) \\
&= \frac{2 \sin(t - \alpha)}{\sqrt{1 - r_i^2}} \mathcal{R}(r_i, \alpha_i; t) \mathcal{R}(r_k, \alpha_k; t) (r_k \sin(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t) \\
&\quad - \sin(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t))) \\
&= -\frac{2 \sin(t - \alpha)}{\sqrt{1 - r_i^2}} \mathcal{R}(r_i, \alpha_i; t) V_k(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r_i} V_k(t) &= \frac{\partial}{\partial r_i} (R(r_k, \alpha_k; t) (\sin(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) - r_k \sin(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t))) \\
&= R(r_k, \alpha_k; t) \left( \frac{\partial}{\partial r_i} (\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) (\cos(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) \right. \\
&\quad \left. - r_k \frac{\partial}{\partial r_i} (\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) \cos(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t)) \right) \\
&= \frac{2 \sin(t - \alpha)}{\sqrt{1 - r_i^2}} R(r_i, \alpha_i; t) R(r_k, \alpha_k; t) (r_k \cos(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t) \\
&\quad - \cos(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t))) \\
&= \frac{2 \sin(t - \alpha)}{\sqrt{1 - r_i^2}} R(r_i, \alpha_i; t) U_k(t)
\end{aligned}$$

Az  $\alpha_i$  szerinti deriváltak pedig:

- ha  $i > k$ :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} U_k(t) = 0, \quad \text{és} \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_i} V_k(t) = 0$$

- ha  $i = k$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha_i} U_k(t) &= \frac{\partial}{\partial \alpha_k} (R(r_k, \alpha_k; t) (\cos(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) - r_k \cos(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t))) \\
&= \frac{\partial}{\partial \alpha_k} (R(r_k, \alpha_k; t)) (\cos(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) - r_k \cos(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t)) \\
&\quad + R(r_k, \alpha_k; t) r_k \sin(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha_i} V_k(t) &= \frac{\partial}{\partial \alpha_k} (R(r_k, \alpha_k; t) (\sin(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) - r_k \sin(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t))) \\
&= \frac{\partial}{\partial \alpha_k} (R(r_k, \alpha_k; t)) (\sin(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) - r_k \sin(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t)) \\
&\quad - R(r_k, \alpha_k; t) r_k \cos(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t)
\end{aligned}$$

- ha  $i < k$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha_i} U_k(t) &= \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (R(r_k, \alpha_k; t) (\cos(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) - r_k \cos(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t))) \\
&= R(r_k, \alpha_k; t) \left( -\frac{\partial}{\partial \alpha_i} (\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) \sin(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) \right. \\
&\quad \left. + r_k \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) \sin(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t) \right) \\
&= -R(r_k, \alpha_k; t) \left( 1 - \sqrt{1 - r_i^2} R(r_i, \alpha_i; t) \right) (r_k \sin(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) \\
&\quad - r_k \sin(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t)) \\
&= -\left( 1 - \sqrt{1 - r_i^2} R(r_i, \alpha_i; t) \right) V_k(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha_i} V_k(t) &= \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (R(r_k, \alpha_k; t) (\sin(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) - r_k \sin(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t))) \\
&= R(r_k, \alpha_k; t) \left( \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) \cos(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) \right. \\
&\quad \left. - r_k \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) \cos(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t) \right) \\
&= R(r_k, \alpha_k; t) \left( 1 - \sqrt{1 - r_i^2} \cdot R(r_i, \alpha_i; t) \right) (\cos(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t)) \\
&\quad - r_k \cos(\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; t) + \alpha_k - t)) \\
&= \left( 1 - \sqrt{1 - r_i^2} \cdot R(r_i, \alpha_i; t) \right) U_k(t)
\end{aligned}$$

### 3.3. Numerikus szimulációk

A javasolt, valós MT-függvényekkel felírt adaptív projekciókon alapuló identifikációs módszer kiértékeléséhez parametrizálható tesztkörnyezetet készítettünk. Minden teszt alapja, hogy véletlenszerűen generáltunk különböző, esetenként rögzített számú inverz pólust, majd a hozzájuk tartozó Malmquist-Takenaka bázisfüggvények segítségével, véletlen együtthatókkal előállítottunk egy függvényt, melyet mint egy SISO LTI rendszer átviteli függvényét kezeltünk. A tesztek három nagy kategóriába sorolhatóak. Az elsőben komplex konjugált inverz pólus-párokat generáltunk, hogy valós rendszert modellezzünk, és így össze lehessen hasonlítani egy, a *MATLAB*-ba beépített klasszikus rendszer identifikációs modellel. A másodikban az inverz pólusokat és az együtthatókat teljesen véletlenül generáltunk majd az így kapott átviteli függ-

vényt zaj hozzáadása után, a valós részén keresztül közelítettük az algoritmussal. A harmadik tesztalomban véletlenszerűen generált SISO LTI rendszerek egy állapot-tér reprezentációjából indultunk ki. Az így kapott reprezentációk és egy véletlen input sorozat felhasználásával szimuláltuk a rendszer viselkedését. A közelítendő jelet ebben az esetben az input és output sorozatokból elkészített (zajjal és numerikus hibákkal terhelt) empirikus transzfer függvény valós része jelentette. A valós rész közelítése után a komplex értékű átviteli függvényt a (3.1.1) képlet alapján rekonstruáltuk. A második és a harmadik esetben különböző mértékű fehér zajt adtunk közelítés előtt az (empirikus) átviteli függvényhez, és az eredményeket a zaj-szint (SNR) alapján is felosztottuk. Minden tesztesethez nagy számú ( $N \geq 50$ ) véletlen tesztet futtattunk, véletlen kezdeti paraméterekkel, majd az eredményeket kiátlagoltuk. A modell által adott közelítés helyességét a valódi komplex átviteli függvénytől vett átlagos négyzetes eltéréssel és a becsült illetve valódi inverz pólusok közötti átlagos távolságával mértük. A mérési eredmények azt mutatják, hogy a módszer képes precízen közelíteni a zajos átviteli függvényt és megbízható becslést adni a rendszer pólusainak elhelyezkedésére.

### 3.3.1. Összehasonlítás más módszerekkel

Ebben az esetben az inverz pólusokat véletlenül, komplex konjugált inverz pólus-párokban generáltuk le, melynek eredményeként a rendszer valós bemenetre valós kimenetet ad. A valóságban előforduló fizikai rendszerek többsége szintén rendelkezik ezzel a tulajdonsággal [14]. A tesztesetek generálásánál minden pólus esetén  $0.7 < |a| < 1$  teljesült, azaz az átviteli függvény pólusait közel választottuk az egységkör pereméhez. Ez a viselkedés sokszor megfigyelhető valós rendszerek esetében [14] és jellemzően megnehezíti az összes pólus identifikációját.

A dolgozatban a javasolt módszert két másik, a szakirodalomban megtalálható identifikációs eljárással hasonlítottam össze. Az első eljárás [14, 15, 16, 17] az átviteli függvények egy diszkrét Laguerre rendszer szerinti sorfejtéséből indul ki. Nevezetesen a módszer egy diszkrét Laguerre-Fourier együtthatókból alkotott sorozat határértékével közelíti az átviteli függvény egy pólusát. Az összes pólust a megtalált pólusok hatásának jelből történő "eltávolításával" és az említett határérték iteratív kiszámításával éri el [14, 17]. Ezt a módszert korábban sikeresen alkalmazták olyan átviteli függvények identifikációjára, melyek sok, az egységkörhöz közel található pólussal rendelkeztek [14]. Megjegyezzük, hogy az eljárás alapját adó diszkrét Laguerre rendszerek felfoghatóak a Malmquist-Takenaka rendszerek speciális eseteként

az  $\mathbf{a} = (a, a, a, a, \dots)$  választással. A 3.1 táblázatban erre a módszerre "Schi-So" néven hivatkozunk. A második vizsgált algoritmus az úgynevezett Output Error (OE) modell. Ez a módszer a racionális átviteli függvényt a számlálóban és a nevezőben található polinomok algebrai alakjával adja meg. A modell szabad paramétereit az említett polinomok együtthatói jelentik. Az OE modell népszerűségét jól mutatja, hogy egy implementáció elérhető a MATLAB rendszeridentifikációs toolboxában [18] is. Az algoritmus futása során azt az információt, hogy a pólusok konjugált párok nem használtak ki, azonban az algoritmus így is megtalálta a helyes értékeket.

Pólusok száma	MSE (Átlagos négyzetes eltérés)		
	VP+MT (javasolt)	Schi-So	Output Error
2	<b>0.0000</b>	0.3034	1.7716
4	<b>0.0015</b>	4.2149	1.7990
6	<b>0.0332</b>	5.5862	1.8197
8	<b>0.1980</b>	5.6386	1.6140
10	<b>0.5578</b>	5.3398	1.8557

3.1. táblázat. *Átlagos négyzetes eltérés a javasolt (MT-VP), a Schi-So-algoritmus és az Output Error közelítésénél, pólusszámok alapján szétbontva. Minden esethez 100 tesztet futtattunk és az eredményüket kiátlagoltuk.*

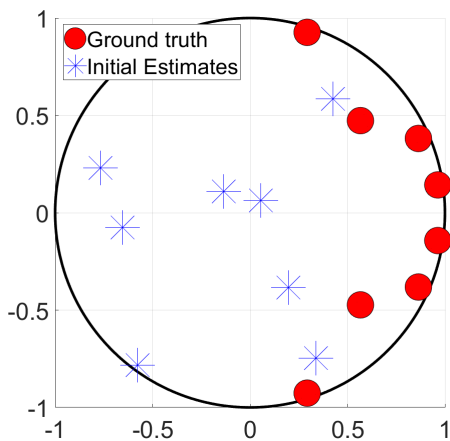
A 3.1 táblázat alapján jól látható, hogy a javasolt módszer alacsony pólusszám esetén több nagyságrenddel jobb közelítést ad az átviteli függvényre és magas pólusszám (10) esetén is megtartja az előnyét. Az általunk vizsgált pólusszámokra bőségesen találhatunk példát az irodalomban (lásd [7]). Számos módszerhez hasonlóan a javasolt módszer és az Output Error módszer is feltételezi a pólusok számának előzetes ismeretét. Ugyan a Schi-So módszer magas pólusszám esetén is a tényleges pólusoknak egy szűk környezetébe teszi a becsléseket, a becsült pozíciókból alkotott Malmquist-Takenaka közelítések négyzetes hibája magas. Azonban a Schi-So módszer előnye abban rejlik, hogy nem tételez fel a priori ismeret a pólusok számáról. Ezért a kutatás következő lépésében a két módszer (VP+MT és Schi-So) együttes használatát fogjuk vizsgálni, mely lehetőséget ad arra, hogy az előnyeiket ötvözzük.

A javasolt algoritmus futásideje erősen függ a használt nemlineáris optimalizációs algoritmus futásidejétől. Esetünkben ez a MATLAB *lsqnonlin* függvényének alapértelmezett *trust-region-reflective* algoritmus volt. A 3.2 táblázatban látható a javasolt módszer és az Output Error modell futásidejének összehasonlítása. Látható, hogy az OE modell gyorsabb, azonban a javasolt módszer is jó eredményeket ér el. Ennek az egyik oka, hogy (az OE modellel szemben) a módszerünk implementációja során a

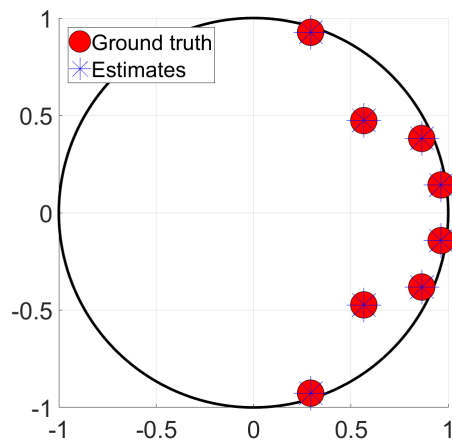
futásidő optimalizálása nem volt elsődleges szempont, továbbá a MATLAB-ba beépített OE módszer külső C++ könyvtárakat is használ. Programozási szempontból a jelenlegi futásidőn a jövőben többféleképpen is tudjuk javítani, pl. párhuzamosítással, vagy C++ implementációval.

Módszer	Pólusok száma				
	2	4	6	8	10
VP+MT	0.0362	0.1692	0.4146	1.0327	2.4745
OE	0.0940	0.1394	0.1503	0.1659	0.1765

3.2. táblázat. A javasolt módszer (VP+MT) és az Output Error modell (OE) futásidőjének összehasonlítása (másodpercekben mérve).



(a) Véletlenszerűen inicializált pólusbecslések (a bemutatott optimalizációs eljárás kiinduló pontjai)



(b) Az valós MT rendszer alapú, adaptív projekciós optimalizáció végeredménye.

3.2. ábra. Egy példa rendszer pólusainak becslése a javasolt módszer segítségével.

### 3.3.2. Átviteli függvény közelítése

Ezeknél a tesztekénél véletlenszerűen generáltuk az összes inverz pólust a komplex egységkörön belül, a közelítendő átviteli függvényeket pedig az általuk meghatározott Malmquist-Takenaka bázisfüggvények segítségével, véletlen együtthatókkal állítottuk elő. Az együtthatók valós és komplex részét véletlenszerűen egyenletes eloszlással választottuk a  $[-5, 5]$  intervallumból. A módszer nagyon magas zaj esetében pontatlan, azonban, ha a zaj a jellel **megegyező erősségű**, vagy annál kisebb, a módszer pontosan becsli az átviteli függvényt, illetve a pólusok helyzetét.

SNR \ Pólusok	MSE (Átlagos négyzetes eltérés)					
	1	2	3	4	5	10
-20	1.4528	1.6792	3.2955	4.6703	4.0060	7.7283
-15	0.5305	0.6280	0.9319	0.8317	1.6507	2.0802
-10	0.1081	0.2539	0.2809	0.3804	0.3246	0.7528
0	0.0107	0.0282	0.0218	0.0362	0.0824	0.0623
10	0.0031	0.0015	0.0042	0.0056	0.0069	0.0140
20	0.0003	0.0003	0.0005	0.0010	0.0011	0.0026
30	0.0001	0.0001	0.0003	0.0004	0.0005	0.0018
40	0.0001	0.0001	0.0003	0.0004	0.0005	0.0020
50	0.0001	0.0001	0.0003	0.0004	0.0004	0.0022
60	0.0001	0.0001	0.0003	0.0004	0.0005	0.0020
70	0.0001	0.0001	0.0003	0.0004	0.0005	0.0020

3.3. táblázat. *Átlagos négyzetes eltérés az eredeti és a becsült átviteli függvény között, zajszint és pólusok száma alapján. Minden esethez 100 tesztet futtattunk és az eredményüket kiátlagoltuk.*

SNR \ Pólusok	Pólusok becslésének pontossága					
	1	2	3	4	5	10
-20	0.6281	0.7979	0.7038	0.6663	0.6810	0.5092
-15	0.4744	0.5566	0.6216	0.5911	0.5888	0.5031
-10	0.1998	0.4293	0.4960	0.4770	0.5138	0.4812
0	0.0484	0.1603	0.2679	0.2947	0.3523	0.4097
10	0.0138	0.0734	0.0652	0.1913	0.2069	0.2975
20	0.0039	0.0151	0.0252	0.0689	0.1074	0.2419
30	0.0012	0.0047	0.0061	0.0249	0.0512	0.1736
40	0.0004	0.0017	0.0033	0.0093	0.0202	0.1179
50	0.0001	0.0003	0.0009	0.0037	0.0083	0.0802
60	0.0000	0.0001	0.0003	0.0012	0.0035	0.0526
70	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0020	0.0509

3.4. táblázat. *Átlagos távolság az eredeti és a becsült inverz pólusok helyzete között, zajszint és pólusok száma alapján. Minden esethez 100 tesztet futtattunk és az eredményüket kiátlagoltuk.*

A 3.3 és 3.4 táblázatokból jól látszik, hogy a javasolt módszer alkalmas zajos átviteli függvények közelítésére. A módszer zajjal szemben tanúsított robusztus viselkedését jól alátámasztja, hogy magas pólusszám (pl. 10) esetén is nagyon pontos közelítéseit kapjuk a pólus pozícióknak. A zajjal szembeni tolerancia különösen fontos lehet a módszer valós rendszerekre történő alkalmazásakor, mely a kutatás következő lépését fogja jelenteni. A táblázatok alapján a modell 10 és 20 SNR zaj között átlagos négyzetes eltérés alapján (3.3 táblázat) eléri a legjobb numerikus közelítés nagyságrendjét, mely a zaj további csökkentése mellett sem változik lényegesen. Azonban a pólusok becslésének pontossága (3.4 táblázat) egészen 50 SNR zajszintig tud tovább javulni.

### 3.3.3. Empirikus átviteli függvény becslése

A [19] cikk alapján kiszámoltuk egy állapotter modelljét egy olyan rendszernek, melynek az átviteli függvénye Malmquist-Takenaka függvények lineáris kombinációjaként van megadva. Az állapotter modellt MATLAB-ban egy véges sorozaton szimuláltuk és a bemeneti és kimeneti adatok alapján a diszkrét Fourier-transzformáltak hányadosaként előállítottuk az empirikus átviteli függvényt [1, 6], melynek valós részét a valós Malmquist-Takenaka rendszerrel közelítettünk. A numerikus számítások hibája miatt az empirikus átviteli függvény egy zajos közelítése a valódi átviteli függvénynek, melyen tapasztalataink szerint a zaj mértéke a tesztjeink során 10 SNR körül mozgott (lásd 3.4 ábra). Ez a gyakorlatban is sokszor problémát okoz, ezért ennek kiküszöbölése aktívan kutatott terület a rendszer identifikáción belül [6].

A 3.5 és 3.6 táblázatokat a 3.3 és 3.4 táblázatokkal összehasonlítva látszik, hogy a javasolt módszer az empirikus átviteli függvény alapján nehezebben identifikálja a rendszert, azonban alacsonyabb ( $\geq 10$ ) hozzáadott zaj esetén így megfelelő becslést tud adni az átviteli függvényre és a pólusok elhelyezkedésére.

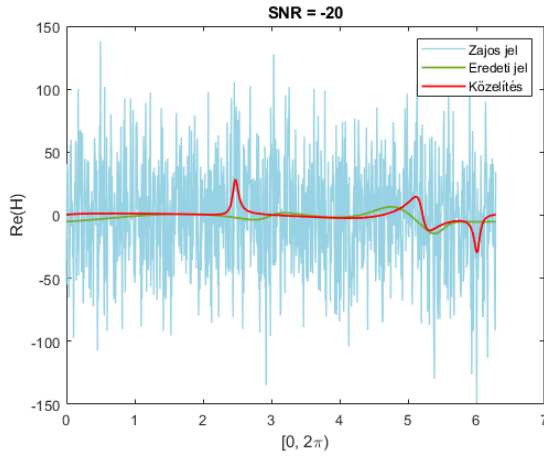


SNR \ Pólusok	MSE (Átlagos négyzetes eltérés)					
	1	2	3	4	5	10
-20	1.9615	2.3419	2.5361	4.9750	4.1308	8.4563
-15	0.4536	0.5783	1.4681	1.6853	1.2514	3.1829
-10	0.1383	0.2156	0.3442	0.3265	0.3527	0.8551
0	0.0158	0.0238	0.0432	0.0446	0.0653	0.0735
10	0.0015	0.0038	0.0043	0.0050	0.0083	0.0174
20	0.0003	0.0013	0.0008	0.0072	0.0024	0.0082
30	0.0001	0.0004	0.0050	0.0014	0.0028	0.0070
40	0.0001	0.0007	0.0005	0.0012	0.0066	0.0057
50	0.0001	0.0002	0.0013	0.0010	0.0025	0.0060
60	0.0001	0.0003	0.0007	0.0010	0.0070	0.0063
70	0.0001	0.0003	0.0006	0.0012	0.0047	0.0049

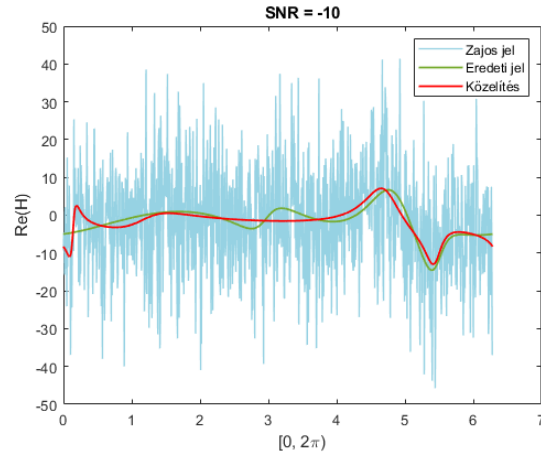
3.5. táblázat. Átlagos négyzetes eltérés az eredeti és a becsült átviteli függvény között, zajszint és pólusok száma alapján. Minden esethez 50 tesztet futtattunk és az eredményeket kiátlagoltuk.

SNR \ Pólusok	Pólusok becslésének pontossága					
	1	2	3	4	5	10
-20	0.7597	0.7138	0.7434	0.6899	0.6312	0.5473
-15	0.3945	0.5502	0.6389	0.6043	0.5511	0.5233
-10	0.2304	0.3964	0.4927	0.4721	0.5100	0.4994
0	0.0872	0.1351	0.2569	0.3085	0.3295	0.4039
10	0.0140	0.0403	0.1356	0.1469	0.1726	0.3168
20	0.0055	0.0226	0.0458	0.0828	0.1115	0.2648
30	0.0032	0.0096	0.0377	0.0596	0.0854	0.2548
40	0.0030	0.0088	0.0378	0.0538	0.0841	0.2347
50	0.0030	0.0083	0.0348	0.0473	0.0851	0.1984
60	0.0023	0.0083	0.0318	0.0512	0.0813	0.1499
70	0.0027	0.0039	0.0262	0.0508	0.0762	0.1354

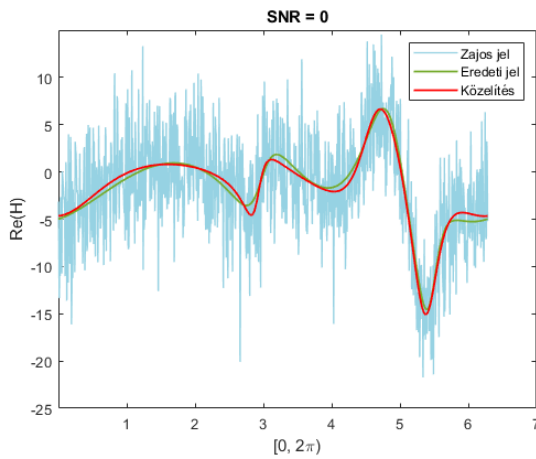
3.6. táblázat. Átlagos távolság az eredeti és a becsült inverz pólusok helyzete között, zajszint és pólusok száma alapján. Minden esethez 50 tesztet futtattunk és az eredményeket kiátlagoltuk.



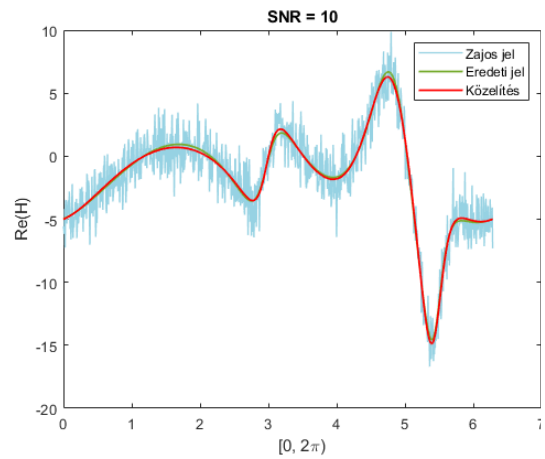
(a) Az átviteli függvény valós részének becslése nagyon magas (-20 SNR) zaj mellett.



(b) Az átviteli függvény valós részének becslése nagyon magas (-10 SNR) zaj mellett.

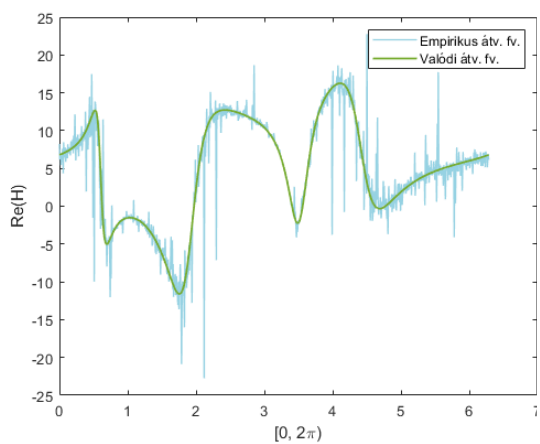


(c) Az átviteli függvény valós részének becslése magas (0 SNR) zaj mellett.

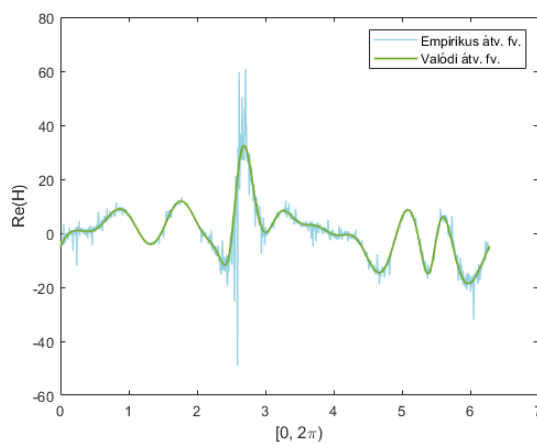


(d) Az átviteli függvény valós részének becslése közepes (10 SNR) zaj mellett.

3.3. ábra. Egy 4 pólusú átviteli függvény frekvenciatartományban való becslése különböző nagyságú zaj mellett. Látható, hogy -20 SNR nagyságú zajnál a módszer még nem tud jó közelítést adni, azonban 0 SNR vagy annál kisebb zaj esetén precízen közelíti az eredeti, zaj nélküli jelet. Az ábrákon a valódi átviteli függvény megegyezik.



(a) Empirikus és a valódi átviteli függvény valós része egy 4 pólusú rendszernek.



(b) Empirikus és a valódi átviteli függvény valós része egy 10 pólusú rendszernek.

3.4. ábra. Az empirikus átviteli függvény egy zajos közelítése a rendszer átviteli függvényének.

## 4. fejezet

# Összefoglalás

A TDK dolgozatban SISO LTI rendszerek identifikációjával foglalkoztunk. Az identifikációt a rendszer átviteli függvényének közelítésével értük el a frekvenciatartományban. A rendszert leíró átviteli függvény pólusaira úgy tekintettünk, mint egy Malmquist-Takenaka racionális ortogonális függvényrendszert meghatározó paraméter sorozatra. Az identifikációs feladat megoldását ezen paraméterek optimális megválasztására vezettük vissza. Az így kapott optimalizációs feladatot egy szeparábilis nemlineáris legkisebb négyzetes problémaként kezeltük, melyet az adaptív projekciók módszerével oldottunk meg.

A dolgozatban új elméleti és gyakorlati jellegű eredményeket értünk el. Egyrészt az Adaptív Projekciók numerikus módszerét [2] a rendszeridentifikációban felmerülő optimalizációs problémához igazítottuk, ami a nemzetközi szakirodalomban [3] új alkalmazási területnek számít. Másrészt az implementációhoz levezettük a komplex Malmquist-Takenaka függvények komplex és valós részének polárkoordinátás alakját, majd felírtuk a sugár és az argumentum szerinti parciális deriváltjait. Ez lehetővé tette a közelítés hibájának (lásd 2.4.2 egyenlet) gradiens alapú optimalizálását, melyhez egy több részből álló moduláris programcsomagot készítettünk MATLAB-ban. Kiindulási alapként az Adaptív Projekciók módszerének O’Leary és Rust féle implementációját [8] használtuk, amit kiegészítettünk a valós Malmquist-Takenaka függvények inverz pólusainak optimalizációjával. Másrészt létrehoztunk egy általános tesztkörnyezetet a SISO LTI rendszereket identifikáló modellek kiértékeléséhez. Ebben lehetőség van a rendszereket definiáló átviteli függvények közvetlen és közvetett approximációjára is. Utóbbi azt jelenti, hogy egy előre adott racionális átviteli függvényhez tudunk állapotter reprezentációt generálni, melynek be- és kimenete alapján végezhetjük az identifikációt. A létrehozott tesztkörnyezet paraméterezzhető, a tesz-

tekhez például előre meg lehet adni a különböző zajszinteket, a pólusok számát és multiplicitását, az állapotter modell használatát, a mintavételezési pontok számát és a tesztesetenként lefuttatott szimulációk számát. A numerikus tesztek azt mutatják, hogy a TDK-ban kidolgozott módszer hatékonyan működik, és még a jel erősségével megegyező mértékű zaj mellett is megbízható becslést ad az átviteli függvényre és a rendszer pólusainak elhelyezkedésére. Ezt az eredményt igazolják a más módszerekkel (Schi-So, Output Error, lásd 3.3.1 alfejezet) való összehasonlítások is. A dolgozat eredményeit eddig egy nemzetközi publikációban [20], és egy nemzetközi konferencia-előadásban (AIME22) foglaltam össze.

A TDK-ban bemutatott identifikációs módszer továbbfejlesztésére több lehetséges irány is van. A nemlineáris optimalizálásban gyakran felmerülő probléma, hogy a modell leírásához szükséges paraméterek száma ismeretlen, továbbá a megoldás optimalitása erősen függ a kezdetben megválasztott paraméterektől. Ezekre tudnak megoldást nyújtani az olyan nemparametrikus becslési módszerek, mint a Schi-So algoritmus [21]. Önmagában a Schi-So algoritmus segítségével nem lehet pontosan identifikálni egy rendszer pólusait, azonban meghatározható a pólusok száma, és egy bizonyos hibával becsülhető azok helyzete is. Tehát a Schi-So algoritmus felhasználható a TDK dolgozatban bemutatott nemlineáris optimalizációs módszer inicializálására. Egy másik továbblépési irány a Blaschke-függvények hiperbolikus geometriai struktúrájának kihasználása az optimalizálás során. Riemann-geometria segítségével értelmezni lehet a 2.4.2 hibafüggvény hiperbolikus metrika szerinti gradiensét és az ebbe az irányba történő geodetikus vonalak mentén való elmozdulást. Végül, a bemutatott módszert szeretnénk a valóságban előforduló konkrét feladatok megoldására is alkalmazni, pl. szervómotor szabályozására, illetve flexibilis repülőgépszárnyak modellezésére [14].

# Irodalomjegyzék

- [1] P. S. C. Heuberger, P. M. J. Van den Hof, and B. Wahlberg, *Modelling and Identification with Rational Orthogonal Basis Functions*, Springer-Verlag, London, UK, 2005.
- [2] G. H. Golub and V. Pereyra, „The differentiation of pseudo-inverses and nonlinear least squares problems whose variables separate,” *SIAM Journal on Numerical Analysis (SINUM)*, vol. 10, pp. 413–432, 1973.
- [3] G. H. Golub and V. Pereyra, „Separable nonlinear least squares: The variable projection method and its applications,” *Inverse problems*, vol. 19, no. 2, pp. R1–R26, 2003.
- [4] Javad Mashreghi, Emmanuel Fricain, et al., *Blaschke products and their applications*, Springer, 2013.
- [5] Claude Gasquet and Patrick Witomski, *Fourier analysis and applications: filtering, numerical computation, wavelets*, vol. 30, Springer Science & Business Media, 2013.
- [6] Anders Stenman, Fredrik Gustafsson, Daniel E Rivera, Lennart Ljung, and Tomas McKelvey, „On adaptive smoothing of empirical transfer function estimates,” *Control Engineering Practice*, vol. 8, no. 11, pp. 1309–1315, 2000.
- [7] Karl Johan Åström and Richard M Murray, „Feedback systems,” *Princeton University Press*, 2008.
- [8] D. P. O’Leary and B. W. Rust, „Variable Projection for Nonlinear Least Squares Problems,” *Computational Optimization and Applications*, vol. 54, no. 3, pp. 579–593, 2013.
- [9] Jorge J Moré, „The Levenberg-Marquardt algorithm: implementation and theory,” in *Numerical analysis*, pp. 105–116. Springer, 1978.

- [10] Edward Charles Titchmarsh et al., *Introduction to the theory of Fourier integrals*, The Clarendon Press, 1937.
- [11] Volker Pohl and Holger Boche, *Advanced topics in system and signal theory: a mathematical approach*, vol. 4, Springer Science & Business Media, 2009.
- [12] Ferenc Weisz, *Summability of multi-dimensional Fourier series and Hardy spaces*, vol. 541, Springer Science & Business Media, 2002.
- [13] Ferenc Schipp, *Racionális ortogonális rendszerek a jel- és képfeldolgozásban és a rendszer- és irányításelméletben*, ELTE IK, Jegyzettár, 2016.
- [14] Alexandros Soumelidis, Zoltán Szabó, Peter Seiler, Abhineet Gupta, and József Bokor, „Identification of flexible wing aircraft models using hyperbolic metrics,” in *2015 23rd Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*. IEEE, 2015, pp. 827–832.
- [15] Ferenc Schipp and Alexandros Soumelidis, „On the Fourier coefficients with respect to the discrete Laguerre system,” *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp*, vol. 34, pp. 223–233, 2011.
- [16] Ferenc Schipp and Alexandros Soumelidis, „Eigenvalues of matrices and discrete Laguerre-Fourier coefficients,” *Mathematica Pannonica*, vol. 147, pp. 155, 2012.
- [17] Alexandros Soumelidis, József Bokor, and Ferenc Schipp, „An iterative identification of pole-structure in dynamic systems based on hyperbolic metrics and malmquist-takenaka representation,” in *52nd IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE, 2013, pp. 5180–5185.
- [18] Lennart Ljung and Rajiv Singh, „Version 8 of the Matlab System Identification Toolbox,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 45, no. 16, pp. 1826–1831, 2012, 16th IFAC Symposium on System Identification.
- [19] Ricardo Schumacher, Gustavo HC Oliveira, and Steven D Mitchell, „An iterative approach for selecting poles on complex frequency localizing basis function-based models,” *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, vol. 26, no. 4, pp. 380–389, 2015.
- [20] T. Dózsa, M. Szabari, A. Soumelidis, and P. Kovács, „Pole identification using discrete Laguerre expansion and variable projection,” in *Proceedings of the 22nd*

*World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC)*, 2023, pp. 1–6, (elbírálás alatt).

- [21] A. Soumelidis, F. Schipp, and J. Bokor, „Pole structure estimation from Laguerre representations using hyperbolic metrics on the unit disc,” in *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, 2011, pp. 2136–2141.