# Szakdolgozat

Kirchner Balázs

matematikatanár-fizikatanár

osztatlan tanári mesterszak

2023

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

Tanárképző Központ

# Szakdolgozat

*Versenyfeladatok a közoktatásban*

**Témavezető:**

Dr. Fried Katalin

egyetemi docens

**Készítette:**

Kirchner Balázs

matematikatanár-fizikatanár

osztatlan tanári mesterszak

2023

**Eredetiségi nyilatkozat**

Alulírott Kirchner Balázs (név) GQ1OTI (Neptun-kód) ezennel kijelentem és aláírásommal megerősítem, hogy az ELTE matematika - fizika osztatlan tanári mesterszakján írt jelen diplomamunkám saját szellemi termékem, melyet korábban más szakon még nem nyújtottam be szakdolgozatként és amelybe mások munkáját (könyv, tanulmány, kézirat, internetes forrás, személyes közlés stb.) idézőjel és pontos hivatkozások nélkül nem építettem be.

Budapest, 2023. 04. 26.

Kirchner Balázs

a hallgató aláírása

# Tartalomjegyzék


1. Bevezetés . . . . . 5
   1.1. Tartalmi bevezetés . . . . . 5
   1.2. A dolgozat motivációja és célja . . . . . 6
2. Feladatok és megoldásaik . . . . . 7
   2.1. A feladatok és feladatsorok összeállítása, felhasznált források . . . 7
   2.2. Első feladat, feladatsor és megoldások . . . . . 7
   2.3. Második feladat, feladatsor és megoldások . . . . . 10
   2.4. Harmadik feladat, feladatsor és megoldások . . . . . 15
   2.5. Negyedik feladat, feladatsor és megoldások . . . . . 20
   2.6. Ötödik feladat, feladatsor és megolsáok . . . . . 23
   2.7. Hatodik feladat, feladatsor és megoldások . . . . . 26
3. Módszertani elemzés . . . . . 33
   3.1. Nehézségek a feladatokban . . . . . 33
   3.2. A feladatok NAT alapján való beépítése, célja. . . . . 36
4. A feladatsorok gyakorlati próbája . . . . . 39
   4.1. A csoportok leírása, a gyakorlati próbák körülményei . . . . . 39
   4.2. Tapasztalatok a gyakorlati alkalmazás során . . . . . 41
   4.3. Visszajelző kérdőív . . . . . 45
   4.4. Visszajelzések kiértékelése . . . . . 46
   4.5. Tapasztalatok összefoglalása . . . . . 50
5. Egyéb problémaforrások . . . . . 51
   5.1. A versenyekhez való motiváció hiánya . . . . . 51
   5.2. Matematikai szorongás . . . . . 52
   5.3. Időhiány . . . . . 53
6. Összegzés . . . . . 54

# 1. Bevezetés

## 1.1. Tartalmi bevezetés

A diákok az iskolai tanulmányaik során rengeteg különböző matematika feladattal találkoznak első osztályos koruktól egészen az érettségiig. Ezek között lehetnek feladatok, melyek bemutatnak egy újféle problémát, vannak melyek már egy megismert logikai módszert alkalmazva mélyítik el az addig megszerzett tudásukat. Ezen felül lehetek olyanok is, melyek érdekességükkel vonják magukra a figyelmet, és vannak olyanok, melyek a nehézségükkel teszik ezt. Dolgozatom során szeretnék bemutatni néhány efféle érdekesebb és összetettebb versenyfeladatot, melyek beépíthetőek a matematikaoktatás folyamatába.

A következő fejezetekben néhány érdekesebb feladatot és azok megoldását elősegítő feladatsorokat is szeretnék bemutatni. Ezeknek a feladatoknak az a különlegessége, hogy versenyfeladatok, így laikus szemmel az gondolható, hogy csak tehetségesebb, vagy matematikával emeltebb szinten foglalkozó diákok oldhatják meg ezeket a feladatokat. Ennek ellenére úgy gondolom, hogy az általam bemutatott problémákat bármelyik diák meg tudja oldani a kellő iránymutatással, érdeklődéssel és odafigyeléssel.

A versenyfeladatok megoldásához szükséges felidézni azokat az elméleti és gyakorlati módszereket, melyek az adott témakörhöz kapcsolódnak. Emiatt a versenyfeladatokhoz rávezető feladatsorokat is készítettem melyekkel szeretném ezt a felidézési folyamatot valamint a feladatok megoldását is segítve. A feladatsor lehetőséget ad a diákok önálló munkájára, így tanári iránymutatás nélkül is meg lehet oldani a problémákat.

A dolgozatom célja még a feldatok, feladatsorok a gyakorlati próbája, illetve tapasztalatainak elemzése. Leendő pedagógusként, úgy tartom, hogy az elméleti háttér nélkülözhetetlen egy tananyag összeállításánál, de amíg nincsenek a gyakorlatban is kipróbálva a módszerek, addig felmerülhetnek olyan nehézségek, melyek megoldására a tervezés során nem lett fektetve megfelelő hangsúly. A gyakorlati próbát és annak értékelését is kiemelten fontosnak tartom, hiszen ezen folyamatok vizsgálata során levonhatóak rendkívül hasznos tapasztalatok, melyek elősegítik a pedagógusi munkámat. Ennek a vizsgálatnak egy része a visszajelzési kérdőív, mellyel a diákok meg tudják osztani a véleményüket az adott feladatról, feladatsorról.

A feladatok, feladatsorok összeállításának és általános módszertani következtetések levonásával külön fejezetben szeretnék foglalkozni. Itt szeretném indokolni a feladatválasztásokat és szeretném bemutatni az egyes feladatok erősségeit vagy nehézségeit. A nehézségek esetén foglalkozni fogok a tervezéskor fellépő nehézségekkel, illetve azokkal a nehézségekkel is melyek csak a gyakorlati alkalmazás közben lépnek fel.

Véleményem szerint ahhoz, hogy a versenyfeladatok eredményesebben beépíthetőek legyenek az oktatásba, rendkívül fontos nem csak a matematikai módszertani kérdéseket megválaszolni. Emiatt ki szeretnék emelni néhány olyan hátráltató tényezőt is, melyek konkrétan nem matematika módszertani, hanem pszichológiai, pedagógiai problémák. Ezeket a problémákat a matematika módszertanával nem feltétlenül lehet megmagyarázni vagy megoldani és mivel úgy gondolom, hogy ezek is rendkívül fontos befolyásoló tényezők. Emellett szeretnék mutatni néhány olyan lehetséges eszközt vagy módszert, mellyekkel ezeket a nehézségeket segíteni lehet.

## 1.2. A dolgozat motivációja és célja

A dolgozatom egyik motivációja, hogy a diákok számára a megszokotthoz képest érdekesebb és tartalmasabb feladatokat vigyek be az órákra. Úgy gondolom, hogy a matematika oktatása során az egyik legnagyobb kihívás az órák színesítése, és a megszokott rutinjának megtörése. Frontálisan is lehet úgy oktatni, hogy változatosak legyenek a tanórák, viszont ehhez tanárként a diákok számára is érdekes, változatos feladattárral kell rendelkezni. Azt is fontosnak tartom, hogy a diákok ne mindent készen kapjanak, hanem gondolkozzanak egyes feladatokon. Bár a megismert sémák és elvek ismétlése, megfelelő használata is rendkívül fontos, de emellett az is, hogy ezekkel a sémákkal ne csak az adott témakörben találkozzanak, hanem más területen is tudják megfelelően azokat alkalmazni.

Továbbá ugyanúgy fontosnak tartom az összetettebb logikai feladatok gyakorlását is. Az életnek számos területén szükség van összetettebb gondolatmenetek logikus felépítésére. Emiatt is érzem azt, hogy tanárként kiemelt fontossággal kell ennek a gyakorlásával foglalkozni. Amíg az általános gyakorlófeladatok általában egy-két lépés előre tervezését kívánják meg, addig a versenyfeladatok nagyobb hányada ennél többet igényel. Az efféle több lépés előre tervezését és megvalósítását is igénylő feladatok kifejezetten hasznosak lehetnek a diákok számára. Ezt a diákok nehezen értik meg, emiatt sokszor felmerülhet bennük az a kérdéskör, melyet gyakorlatom során én is megkaptam már: „Hol lehet ezt alkalmazni? A boltban nem mondhatom azt, hogy kérek $\sin\frac{\pi}{3}$ kilogramm sertéscombot!” Erre a mondatra azzal a válasszal éltem, hogy a boltaban tényleg nincs rá szüksége, illetve az élet többi területén is csak speciális esetekben kellhet neki, de azzal, hogy megtanulja, megérti és alkalmazni is tudja az adott témakör elemeit, azzal már fejlesztette a logikai készségeit, amit viszont később az életének számos területén kell majd alkalmaznia.

A dolgozatom témájának személyes kötődése is van, hiszen diákkoromban rendszeresen vettem részt matematika- és fizikaversenyeken is. A versenyek alatt általában pozitív és negatív érzelmek is voltak bennem a feladatokkal kapcsolatban. Negatív azért, mivel többször előfordult, hogy nem jutottam egy-egy feladat megoldására, ilyenkor frusztrált voltam és nem is szerettem volna tovább foglalkozni velük. Viszont azokban az esetekben mikor sikerült egy gondolkodtatóbb példa végére jutnom, olyankor felszabadultság és öröm töltött el – célom, hogy ezt a felemelő és pozitív érzést át tudjam adni ezeken a feladatokon keresztü a diákok számára is.

Célja még a dolgozatomnak és versenyfeladatoknak, hogy a diákok az matematika érettségi előtt már találkozzanak összetettebb feladatokkal, melyek kihívást jelenthetnek. Mindenképp hasznosak látom, hogyha a tanulmányaik során már találkoznak több összetettebb példákkal és megoldást is találnak rájuk, abban az esetben a kevésbé összetett, könnyebb feladatokat is könnyebben meg fogják tudni oldani.

# 2. Feladatok és megoldásaik

## 2.1. A feladatok és feladatsorok összeállítása, felhasznált források

Olyan versenyfeladatokat választottam a feldolgozásra melyeknek szövegét és megoldásának menetét is könnyen megérthetik a diákok. A feladat szövegezésének értelmezése az első akadály lehet a diákok számára, a megoldási folyamatban. Ezen felül olyan problémák feldolgozását gondoltam célszerűbbnek, melyek a diákok számára érdekesek vagy a megoldást tekintve könnyen megközelíthetőek, egyértelműek.

A feladatsorok összeállítását és előzetes megoldását, pedig amiatt tartom fontosnak, hogy a diákok támpontokat kapjanak ezekhez a feladatokhoz, hiszen az altálanos matematikaórán ilyenekkel nem gyakran találkoznak. A célom ezekkel a feladatokkal a megoldások főbb részleteinek kiemelése. Ezáltal már csak az előzetesen megismert módszerek részleteit kell a versenyfeladatok megoldása során felhasználniuk a diákoknak.

A feladatokat három különböző matematikaverseny közül választottam. Az első három feladatot a Középiskolai és Matematikai Lapok (röviden: KöMaL) levelező versenyének feladataiból válogattam. A további feladatokat az Orságos Középiskolai Tanulmányi Verseny (röviden: OKTV) matematika feladatai közül, illetve az Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny feladati közül válogattam. A következőkben a feladatokat, feladatsorokat és azok megoldásait szeretném vázolni.

## 2.2. Első feladat, feladatsor és megoldások

A megoldandó feladat a KöMaL 2021. márciusi kiadásának K. 690. feladata, ami így szól:

**K. 690.** Peti gondolt egy pozitív egész számra és huszonhárom állítást fogalmazott meg a számmal kapcsolatban, melyek közül kettő szomszédos nem igaz, de a többi igaz.

1. Osztható 2-vel.
2. Osztható 3-mal.
3. Osztható 4-gyel.

$\vdots$

23. Osztható 24-gyel.

Peti a lehető legkisebb ilyen számra gondolt. Melyik ez a szám?

A feladatsor, a diákok számára kiadott formában az I. mellékletben található. A feladathoz készített feladatsor, megoldásokkal:

**1.** Hogyan határozhatjuk meg egyes összetett számok oszthatósági szabályát? Mi a 12-nek az oszthatósági szabálya?

**Megoldás**: Egy összetett szám oszthatósági szabálya összeáll az adott szám olyan valódi osztópárjának oszthatósági szabályaiból, melyek egymáshoz képest relatív prímek. Emiatt a 12-nek az oszthatósági szabálya, a 3-nak és a 4-nek a szabályaiból áll össze. Tehát 12-vel akkor osztható egy szám, ha osztható 3-mal és 4-gyel is. (Rossz példa a 6 és a 2, mivel $(6;2) = 2 \neq 1$.)

**2.** Igaz vagy hamis? Válaszodat indokold vagy hozz (ellen)példát!

*a)* Ha egy szám osztható 2-vel, akkor osztható 4-gyel.

**Megoldás**: Hamis, ellenpélda a 6.

*b)* Ha egy szám osztható 4-gyel, akkor osztható 2-vel.

**Megoldás**: Igaz, mivel a 4 többszöröse a 2-nek.

*c)* Ha egy szám osztható 6-tal és 2-vel, akkor osztható 12-vel.

**Megoldás**: Hamis, mivel a 2 és a 6 nem relatív prímek.

*d)* Ha egy szám osztható 12-vel akkor osztható 6-tal és 2-vel is.

**Megoldás**: Igaz, mivel a 6-nak és a 2-nek is többszöröse a 12.

*e)* Ha egy szám többszöröse 5-nek és 10-nek, akkor többszöröse 50-nek is.

**Megoldás**: Hamis, ellenpélda: 20.

*f)* Ha egy szám többszöröse 50-nek, akkor többszöröse 5-nek és 10-nek is.

**Megoldás**: Igaz, mivel 50 az 5-nek és a 10-nek is többszöröse.

**3.** Melyik az a legkisebb szám, ami osztható

*a)* 24-gyel és 25-tel?

**Megoldás**: $24 \cdot 25 = 600$, mivel 24 és 25 relatív prímek.

*b)* 3-mal, 24-gyel és 25-tel?

**Megoldás**: Ismét $24 \cdot 25 = 600$, mivel a 24 többszöröse 3-nak.

*c)* 12-vel és 24-gyel?

**Megoldás**: 24, mivel a 12 többszöröse a 24.

*d)* 6-tal és 8-cal?

**Megoldás**: A kérdés alapján 6 és 8 legkisebb közös többszörösét keressük. Mivel, $6 = 2 \cdot 3$ és $8 = 2^3$, emiatt, $[6;8] = 2^3 \cdot 3 = 24$

*e)* 6-tal, 8-cal és 9-cel?

**Megoldás**: A kérdés alapján 6; 8 és 9 legkisebb közös többszörösét keressük. Mivel, $6 = 2 \cdot 3$; $8 = 2^3$ és $9 = 3^2$ emiatt, $[6;8;9] = 2^3 \cdot 3^2 = 72$

**4.** Peti gondolt egy pozitív egész számra és huszonhárom állítást fogalmazott meg a számmal kapcsolatban, melyek közül kettő szomszédos nem igaz, de a többi igaz.

1. Osztható 2-vel.

2. Osztható 3-mal.

3. Osztható 4-gyel.

$\vdots$

23. Osztható 24-gyel.

Peti a lehető legkisebb ilyen számra gondolt. Melyik ez a szám?

**Megoldás**: Első gondolatként felmerülhet, hogy a 2-vel és a 3-mal való oszthatóság biztosan nem lehet együtt hamis. Ha ezek nem lennének igazak, akkor például a 4-gyel, vagy a 6-tal való állítások sem lehetnének igazak. Mivel összesen két állításunk lehet csak hamis, ezért a 2-vel és a 3-mal való oszthatóság biztos, hogy igaz.

Felmerülhet az a gondolat, hogyha egy adott számmal való oszthatóság állítása hamis, akkor a kétszeresével való állítás már nem lehet hamis, hiszen nem szomszédosak ezek az állítások. Tehát azokra a számokra való állítások biztosan igazak, melyeknek a kétszerese szerepel az állítások között. Így a 2-től 12-ig való oszthatóság állításai biztosan igazak, hiszen a legnagyobb szám melynek még oszthatósági szabály szerepel az állítások között a 24.

Mivel a prímszámokra nem tudunk oszthatósági szabályokat megadni, emiatt az összetett számok között kell keresni a nem feletétlenül igaz állításokat. A prímszámok állításai mindig nem feltétlenül igazak. Mivel a prímszámok nem lehetnek egymás mellett emiatt kell a 12-nél nagyobb összetett számok között, nem feltétlenül igaz állítást találni. Ezek az összetett számok a 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24. Vizsgáljuk meg, hogy mely összetett számok oszthatóságára vonatkozó szabály feltétlenül igaz:

14: 2-vel és 7-tel is osztható, tehát biztosan igaz.

15: 3-mal és 5-tel is osztható, tehát biztosan igaz.

16: nem lehet felbontani relatív prímekre, mivel nincsenek relatív prím valódi osztópárjai. Emiatt nem feltétlenül igaz.

18: 2-vel és 9-cel is osztható, tehát biztosan igaz.

20: 4-gyel és 5-tel is osztható, tehát biztosan igaz.

21: 3-mal és 7-tel is osztható, tehát biztosan igaz.

22: 2-vel és 11-gyel is osztható, tehát biztosan igaz.

24: 3-mal és 8-cal is osztható, tehát biztosan igaz.

Ez alapján megállapítható, hogy csak két, nem biztosan igaz állítás van, amelyek egymás mellett vannak, ez pedig a 16-tal és a 17-tel való oszthatóság, tehát ez lesz a két hamis állítás.

Emiatt a 16 és a 17 kivételével a 2-től 24-ig tartó számok legkisebb közös többszörösét keressük. Erre a leggyorsabb módszer az, hogyha megkeressük mely számok tartalmazzák a legmagasabb hatványú prímtényezőket, hiszen a közös prímtényezőkből csak a legmagasabb hatványú kerülhet a legkisebb közös többszörösbe. Ezek a $8 = 2^3$, $9 = 3^2$ és mivel $5^2 = 25$, már nincs a számok között, ezért a további prímtényezők már csak első hatványon lehetnek.

Tehát így a megoldás és a gondolt szám: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 = 157477320$

## 2.3. Második feladat, feladatsor és megoldások

A célfeladat a KöMal 2021. februári kiadásának C. 1654. feladata, ami így szól:

**C. 1654.** Adjuk meg azoknak a köröknek a sugarát, amelyek érintik az $f(x) = \dfrac{3x-6}{4}$ és a $g(x) = \dfrac{28-4x}{3}$ függvények grafikonját, valamint az $x$ tengelyt.

A feladatsor, a diákok számára kiadott formában a II. mellékletben található. A feladathoz készített feladatsor, megoldásokkal:

**1.** Adjuk meg a $2x - y = 11$ és $5x + 4y = 5$ egyenletű egyenesek metszéspontját.

**Megoldás:** Írjuk fel a két egyenes egyenletét egyenletrendszerként és oldjuk meg az egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2x + \phantom{4}y = 11 \\ -5x + 4y = 5 \end{cases}$$

Néggyel felszorozva az első egyenletet az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$\begin{cases} 8x + 4y = 44 \\ -5x + 4y = 5 \end{cases}$$

Az első egyenletből a második egyenletet kivonva az alábbi egyenletet kapjuk:

$$13x = 39$$

$$x = 3$$

Tehát a metszéspont első koordinátája $x = 3$. Visszahelyettesítve az első egyenletbe, megkapjuk a metszéspont második koordinátáját:

$$2 \cdot 3 + y = 11$$

$$6 + y = 11$$

$$y = 5$$

Így a metszéspont koordinátái $A(3;5)$

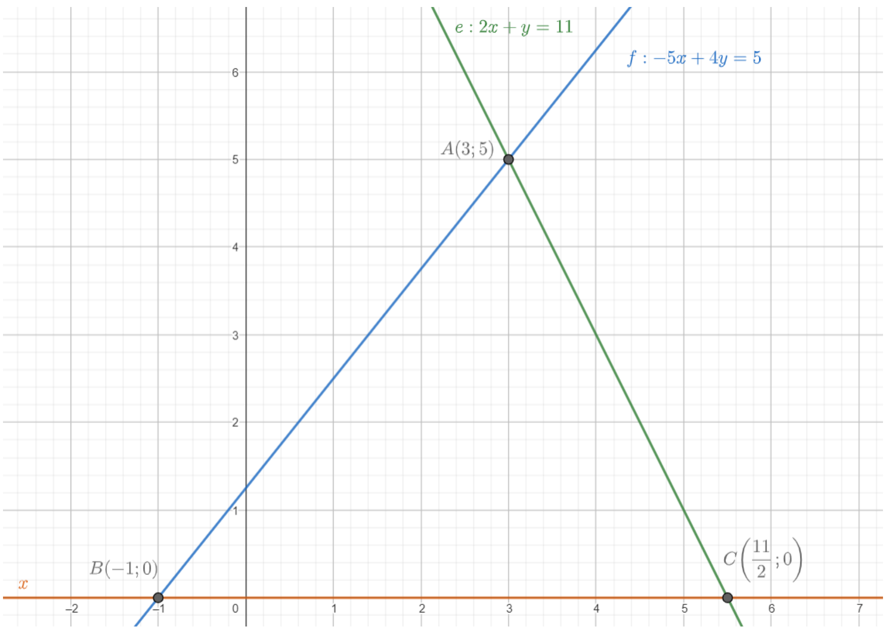
**2.** Két metsző lineáris függvény és az $x$ tengely milyen alakzatot határoz meg? Szemléltessük rajzzal az előző példa egyeneseit felhasználva! Határozzuk meg az $x$ tengellyel vett metszéspontok helyét!

**Megoldás:** Alakítsuk át az előző feladatokban megadott egyenesek egyenletét $y = mx + b$ alakba, hogy tudjuk őket ábrázolni.

A $2x + y = 11$ egyenlet esetén vigyük át a jobb oldalra a $2x$-et, így megkapjuk az ábrázolható alakot: $y = -2x + 11$. Azaz az egyenes meredeksége $m = 2$, tengelymetszete $b = 11$.

A $-5x + 4y = 5$ egyenlet esetén adjuk mindkét oldalhoz $5x$-et majd osszuk le mindkét oldalt 4-gyel. Így az egyenes egyenlete: $y = \frac{5}{4}x + \frac{5}{4}$. Az egyenes meredeksége és tengelymetszete is $m = b = \frac{5}{4}$.

Az ábrázolás után az alábbi ábrát kapjuk:




1. ábra. A két egyenes és az $x$ tengely metszéspontja

Az ábráról leolvasható $B$ pont metszéspontja biztosan, viszont $C$ ponté nem, így ahhoz, hogy az $x$ tengellyel vett metszetet, tegyük meg az $y = 0$ behelyettesítést mindkét egyenlet esetén.

$$-5x + 4 \cdot 0 = 5$$

$$x = -1$$

Így az első metszéspont $B(-1;0)$.

$$2x + 0 = 11$$

$$x = \frac{11}{2}$$

Így a második metszéspont $C\left(\frac{11}{2};0\right)$

**3.** Adott egy háromszög melynek három oldala rendre: 3 cm, 5 cm és 6 cm.

*a)* Mekkora a háromszög területe?

**Megoldás:** Használjuk a Héron-képletet! A Héron-képlethez szükséges a félkerület nagysága: $s = \frac{3+5+6}{2} = \frac{14}{2} = 7$ cm

A Héron-képlet:

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Behelyettesítve:

$$T = \sqrt{7(7-3)(7-5)(7-6)} = \sqrt{7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1} = \sqrt{56} = 7,48 cm^2$$

*b)* Mekkora ennek a háromszögnek a beírható körének a sugara?

**Megoldás:** A beírható kör sugara, a háromszög területe és félsugara közötti kapcsolat az alábbi:

$$T = rs$$

ahol $T$ a háromszög területe, $r$ a beírható kör sugara, $s$ a félkerülete. Így a beírható kör sugarát az $r = \frac{T}{s}$ összefüggésből kaphatjuk meg. A beírható kör sugara:

$$r = \frac{7,48}{7} = 1,07 cm$$

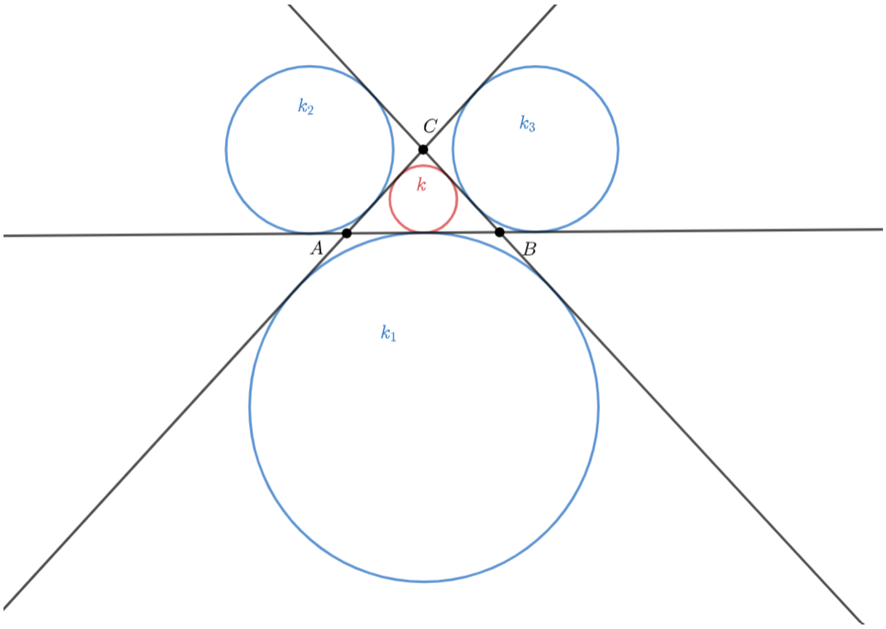
**4.** Hány olyan kört lehet rajzolni, ami érinti a háromszög **mindhárom oldalegyenesét**?

Próbálj meg válaszolni a kérdésre mielőtt elolvasnád a következő részt!

Ha megtaláltad mind a négyet, szép munka! A következőkben a háromszög hozzáírt köreiről olvashatsz.

A háromszög hozzáírt körei azok a körök, melyek a háromszög egyik oldalát és másik két oldalának meghosszabbítását érintő körök. A háromszög mindhárom oldalához húzható egy-egy, így összesen három van belőlük. A hozzáírható körök középpontját az oldallal szemközti belső szögfelező és a másik két külső szög szögfelezőinek a metszéspontja határozza meg.

**Megoldás:** A beírható kör evidens megoldás, hiszen belülről érinti a háromszög mindhárom oldalegyenesét. Ezen felül helyes megoldás még a háromszög hozzáírható körei melyek a háromszöget kívülről érintik. Ezekből három van, tehát összesen négy darab ilyen kör van. Egy tetszőleges megoldás az alábbi ábrán látható:




2. ábra. Egy példa a háromszög beírt és hozzáírt köreire.

**5.** Adjuk meg azoknak a köröknek a sugarát, amelyek érintik az $f(x) = \dfrac{3x-6}{4}$ és a $g(x) = \dfrac{28-4x}{3}$ függvények grafikonját, valamint az $x$ tengelyt.

**Megoldás:** $f(x)$ és $g(x)$ lineáris függvények, emiatt megkereshetjük a két egyenes metszéspontját az alábbi módon:

$$\begin{cases} y = \frac{3x-6}{4} \\ y = \frac{28-4x}{3} \end{cases}$$

Mivel mindkét egyenlet bal oldalán $y$ van, ezért a két egyenlet jobb oldala is egyenlő egymással. Így az alábbi egyenletet kell megoldanunk:

$$\frac{3x-6}{4} = \frac{28-4x}{3}$$

$$3(3x-6)=4(28-4x)$$

$$9x-18=112-16x$$

$$25x=130$$

$$x=5,2$$

Visszahelyettesítve megkapjuk a metszéspont $y$ koordinátáját is:

$$y=\frac{3\cdot 5,2-6}{4}=\frac{9,6}{4}=2,4$$

Így a metszéspont koordinátái: $C(5,2;2,4)$

Adjuk meg a két egyenes $x$ tengellyel vett metszéspontjait. Ezt azáltal lehet meghatározni, hogy megadjuk, hogy mely $x$ értékek esetén lesz $f(x)=0$ és $g(x)=0$.

$$f(x)=0$$

$$\frac{3x-6}{4}=0$$

$$3x-6=0$$

$$3x=6$$

$$x=2$$

Tehát az első egyenes $x$ tengellyel vett metszéspontja a $A(2;0)$.

$$g(x)=0$$

$$\frac{28-4x}{3}=0$$

$$28-4x=0$$

$$28=4x$$

$$x=7$$

Tehát a második egyenes $x$ tengellyel vett metszéspontja a $B(7;0)$.

A két egyenes metszéspontja és az $x$ tengellyel vett metszéspontok együttesen egy háromszöget adnak, melynek csúcsai $A$, $B$ és $C$. Így ahhoz, hogy meg tudjuk adni a két függvényt és az $x$ tengelyt érintő körök sugarát, először is meg kell határozni a körök elhelyezkedését. $ABC$ háromszög oldalegyeneseit érintő köröket keressük, így emiatt a beírható kör sugarát és a hozzáírt körök sugarait keressük. Ehhez viszont meg kell határoznunk a háromszög területét és félkerületét.

Először is meg kell határoznunk a háromszög oldalait. Mivel $A$ és $B$ is az $x$ tengelyen van, ezért ez az oldalhossz könnyen meghatározható $c = |AB| = 7 - 2 = 5$.

A másik két oldalhossz:

$$a = |BC| = \sqrt{(5,2-7)^2 + (2,4-0)^2} = \sqrt{3,24 + 5,76} = \sqrt{9} = 3$$

$$b = |AC| = \sqrt{(5,2-2)^2 + (2,4-0)^2} = \sqrt{10,24 + 5,76} = \sqrt{16} = 4$$

A háromszög félkerülete: $s = \frac{5+3+4}{2} = 6$

A háromszög területe a Héron-képlet segítségével:

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$T = \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)} = \sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \sqrt{36} = 6$$

Így meghatározhatjuk a háromszög beírt körének sugarát az alábbi képlettel:

$$r = \frac{T}{s} = \frac{6}{6} = 1$$

A hozzáírt körök sugara pedig az alábbi módon adható meg:

$$R_a = \frac{T}{s-a} = \frac{6}{6-3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$R_b = \frac{T}{s-b} = \frac{6}{6-4} = \frac{6}{2} = 3$$

$$R_c = \frac{T}{s-c} = \frac{6}{6-5} = \frac{6}{1} = 6$$

Ezzel megkaptuk a négy kör sugarát.

## 2.4. Harmadik feladat, feladatsor és megoldások

A harmadik feladatnak a KöMaL 2019. márciusi kiadásának B. 5018. feladatát választottam, ami így szól:

**B. 5018.** A szultán birodalmának mind az 1024 matematikusát börtönbe záratta. Mindegyikük csak a saját réztalléros érméjét tarthatta meg. A matematikusok tudják, hányan vannak, de semmiféle módon nem képesek kommunikálni egymással.

A szultán a születésnapján nagy kegyesen a következő játékot ajánlotta a matematikusoknak: az udvaron egyenként vagy 0-t, vagy 1-et mondanak. Ha a mondott számok összege 1, akkor szabadon bocsátja őket.

(A matematikusok nem adhatnak jelet egymásnak, nem tudják, hogy őket hányadiknak vitték ki, vagy hogy az előttük az udvaron lévők mit csináltak.)

Mekkora eséllyel szabadulhatnak ki a matematikusok?

A feladathoz tartozó feladatsor és megoldásai:

**1.** Egy szabályos dobókockát 6-szor dobunk fel. Mekkora eséllyel dobunk

*a)* pontosan 0 darab 6-ost?

**Megoldás:** Annak a valószínűsége, hogy egy dobás esetén nem dobunk 6-ost $p = \frac{5}{6}$. Mivel a dobások függetlenek, ezért összeszorozhatjuk a hat nem 6-os dobásnak a valószínűségeit.

Tehát $P(0) = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0,3349$

*b)* pontosan 1 darab 6-ost?

**Megoldás:** Annak a valószínűsége, hogy egy dobás esetén nem dobunk 6-ost $p = \frac{5}{6}$. Annak a valószínűsége, hogy 6-ost dobunk, $p = \frac{1}{6}$. Mivel a dobások függetlenek, ezért összeszorozhatjuk az 5 darab nem 6-os dobásnak a valószínűségeit.

A megoldás nem $\left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \frac{1}{6}$. Számításba kell venni azt is hogy melyik dobás lesz a 6-os dobása. A 6-os dobás 6 helyen is történhet, emiatt szorozzuk be a valószínűséget 6-tal.

Tehát a keresett valószínűség $P(1) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \frac{1}{6} \cdot 6 \approx 0,4019$.

*c)* legfeljebb 2 darab 6-ost?

**Megoldás:** Ahhoz megkapjuk, hogy mennyi a valószínűsége, össze kell adni annak a valószínűségét, hogy pontosan 0;1 vagy 2 darabot dobunk.

Használjuk a binomiális eloszlást a pontosan két 6-os dobás esetére! A hatosdobás valószínűsége $p = \frac{1}{6}$, a dobások száma $n = 6$, a 6-os dobások száma $k = 2$. Ezek alapján a pontosan két 6-os dobásának valószínűsége:

$$P(2) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,2009$$

Tehát a legfeljebb 2 darab 6-os dobásának valószínűsége:

$$P(X \leq 2) = 0,3349 + 0,4019 + 0,2009 = 0,9377$$

**2.** Egy szabályos érmét egymás után 10-szer feldobunk. Jocó azt mondja, hogy 0,5 annak a valószínűsége, hogy a fejek és az írások száma ugyanannyi lesz a dobássorozat végére. Azért gondolja így, mert a dobássorozat eredménye kétféle lehet ebből a szempontból: vagy egyenlő a fejek és írások száma, vagy nem. Számítással igazold, hogy hibás Jocó érvelése!

**Első megoldás:** A feldobások utáni fejek száma binomiális eloszlást követ. Emiatt alkalmazhatjuk a modellt az 5 darab fej esetére. Ebben az esetben $n = 10$ dobásból $k = 5$ fej fog esni, $p = \frac{1}{2}$ valószínűséggel. A valószínűség értéke:

$$P(5) = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \approx 0,2461$$

Tehát a valószínűsége az egyenlő számú fej és írás dobásoknak $0,2461$, nem pedig $0,5$.

**Második megoldás:** Az első, második, harmadik... dobás esetén két lehetőségünk van, fej vagy írás. Mivel ezek függetlenek ezért az összes eseménysor száma $2^{10}$.

Számunkra csak akkor helyes egy eseménysor, ha 5 darab fej és 5 darab írás van. Ha kiválasztjuk az 5 darab fej helyét, akkor az az írások helyét egyértelműen meghatározza. Ezt pontosan $\binom{10}{5}$-féleképpen lehet megtenni. Ekkor az egyenlő fej és írás számú dobás valószínűsége:

$$p = \frac{\binom{10}{5}}{2^{10}} \approx 0,2461$$

Tehát a valószínűsége az egyenlő számú fej és írás dobásoknak $0,2461$, nem pedig $0,5$.

**3.** Egy téglalap alakú kertet 100 méter hosszú kerítéssel szeretnénk körbekeríteni.

*a)* Mekkorának válasszuk a téglalap oldalait, hogy területe a legnagyobb legyen?

**Megoldás:** Legyenek a téglalap oldalainak hossza $a$ és $b$, ekkor a kerület $K = 2a + 2b = 100$, vagyis $a + b = 50$. A téglalap területe: $T = ab$

Használjuk a szélsőérték meghatározásához a számtani és mértani közepek közötti összefüggést! Írjuk fel $a$-ra és $b$-re az egyenlőtlenséget!

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$T \leq \left(\frac{50}{2}\right)^2 = 25^2 = 625$$

Egyenlőség akkor van, ha két tag egyenlő egymással, azaz $a = b = 25m$.

Tehát, a maximális terület, amit az adatok alapján létrehozhatunk $T = 625$ $\text{m}^2$-es.

*b)* Ha a téglalap egyik oldala egyenes vízpart, ahová nem kell kerítés, akkor mekkorának válasszuk az oldalakat ahhoz, hogy a terület a maximális legyen?

**Megoldás:** Legyen a folyópartra merőleges oldal $x$. Mivel két ilyen oldala van és a folyóval párhuzamos pedig csak egy, ezért a másik oldal hossza $100 - 2x$.

Ekkor a területe a téglalapnak a területe: $T = x \cdot (100 - 2x)$. Keressük meg a szorzat maximumát!

Használjuk a számtani és mértani közepek közötti összefüggést! A két tag legyen $(100-2x)$ és $2x$. Erre az átalakításra azért van szüksége, mert a másik tagban is $2x$ van, emiatt nem lehetett volna egyszerűsíteni vele az átalakításon kívül.

$$\sqrt{(100-2x)\cdot 2x} \leq \frac{100-2x+2x}{2} = \frac{100}{2} = 50$$
$$(100-2x)\cdot 2x \leq 50^2 = 2500$$

Osszuk le 2-vel mindkét oldalt:

$$(100-2x)\cdot x = \frac{(100-2x)\cdot 2x}{2} \leq \frac{2500}{2} = 1250$$

Tehát a terület maximuma $T = 1250m^2$. Ez akkor történik meg, ha $100-2x = 2x$, azaz $100 = 4x$, tehát az egyik oldal 25 m, a másik oldal 50 m.

**4.** A szultán birodalmának mind az 1024 matematikusát börtönbe záratta. Mindegyikük csak a saját réztalléros érméjét tarthatta meg. A matematikusok tudják, hányan vannak, de semmiféle módon nem képesek kommunikálni egymással.

A szultán a születésnapján nagy kegyesen a következő játékot ajánlotta a matematikusoknak: az udvaron egyenként vagy 0-t, vagy 1-et mondanak. Ha a mondott számok összege 1, akkor szabadon bocsátja őket.

(A matematikusok nem adhatnak jelet egymásnak, nem tudják, hogy őket hányadiknak vitték ki, vagy hogy az előttük az udvaron lévők mit csináltak.)

Mekkora eséllyel szabadulhatnak ki a matematikusok?

**Megoldás:** Legyen a matematikusok száma $n$, ahol is $n \geq 1$ és $n \in \mathbb{N}$. Annak a valószínűséget szeretném meghatározni, hogy mekkora eséllyel fog egy matematikus mondani 1-et és a további $n-1$ matematikus pedig 0-át, ami a kiszabadulásuk egyetlen esélye.

Tegyük fel, hogy minden matematikus $p$ valószínűséggel mond 1-et. Célunk az, hogy ezt a $p$ valószínűséget megtaláljuk, hiszen ekkor tudják a matematikusok optimalizálni a stratégiájukat. Ebben az esetben a matematikusok természetesen $1-p$ valószínűséggel mondanak 0-át. Ebben az eset binomiális eloszlást használhatunk a valószínűségre:

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)}$$

Számunkra a $k = 1$ eset az érdekes, miszerint 1 darab 1-est mondanak ki a tudósok, $p$ valószínűséggel.

$$P(1) = \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{(n-1)}$$

$$P(1) = np(1-p)^{n-1}$$

Ahhoz, hogy a tudósoknak a lehető legnagyobb esélye lehessen, szeretnénk maximalizálni a $P(1)$ és ezzel a $p$ értékét is. Mivel szélsőértéket keresünk ezért alkalmazhatjuk a számtani és mértani közepek közötti összefüggést a valószínűségre.

Ahhoz viszont, hogy $p$-től független értéket kapjunk, szükségünk van egy átalakításra:

$$P(1) = np(1-p)^{n-1} = \frac{n}{n-1}(n-1)p(1-p)^{n-1}$$

Ekkor felírhatjuk a mértani és a számtani közepek közötti összefüggést melynek tagjai az $(n-1)p$ és $n-1$ darab $(1-p)$:

$$M((n-1)p;(1-p);\ldots;(1-p)) \le S((n-1)p;(1-p)\ldots;(1-p))$$
$$\sqrt[n]{(n-1)p\cdot(1-p)\cdot_{\ldots}\cdot(1-p)} \le \frac{(n-1)p+(n-1)(1-p)}{n}$$
$$(n-1)p\cdot(1-p)\cdot_{\ldots}\cdot(1-p) \le \left(\frac{(n-1)p+(n-1)(1-p)}{n}\right)^n$$

Vonjuk össze mindkét oldalon a tagokat:

$$(n-1)p(1-p)^{n-1} \le \left(\frac{np-p+n-np-1+p}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

Ahhoz, hogy a bal oldalon a $P(1)$ szerepeljen, használjuk fel a korábbi átalakítást, és szorozzuk fel az egyenlőtlenség mindkét oldalát $\frac{n}{n-1}$-gyel:

$$P(1) = \frac{n}{n-1}\cdot(n-1)p(1-p)^{n-1} \le \frac{n}{n-1}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

$$P(1) \le \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$$

Tehát megkaptuk, hogy a kijutási valószínűség maximuma bármely $n$ esetén $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$. 1024 matematikus esetében, azaz $n = 1024$ esetén a kijutási valószínűség maximuma:

$$\left(\frac{1023}{1024}\right)^{1023} \approx 0,3681$$

Felmerülhet a kérdés, hogy milyen stratégia mellett tudják ezt a valószínűséget elérni. A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség akkor lesz egyenlő, ha a tagok mind egyenlőek, azaz:

$$(n-1)p = 1-p$$

$$np - p = 1 - p$$

$$np = 1$$

$$p = \frac{1}{n}$$

1024 matematikus esetén $p = \frac{1}{1024}$, tehát egy olyan stratégiát kell választaniuk melynek esetén $\frac{1}{1024}$ valószínűséggel mondanak 1-est. Mivel $\frac{1}{1024} = \frac{1}{2^{10}}$, ezért az mond 1-est, aki a náluk található pénzérmét 10-szer feldobva fejet kap, mivel ennek valószínűsége pontosan $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$. Ezzel a stratégiával tudják maximalizálni az esélyüket, elérve ideális kijutási valószínűséget.

## 2.5. Negyedik feladat, feladatsor és megoldások

A negyedik feladatot az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2016/17-es tanévben megrendezett versenyéből választottam. Az alábbi feladat a II. kategóriás versenyzők 1. fordulójának negyedik feladata volt, ami így szól:

4.Oldjuk meg a következő egyenletet az egész számok halmazán:

$$x \cdot (x+2) = y^2 \cdot (y^2+1)$$

A negyedik feladathoz készült feladatsor és megoldásai:

**1.** *a)* Alakítsuk teljes négyzetté a következő kifejezést: $x^2+6x+15$!

**Megoldás:** Használjuk fel, hogy $15 = 9+6$! Ekkor a kifejezés:

$$x^2+6x+15 = x^2+6x+9+6 = (x+3)^2+6$$

*b)* Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$x^2+6x+8 = 99$$

**Megoldás:** Adjuk hozzá mindkét oldalhoz 1-et!

$$x^2+6x+9 = 100$$

$$(x+3)^2 = 100$$

Vonjuk gyököt mindkét oldalból!

$$|x+3| = 10$$

Ekkor két megoldása van az egyenletnek:

$$x_1 + 3 = 10$$

$$x_1 = 7$$

$$x_2 + 3 = -10$$

$$x_2 = -13$$

Tehát az egyenlet két megoldása $x_1 = 7$ és $x_2 = -13$.

**2.** Mikor lesz egyenlő két valós szám négyzetösszege, a két szám szorzatának kétszeresével?

**Megoldás:** Legyen a két számunk $x$ és $y$. Ekkor a feltételeknek megfelelő egyenlet az alábbi:

$$x^2 + y^2 = 2xy$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 0$$

$$(x-y)^2 = 0$$

$$x = y$$

Tehát ez akkor igaz, ha a két szám egyenlő.

**3.** Oldjuk meg a következő egyenletet a természetes számok halmazán!

$$x + \frac{1}{x} = y$$

**Első megoldás:** Ha $x = 1$, akkor $y = 1 + \frac{1}{1} = 2$. Ha $x > 1$, akkor $\frac{1}{x}$ értéke minden esetben törtszám, hiszen ha egy tört számlálója és nevezője is negatív, illetve a nevező nagyobb mint a számláló, akkor a kifejezés értéke 0 és 1 között van.

Emiatt az egyetlen megoldáspár az $(x;y) = (1;2)$

**Második megoldás:** Hozzunk közös nevezőre! ($x \neq 0$):

$$\frac{x^2+1}{x} = y$$

Becsüljük meg alulról a tört értékét! Mivel $x^2 < x^2 + 1$, ezért

$$x = \frac{x^2}{x} < \frac{x^2+1}{x}$$

Becsüljük meg felülről is a törtet! $x^2+1 \leq x^2+x$, feltéve, ha $x \geq 1$ ($x=1$ esetén van egyenlőség). Ekkor a tört értékére való becslés:

$$\frac{x^2+1}{x} \leq \frac{x^2+x}{x} = \frac{x(x+1)}{x} = x+1$$

Mivel $\frac{x^2+1}{x} = y$, ezért felírhatjuk az alábbi egyenlőtlenséget:

$$x < y \leq x+1$$

$x$ és $y$ is természetes szám. Az egyenlőtlenség viszont azt mutatja, hogy két szomszédos természetes szám között van egy másik, $y$. Ez nem lehetséges, egy kivétellel, ha teljesül az egyenlőség része az egyenlőtlenségnek. Azaz $y = x+1$. Ez $x = 1$ esetén igaz, tehát ekkor $y = 1+1 = 2$. Így az egyetlen megoldáspár $(x;y) = (1;2)$.

**4.** Oldjuk meg a következő egyenletet az egész számok halmazán:

$$x \cdot (x+2) = y^2 \cdot (y^2+1)$$

**Megoldás:** Végezzük el mindkét oldalon a zárójelfelbontást:

$$x^2+2x = y^4+y^2$$

Mivel a bal oldalon lévő kifejezés már majdnem teljes négyzet, emiatt adjunk hozzá mindkét oldalhoz 1-et!

$$x^2+2x+1 = y^4+y^2+1$$

$$(x+1)^2 = y^4+y^2+1$$

A megoldáshoz érdemes azt a feladatban lévő adatot felhasználni, hogy a kérdéses változók egész számok. Próbáljuk meg megbecsülni az $(x+1)^2$ értékét $y$ segítségével! Ebben az esetben a bal oldalt alulról becsülhetjük $y^4$ -nel. Ezt azért tehetjük, mivel $(x+1)^2$ pontosan $y^2+1$-gyel nagyobb, mint $y^4$. Tehát:

$$y^4 < (x+1)^2$$

Hasonlóan:

$$(x+1)^2 \leq (y^2+1)^2 = y^4+2y^2+1$$

Ez az egyenlőtlenség is igaz, mivel a kifejezés pontosan $y^2$-tel több, mint $y^4+y^2+1$. Az egyenlőségjel szükséges, mivel $y=0$ esetén $(y^2+1)^2 = y^4+y^2+1 = 1$. Ezek alapján felírhatjuk a következő egyenlőtlenséget.

$$y^4 = (y^2)^2 < (x+1)^2 \leq (y^2+1)^2$$

Mivel $x$ és $y$ egész számok, ezért ez az egyenlőtlenség valójában azt jelenti, hogy két egész szomszédos szám négyzete között ($y^2$ és $(y+1)^2$ között) van még egy másik négyzetszám, viszont ez nem lehetséges. Tehát ez a feladat csak akkor oldható meg, ha az egyenlőség érvényesül, azaz $(x+1)^2$ is négyzetszám: $y^4+y^2+1=(y^2+1)^2$, azaz $y=0$ esetén.

Ha $y=0$, akkor $x(x+2)=0$, ez két megoldást eredményez $x$-re: $x_1=0$ és $x_2=-2$.

Tehát a két megoldás $x$-re és $y$-ra: $(0;0)$ és $(-2;0)$

## 2.6. Ötödik feladat, feladatsor és megolsáok

Az ötödik feladatot az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2018/19-es tanévben megrendezett versenyéből választottam. Az alábbi feladat az I. kategóriás versenyzők döntő fordulójának második feladata volt, ami így szól:

2. Adja meg az $x$; $y$ valós számokat úgy, hogy a

$$\sqrt{x^2+y^2-2x-4x+5}+\sqrt{x^2+y^2-4x+2y+5}$$

kifejezés értéke minimális legyen.

Az ötödik feladathoz tartozó feladatsor, megoldásokkal:

**1.** Határozzuk meg az egyenletével megadott kör középpontjának koordinátáit, valamint sugarát: $x^2+y^2-4x+8y-16=0$

**Megoldás:** Rendezzük egymás mellé az azonos ismeretlennel rendelkező tagokat, majd alakítsunk teljes négyzetté:

$$x^2-4x+y^2+8y-16=0$$

$$(x-2)^2-4+(y+4)^2-16-16=0$$

$$(x-2)^2+(y+4)^2=36$$

Ebből leolvasható, hogy a kör középpontja $O(2;-4)$ és sugara $r=6$.

**2.** Egy háromszög két oldala $4,2$ cm és $3,7$ cm. A harmadik oldal mértéke egész szám cm-ben kifejezve. Mekkora lehet a 3. oldal?

**Megoldás:** A háromszög egyenlőtlenséget kell használni. Egy háromszög bármely két oldalhosszának összege nagyobb a harmadik oldal hosszánál.

Ezt úgy is át lehet fordítani, hogy a legnagyobb oldalhossz nagysága nagyobb, mint a két kisebbé. Tegyük fel, hogy a $4,2$ cm-es a legnagyobb. Ekkor, ha a legkisebb oldal 1 cm, akkor is teljesül a háromszög egyenlőtlenség, hiszen $3,7+1=4,7>4,2$. Tehát lehet ezen felül még 2; 3 és 4 cm-es is a háromszög oldala.

Tegyük fel, hogy most a leghosszabb oldal az ismeretlen oldal. Legyen ez az ismeretlen oldal $c$. Ekkor $c$-re igaznak kell lennie az alábbi egyenlőtlenségnek: $3,7+4,2=7,9>c$. Tehát lehet még 5; 6 és 7 cm-es is $c$ hosszúsága. 8 cm-es nem lehet, mert akkor nem teljesülne az egyenlőtlenség.

A megoldásokat összegezve tehát a háromszög ismeretlen oldalhosszúsága lehet 1; 2; 3; 4; 5; 6 és 7 cm lehet.

**3.** Lássuk be, hogy az alábbi esetben $P$ pont illeszkedik az $AB$ szakaszra. A pontok koordinátái: $A(-3;2)$, $B(13;-10)$ és $P(1;-1)$.

**Megoldás:** Először is meg kell határozni az $AB$ egyenes irányvektorát. Ekkor ez $\vec{v}(16;-12)$. Határozzuk meg az egyenes egy normálvektorát, ez $\vec{n}(12;16)$. Egyszerűsítsünk, hiszen a hossza nem számít, csak az iránya. Egy egyszerűbb normálvektor a $\vec{n}(3;4)$. Az egyenes egyik fixpontja az $A$ pont. Így az egyenes normálvektoros egyenlete:

$$3x+4y=3\cdot(-3)+4\cdot 2$$

$$3x+4y=-1$$

Egyrészt ellenőriznünk kell, hogy a pont rajta van-e az egyenesen. Ezt úgy tudjuk megtenni, hogy a $P$ pont megfelelő koordinátáit behelyettesítjük az egyenes egyenletébe, és igaz egyenlőséget kapunk.

$$3\cdot(-1)+4\cdot 1=-3+4=-1$$

Tehát a $P$ pont rajta van az $AB$ egyenesén. Viszont ez nem elég, azt is biztosítani kell, hogy a szakaszon is rajta legyen. Ezt úgy tudjuk megtenni, hogy megvizsgáljuk az $A$ és $B$ pont koordinátái közé esnek $P$ pont koordinátái. Ez teljesül, hiszen $-3\leq 1\leq 13$ és $-10\leq -1\leq 2$.

**4.** Adja meg az $x$; $y$ valós számokat úgy, hogy a

$$\sqrt{x^2+y^2-2x-4x+5}+\sqrt{x^2+y^2-4x+2y+5}$$

kifejezés értéke minimális legyen.

**Megoldás:** Alakítsuk teljes négyzetté a négyzetgyökjel alatti kifejezéseket:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$$

Vegyünk a koordinátarendszerben egy adott $P(x;y)$ pontot. Ekkor az első négyzetgyökjel alatti kifejezés pontosan a $P$ pont és $A(1;2)$ távolságát adja meg.

$$|PA| = \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$$

A második négyzetgyökjel alatti kifejezés, pedig a $P$ pont és a $B(2;-1)$ pont távolságát adja meg:

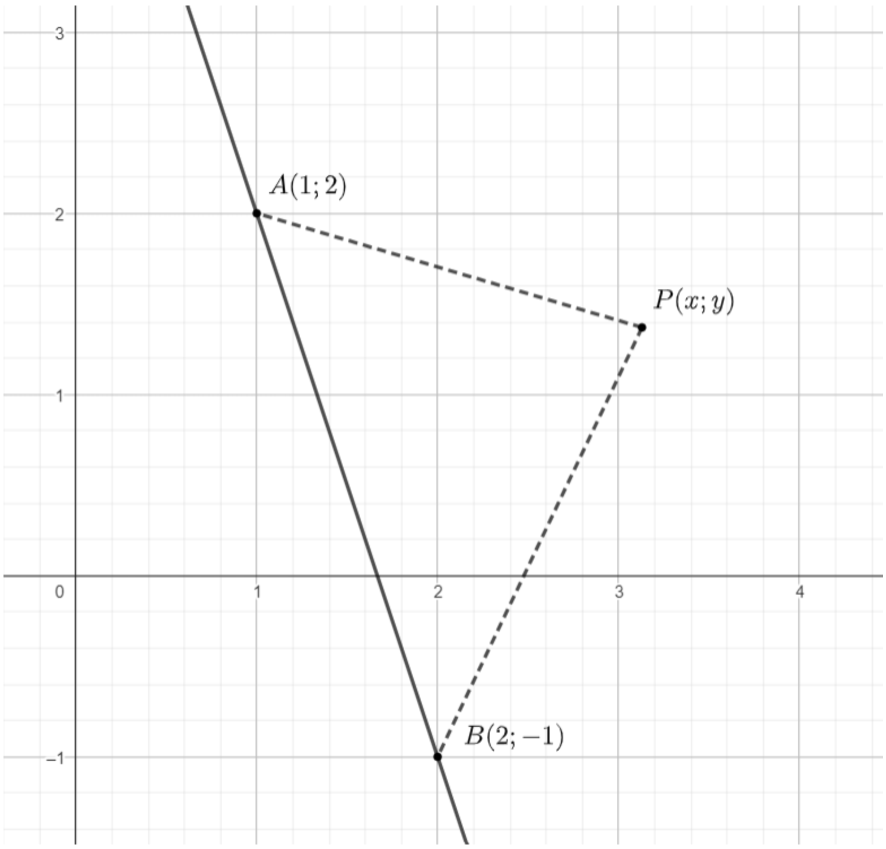
$$|PB| = \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$$

Ezáltal a feladat a $|PA|+|PB|$ távolság minimumának megkeresésére módosul.

$|PA|+|PB|$ távolság akkor lesz minimális, hogyha $P$ az $AB$ szakaszon van. Ez könnyen belátható, hiszen hogyha $P$ nem lenne rajta az egyenesen, akkor $P$, $A$ és $B$, háromszöget alkotnának. Ekkor felhasználható a háromszög-egyenlőtlenség, az alábbi módon:

$$|PA|+|PB| > |AB|$$

Tehát bármely olyan $P$ esetén, ami nincs rajta a szakaszon $|PA|+|PB|$ nagyobb lesz mint $|AB|$, viszont, ha $P$ rajta van az egyenesen, akkor $|PA|+|PB| = |AB|$. Tehát tényleg ebben az eseteben lesz a legkisebb az értéke és ez az érték pontosan $|AB|$-vel egyenlő.

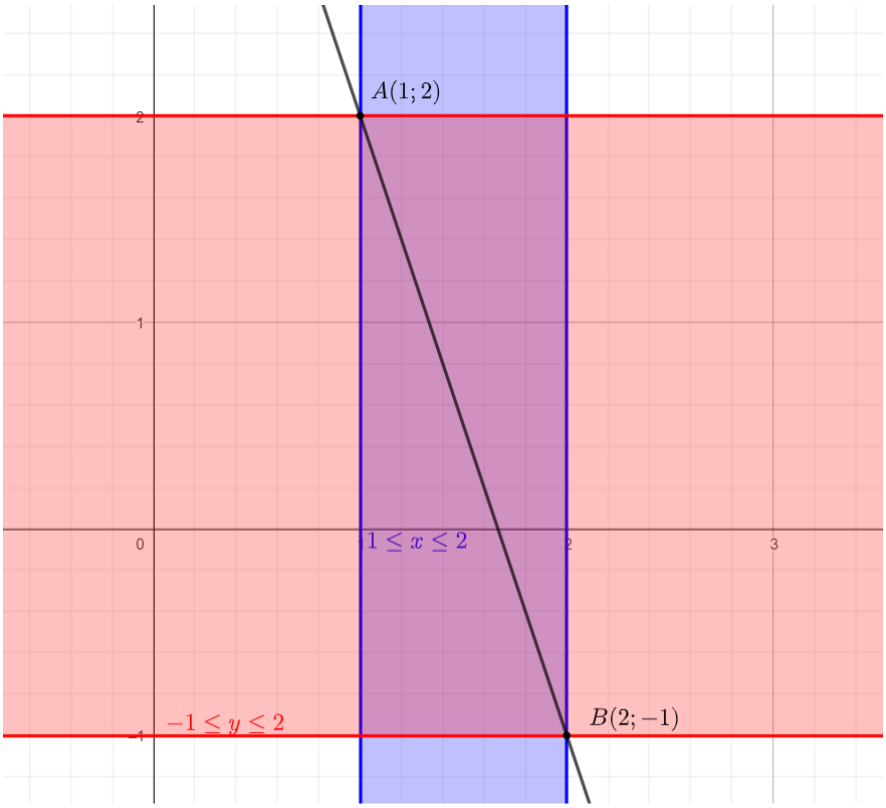



3. ábra. A pontok elhelyezkedése a koordinátarendszerben

Ahhoz, hogy megadjuk a $P$ pontra vonatkozó feltételeket, határozzuk meg az $AB$ egyenes egyenletét. Az egyenes egy irányvektora $v(1;-3)$, emiatt egy normálvektora $n(3;1)$. Az egyenes egyenlete, így:

$$3x+y=3\cdot1+1\cdot2=5$$

Milyen feltételek mellett lesz a $P$ pont csak az $AB$ szakaszon? Akkor, ha $P$ pont koordinátái $A$ és $B$ pont koordinátái között vannak, emellett a $P$ pont koordinátái kiegészítik az egyenes egyenletét. Azaz akkor lesz minimális az értéke a kifejezésnek, ha $1\leq x\leq 2$ és $-1\leq y\leq 2$ és $3x+y=5$. Ez a 4. ábrán, a fekete egyenes, a kék és piros területek metszetében található.




4. ábra. $P$ pont lehetséges helye a minimális érték feltételei mellett

Vegyünk egy ilyen tetszőleges pontot, amely teljesíti a feltételeket. Legyen $P(1;2)$, ekkor a kifejezés minimális értéke:

$$\sqrt{(1-1)^2+(2-2)^2}+\sqrt{(1-2)^2+(3+1)^2}=\sqrt{0}+\sqrt{10}=\sqrt{10}$$

## 2.7. Hatodik feladat, feladatsor és megoldások

A hatodik feladatnak az Arany Dániel Matematika Tanulóversenyből választottam, a 2015-16-os verseny haladók II. kategóriájának 3. fordulójának 2. feladatát választottam, ami így szól:

2. Adjuk meg azt a négy valós számot, melyekre igaz, hogy bármelyikhez hozzáadva a másik három szorzatát, eredményül mindig 10-et kapunk!

A hatodik feladat és a hozzá tartozó feladatsor és megoldásai:

**1.** Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket! Tegyük fel, hogy $x \neq 1$!

*a)* $\dfrac{5x-5}{x-1}$

**Megoldás:** Emeljünk ki 5-öt a számlálóból, majd egyszerűsítsünk!

$$\frac{5x-5}{x-1} = \frac{5(x-1)}{x-1} = 5$$

*b)* $\dfrac{x^2-1}{x-1}$

**Megoldás:** Használjuk fel a nevezetes azonosságot, majd egyszerűsítsünk $x-1$-gyel!

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$

*c)* $\dfrac{x^3-1}{x-1}$

**Megoldás:** Használjuk az $x^3-1$ esetén fellépő azonosságot. Ez az azonosság így szól: $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$. Ezután egyszerűsítsünk $x-1$-gyel.

$$\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = x^2+x+1$$

**2.** Milyen $a$ és $b$ számok esetén igaz az alábbi egyenlőség?

$$\frac{a^2-b^2}{2a-2b} = 1$$

**Megoldás:** Vizsgáljuk meg azt az eshetőséget mikor a nevező 0-val egyenlő. Ebben az esetben $2a-2b=0$. Tehát, ebben az esetben $a=b$.

Használjuk fel a nevezetes azonosságot a számlálóban és alakítsuk szorzattá. A nevezőből emeljünk ki kettőt.

$$\frac{a^2-b^2}{2a-2b} = \frac{(a-b)(a+b)}{2(a-b)} = 1$$

Mivel kikötttük, hogy $a \neq b$, emiatt egyszerűsíthetünk $a-b$-vel.

$$\frac{a+b}{2} = 1$$

$$a+b = 2$$

Tehát olyan $a$ és $b$ számokra igaz a kifejezés melyekre igaz, hogy összegük 2.

**3.** Feldobunk egy szabályos érmét ötször egymás után.

*a)* Hányfajta különböző sorrendű érmedobás jöhet létre?

**Megoldás:** Elsőnek fejet vagy írást dobhatunk, ez két eset. Másodiknak szintén fejet vagy írást dobhatunk, ez is két eset. Mivel ez a két dobás független, ezért a lehetőségek összesorzódnak. Mivel az érmét ötször dobjuk fel, ezért összesen $2^5 = 32$ sorrend jöhet létre.

*b)* Ha a sorrendje nem számít az érméknek, hányfajta dobássorozatot különböztethetünk meg?

**Megoldás:** Vizsgáljuk meg a fejek számának tekintetéből. A fejek száma 0-tól 5-ig terjedhet. A fejek szám egyértelműen meghatározza az írások számát is, tehát ebben az esetben a dobássorozatok száma 6.

*c)* Ha csak a különböző oldalak számát szeretnénk meghatározni, ebben az esetben hány fajta dobássorozat jöhet létre?

**Megoldás:** Mivel már nem különböztetjük meg a fejeket és az írásokat, emiatt vizsgáljuk meg az eseteket esetszétbontással. Az első esetben mind az 5-ször ugyanarra az oldalára esett az érme. A második esetben 4-szer azonos oldalára esik és egyszer a másik oldalára. A harmadik esetben pedig egyik odalára 3-szor, a másik oldalára 2-szer esik. Ezen felül nincs több eset, tehát összesen 3-féle ilyen dobássorozat van.

**4.** Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket!

*a)* $\begin{cases} x^2 + 5y = 10 \\ x^2 - 3y = 2 \end{cases}$

**Megoldás:** Vonjuk ki az első egyenletből a másodikat!

$$8y = 8$$

$$y = 1$$

Helyettesítsük vissza $y$ értékét az első egyenletbe!

$$x^2 + 5 \cdot 1 = 10$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \pm\sqrt{5}$$

Tehát a két megoldáspárunk: $(-\sqrt{5};1)$ és $(\sqrt{5};1)$.

*b)* $\begin{cases} x + x^2y = -7 \\ x + xy = 5 \end{cases}$

**Megoldás:** Szorozzuk fel a második egyenletet $x$-szel!

$$\begin{cases} x + x^2y = -7 \\ x^2 + x^2y = 5x \end{cases}$$

Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt!

$$x^2 - x = 5x + 7$$

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa:

$$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 36 + 28 = 64$$

A másodfokú egyenlet megoldása:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{64}}{2} = 3 \pm 4$$

$$x_1 = 7$$

$$x_2 = -1$$

Visszahelyettesítve az egyenletbe a gyököket megkapjuk $y$ értékeit is. $x_1 = 7$ esetén:

$$7 + 7y = 5$$

$$7y = -2$$

$$y_1 = -\frac{2}{7}$$

$x_2 = -1$ esetén:

$$-1 - y = 5$$

$$-y = 6$$

$$y_2 = -6$$

Tehát az egyenletrendszernek a két megoldáspárja a $\left(7;-\frac{2}{7}\right)$ és a $(-1;-6)$.

**5.** Adjuk meg azt a négy valós számot, melyekre igaz, hogy bármelyikhez hozzáadva a másik három szorzatát, eredményül mindig 10-et kapunk!

**Megoldás:** Legyen a négy számunk $a$, $b$, $c$ és $d$. Ekkor $a$-ra és $b$-re felírható:

$$a+bcd=10$$

$$b+acd=10$$

Szorozzuk fel az első egyenletet $a$-val, a második egyenletet $b$-vel:

$$a^2+abcd=10a$$

$$b^2+abcd=10b$$

Vonjuk ki az első egyenletből a másodikat és alakítsuk át, a kapott egyenletet az alábbi módon:

$$a^2-b^2=10a-10b$$

$$a^2-b^2-10a+10b=0$$

$$(a-b)(a+b)-10(a-b)=0$$

$$(a-b)(a+b-10)=0$$

Egy szorzat értéke akkor nulla, ha bármely tagja a szorzatnak nulla. Tehát vagy $a-b=0$ vagy $a+b-10=0$. Ez azt jelenti, hogy vagy $a=b$ vagy $b=10-a$. Mivel a másik két változóval is felírhatnánk ezeket az egyenleteket, ezért minden változó vagy $a$-val vagy $10-a$-val egyenlő. Kihasználva az egyenletek szimmetrikusságát, három eset léphet fel:

*a)* Mind a négy szám egyenlő, azaz $a=b=c=d$.

*b)* Három szám egyenlő és a negyedik különböző. Például $a=c=d$ és $b=10-a$.

*c)* Két-két szám egyenlő. Például $a=c$ és $b=d=10-a$.

Az egyes esetek megoldásai:

*a)* Ebben az esetben $a=b=c=d$. Ekkor az egyenlet az alábbi módon írható fel: $a\cdot a\cdot a+a=10$. Rendezve 0-ra az alábbi egyenletet kapjuk $a^3+a-10=0$. Ez egy harmadfokú egyenlet, a megoldásához egy átalakításra van szükségünk:

$$a^3-8+a-2=(a-2)(a^2+2a+4)+a-2=0$$

$$(a-2)(a^2+2a+4+1)=(a-2)(a^2+2a+5)=0$$

Egy szorzat értéke nulla, ha bármely tagja nulla. Tehát vagy $a-2$ vagy $a^2+2a+5=0$

Ha $a-2=0$, akkor $a=2$.

Ha $a^2+2a+5=0$, akkor a másodfokú egyenlet diszkriminánsa:

$$D = 2^2 - 4\cdot 1\cdot 5 = 4-20 = -16$$

Tehát mivel a másodfokú egyenlet diszkriminánsa negatív, emiatt ebben az esetben az egyetlen valós megoldása az egyenletnek az $a=b=c=d=2$.

*b)* Ebben az esetben három szám egyenlő $a=c=d$ és $b=10-a$. Ebben az esetben a négy egyenlet kétféle alakot ölthet:

$$a^2b+a=10$$

$$a^3+b=10$$

Vonjuk ki az első egyenletből a másodikat és alakítsuk szorzattá:

$$a^2b+a-a^3-b=0$$

$$a^2b-a^3+a-b=0$$

$$a^2(b-a)-(b-a)=0$$

$$(a^2-1)(b-a)=0$$

Egy szorzat akkor lehet nulla, ha bármely tagja nulla. Tehát vagy $a^2-1=0$ vagy $b-a=0$.

Ha $a^2-1=0$, akkor $a^2=1$, ami azt jelenti, hogy $a_1=c_1=d_1=1$ és $a_2=c_2=d_2=-1$. Ha $a_1=1$, akkor $b_1=10-1=9$. Ha $a_2=-1$, akkor $b_2=10-(-1)=11$. Tehát ebben az esetben két megoldásunk van: három szám 1 és a negyedik 9, vagy három szám -1 és a negyedik 11. Ezek megegyeznek a feltételeknek.

Ha $b-a=0$, akkor $b=a$, de ez ellentmond annak a feltételnek mely szerint $a$ és $b$ különböző. Tehát ebből az egyenletből nem kapunk újabb megoldást.

*c)* Ebben az esetben két számpárunk van, amelyek egyenlőek, $a=c$ és $b=d=10-a$. Ekkor az egyenletek kétféle alakot ölthetnek:

$$a^2b+b=10$$

$$ab^2+a=10$$

Kivonva az első egyenletből a másodikat, alakítsuk szorzattá:

$$a^2b - ab^2 + b - a = 0$$

$$ab(a-b) - (a-b) = 0$$

$$(ab-1)(a-b) = 0$$

Egy szorzat értéke nulla, ha bármely tagja nulla. Ebben az esetben vagy $ab - 1 = 0$ vagy $a - b = 0$.

Ha $ab - 1 = 0$, akkor $ab = 1$. Felhasználva emellé a $b = 10 - a$ egyenletet, az alábbi egyenletrendszert kapjuk: $\{ab = 1; b = 10 - a$ Behelyettesítve a $b$-t az első egyenletbe az alábbi egyenletet kapjuk:

$$a(10-a) = 1$$

$$10a - a^2 = 1$$

$$a^2 - 10a + 1 = 0$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa: $D = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 100 - 4 = 96$. Ekkor az egyenlet két megoldása:

$$a_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{96}}{2} = 5 \pm \sqrt{24}$$

Ekkor ha $a = 5 + \sqrt{24}$, akkor $b = 5 - \sqrt{24}$, ha pedig $a = 5 - \sqrt{24}$, akkor $b = 5 + \sqrt{24}$. Tehát eredményül azt kaptuk, hogy jó megoldás, ha két szám $5 + \sqrt{24}$-gyel egyenlő, a két másik szám pedig $5 - \sqrt{24}$-gyel egyenlő.

Ha $a - b = 0$, akkor $a = b$, ami ellentmond a feltételnek, miszerint $a$ és $b$ különbözőek. Tehát ebből az egyenletből nem kapunk további megoldást.

Összegezve akkor lesz három szám szorzatának és a negyedik szám összege 10 bármely estben, ha:

*a)* Mind a négy szám 2-vel egyenlő.

*b)* Három szám 1-gyel egyenlő és a negyedik 9 lesz, vagy három közülük -1 és a negyedik hozzá a 11.

*c)* Ha két szám közülük $5 + \sqrt{24}$ és a másik kettő $5 - \sqrt{24}$.

# 3. Módszertani elemzés

## 3.1. Nehézségek a feladatokban

### A feladatok logikai összetettsége

Az első probléma amit kiemelnék, a feladatok összetettsége. Összetettebb feladatok esetén a diákok számára nehézséget okozhat a hosszabb logikai folymatok megtervezése és megvalósítása. A tervezés során már többször előjöhetnek olyan problémák ,melynek során a diákok eljutnak, egy-egy feladatrészig, de az adott feladatrészen túl nem tudnak továbbjutni. Ezek az akadályok előfordulhatnak olyan módon, hogy a feladat teljes megoldását hiúsítja meg, de vannak olyan esetek is, mikor csak részmegoldásoktól zárja el a probléma a megoldóját.

Egy a teljes megoldást megakadályozó probléma lehet, példaként az első feladatnál felmerülő oszthatósági szabályok rendszerezésének sokasága. Ebben az esetben a diákok hirtelen túlterhelődhetnek információval, emiatt nehezebbé válik az adatok rendszerezése, és emiatt könnyen érdektelenné válhat számukra a feladat. Kiemelendő probléma még annak a felismerése, hogy mikor találhatunk egy állítást biztosan igaznak. Itt a kiindulópontja a feladat megoldásának, hogy be kell látni valamilyen módszer segítségével, hogy néhány állítás igaz, majd a további állítások az igazságát szeretnénk bebizonyítani ezek segítségével. Ez egy egymásra alapuló lépésekből álló megoldási módszer, tehát ha bármely szinten akdályba ütköznek, a feladat megoldása lehetetlenné válik.

A második feladat is példa a fent említett nehézségre, csak más módon. Ebben a feladatban a logikai következtetések egyértelműek, de itt a megfelelő adatok meghatározása és ezek logikailag megfelelő használata jelenthet problémát. Ebben az esetben egy hosszú logikai folyamat precíz megtervezésére és annak megfelelő alkalmazására van szüksége a diákoknak. Emellett úgy gondolom, hogy a feladat nem feltétlen egyértelműen csak a megoldókulcsban lévő megoldást kívánja a diákoktól. Előfordulhat ugyanis, hogy koordinátageometriai feladatnál a kör jelenléte miatt a diákok a körök egyenleteinek felírásával szeretnének próbálkozni, majd abból adnák meg körök sugarait. Ehhez viszont mindenképp szükséges lenne a kör középpontját meghatározni, de ami még nagyobb problémát okozhat – a kör sugarának megadása az egyenlethez. Ezt a megoldást nem fejtettem ki bővebben, mivel úgy gondolom, hogy külön didaktikai célja nincs megoldani ezen úton a feladatot, hiszen túl összetett, és jelen célok mellett nem releváns. Egyébként pedig a szögfelező egyenesek felírásához még további egyéb lepések szükségesek és majd a sugár egy paraméteres egyenletrendszerből lesz meghatározható; az oldalegyenesek mint érintők használatával. Úgy gondolom, hogy ez a megoldási módszer kifejezetten jól ötvözi a koordinátageometria során felhalmozott ismereteket és ha a feladatnak az a célja, hogy ezt megtegyük, akkor ez egy kiváló feladat ennek megtestesítésére. Viszont ennek a feladatnak a célja részemről a koordinátarendszerben megszerezhető ismeretek és a geometriai ismeretek ötvözése, és ezen elemek összehangolása a diákok tudásrendszerében.

**Az algebrai átalakítások**

Az általam bemutatott feladatok egy hányadában fellép az algebrai átalakítások által nyújtott nehézség is. A feladatokban ez többféle úton is felmerülhet. Egyrészt a bonyolultabb egyenletek, egyenletrendszerek megoldása okozhat akadályt egyes esetekben. Más esetekben pedig olyan egyszerűbb meglátásokkal érhető el nagyobb előrelépés a feladatban, mint például adjunk hozzá mindkét oldalhoz egyet, vagy szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát egy számmal vagy ismeretlennel.

A harmadik feladat esetén a megoldás során a $P(1)$ valószínűséget átalakítjuk, mivel más eseteben a számtani és a mértani közép közötti egyenlőség felhasználásánál nem kapnánk $p$-től független eredményt. Elgondolkodtató, ha a diák eljut addig a gondolatig, hogy felírja a számtani és mértani közepekkel felírható egyenlőtlenséget és látja, hogy nem jön ki eredmény, nem feltétlenül fogja meglátni az átalakítást ebben az esetben. Ha a $P(1)$ valószínűséggel írnánk fel a tagokat és a közepeket közötti kapcsolatot, akkor az alábbi egyenlőtlenséget kapnánk:

$$\sqrt[n]{np\cdot(1-p)\cdot\ldots\cdot(1-p)}\leq\frac{np+(n-1)(1-p)}{n}$$

$$np\cdot(1-p)^{n-1}\leq\left(\frac{np+n-np+1+p}{n}\right)^{n}$$

$$np\cdot(1-p)^{n-1}\leq\left(\frac{n-1+p}{n}\right)^{n}$$

Ebben az esetben egy $p$-től függő összefüggést kapunk, de mivel az a célunk, hogy segítsünk a matematikusoknak a $p$ értékének valamilyen csak $n$-től függő megadásával, ezért az átalakítás nélkül a feladatmegoldása megakad. Ahhoz, hogy ezt az átalakítással történő megoldást megtalálják a diákok, úgy gondolom, hogy megfelelő gyakorlattal kell rendelkezniük az ehhez hasonló feladatok tekintében. A matematika törzsanyaga a hagyományos vagy a problémamegoldó tanítás elvei szerint is több hangsúlyt fektet a sémákból, gyakorlatokból való megoldásokkal, ezzel együtt az intuitív matematikai gondolkodás elsajátításával. Mivel ebben az esetben az $\frac{n}{n-1}$-gyel való beszorzás sok versenyfeladat esetén, de a törzsanyag esetén nem igazán fordul elő, ezért ebben az esetben előnyben vannak azok ennél a feladatban, akinek van tapasztalatuk az ehhez hasonló átalakításokat igénylő feladatok megoldásából.

Hasonló ilyen probléma a negyedik feladatban is felléphet, de úgy gondolom, hogy a harmadik feladatban látott átalakításnál, kicsit könnyebben megtalálható, ez pedig az egyenlet mindkét oldalához egynek a hozzáadása. Ez egy olyan tipikus módszer versenyfeladatok esetén, hogy érdemes ennek a lehetőségét felvetni a megoldás menete során. Ez is véleményem szerint inkább versenyfeladatokhoz szükséges gondolat, de úgy gondolom, hogy az algebrai problémáknál több helyen is hasznosan alkalmazható. Hasonló átalakítás segít a megoldáshoz a hatodik feladatnál, itt ugyanis mindkét oldalt az adott változóval kell felszorozni. Ebben az esetben ez teszi lehetővé a feladat megoldásának további lépéseinek elérését. Ez is egy gyakori alkalmazás lehet az ilyen jellegű, a megoldást nem azonnal felkínáló feladatnál. Az ehhez hasonló feladatokban viszont mindenképp ki kell emelni a figyelmet arra, hogy a változó lehet 0 is, ami problémát okozhat szorzás és az osztás esetén. Szorzás esetén főleg egyenlőtlenségeknél, de egyenleteknél is érdemes figyelni arra, hogy az ekvivalens művelet elvégzése után mindkét oldanak nulla lesz-e az értéke. Emiatt olyan megoldást is elveszíthetünk melyet a művelete elvégzése előtt a feladat még tartalmazott. Hasonlóan érdemes odafigyelni változóval való osztás esetén a változó nullával való egyenlőségére. Mivel nullával osztani nem lehet a valós számok körében, ezért a művelet elvégzése előtt a megfelelő kikötéssel vagy esetekre bontással kell kezelni a nullával való egyenlőségének lehetőségét.

Úgy gondolom, hogy a fent említett három feladatnak egyéb nehézségei is vannak és az említett nehézségek nem is feltétlenül a legmeghatározóbbak ezekben az esetekben, viszont ugyanúgy nehezítő körülményként hathat egy ilyen, alapvetőleg összetettebb feladat megoldása során, emiatt szerettem volna ezeket külön is kiemelni.

**A szemléletváltás**

Szemléletváltás alatt egy adott probléma megoldásának más alapokra, más témakörbe való áthelyezését nevezhetjük. A szemléletváltás nagyon fontos eszköze a feladatmegoldásoknak, főként igaz ez a versenyfeladatok esetére. Viszont ez csak logikailag stabil alapokon álló, megfelelő matematikatudás esetén alkalmazható hatékonyan. Nagy előnye ennek a megoldási stratégiának, a matematika részterületi között fennálló kapcsolatok felhasználásának lehetősége. Hátránya viszont az, hogy ezt csak a megfelelő ismereti hálózat fennállásakor lehet alkalmazni.

Az ötödik feladatban erre a jelenségre láthatunk egy egyszerűbb példát. Rendkívül szemléletesen mutatja be azt a jelenséget, hogyha csak az algebrai átalakításokkal foglalkoznánk ebben az esetben, akkor nem találnánk megoldást a feladatra. De amint a feladatot átültetjük a koordinátarendszerben lévő pontokra, egy jelentősen egyszerűbb feladat tárul elénk, amit általános ismeretekkel is könnyedén meg lehet oldani.

A szemléletváltás nehézsége pont ebben az átültetési folyamatban rejlik. A megoldás során egy olyan probléma áll előtte, amikre a kiválasztott általános és megfelelő sémát nem tudja alkalmazni. Ekkor nehéz kilépni ebből a keretből és más szemléletbe helyezni a feladatot. De amint felismerhetővé válik az adott séma, máris megkönnyíti és egyáltalán lehetővé teszi a feladat megoldását. Emiatt gondolom előnyösnek az összetettebb, gondolkodás igénylő feladatok megoldását a matematikaórákon, ezáltal növelve a diákok ismereti hálóját melyet hatékonyabban tudnak alkalmazni a különböző jellegű témakörű problémáknál.

## 3.2. A feladatok NAT alapján való beépítése, célja.

Ebben a fejezetben a feladatok lehetséges Nemzeti Alaptantervhez (röviden: NAT) kiadott kerettanterveken belüli kapcsolódási pontjait szeretném megvizsgálni. Emellett részletesen foglalkoznék a feladatok céljaival, illetve ezeknek a feladatoknak a hasznaival, előnyeivel és esetleges hátrányaival is. Fontosnak gondolom, hogy minden feladatnak legyen célja – azon felül, hogy a diákok egy versenyfeladatot oldanak meg. Emiatt szeretnék minden feladatnál kitűzni egy olyan célt, mellyel a diák adott kompetenciái, készségei, vagy tudása fejlődhet. Mivel jelenleg nincsen más érvényben lévő Nemzeti Alaptanterv, ezért a 2020-as kiadásához készült kerettanterveket fogom figyelembe venni a feldolgozásánál.

### Első feladat

Az első feladat esetén először is a 7-8. osztályos kerettantervet vizsgáltam meg. A témakör melyhez a feladatot tudnám kapcsolni, a „Számelméleti ismeretek, hatvány, négyzetgyök" című témakör. Ebben az esetben a tanulási eredmények, amikhez a feladatot tudnám kapcsolni: „a prímszám és az összetett szám fogalmának ismerete; prímtényezős felbontás elkészítése; prímszámok, összetett számok kiválasztásának képessége". Úgy gondolom, hogy ezen eredmények elérése után a diákok már rendelkezésére állnak már a feladat megoldásának meghatározó elemeivel. Érdekesség, hogy a kerettanterv ebben az esetben nem említi az oszthatósági szabályok ismeretének és helyes használatának képességét. Ennek oka, hogy az 5-6. osztályosoknak megfogalmazza az oszthatósági szabályok biztos használatának célját, viszont 7-8. osztályra nem tesz kitérést az összetett számok oszthatósági szabályaira. Úgy gondolom, hogy ha kitérne erre a kerettanterv, akkor ebben az esetben ehhez a tanulási eredményhez is kapcsolható lehetne a feladat.

Ezen felül a feladatban szereplő állítások miatt kapcsolódik részben a logikai állítások témaköréhez is, hiszen a feladatnak egy kulcslépése az állítások igazságértékének megállapítása. Különösen amiatt is, hogy az oszthatósági szabályok esetén többször inkonkluzív lett az igazságértéke meghatározásának eredménye, ami pedig teljesen különbözik a hamis állításnak az értékével. Ennek felismerése a felsős diákok körében még nehézkes, ennek jelentős fejlesztése a közipiskolai matematikaokatatás célja.

A feladat célja elsősorban az oszthatósági szabályok, főleg az összetett számokra vonatkozó oszthatósági szabályok helyes és logikus használatának gyakorlása, elmélyítése. Ezen felül még a logikai állítások kapcsolatának és helyes igazságértékének megállapítása. Ez a fő célja a feladatnak, a megfelelő indoklás mellett. Továbbá a feladatsor célja pedig az önálló munka elősegítése, a megfelelő tervezési és megvalósítás képességek fejlesztése.

A feladat erőssége még, hogy figyelemfelkeltő és érdekes. Néhány diák már biztos eljátszott a lényegéhez hasonló gondolattal, például „melyik az a legkisebb szám, ami osztható 1-től 10-ig az összes természetes számmal?". A feladat gyengesége viszont a hosszabb feladatleírásból fakad. Sokaknál már a szöveg értelmezése is problémát tud okozni. Minél hosszabb egy feladat leírása, annál több akadályba ütközhetnek a tanulók, annál nehezebb tud lenni a feladat szintetizálása. A másik hátrány, ami előfordulhat, a probléma megoldásához szükséges bizonyítások felépítése. A 7. osztályos diákok még nem rendelkezne sok tapasztalattal a bizonyítások terén, az ő esetükben még csak „bizonygatások” kerülnek elő.

### Második feladat

A második feladatot, mivel koordinátageometriai elemeket is tartalmaz, a 11-12. osztályosok „Koordinátageometria” témakörében építenem be tanóra keretében. Ebben a témakörben a feladathoz kapcsolódó tanulási eredmények és fejlesztési feladatok közül az alábbiakat emelném ki, melyek kapcsolódnak a feladathoz: „alkalmazza a vektorokat feladatok megoldásában; egyenesek egyenletéből következtet az egyenesek kölcsönös helyzetére; két pont távolságának, vektor abszolút értékének meghatározása koordináták alapján; kiszámítja egyenesek metszéspontjainak koordinátáit az egyenesek egyenletének ismeretében; felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot.” Ezek a területek mind kapcsolódnak a feladathoz, és külön kiemelném az utolsó terület fontosságát, hiszen a feladatnak egy fontos eleme a geometriai ismeretekkel való összekapcsolása a koordinátageometriai részekkel. Tisztán nem is nevezném koordinátageometriainak ezt a feladatot, de mivel ilyen jellegű részletet is tartalmaz, emiatt kategorizálnám a Koordiánatageometira témakörbe.

A kerettanterv ezen felül említ „Rendszerező összefoglalás” című témakört is, ez az érettségi előtti rendszerezésre ad lehetőséget. Véleményem szerint akár itt is beépíthető lehet egy tanóra keretében, hiszen rengeteg olyan tudást igényel mely az adott témaköröknek meghatározó részlete. Ez a feladat egyik legnagyobb erőssége, hiszen igényli a megoldótól a matematikai tudáshálójának széleskörű alkalmazását, ezáltal a tudását fejlesztve. A feladat egyik hátránya is ebben rejlik hiszen, ha valakinek hiányos a matematikatudása, ebben az esetben a feladat megoldása során hamar akadályba ütközhet, ellehetetlenítve a megoldás keresésének folyamatát.

### Harmadik feladat

A harmadik feladatot a 11-12. osztály „Valószínűségszámítás” című témakörének keretén belül lehetne tanítani. A tanulási eredmények idetartozó célja: „meghatározza a valószínűséget visszatevéses, illetve visszatevés nélküli mintavétel esetén.” Mivel a feladathoz mindenképpen szükséges ez a tudás, ez indokolja a feladat ebben a témakörben való feldolgozását.

A feladat erőssége az érdekessége. Figyelemfelkeltő és elgondolkodtató példa, melynek megoldásának alapját hamar meg lehet sejteni, de a pontos eredmény megadása már kihívást okozhat. A feladatban a binomiális eloszlást és a mértani és geometriai közepek közötti összefüggést kell használni, mellyel a matematikaoktatásuk során nem gyakran találkoznak a diákok – főleg valószínűségszámítási kontextusban. Emiatt egy jó lehetőség ennél a feladatnál is a megoldás során kitérni a két téma közötti kapcsolatra és az egyes témakörök fontosságára. A feladat célja tehát, egy olyan valószínűségszámítási probléma megoldása, melynek során a diákok felhasználhatják az ebben a témakörben megszerzett tudásukat, és összeköthetik az eredményeket egy szélsőérték számítást alkalmazó feladatban.

### Negyedik feladat

A negyedik feladatot két helyen is be lehet építeni a tanórák menetébe. Mindkét esetben a 9-10. osztályban a „másodfokú egyenletek és egyenlőtlenségek” témakörébe, a másik pedig a „számhalmazok, műveletek” témakörébe tenném ezt. Ennek oka, hogy a feladatmegoldás két szétválasztható részre bontható szét. Egyrészt egy másodfokú egyenlőség, majd egyenlőtlenség megoldása, másrészt az egyenlőtlenség megoldásához szükségesek a számhalmazok témakörében megismert számhalmazok tulajdonságai. A feladathoz kapcsolódó tanulási eredmények az alábbiak:„ felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot;adott problémához megoldási stratégiát, algoritmust választ, készít; a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot; a kiválasztott modellben megoldja a problémát; a kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás műveleti azonosságokat helyesen alkalmazza különböző számolási helyzetekben;ismeri a számhalmazok épülésének matematikai vonatkozásait a természetes számoktól a valós számokig.”

Amiatt soroltam fel ennyi tanulási eredményt, mert az összes feladat közül ezt a legnehezebb egy adott helyen beépíteni a tanmenetbe. Ez előny is, hiszen univerzálisan több tulajdonságát is ki lehet emelni, különböző témakörök esetén. De ez a hátránya is, hiszen nehezen lehet egy konkrét adott témakörben feldolgozni. Jól bemutatja a kapcsolatokat, de nehezen lehet konkrét pontos helyét meghatározni.

A feladat egy célja a becslés helyes használata, mely egy alulhasznált megoldási módszer az általános feladatok megoldási körében. Több esetben is egy megfelelő becsléssel egyszerűsíteni lehet egy feladatot, viszont ebben az esetben a becslés határozza meg az egyértelmű megoldást.

### Ötödik feladat

Az ötödik feladatot a második feladathoz hasonlóan a „Koordinátageometira” témakörben dolgoznám fel. A szemléletváltáshoz minedneképpen szükség van a koordinátageometriai ismeretekre. A kiemelendő tanulási eredmények az alábbiak: „megad pontot és vektort koordinátáival a derékszögű koordináta-rendszerben; ismeri és alkalmazza az egyenes egyenletét; felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot.”.

A feladat erőssége, hátránya és egyben célja is a szemléletváltás használata. Előny mivel a szemléletváltás a kapcsolatteremtés eszköze a témakörök között, amivel a tudás elmélyítését lehet segíteni, egyben ez a célja is. A hátránya viszont, az áttekintő gondolkodásmód használata, melyet a tanulmányaik során kevésbé alkalmaznak.

#### Hatodik feladat

A hatodik feladatot az „Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek” témakörben dolgoznám fel. Annak ellenére, hogy az egyenlet tartalmaz másodfokú kifejezéseket, ennek ellenére ezeket nem kell alkalmazni, hiszen a megfelelő kiemlésekkel és nevezetes azonosságok használatával, a másodfokúságból adódó problémaforrást ki lehet zárni. A feladathoz a kerettantervben az alábbi tanulási eredmények kapcsolódnak: „ismeri és alkalmazza a következő egyenletmegoldási módszereket: mérlegelv, grafikus megoldás, szorzattá alakítás; megold elsőfokú egyismeretlenes egyenleteket és egyenlőtlenségeket, elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszereket.”. Természetesen több oldalról is csatlakozik a feladat a témakörökhöz, de úgy érzem, hogy az egyenletrendszer felírása és a szorzattá alakítás kimelt fontosságú a feladat megoldása során.

A feladat erőssége a gondolatmenet egyértelműsége, kézzelfoghatósága. Az esetre bontások esetén a megoldások diszkussziójának fontos eleme a szorzatok tagjainak vizsgálata. Ennek a menete nagyon precíz munkát igényel, így ez ez hátránya is a feladatnak. De úgy gondolom, hogy az egyszerű szövegezés és érdekes prblémát vet fel a feladat, amitt olyan feladat megoldására tudja ösztönözni a diákokat, melyet más esetben nem oldanának meg.

# 4. A feladatsorok gyakorlati próbája

Egy pedagógusnak az egyik legfontosabb erénye az önvizsgálatra való hajlandósága. Emiatt gondolom fontosnak és dolgozatom fontos részének a gyakorlati próbáját a munkámnak, mellyel igazolni vagy épp cáfolni tudom egyes már a korábbiakban feltett állításaimat. Mivel úgy véltem, hogy érdemes aktuális témákat feldolgozni a különböző osztályokban, emiatt az első két feladatot és a hozzájuk tartozó feladatsort próbáltam ki a gyakorlatban. Ennek oka még, hogy a lehetőségeim is szűkösek voltak, hiszen kevés évfolyamon tanítok, A következőkben a próbákat és annak során szerezett tapasztalataimat szeretném megosztani.

## 4.1. A csoportok leírása, a gyakorlati próbák körülményei

#### Első feladatsor próbája

Az első feladatsor bár eredetileg a KöMaL-ban K feladatjellel jelent meg, ami 9. osztályosok számára lett meghirdetve, ennek ellenére 7. osztályosok között próbáltam ki, mivel nem volt semmilyen olyan többlettudásra szükségük, mely akadályozta volna a feladatok megoldását. Emiatt is gondoltam tanulságosnak ebben a csoportban végrehajtani a próbát, mivel számomra sok hasznos információ lesz megfogalmazható.

Az intézmény, ahol az első próbát végeztem, egy budapesti magyar-angol két tanítási nyelvű iskola, ahol a matematikaoktatás csak magyar nyelven zajlik. A csoport egy 7. osztályos csoport, akiket már harmadik éve tanítok, emiatt tisztában vagyok a tanulók matematikai készségeivel és képességeivel is. A csoportban nagyon változó a matematika iránti érdeklődés, és ez a képességek tekintetében is megjeleníthető. A csoport létszáma 15 fő, így jobb lehetőségem van a diákokkal való egyéni differenciálásra is. A tanulóknak hetente négy matematika órájuk van. A tanulók szocioökonómiai státusza a diákok nagy részénél átlag alatti és átlagos között mondható, többen hátrányos helyzetűek, illetve tanulási nehézségekkel is küzdenek. Emiatt a sokszínűség miatt voltam kíváncsi arra, hogy milyen hozzáállást fognak tanúsítani a feladatokhoz, legfőbbképpen pedig a versenyfeladathoz.

A feladatsor próbáját egy pénteki hatodik órában tudtam elvégezni. Az órán három hiányzó volt, emiatt a csoport létszáma összesen 12 fő volt. Ezeket azért tartom fontos tényezőknek, mivel két okból is ront a visszajelzés tekintetében. Egyrészt a mintaszám elég alacsony, emiatt nem tudok belőle reprezentatív következtetések levonni, csak erre a csoportra jellemzőeket. Másrészt sajnos az óra időpontját nem tudtam máshogy választani, emiatt ez is jelentősen befolyásoló tényező az eredmények értékelésében. A visszajelzést megnehezítette a kérdőívek kitöltésének hiánya. Az iskolában szigorú szabályok vonatkoznak a telefonhasználatra, emiatt a digitális kérdőívet nem tudták kitölteni, így az értékelés szóban történt, ami szintén ront az értékelés ideálisságán.

### Második feladatsor próbája

A második feladatsor próbáját, az első feladatsor próbájának helyéhez képest másik iskolában tettem meg. Ez az iskola egy budapesti magyar-német két tanítású nyelvű iskola, amelyben csoporttól függően magyar vagy német nyelven tanulják a diákok a matematikát. A csoporton, melyen teszteltem a feladatsort magyar nyelvű a matematika tanítás, így nyelvi akadályba nem ütközött a feladatok megértése. A csoport egy 11. osztályos, emelt nyelvórszámú 4 évfolyamos gimnáziumi osztály egyik része. Az osztályokat ezen a részen nyelvek alapján két részre bontják, ebből tanítom az egyik csoportot a tanév eleje óta, így még nem volt alkalmam teljes mértékben megismerkedni mindenkinek a matematikai képességeivel. A csoport létszáma 19 fő. A diákok szocioökonómiai státusza átlagos, nincsenek nagy kilengések a csoportban, általánosságban egy elég homogén csoportot alkotnak.

A körülmények hasonló okokból, mint az első feladatsor estén kevésbé voltak ideálisak. A gyakorlatot egy pénteki 4. órában tudtam elvégezni, ami szintén negatív befolyásolta a diákok hozzáállását. A csoportból 6-an hiányoztak, így az összlétszám 13 fő volt, ami szintén csökkentette a visszajelzés reprezentációját. A visszajelzési kérdőívet mind a 13 fő kitöltötte, így ebben az esetben tudok ezekre az adatokra is hivatkozni.

## 4.2. Tapasztalatok a gyakorlati alkalmazás során

### Első feladatsor

Az első feladatsort, a már említett 7. osztályos csoportban próbáltam ki. A diákoknak egyéni munkára kiadtam az első három feladat válaszainak megfogalmazását, majd ezeket közösen megbeszéltük. Ezután közös gondolkodással oldottuk meg a versenyfeladatot.

A feladatsor első három feladata az oszthatóság, az oszthatósági szabályok, osztó-többszörös közötti kapcsolatról szólt, ezeknek a témáknak a helyes alkalmazásáról, gyakorlásáról szólt. A célom a feladatsorral a fogalmak közötti logikai kapcsolatok erősítése, melyet később a versenyfeladat esetén fel lehet használni annak megoldásához. A feladatsor első három feladata a csoport nagy részének jól sikerült, mivel ezek eléggé fundamentális kérdések a témakörben. Az első komolyabb következtetésem ebben az esetben, hogy a feladatsor első szakaszát vagy összetettebb vagy problémaközpontú feladatokkal kell bővítenem, mivel ezzel az első szakasszal hamar végeztek a diákok. Problémás, mivel, ha hamar végeznek vele, előfordulhat felületesség a munkájukban, ami nem feltétlenül erősíti meg azokat a fogalmakat, amelyeket, majd a versenyfeladat esetén szeretnék felhasználni. Emiatt úgy gondolom legalább egy feladattal érdemes bővíteni a feladatsort. Erre egy példa:

**1.** Melyik az a legkisebb szám, ami osztható

*a)* 1-től 10-ig, az összes természetes számmal?

*b)* 1-től 10-ig az összes természetes számmal, kivéve a 7-tel?

*c)* 1-től 10-ig az összes természetes számmal, kivéve a 8-cal?

**1. Megoldás:**

*a)* Ebben az esetben felmerülhet, a számok összeszorzása, azaz a 10! , mint eredmény. Viszont ez nem helyes, hiszen találhatunk ennél kisebbet is. Ez kisebb számok esetén könnyeben belátható. Mivel a legkisebb szó szerepel a feladat leírásában, ezért egyből asszociálhatunk a legkisseb közös többszörösre. Így hát keressük meg a számok legkisebb közös többszörösét!

Mivel 1-nek minden szám többszöröse, ezért nem kell foglalkozni vele. A többi számnak megvizsgálhatjuk a prímtényezős felbontásait, hiszen a legkisebb közös többszörös megtalálásához a közös prímtényezők közüli legnagyobb hatványú számot kell kiválasztanunk. A prímtényezős felbontások emelkedő sorrendben:

$$2; 3; 2^2; 5; 2\cdot 3; 7; 2^3; 3^2; 2\cdot 5$$

Ebből már megállapítható, hogy a felsorolt számok legkisebb közös többszöröse:

$$2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7 = 2520$$

A legkisebb ilyen természetes szám tehát a 2520.

*b)* Nagyon hasonlóan kell eljárni, mint az előző esetben. Egyedül a 7-est kell kivenni a prímtényezők közül a legkisebb közös többszörös megkeresésénél. Ekkor a legkisebb feltételeknek megfelelő szám:

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$

Esetlegesen megoldásként megfontolhatjuk az a) feladatrészben az eredményül kapott szám 7-tel való osztását is $2520 : 7 = 360$.

*c)* Hasonlóan az előző feladatrészekhez, itt is hasonló módon kell eljárnunk, csak most a 8-at kell kivenni a közös számok közül. Viszont itt annyiban módosul a feladat megoldása, hogy a 2-nek kisebb hatványát kell belevenni a legkisebb közös többszörösbe. Tehát így a megoldás:

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$$

Tehát a legkisebb feltételeknek megfelelő szám, az 1260.

Megjegyzés: Ebben az esetben nem működik az a) feladatrészben való eredmény 8-cal való osztása, hiszen $2520 : 8 \neq 1260$. Mivel csak 2-t vettünk a prímtényezőkből emiatt, a helyes megoldás megkapható $2520 : 2 = 1260$ módján is.

Úgy gondolom, hogy már ezzel az egy feladattal is bővebbé és tartalmasabbá tehető a gyakorlás és a fogalmak elmélyítése. A célja pedig még ezen felül a feladat utolsó szakászára való előkészítés, melynek során ki kell venni a 16-ot és a 17-et a legkisebb közös többszörös kiszámítása esetén.

A versenyfeladat esetén előzetes elvárásom nem igazán volt a csoport felé, bár ismerem a képességüket. Ilyen helyzetben az egyetlen kérésem a feladatok megoldásában való aktív részvétel volt. A diákokat a feladat elolvasása után arra kértem, hogy próbálják átgondolni a megoldás lépéseit, vagy ha még nem látják a teljes feladatot, akkor fogalmazzák meg legalább az első lépést. Néhányan már a feladat elolvasása után problémába ütköztek. Hosszabb, összetettebb feladatok esetén szövegértési problémák miatt akadályba ütköznek, emiatt a matematikai feladat megoldása is problémát okozhat.

A szöveg értelmezése után, először az az ötlet támadt, hogy próbáljunk „tippelni”, a hamis oszthatósági állításokra, ahol is nagy meglepetésemre elsőre a helyes választ, azaz a 16-tal és 17-tel való oszthatóság hamisságát tippelték meg. Feltételezem, hogy ez csak szerencse volt, de valószínűleg az is szerepet játszhat, ami a feladatnak a kulcsa is – a 16-ra és a 17-re nem tudnak oszthatósági szabályt felírni. Tehát volt egy sejtés, de ezt sajnos nem lehetett azonnal belátni.

Ezután megakadt egy kicsit a gondolatmenet, mivel sajnos nem látták, hogy hogyan kellene megkeresni a helytelen állításokat. Emiatt segítséget nyújtottam a megoldás első gondolatára. „Keressünk olyan állítást, ami biztos, hogy igaz!” Ekkor szóba jött egyből a 2 és a 3 esete, amelyekre belátták hamar, hogyha a 2-vel és a 3-mal való oszthatóság nem lenne igaz, akkor például a 6-tal való oszthatóság állítása sem lehetne igaz. Viszont ekkor beleütköztek a feladat egyik nehézségébe, azaz abba, hogy emiatt kölcsönösen igaznak látták az állítások igazságának biztosságát a többszörösök oszthatóságának esetén is. Tehát például, ha egy szám osztható 2-vel, akkor osztható 4-gyel, 6-tal..., ami nem igaz, hanem ennek az állításnak pont a megfordítása azaz, ha egy szám osztható 4-gyel, 6-tal..., akkor osztható 2-vel is. Ekkor emlékeztettem őket a feladatsor 2. feladatának a) és b) részére, ahol pontosan ez az állításpár szerepelt. Ennek a pontatlanságnak valószínűleg az lehet az oka, hogy a 2-vel és a 3-mal való oszthatóság miatt osztható 6-tal is, de ezek alapján a 6 többszöröseivel is megtehető ez. Ez egy jó példa a diákokban megszülető hibás analógiának példájára, mely analógiának alapja helyes, de alkalmazása ebben az esetben, helytelen és pontatlan.

Az analógia fogalmát nehezen lehet meghatározni. Úgy tekinthetünk rá, hogy valamilyen téren már megszerzett ismeretet szeretnénk átültetni, egy másik még ismert rendszerbe és ott használni. Ez az esetek nagy részében egy jól alkalmazható módszer, viszont hajlamos a pontatlan és nem egyértelmű válaszokra. Ilyen hibás analógia a fent említett példa mellett a teljes négyzet felbontásának esete, ahol is gyakori típushiba az $(a+b)^2$-en $a^2+b^2$-ként való felbontása. Ez az analógia még a zárójelfelbontás alapjaiból érkezik, ahol korábban már megismert zárójelfelbontás által létrehozott analógiából származik, például a $2(a+b) = 2a+2b$ esete. Ebben az esetben nem tagonként szorzunk, hanem tagonként emelünk négyzetre, viszont látható, hogy ebben az esetben a már megismert analógia alkalmazása történt meg. Ennek kiküszöbölésére és a helyes analógia rávezetésére jól használhatók az ellenpéldák, vagy olyan feladatok megoldása melyben problémát okoz a helytelen analógia használata. Ilyenkor a diákokban a már egy ismert analógiát kell felülírni, mely kihívás, hiszen egy fogalmat újraépíteni nehezebb, mint egy fogalmat felépíteni.

Miután tisztáztuk a helytelen analógiából adódó problémát, tovább haladtunk a feladat megoldásával. A magyarázattal viszont kizökkentek a diákok a megoldás menetéből, emiatt ismét iránymutatást kellett adnom. Ekkor azzal próbáltam segíteni, hogy: „A 2-vel és a 3-mal való oszthatóság igazságát be tudtuk látni. Be tudnánk-e látni valahogy a 4-gyel valót is? Mi lenne a probléma, ha Peti száma nem lenne osztható 4-gyel?” Erre a kérdésre többen azt válaszolták, hogy ebben az esetben nem lehetne osztható 12-vel az adott szám. Ez a válasz abból adódik, hogy a 12-vel való oszthatóság előtte többször is előkerült, illetve ez az első olyan oszthatósági szabály, melyet már általában az összetett számok oszthatósági szabályával vezetnek be. (A 6 oszthatósági szabálya az első olyan melynél, tudnánk használni az összetett számokra vonatkozó szabályt, de ebben az esetben nem feltétlen szemléletes a osztópárok relatív prím szükségessége, először ez a 12-nél fordul elő, amikor már szükséges, és használni is kell ezt a feltételt.) Ezt a gondolatot folytatva feltettem ezt a kérdést: „Miért probléma, hogyha se 4-gyel se 12-vel nem osztható a szám?” Hamarosan jöttek a válaszok, hogy mivel a két szám szomszédos ezért nem lehetnek hamisak. Ezután hamarosan jöttek a gondolatok, hogy ezen az az elven nem lehet hamis az 5-tel, a 6-tal való oszthatóság sem. Az

5-nél már előjött az a gondolatkör is, amit a megoldásban is említettem, hogy a kétszerese sem lesz igaz a számoknak, ami ellentmondást okoz. Így eljutottunk odáig, hogy 2-től 12-vel biztos, hogy osztható Peti gondolt száma. Miután kis időt vártam, hogy leülepedhessen ez a gondolat, a következő lépésre már a diákok közösen jöttek rá, hogy most viszont már be lehet látni úgy az oszthatóságot, mint a 2, 3 és 6 esetében. Innen a megoldáshoz tiszta út vezetett, kijött a 16-tal és a 17-tel való oszthatóság hamissága, így már csak a legkisebb közös többszöröst kellett megadni. Ebben az esetben segítségül szolgált, a 3. feladatban megfogalmazott elv, miszerint próbáljuk meg megkeresni a legmagasabb hatványú tagot minden prímtényező esetén. Ekkor már kiszámolható volt a Peti által gondolt szám, tehát a helyes megoldás.

Az órából ekkor már csak néhány perc maradt, így volt időnk összefoglalni, a feladat megoldásának lépésein még egyszer röviden végighaladni. Megfigyelésem alapján voltak néhányan, akik leszakadtak egyes részeknél, de emiatt is volt hasznos az óra végi összefoglaló, hiszen ekkor még egyszer végig lehetett haladni a megoldás lépésein, logikai felépítésén a jobb megérthetőség érdekében.

### Második feladatsor

A második feladatsor esetén kicsit más hozzáállásom volt az első feladatsorhoz képest. Mivel idősebb korosztályon zajlott a kísérlet, emiatt itt az volt a tervem, hogy az óra első 35 percében hagyom az önálló munkát, aki valahol pedig elakad, kérhet útmutatást, de ösztönöztem az egyéni munkát. Ennek oka, hogy felmérhessem a feladatsor segítségének mértékét, annak előnyeit, vagy hátrányait. A diákok használhattak függvénytáblázatot a feladatok megoldásához, mivel az érettségin és a különböző versenyeken is támogatják a használatát. Az önálló feladatmegoldás közben próbáltam néhány diák munkáját követni, ezek közül néhányból levont tapasztalatot ki is emelnék.

Elsősorban a harmadik feladatot emelném ki, hiszen itt merült fel a legtöbb kérdés. A harmadik feladat során a diákoknak a háromszög három oldalának hosszából kellett megállapítaniuk a háromszög területét és háromszögbe írható kör sugarát. Az első felmerülő kérdés ezzel kapcsolatban a háromszög derékszögűségének belátása volt. Erre nem volt szükség, bár a területszámítást lényegesen megkönnyítheti, hiszen egyszerűbb ebben az esetben az összefüggés, mintha a Héron-képlettel számolnánk. A háromszög derékszögűségének belátása végül kimaradt, és a függvénytáblázat segítségével már a Héron-képlet került alkalmazásra. (Megjegyzés a feladatban szereplő 3 cm, 5 cm, 6 cm oldalhosszúságú háromszög nem volt derékszögű.) A háromszög derékszögűségének bebizonyítására a Pitagorasz-tétel megfordítását lehet alkalmazni, miszerint, ha egy háromszög két rövidebb oldalhosszának négyzetösszege megegyezik a leghosszabb oldalhossz négyzetével, akkor a háromszög derékszögű. Úgy gondolom, hogy ennek a tételnek a használata kevésszer fordul elő, pedig több esetben egyszerűsítést okozhat a feladat megoldásában. Koordinátageometriai feladat esetén a derékszögű háromszög felismerését az egy csúcsból induló oldalvektorok skalárszorzatával lehet megadni, hiszen ha ennek az értéke 0, akkor a két vektor merőleges egymásra, így a két oldal is merőleges egymásra, tehát a háromszög derékszögű.

Egyéb ilyen felmerülő kérdés volt még a harmadik feladatnál, hogy lehetne-e esetleg a Héron-képleten kívül másként területet meghatározni. Ez amiatt nem volt számomra meglepő, mivel néhány hónappal korábban ismerkedtek meg a háromszög szögfüggvénnyel megadható területének meghatározásával. Mivel ez az emlék élesen él a diákok tudatában, emiatt hajlamosabbak ezeket az összefüggéseket alkalmazni, minden lehetséges példára. Több esetben is megfigyeltem ennél a példánál, hogy meghatározták a tanulók a koszinusz-tétel segítségével az egyik szöget, majd a szinuszos háromszög-területképlettel pedig a háromszög területét. Ezek matematikailag teljesen tökéletes megoldások, viszont nem a legoptimálisabbak ebben az esetben.

Az utolsó feladat, azaz a versenyfeladat megoldásáig a megadott időpontig csak néhányan jutottak el, de általánosan elmondható, hogy legalább a harmadik feladatig mindenki eljutott. Az óra utolsó 10 percét arra szántam, hogy a feladatok megoldását átbeszéljük. Ez elegendő volt ahhoz, hogy befejezzük a feladatokat, és fontosabb részeket összefoglaljuk. Viszont mivel többen nem jutottak el a versenyfeladatig sem, emiatt érzésem szerint nem mindenki számára mélyült el teljes mértékben az utolsó feladat megoldásának összképe, amit sajnálattal fogadtam. Az első feladat próbájhoz viszonyítva sajnos ebben az esetben hosszúra sikerült a feladatsor. Ahhoz, hogy mindenki legalább az utolsó feladathoz elérjen, két lehetőséget látok. Egyrészt vagy a feladatsor hosszának mértékén lehetne csökkenteni. Másrészt lehet ebben az esetben is érdemes lett volna tanári segítséget alkalmazni az egyes feladatok esetén. Természetesen ezek a következtetések részben csoportfüggőek, de tanulságokat ebből a kísérletből is meg lehet állapítani. A további tanulságokat a visszajelzési kérdőív elemzéséből szeretném megtenni.

## 4.3. Visszajelző kérdőív

A visszajelző kérdőívet rendkívül fontosnak találom a gyakorlati próbák esetében. Alapvetőlegesen számomra fontos a kritikus szemléletmód és erre később tanárként fontos megfelelő erőforrásokat biztosítani. A diákok számára, főleg középiskolában rendkívül fontos a véleményük kinyilvánítása, de ezt tapasztalataim alapján kevés fórumon tehetik meg, félve a retorziótól. A konstruktív kritikának szakmailag nagy értéke van, mivel azt a tudást amit mi már ismerünk, minél hatékonyabban kell átadnunk. Ha ez nem megfelelően sikerül, ebben az esteben meg kell keresni azokat a pontokat, lépéseket a kritikák alapján, ahol segíthetjük a saját és a diákok fejlődését is.

A kérdőív célja, hogy néhány olyan kérdést feltegyek, amire a diákok őszintén válaszolhatnak név nélkül, amikre egyéb esetben nem mernének személyesen. Olyan kérdéseket tettem fel a diákoknak, melyet könnyen megválaszolhatnak, és számomra is hasznos adatokat tudok kinyerni belőle. A feladatsorok összeállítására és érthetőségére próbáltam fókuszálni, mivel ez az a két terület, melyen a legtöbb fejlődésre látom a lehetőséget.

A kérdések az alábbi módon szóltak:

**1.** Milyen nehézségűnek érezted a feladatsort? (1. Nagyon könnyű, 5. Nagyon nehéz)

**2.** Milyen nehézségűnek érezted az utolsó feladatot? (1. Nagyon könnyű, 5. Nagyon nehéz)

**3.** Mi okozott nehézséget az utolsó feladatnál? (Több választ is megjelölhetsz. Ha más oka is volt, kérlek fejtsd ki a "Egyéb" mezőnél!) Itt a válaszlehetőségek az alábbiak voltak:

   *a)* a feladat összetettsége

   *b)* a feladat logikai felépítése

   *c)* a feladat hosszúsága

   *d)* az adatok számontartása

   *e)* nem volt nehézségem

   *f)* Egyéb

**4.** Mennyire segített az előzetes feladatsor az utolsó feladat megoldásában (1 - Egyáltalán nem, 5 - Teljesen)

**5.** Melyik feladat segített a legtöbbet az utolsó feladat megoldásában? (Többet is megjelölhetsz.)

**6.** Ha van esetleg valamilyen javaslatod vagy megjegyzésed, kérlek fejtsd ki röviden! (Opcionális)

A kérdésekkel általános összképet szeretnék kapni a diákok véleményéről, illetve az ő gondolataikról a dolgozattal kapcsolatban. Az előzetes elképzeléseimet szeretném alátámasztani, vagy megcáfolni a diákok véleményeivel, illetve szeretném megtalálni azokat a pontokat, ahol a feladatsorokkal felmerülhet hiányosság vagy probléma.

## 4.4. Visszajelzések kiértékelése

### Első feladatsor

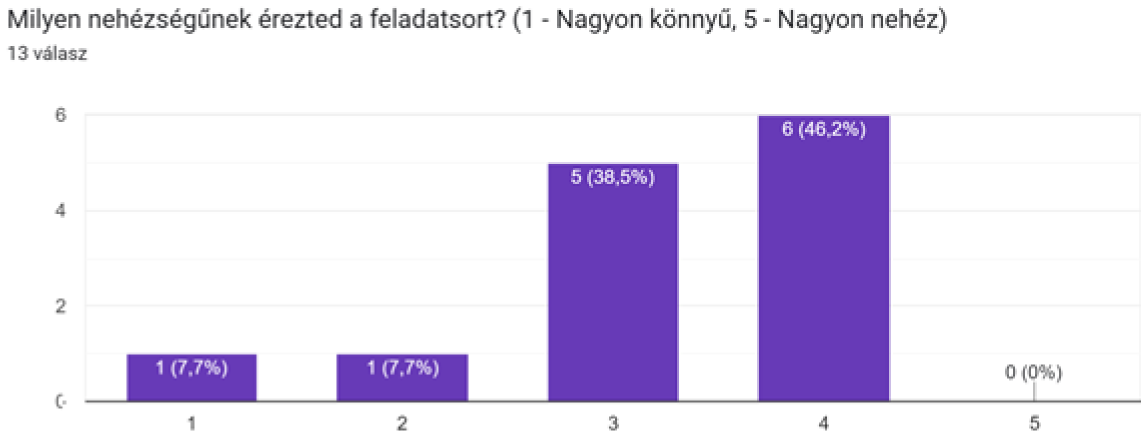
Az első feladatsor során sajnos nem volt lehetőségem a kérdőívet kitöltetni, így próbáltam szóban kérdezni a véleményüket, a feladatsorról és a versenyfeladatról. A feladatsort a diákok nem érékelték nehéznek, a versenyfeladatot viszont a nagyon nehéz kategóriába sorolták inkább. A versenyfeladat nehézségeinél főleg a feladat hosszúságát és a feladat összetettségét nevezték meg. A feladatsor segítségénél általában közepes mértékű volt a jellemző válasz, a leghasznosabb feladatnak pedig a második feladatot mondták.

A válaszok nem igazán leptek meg, a feladatsor megoldásánál szerzett tapasztalatokat figyelembe véve. Amin mindenképpen javítani kell ezek alapján és a tapasztalatiam alapján is, a feladatsorban a már korábban említett feladat beillesztésével, mellyel jobban elősegíthetem a versenyfeladat megoldását.

**Második feladatsor**

A második feladatsor kiértékeléséhez már voltak adataim, így ezeket szeretném most a következőkben prezentálni. A kérdőívet a csoport mind a 13 jelen lévő tagja kitöltötte. A grafikonokon jelölve van a választások száma, és a válaszlehetőségek aránya a kitöltők számához viszontyítva. A kérdőíveket kitöltéséhez és kiértékeléséhez a Google Forms applikációt használtam segítségül.

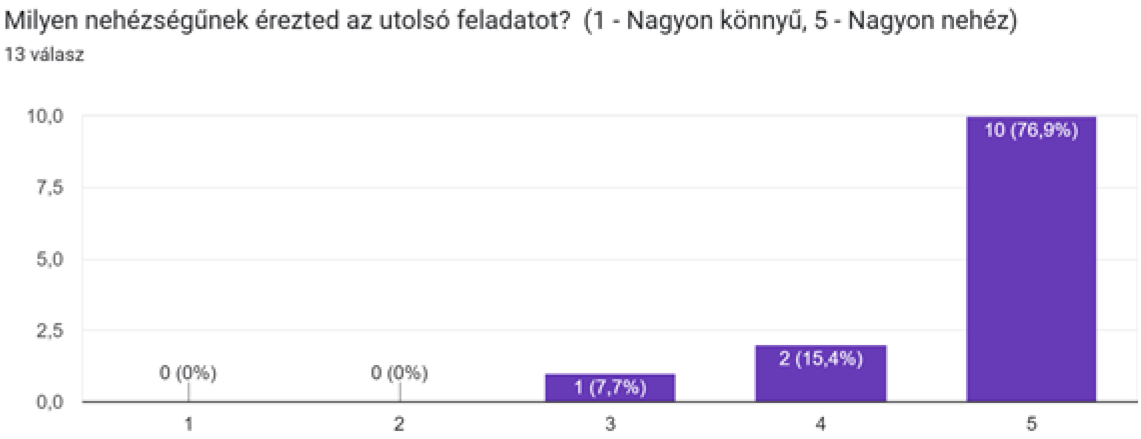
**1.** kérdés




5. ábra. Az 1. kérdésre érkezett válaszok statisztikája

Az itt szereplő eredmények nem leptek meg. A feladatsorban szereplő versenyfeladat hatása mindenképpen érződik a válaszokon. Ami meglepő, de hasznos visszajelzés volt számomra, hogy a feladatsor senki számára nem volt nagyon nehéz, tehát ez nem volt akadálya a versenyfeladat megoldásának. Természetesen érdemes megvizsgálni, hogy hol lehetne még javítani a feladatsoron, hogy inkább a 3-as, közepes értékek száma legyen több. Ennél kisebb érték a versenyfeladat nehézsége miatt nem gondolom, hogy lehetne.

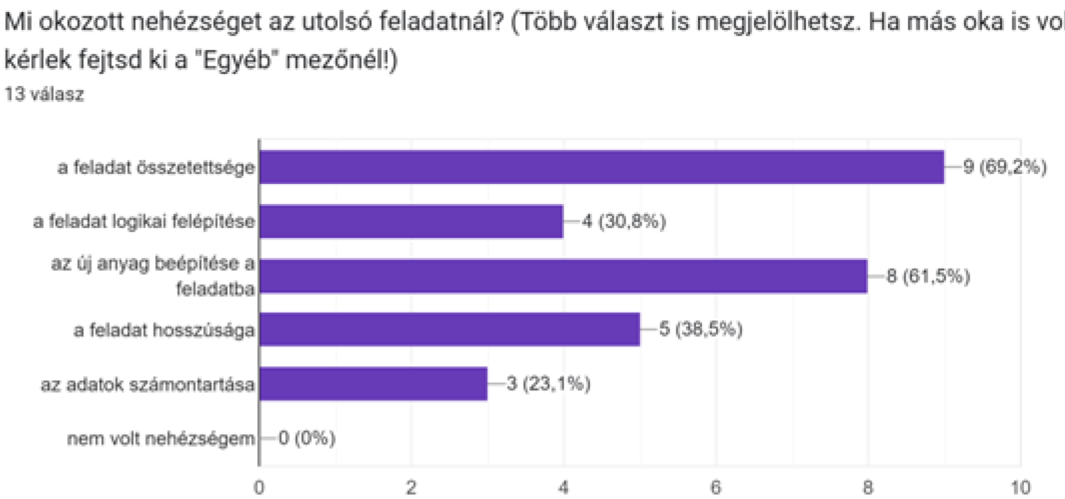
**2.** kérdés




6. ábra. A 2. kérdésre érkezett válaszok statisztikája

A versenyfeladat megítélése meglepett, főleg a feladatsor nehézségi adatainak tekintetében. A válaszok abból a szempontból nem meglepőek viszont, hogy versenyfeladatról van szó, mely a visszajelzés alapján nagy kihívást jelentett számukra. A feladaton nem tudok változtatni, viszont ez is jelzi, hogy a KöMaL versenyének C kategóriás feladatai is kihívást jelenthetnek a diákok számára.

**3.** kérdés

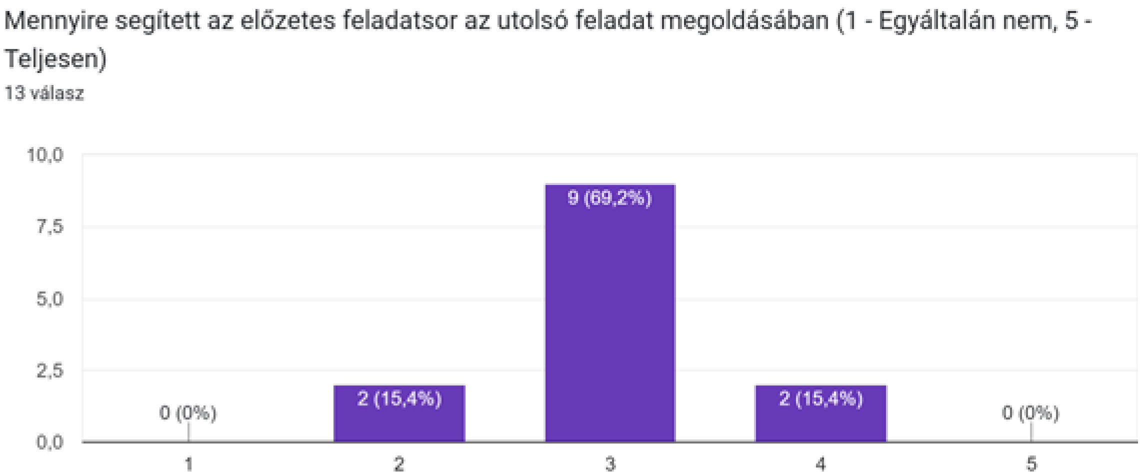



7. ábra. Az 3. kérdésre érkezett válaszok statisztikája

A 3. kérdés esetén különböző válaszokat kaptam. Előzetes elképzeléseim szerint arra számítottam, hogy a feladat összetettsége lesz a leggyakoribb indok a probléma megítélésben. Ami meglepett, hogy másodiknak az új anyag beépítése okozta a felmerülő nehézségeket. Itt ki lehet térni a koordinátageometriai ismeretek beépítésére is, de végső soron, ami tényleg kifejezetten új témakör lehetett számukra, a hozzáírható körök fogalma és a hozzá kapcsolódó összefüggések. Ennek oka lehet, hogy ezt a témát részletesebben is meg lehetett volna közelíteni, illetve itt egy tanári magyarázat is szükséges lehetett volna. Emellett ami még elmélyíthette volna a feladat megoldása előtt az új témát, a köré írható körök területképleteinek bebizonyítása. Úgy gondolom, hogy ez a bizonyítás egyáltalán nem összetett logikailag, és csak olyan tudást használ fel, melyet már előzetesen ismertek a diákok.

Ami még az adatokból leolvasható, hogy mindenkinek volt legalább egy problémaforrása, még azoknak is, akik eljutottak a versenyfeladat megoldásáig. A másik három válaszlehetőségre érkezett válaszok aránya közel azonos, így ebből a három szempontból nehéz következtetést levonni, hogy melyik nehézség legküzdésére érdemes a legtöbb energiát fordítani.

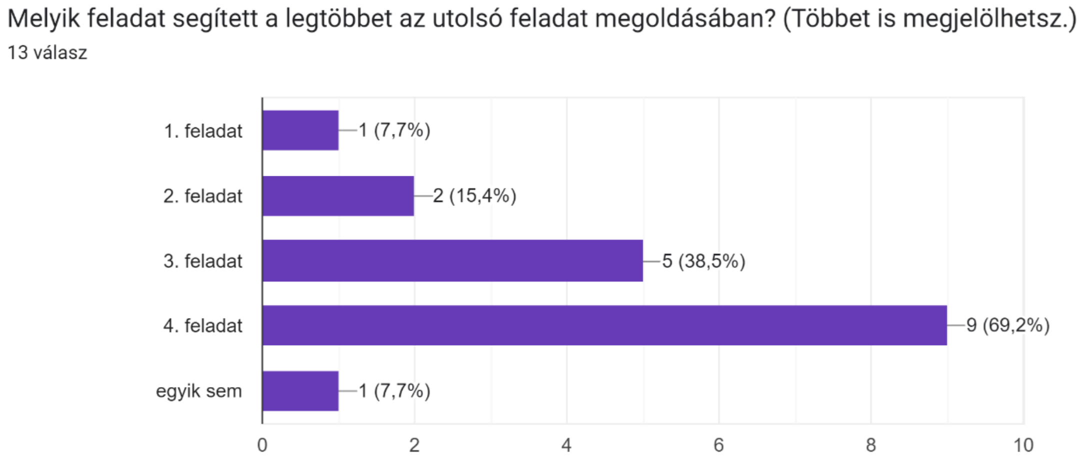
**4.** kérdés




8. ábra. A 4. kérdésre érkezett válaszok statisztikája

Ebben az esetben meglepett a válaszok aránya, úgy gondoltam, hogy többeknek többet segített a feladatsor, mint ahogy azt az adatok mutatják. Ennek egyik oka lehet a függvénytáblázat használatának lehetősége, hiszen az is egy segédeszköze volt a feladat megoldásának. De emellett elgondolkodtató a feladatsor átgondoltsága és felépítésének szempontjából, illetve a tanári útmutatás fontosságának figyelembevételének szempontjából is.

**5.** kérdés




9. ábra. Az 5. kérdésre érkezett válaszok statisztikája

Itt számomra nem meglepő eredmény született, hiszen a 4. feladathoz volt a kiegészítés a hozzáírt körökről, emiatt lényegesen többet segített a többi feladathoz képest. A 3. feladatban pedig a geometriai részletek átismétlésére került sor, ami tanulmányaik során korábban szerepelt, mint a koordinátageometriai, emiatt kevesen jelölték az 1. és a 2. faladat és többen a 3. feladat segítségének hasznosságát.

## 4.5. Tapasztalatok összefoglalása

Összeségében nagyon hasznosnak találtam a gyakorlati próbákat. Sok mindent terveztem előre, voltak előzetes várakozásaim, de ezen felül is rengeteg tapasztalatot szereztem. Olyan gondolataim támadtak a próba közben, illetve az elemzése során is, amelyekre a tervezés során nem került fény. Egy ilyen gondolat például az első feladatsor kiegészítése. Úgy gondoltam, hogy az előre megadott feladatok elegek lesznek, de a próba során kiderült, hogy ez nem volt igaz.

A feladatsorok esetében nagyon hasznosak voltak a visszajelzések, amiket a diákok őszintén válaszoltak meg. Emiatt fel tudtam mérni ezzel a feladat nehézségét, anélkül, hogy mindenkinek a munkáját egyénileg figyelemmel kellett volna követnem, ami könnyebbé tette a következtetések levonását.

Úgy gondolom, amit javítani lehetne a következő ilyen gyakorlat során, az óra ideálisabb időpontjának kiválasztása. Mivel fáradtság jellemezte a diákokat, emiatt a koncentrációjuk sem volt maximális, emiatt romlott a feladatsor elvégzése során teljesítményük. Ez a visszajelzésnél is felmérhető lehetett volna (ezt csak szóban tettem meg). Ki lehetne egészíteni a koncentrációra, figyelemre és fáradtságra vonatkozó kérdések kitöltésével, így a kérdőívek elemzése során ezeket a változókat is figyelembe lehet venni. Ezen felül több csoportban is érdemes lenne kipróbálni és felmérni az adott feladatokat. Így több minta állna a rendelkezésre, amiből általános tendenciákat is meg lehetne fogalmazni, nem csak adott csoportra jellemzőeket.

Összeségben sikeresnek gondolom a feladatsorokat és a versenyfeladatokat is. Bár nem mindenki tudta megoldani őket, de legalább a gondolatmenetük egy résztét át tudtam adni a feladatsorok formájában, ami miatt számomra sikeresnek gondolható. Illetve a most megszerzett tapasztalatok alapján továbbgondolva és azok alapján fejlesztve a tananyagokat még eredményesebbé tehetőek a későbbi felhasználások esetén.

# 5. Egyéb problémaforrások

A matematikaoktatás során az újabb matematikai ismeretek megszerzése, azoknak gyakorlása, a diákok tudásának fejlesztése a fő célja. Sajnos viszont vannak olyan esetek melynek során nem csak matematikai problémák akadályozzák a kitűzött célt, hanem egyéb más pszichológiai vagy egyéni problémák, melyekre pedagógusként érdemes odafigyelni, és ezeket is számításba venni a diákok oktatása során. Ezek közül szeretnék néhány problémát kiemelni a teljesség igénye nélkül, melyekről úgy gondolom, hogy a versenyfeladatok megoldásának sikerességét csökkenthetik, sőt teljesen meg is akadályozhatják.

## 5.1. A versenyekhez való motiváció hiánya

A matematikaversenyek rengeteg szépséget, kihívást, sikert és kudarcot rejtegetnek magukban. Az elinduláshoz kell magabiztosság, kellő tudás, logikai készség, problémamegoldó képesség és még számos erény – ez abban az esetben, ha sikeresek szeretnénk lenni. A matematikaversenyeken rengeteg pozitív élmény születhet, de már a próbálkozás is megadhatja a kellő örömöt és izgalomforrást – az eredményekre való tekintet nélkül – amikre idősebben már pozitívan lehet visszagondolni. Ez a szemlélet csak akkor érvényesülhet, ha a diákokról sikerül levenni a verseny és a helyezés által elérendő sikertelenség terhét. Én szerencsés voltam diákként ilyen tekintetben, hiszen tanáraimnak sosem volt elvárásuk, minden eredményért pozitív visszajelzést kaptam, emellett számos barátságom és pozitív történetem született ezekről az eseményekről.

Ahhoz viszont, hogy pozitív visszacsatolást kaphassanak, és egyáltalán a motivációjuk meglegyen a diákoknak a versenyhez, úgy gondolom két szempont érvényesítése szükséges. Az egyik a diákok számára tett pozitív visszajelzések, matematikai tudásuk erősségeinek kiemelése. A motivációt már ezzel lehet növelni, ha a diák több magabiztosságot érez abban amit csinál, még ha ez nem is minden területen teljesül ki. Ha ez több diákban is megtörténik, akkor már a társas motiváció is hatással lesz rájuk, tehát ha többen érzik a magabiztosságot magukban, akkor többen is szeretnének majd versenyre járni, akár egymás között is megmérettetni magukat.

A másik ilyen szempont az eredmény fontosságának csökkentése, és az élményközpontúság növelése. Az eredmény fontosságát soha nem lehet kiküszöbölni, akárki elindul valamilyen megmérettetésben, szeretné tudni, hogy a többi indulóhoz képest hogyan teljesített. Ebből fakadóan szorongás is léphet fel, és ez el is távolíthatja a diákokat a további versenyszerepléstől. Emiatt gondolom kihangsúlyozandónak az élményközpontúságú szemléletet. Saját példáimból is kiindulva nem igazán emlékszem a rosszabb helyezéseimre vagy a csalódásaimra, hanem inkább arra, hogy mennyi városnak, mennyi iskolájában jártam, és hogy a barátaimmal milyen jól éreztem magamat. Ha van ilyen irányú indíttatás, és ezzel meggyőzhetőek a diákok, akkor ezzel is lehet növelni a matematikaversenyeken való részvétel motivációját. Ezt a jelenséget a csapartversenyeknél még jobban ki lehet domborítani, hiszen itt egymásra is támaszkodhatnak, élményeik is közösek lesznek.

Azért is tartom fontosnak, hogy a diákok motivációja megnőjön a versenyek iránt mert, ha rendszeresen járnak versenyekre, már azzal is rengeteget tudnak fejlődni. Fejlődhet például a feladatmegoldási szemléletük, olyan nehézségek feloldása, mint például a szemléletváltás. Minél többen vesznek részt versenyeken, annál sikeresebben beépíthetőek a tanórák menetébe összetettebb, nehezebb feladatok vagy akár versenyfeladatok is, ami emeli a csoport színvonalát és eredményességét a matematika elsajátításába.

## 5.2. Matematikai szorongás

A tanulók munkái alapján következtetéseket vonhatunk le, hogy milyenek a matematikai képességeik. Viszont a munkáik mögött általában nem csak matematikatudásuk áll, hanem sok egyéni tényező is. Ilyen egyéni tényező lehet a pillanatnyi hangulatuk, koncentrációjuk, érzéseik és szorongásuk is. A matematikánál és a természettudományos tantárgyaknál egyes problémák megvizsgálása során az esetek nagy hányadában következtethetünk egy egyértelmű megoldásra. Emiatt létezik jó megoldás és rossz megoldás is. A diákok számára a jó megoldás megtalálásának esélyét szeretnénk maximalizálni, és a rossz megoldások elkerülésnek útjaitól pedig eltávolítani őket. Viszont, ha ezt nem sikerül elérni a tanulónak, ebben az estben szorongás léphet fel náluk.

A rossz eredményeket általában kognitív deficit okozhatja, tehát ha valaki nem eredményes matematikából, akkor a képességei gyengék. Ezt a nehézséget hívják diszkalkuliának, mely a matematikai tanulási nehézségeket és zavarokat foglalja össze. De amellett, hogy a képességben is lépnek fel nehézségek, a matematikai teljesítményt befolyásolhatja a negatív attitűd is. Ezt a negatív attitűdöt hívják matematikai szorongásnak.

A matematikai szorongás vizsgálata és felismerése a 20. századi pszichológiai kutatások eredménye. A század közepén már leírták a „matematikafóbia" jelenséget, de ezt csak később kategorizálták a szorongások egyik fajtájának. A későbbi kutatások alapján viszont megállapítható lett, hogy a matematikai szorongás egy különálló szorongástípus, nem csoportosítható valamely más szorongás alá. A szorongás több fajta magatartásban nyilvánulhat meg. A diákok nyugtalanok megoldás közben, zavarják a társaik munkáját, vagy más esetekben egyáltalán nem foglalkoznak vagy nagyon gyorsan, de hibásan végeznek feladatukkal. A szorongás miatt nem tudnak a feladatvégzésre koncentrálni, így a rossz teljesítményt is okoz. A szorongás az alapműveleteknél általában nem, vagy csak kis mértékben lép fel, sokkal inkább az ennél összetettebb feladatoknál nagyobb mértékű a hatása.

A szorongás mértéke nagyban függ a pedagógus és a szülők szerepétől is. Jelen esetben a pedagógusi szempontokat érdemes vizsgálni. Az egyik fontos tényező, ami kiválthatja, vagy erősítheti a diákoknál a jelenséget, az az időnyomás. Emiatt oda kell figyelni, hogy a különböző feladatok és számonkérések esetén a diákok számára megfelelő időt biztosítsunk és ne hangsúlyozzuk ki az idő jelentőségét. Dolgozatoknál emiatt érdemes több időt adni, hiszen azzal, hogy valaki lassabban tudja megoldani, nem jelenti azt, hogy egyáltatlán nem tudná megoldani az adott problémát. Ha az idő miatt szorongás lép fel, akkor romlik a diák teljesítménye.

Ilyen tényező még a diákok számára tett pozitív visszajelzések gyakorisága és tartalma is. Dicséretet akkor érdemes adni, hogyha a diák magától ér el egy eredményt. A dicséreteket sem szabad túlzásba vinni, hiszen egy idő után már pozitív helyett negatív visszacsatolást ad vissza a túl sok dicséret. Abban az esetben, ha a diáknak nem csak a jó megoldását dicsérjük meg, hanem a helytelen vagy pontatlan megoldásáról is pozitív visszajelzést teszünk, és megfelelően kijavítjuk ezeket, ebben az esetben a szorongás mértéke csökkenthető. Ha ezek elmaradnak, akkor a diákokban egy negatív visszacsatolás fog kialakulni, ami a szorongást kiváltja.

A matematikai szorongás legyőzésére vagy csökkentésre nagy felelősséggel vannak a matematikatanárok, emiatt úgy gondolom, hogy döntő jelentősége van az órai hangulatnak, a diákokhoz való pozitív hozzáállásnak és a változásra való képességnek. Ezeknek az erényeknek az érvényesítésével eredményesebbé tehető a matematikaoktatás is és a diákoknak a matematikához való viszonya is.

## 5.3. Időhiány

A diákok a mai modern világban rengeteg ingernek vannak kitéve. Olyan lehetőségeik vannak, amelyekre szüleiiknek, nagyszüleiiknek lehetőségük sem volt fiatalként. A világban való tájékozódás, különböző tapasztalatszerzések rengeteg időt igényelnek. Emellett a diákoknak még tanulmányi követelményeik is vannak, különböző hobbijaik, amikben tehetségesek és ki tudnak teljesedni. Emiatt az iskolában való részvétel esetén a koncentrációjuk romolhat, ezzel együtt a teljesítményük, tanulási eredményeik is. A különböző területeken való megfelelés rengeteg időt vesz el a diákoktól. Emiatt előfordul, hogy az iskolai tanulmányaik háttérbe szorulhatnak.

Ennek a problémaforrásnak megoldásáról nem sokat tehetünk, de kezelni lehet a fellépő hatásokat. Ebben az esetben az empátia és a megértés nagyon fontos tanári részről. Lehetőséget kell biztosítani a diákok számára az egyéni időbeosztásuk megtaláláshoz, úgy, hogy abból a társai ne szenvedjenek hátrányt. Ezt az egyensúlyt nehéz megtalálni, emellett a tanórai differenciálást is kibővíti még egy további tényezővel. De úgy gondolom, hogyha erre a jelenségre figyelmet fordítok, a diákok eredményességéhez nagymértékben hozzá lehet járulni, és segíteni a kimeneti cél eléréséhez.

# 6. Összegzés

A dolgozatom során néhány versenyfeladatot mutattam be, melyeket úgy gondolom, hogy be lehet építeni a közoktatásba. Ehhez készíttetem feladatsorokat ,melyek elősegítik, megkönnyítik a feladatok megoldását, és rávezetik a helyes gondolatokra a tanulókat. Ezután bemutattam ezen feladatok néhány fontos nehézséget és erősségét. Úgy gondolom, hogy ezáltal rengeteg olyan tudást, ötletet sikerült felhalmoznom, melyet karrierem során alkalmazni tudok számos területen. Nem tartom magamat túlságosan kreatívnak, ezáltal kihívás volt számomra a megfelelő feladatok megtalálása, illetve a megfelelő rávezető feladatok megalkotása. Viszont úgy gondolom, hogyha nem lett volna számomra kihívás, akkor az nem is segített volna a fejlődésemben. Bár egy szakdolgozat célja, hogy az egyetem alatt megszerezett tudás bemutassam, de számomra emellett új dolgok megismerésével, tapasztalatgyűjtéssel is járt, amit szintén bemutatok munkámban.

Ezen felül az elméleti munkámat a gyakorlatban is kipróbáltam. Számomra ezek az órák rendkívül izgalmasan teltek el és rengeteget tanultam belőlük. Mivel úgy tapasztalatam, hogy a diákok is élvezték ezeket az órákat, már emiatt sikeresnek érzem munkámat. Ezen felül néhány olyan problémát is bemutattam, melyre úgy gondolom, hogy a diákokkal való közös együttműködés során elengedhetetlen foglalkozni, és próbálom én is magamat ehhez tartani a későbbiekben.

A matematikaoktatás és maga az oktatás is egy rendkívül szerteágazó tevékenység. Rengetegféleképpen lehet tanítani, és az a szép benne, hogy a temérdek választási lehetőség közül rengeteg jó módszer is van. Szeretnék a továbbiakban is törekedni arra, hogy a lehető legjobb módszereket alkalmazzam, fejlesszem magamat, állítsak magamnak kihívásokat, és lépjem meg azokat. A diákok számára is fontos kihívásokat állítani, hiszen így lesznek céljaik is, mely motivációt nyújt számukra. Egy ilyen kihívás lehet akár egy matematikai versenyfeladat megoldása is. Ahhoz viszont, hogy mindenki meg tudja oldani szüksége lehet segítségre, vagy útmutatásra. Mindenkinek az életében is szükség van segítségre, nem tudunk mindent azonnal megtanulni, emiatt törekedni kell arra, hogy a tanulási folyamat mindél zökkenőmentes legyen.

# Köszönetnyilvánítás

Először is szeretnék köszöntet mondani a konzulensemnek Dr. Fried Katalin tanárnőnek, aki a felmerülő nehézségek ellenére is megértően támogatta munkám megvalósulását.

Emellett szeretnék köszönötet mondani az iskoláknak és a diákoknak is a gyakorlati próbák lehetőségéért és a problémamentes hozzájárulásukért.

Végül szeretnék köszönetet mondani a családomnak, barátaimnak és kollegáimnak, akik rendszeres támogató jelenlétükkel, biztató szavaikkal átsegítettek a nehezebb időszakokon.

# Irodalomjegyzék


[1] Középiskolai Matematikai Lapok 2021. március száma, K. 690. feladat
(https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=K690&l=hu)

[2] Középiskolai Matematikai Lapok 2021. februári száma, C. 1654. feladat
(https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=C1654&l=hu)

[3] Középiskolai Matematikai Lapok 2019. március száma, B. 5018. feladat
(https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=B5018&l=hu)

[4] Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2016/17-es matematikaversenye, II. kategória, 1. forduló, 4. feladat
(https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/tanulmanyi_versenyek/oktv/oktv2016_2017_1ford/mat2_flap1f_oktv_1617.pdf)

[5] Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2018/19-es matematikaversenye, I. kategória, döntő forduló, 2. feladat
(https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/tanulmanyi_versenyek/oktv/oktv2018_2019_donto/mat1_flap_d_oktv_1819.pdf)

[6] Arany Dániel Matematika Tanulóversenyből, 2015/16 tanév, haladók II. kategória, 3. forduló, 2. feladat
(https://www.bolyai.hu/files/AD_2015-16_feladatok.pdf)

[7] Bálint Zsuzsanna, Barcza István, Basa István, Kelemenné Kiss Ilona, Tamásné Kollár Magdolna: Matematika 11., OFI, 2012

[8] Árki Tamás, Konfárné Nagy Klára, Kovács István, Trembeczki Csaba, Dr. Urbán János: Sokszínű Matematika Feladatgyűjtemény 9-10, Mozaik Kiadó, 2009

[9] Árki Tamás, Konfárné Nagy Klára, Kovács István, Trembeczki Csaba, Dr. Urbán János: Sokszínű Matematika Feladatgyűjtemény 11-12, Mozaik Kiadó, 2010

[10] Ambrus András: Bevezetés a matematikadidaktikába. ELTE TTK Egyetemi jegyzet 2004.

[11] Ambrus Gabriella, Munkácsy Katalin, Szeredi Éva, Vásárhelyi Éva, Wintsche Gergely: Matematika módszertani példatár, 2013

[12] Matematika Kerettanterv az általános iskola 5–8. évfolyamára, 2020

(https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/kerettanterv/Matematika_F.docx)

[13] Matematika Kerettanterv az általános iskola 9–12. évfolyamára, 2020

(https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/kerettanterv/Matematika_K.docx)

[14] Bernáth László Krisztián Ágota: A matematikai szorongás és a MAS-UK kérdőív, 2018

(https://www.researchgate.net/publication/322725810_A_matematikai_szorongas_es_a_MAS-UK_kerdoiv)

[15] Geogebra Calculator Suite, az ábrák készítéséhez.

(https://www.geogebra.org/calculator)

[16] Google Forms, a visszajelzési kérdőívek elkészéséhez és kiértékeléséhez.

(https://www.google.com/forms/about/)

A visszajelzési kérdőív az alábbi linken érhető el: https://forms.gle/f8CdpTuR1G3X68aj6

# Mellékletek

## I. melléklet

**1.** Hogyan határozhatjuk meg az összetett számok oszthatósági szabályát? Mi a 12-nek az oszthatósági szabálya?

**2.** Igaz vagy hamis? Válaszodat indokold vagy hozz (ellen)példát!

*a)* Ha egy szám osztható 2-vel, akkor osztható 4-gyel.

*b)* Ha egy szám osztható 4-gyel, akkor osztható 2-vel.

*c)* Ha egy szám osztható 6-tal és 2-vel, akkor osztható 12-vel.

*d)* Ha egy szám osztható 12-vel akkor osztható 6-tal és 2-vel is.

*e)* Ha egy szám többszöröse 5-nek és 10-nek, akkor többszöröse 50-nek is.

*f)* Ha egy szám többszöröse 50-nek, akkor többszöröse 5-nek és 10-nek is.

**3.** Melyik az a legkisebb szám, ami osztható

*a)* 24-gyel és 25-tel?

*b)* 3-mal, 24-gyel és 25-tel?

*c)* 12-vel és 24-gyel?

*d)* 6-tal és 8-cal?

*e)* 6-tal, 8-cal és 9-cel?

**4.** Peti gondolt egy pozitív egész számra és huszonhárom állítást fogalmazott meg a számmal kapcsolatban, melyek közül kettő szomszédos nem igaz, de a többi igaz.

1. Osztható 2-vel.

2. Osztható 3-mal.

3. Osztható 4-gyel.

⋮

23. Osztható 24-gyel.

Peti a lehető legkisebb ilyen számra gondolt. Melyik ez a szám?

## II. melléklet

**1.** Adjuk meg a $2x - y = 11$ és $5x + 4y = 5$ egyenletű egyenesek metszéspontját.

**2.** Két metsző lineáris függvény és az $x$ tengely milyen alakzatot határoz meg? Szemléltessük rajzzal az előző példa egyeneseit felhasználva! Határozzuk meg az $x$ tengellyel vett metszéspontok helyét!

**3.** Adott egy háromszög melynek három oldala rendre: 3 cm, 5 cm és 6 cm.

*a)* Mekkora a háromszög területe?

*b)* Mekkora a háromszög beírható körének a sugara?

**4.** Hány olyan kört lehet rajzolni, ami érinti a háromszög **mindhárom oldalegyenesét**? Próbálj meg válaszolni a kérdésre mielőtt elolvasnád a következő részt!

Ha megtaláltad mind a négyet, szép munka! A következőkben a háromszög hozzáírt köreiről olvashatsz.

A háromszög hozzáírt körei azok a körök, melyek a háromszög egyik oldalát és másik két oldalalának meghosszabbítását érintő körök. A háromszög mindhárom oldalához húzható egy-egy, így összesen három van belőlük. A hozzáírható körök középpontját az oldallal szemközti belső szögfelező és a másik két külső szög szögfelezőinek a metszéspontja határozza meg.

A háromszög beírt körének sugarát a már ismert $r = \frac{T}{s}$ összefüggésből meg tudjuk határozni. Viszont egy adott oldalhoz hozzáírt körök sugara megadható hasonló módon:

$$r_a = \frac{T}{s-a} \quad r_b = \frac{T}{s-b} \quad r_c = \frac{T}{s-c}$$

**5.** Adjuk meg azoknak a köröknek a sugarát, amelyek érintik az $f(x) = \dfrac{3x-6}{4}$ és a $g(x) = \dfrac{28-4x}{3}$ függvények grafikonját, valamint az $x$ tengelyt.

Kérlek, töltsd ki a következő kérdőívet, ha végeztél a feladatokkal!