NYILATKOZAT

Név: Tóth Levente

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika Bsc

NEPTUN azonosító: TIU2VQ

Szakdolgozat címe:
Az Erdős-Ko-Rado tétel algebrai változatai

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2024.01.01.

Tóth Levente

a hallgató aláírása

Az Erdős-Ko-Rado tétel algebrai változatai

Szerző: Tóth Levente

Témavezető: Somlai Gábor

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematika BSc
Alkalmazott matematikus szakirány

Budapest, 2023

Köszönetnyilvánítás

Hatalmas köszönettel tartozom a témavezetőmnek, Somlai Gábornak, aki szakértelmével és észrevétleivel segítette szakdolgozatom elkészítését. Külön meg szeretném köszönni neki végtelen türelmét és megértését, amivel felém fordult.

Köszönöm továbbá a barátaimnak, hogy végig támogattak és hittek bennem. Végül pedig köszönöm Petyus Ancsának, aki mindig átlendített a nehezebb pillanatokon.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Az Erdős-Ko-Rado tétel (későbbiekben csak EKR) az extremális halmazelmélet egyik legfontosabb tétele. Halmazokra és halmazrendszerekre bevezetünk egy metszés fogalmat és a tétel megválaszolja azt a kérdést, hogy bizonyos feltételek mellett mi a maximális metsző halmazrendszer mérete n darab elemen.

A tételnek számos bizonyítása van, ezek közül nézünk át néhányat, illetve a bizonyításban használt módszereket is átnézzük. Megnézzük például a ciklikus permutációs módszert, amit Katonának köszönhetünk. Ez a legelterjedtebb bizonyítási módja a tételnek, melynél ügyesen számolunk ciklikus permutációkat. Átbeszélünk még balra tolást, illetve árnyékokat használó módszereket is. Balra tolással be is bizonyítjuk a tételt úgy, ahogy eredetileg kimondták Erdősék Sperner-rendszerekben.

Nemcsak halmazrendszerekre, hanem permutációkra is meg lehet fogalmazni egy metszés definíciót. Így érkezünk meg egy Erdős-Ko-Rado féle tételhez, mely azt mondja, hogy az n-edfokú szimmetrikus csoport metsző részhalmazainak méretét korlátozza egy pont stabilizátorának rendje és a maximális méretű metsző halmazok egy pont stabilizátorának mellékosztályai. A tétel bizonyításához bevezetünk egy úgynevezett rögzítés operációt, melynek megvizsgáljuk néhány tulajdonságát, amik segítségével be tudunk bizonyítani egy EKR-féle tételt.

Végül áttérünk a szimmetrikus csoport részcsoportjaira, azaz a permutációcsoportokra. Egy permutációcsoportot EKR-tulajdonságúnak nevezünk, ha pontok stabilizátorai maximális metsző halmazok. Bevezetjük a metszési sűrűség fogalmát, ami egy maxiális metsző halmaz mérete osztva egy pont stabilizátorának méretével. Ennek a segítségével mutatjuk be, hogy bizonyos permutációcsoportok milyen távol vannak attól, hogy EKR-tulajdonságúak legyenek.

1 Alapfogalmak

1.1 Alapfogalmak és tételek

Ebben a fejezetben bevezetjük a szükséges alapfogalmakat, valamint az Erdős-Ko-Rado tételhez kapcsolódó tételeket [1] és [2] alapján. Végezetül bebizonyítjuk a tételt az eredeti formájában.

1.1.1. Definíció Egy $V = \{1, ..., n\}$ halmaz feletti $F = \{A_1, ..., A_m\}$ halmazrendszeren a V részhalmazainak egy olyan halmazát értjük, melyre $\forall i = 1...m$ A_i részhalmaza V-nek.
Azaz F részhalmaza V hatványhalmazának.

1.1.2. Definíció Legyen $F = \{A_1, ..., A_m\}$ egy $V = \{1, ..., n\}$ feletti halmazrendszer, $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Ha $\forall i = 1...m$, $|A_i| = k$ akkor F-et k-reguláris halmazrendszernek hívjuk. Használni fogjuk erre az $F \in \binom{V}{k}$ jelölést is.

1.1.3. Definíció Legyen F halmazrendszer, illetve $t \geq 1$ egész szám. F-et t-metszőnek nevezzük, ha $\forall A_i, A_j \in F$- re $|A_i \cap A_j| \geq t$.

Példa Egy egyszerű példa egy metsző halmazrendszerre egy alaphalmazon, az az egy adott közös elemet tartalmazó halmazok részhalmazok halmaza. Az ilyen metsző halmazrendszereket triviálisan metszőknek nevezzük.

1.1.4. Állítás Legyen $F = \{A_1, ..., A_m\}$ egy $V = \{1, ..., n\}$ feletti halmazrendszer, amire $\forall A_i, A_j \in F$- re $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Ekkor $|F| \leq 2^{n-1}$.

Bizonyítás Legyen $A \subset V$. A skatulyaelv alapján állítsuk párba az $(A, V \backslash A)$-kat. Ezek diszjunktak, tehát a 2^{n-1} pár valamennyiéből legfeljebb egy darab lehet eleme F-nek, amiből $|F| \leq 2^{n-1}$. ■

1.1.5. Állítás Legyen $F = \{A_1, ..., A_m\}$ $m < 2^{n-1}$ metsző halmazrendszer $V = \{1, ..., n\}$ felett. Ekkor kiegészíthetjük F-et V részhalmazaival, oly módon, hogy $|F| = 2^{n-1}$.

Bizonyítás Legyen F metsző halmazrendszer. Az előző állítás bizonyítása alapján, alkossuk meg $\forall A \subset V$ halmazokra az $(A, V \backslash A)$ párokat. Az A_i $i = 1...m$ halmazok m darab különböző párban jelennek meg.

Legyen $(A, V \backslash A)$ olyan, hogy $A \neq A_i$ illetve $V \backslash A \neq A_i$ $i = 1...m$. Ha A metszi F minden elemét, akkor A-t F-hez hozzávéve tudjuk F-et bővíteni. Ha nem metszi, akkor $\exists i : A_i \cap A \neq \emptyset$, ekkor $A_i \subseteq V \backslash A$. Így $V \backslash A$-t bevéve bővíthetjük F-et. Ezt a folyamatot addig ismételhetjük, amíg $|F| = 2^{n-1}$. ■

Az itt bemutatott ötletekkel be tudjuk bizonyítani az Erdős-Ko-Rado tétel egy speciális esetét.

1.1.6. Tétel (Erdős-Ko-Rado, $k = \frac{n}{2}$) Legyen $n, k \in \mathbb{N}$, $k = \frac{n}{2}$ $F = \{A_1, ..., A_m\}$ egy k-uniform, metsző halmazrendszer V felett, $|V| = n$. Ekkor $|F| \leq \binom{n-1}{k-1}$.

Bizonyítás $n = 2$-re könnyű számolással kijön.

Nézzük most az $n \geq 3$ esetet. Adott $F = \{A_1, ..., A_m\}$. Alkossuk meg az $(A_i, V \backslash A_i)$ párokat, ekkor $V \backslash A_i \notin F$. Ez most $\binom{n}{k}$ darab pár, tehát $|F| \leq \frac{1}{2}\binom{n}{k}$. Ebből átalakításokkal megkapjuk a kívánt eredményt.

$$\frac{1}{2}\binom{n}{k} = \frac{n}{2k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} = \frac{n}{2k}\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$$

Az utolsó egyenlőségnél használtuk fel a $k = \frac{n}{2}$ feltételt. Összevetve az egyenlőségeket kapjuk, hogy $|F| \leq \binom{n-1}{k-1}$ ■

Most lássuk be az Erdős-Ko-Rado tétel egyik legismertebb alakját.

1.1.7. Tétel (Erdős-Ko-Rado) Legyen $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq \frac{n}{2}$ $F = \{A_1, ..., A_m\}$ egy k-uniform, metsző halmazrendszer V felett, $|V| = n$. Ekkor $|F| \leq \binom{n-1}{k-1}$.

Bizonyítás (Katona) Legyen π_i olyan halmaz, melyben V elemeinek az olyan ciklikus permutációi vannak, amiben A_i elemei egymás mellett vannak. Minden A_i-re $k!(n-k)!$ darab ilyen permutáció van, mivel A_i elemeit $k!$ féleképpen tudjuk sorba helyezni, a maradék elemeket pedin $(n-k)!$ féleképpen, tehát $|\pi_i| = k!(n-k)!$. Az összes ciklikus permutációk száma pedig $(n-1)!$.

Adott π ciklikus permutáció legjeljebb k darab halmazban jelenhet meg a $\pi_1 ... \pi_m$ halmazok között, mivel ha benne van néhányban, akkor létezik olyan A_i, amelyben az összes többi A_j kezdőelemének benne kell lennie. Ebből

$$\sum_{i=1}^{m} |\pi_i| \leq k(n-1)!$$

Azt kaptuk, hogy $\sum_{i=1}^{m} |\pi_i| = m\, k!\, (n-k)! \leq k\, (n-1)!$ amiből

$$m \leq \frac{k\, (n-1)!}{k!\, (n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}$$

■

Mostantól az Erdős-Ko-Rado tételre EKR-ként fogunk hivatkozni.

1.1.8. Következmény Legyen $n, k \in \mathbb{N}$, $k < \frac{n}{2}$ $F = \{A_1, ..., A_m\}$ metsző halmazrendszer V felett, amire $\forall A \in F$: $|A| \leq k$, $|V| = n$. Ekkor $|F| \leq \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-2} + ... + \binom{n-1}{0}$.

Bizonyítás Bontsuk fel F-et részhalmazai elemszáma szerint, azaz $F = F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_k$. Ekkor az F_i halmazokra alkalmazható az EKR, tehát $\forall i = 1...k$: $|F_i| \leq \binom{n-1}{i-1}$. Ezeket összeadva kapjuk, hogy

$$|F| \leq \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-2} + ... + \binom{n-1}{0}$$

■

1.2 Balra tolás

Az EKR eredeti bizonyítása ezzel az eszközzel történt. Ezen kívül erős eszköz az extremális halmazelméletben. Ebben a fejezetben aktívan felhasználjuk [1]-et és [2]-t.

1.2.1. Definíció Egy $F \subset 2^V$ halmazrendszerre $1 \leq i < j \leq n$, definiáljuk $S_{ij}(F) = \{S_{ij}(A) : A \in F\}$-et, ahol

$$S_{ij}(A) = \begin{cases} A' = (A \backslash \{j\}) \cup \{i\} & \text{ha } j \in A \; i \notin A \; és \; A' \notin F \\ A, & \text{különben} \end{cases} \tag{1}$$

Ekkor S_{ij}-t balra tolásnak nevezzük. $S_{ij}(F) = \{S_{ij}(A) : A \in F\}$.

Nézzük meg a balra tolás néhány tulajdonságát.

1.2.2. Állítás

1. $|S_{ij}(A)| = |A|$,
2. $|S_{ij}(F)| = |F|$,
3. ha F metsző, akkor $S_{ij}(F)$ is,
4. ha F k-uniform, akkor $S_{ij}(F)$ is,
5. ha F t-metsző, akkor $S_{ij}(F)$ is.

Bizonyítás 1., 2. és 4. következik a definícióból.

Ahhoz, hogy 3-at bebizonyítsuk, tegyük fel, hogy léteznek $A, B \in F$, amikre $S_{ij}(A) \cap S_{ij}(B) = \emptyset$. Abból, hogy $A \cap B \neq \emptyset$ a feltételek miatt, valamint az egyetlen elem amit törlünk az a j, következik, hogy $A \cap B = \{j\}$. Ha A-t és B-t is megváltoztattuk volna a balra tolás alatt, akkor ebből $S_{ij}(A) \cap S_{ij}(B) = \{i\}$ következne, ami ellentmond a feltevésünknek. Emiatt, feltehetjük, hogy $S_{ij}(A) = A$ és $S_{ij}(B) = (B \backslash \{j\}) \cup \{i\}$.

Ha feltesszük, hogy $i \in A$, akkor azt kapjuk, hogy $S_{ij}(A) \cap S_{ij}(B) = \{i\}$, ami megint ellentmondás. Az egyetlen lehetőség, ami maradt az az, hogy A-t azért nem változtattuk meg, mert a balra tolt változata már benne volt F-ben: $A' = (A \backslash \{j\}) \cup \{i\} \in F$. Ekkor viszont $A' \cap B = A \cap S_{ij}(B) = S_{ij}(A) \cap S_{ij}(B) = \emptyset$, ami ellentmondás, mivel F metsző halmazrendszer. ■

Ahhoz, hogy 6-ot bebizonyítsuk, legyen $A_1, A_2 \in S_{ij}(F)$ tetszőleges, valamint legyen $B_1, B_2 \in F$ olyan, hogy $S_{ij}(B_1) = A_1$ és $S_{ij}(B_2) = A_2$. Mivel $|A_1 \cap A_2| \geq |B_1 \cap B_2|$-ből következne az, hogy $|A_1 \cap A_2| \geq t$ az F t-metszőségéből, ezért feltehetjük, hogy $|A_1 \cap A_2| < |B_1 \cap B_2|$.

Ekkor $j \in B_1 \cap B_2$, mivel az egyetlen elem amit eltávolíthatunk a halmazból az a j. A B_1, B_2 halmazok közül pontosan az egyiket tolhatjuk csak el, tehát i nem lehet mindkettőnek eleme, ebből $\{i, j\} \cap A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Tegyük fel, hogy $j \notin A_1$. Ekkor $A_1 = S_{ij}(B_1) = (B_1 \backslash \{j\}) \cup \{i\}$ és $A_2 = B_2$. Tudjuk, hogy $j \in B_2$ és $i \notin B_2$, viszont nem toltuk el, ami csak azért lehet ha $B_3 = (B_2 \backslash \{j\}) \cup \{i\} \in F$, amiből

$$|A_1 \cap A_2| = |B_1 \cap B_3| \geq t$$

■

1.2.3. Definíció Ha $S_{ij}(F) = F$ $\forall 1 \leq i < j \leq n$-re, akkor F-et balra tolt, vagy stabil halmazrendszernek nevezzük.

Könnyű látni, hogy ha elég tolást csinálunk, akkor egy idő után stabil halmazrendszerhez jutunk.

1.2.4. Állítás Legyen $F \subset 2^V$ egy k-uniform, t-metsző, balra tolt halmazrendszer. Ekkor $\forall A_1, A_2 \in F$

$$|A_1 \cap A_2 \cap \{1, ..., 2k - t\}| \geq t$$

Bizonyítás Lengyenek $A_1, A_2 \in F$ olyanok, melyekre $|A_1 \cap \{1, ...2k - t\}|$ maximális, de $|A_1 \cap A_2 \cap \{1, ...2k - t\}| > t$. Mivel F t-metsző, ezért $\exists j \in A_1 \cap A_2$, hogy $j > 2k - t$, különben teljesülne az eredeti állítás, tehát $F_1 \cup A_2 \not\subset \{1, ..., 2k - t\}$. Ekkor $\exists i \in A_1 \cup A_2$ amire $i \geq 2k - t$, különben $\{1, ...2k - t \ = A_1 \cup A_2$, mivel feltettük F-ről, hogy k-uniform és t-metsző. Ekkor elvégezhetjük az S_{ij} balra tolást, mellyel az A_1 helyett az $(A_1 \backslash \{j\}) \cup \{i\} \in F$, mivel F balra tolt. Ez ellentmondásban van azzal, hogy $|F_1 \cap \{1, ..., 2k - t\}|$ maximális, ezzel az állítást beláttuk. ■

A fenti állítás kritikus szerepet fog játszani az EKR következő bizonyításában.

Új bizonyítás az EKR-re balra tolással

Bizonyítás Bizonyítsuk k-szerinti indukcióval. Legyen $n \geq 2k$ és bontsuk szét az állítást alesetekre:

(i) $k = 1$: Az állítás triviális.

(ii) $k = 2n$: Az állítást már a korábbiakban beláttuk.

(iii) $n > 2k$: A balra tolás tulajdonságai miatt feltehetjük, hogy F balra tolt. Legyen $F_i = \{A \cap \{1, ..., 2k\} : A \in F, |A \cap \{1, ..., 2k\}| = i\}$.

Az 1.2.4.-es állítás alapján F_i metsző $t = 1$-re. Az indukció miatt tegyük fel, hogy $|F_i| \leq \binom{2k-1}{i-1}$ $i = 0, .., k-1$-re, $i = k$-ra pedig az EKR $n = \frac{k}{2}$. Adott $G \in F_i$-hez legfeljebb $\binom{n-2k}{k-i}$ darab olyan $A \in F$ elem lehet, melyre $A \cap \{1, ..., 2k\} = G$, mert a maradék $n - 2k$ elem közül választunk ki $k - i$ elemet, az A i darab eleméhez. Ebből

$$|F| \leq \sum_{1 \leq i \leq k} |F_i| \binom{n-2k}{k-i} \leq \sum_{1 \leq i \leq k} \binom{2k-1}{i-1} \binom{n-2k}{k-i}$$

felismerhetjük, hogy

$$\sum_{1 \leq i \leq k} \binom{2k-1}{i-1} \binom{n-2k}{k-i} = \binom{n-1}{k-1}$$

amivel az állítást beláttuk. ■

Tudunk balra tolással egy másik bizonyítást is adni az EKR-re.

Bizonyítás Ugyanúgy indukciós a bizonyítás, azonban most n szerint. Bontsuk megint esetekre

(i) $n = 2k$: ezt az esetet már láttuk

(ii) $n > 2k$: Legyen $F_0 = F$, $F_i = S_{in}(F_{i-1})$, $i = 1, ..., n-1$. A balra tolás tulajdonságaiból tudjuk, hogy $|F| = |F_{n-1}|$, és F_{n-1} k-uniform és metsző halmazrendszer.

Legyen $G = \{A \in F_{n-1} : n \notin A\}$, $H = \{A \backslash \{n\} : n \in A \in F\}$. Ekkor, $|F| = |G| + |H|$, $G \subset H$, valamint az indukció miatt $|G| \leq \binom{n-2}{k-1}$. Ebből következően elég, ha $|H| \leq \binom{n-2}{k-2}$-et belátni, hogy megmutassuk, hogy $|F| \leq \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} = \binom{n-1}{k-1}$. A H halmazról tudjuk, hogy $(k-1)$-uniform $\{1, ..., n-1\}$ felett, tehát az indukciós állításból következik a kívánt felső korlát, ha bebizonyítjuk, hogy H metsző. ■

1.2.5. Állítás H metsző.

Bizonyítás Tegyük fel, hogy nem az, azaz létezik H_1, $H_2 \in H$ diszjunkt halmaz. Mivel $|H_1 \cup H_2| = 2(k-1) < n-1$, ezért létezik $1 \leq i < n$, amire $i \notin H_1 \cup H_2$. Definíció szerint, az $A = H_1 \cup \{n\} \in F_{n-1}$. Mivel $n \in A$ ezért $A \in F$, amiből kapjuk, hogy $\forall i$: $1 \leq i \leq n-1$-re $A \in F_{i-1}$ fennáll. Ez azt jelenti, hogy $S_{in}(A) = A$, azaz A-t nem toltuk el az S_{in} balra tolásnál. Ez csak akkor lehetséges, ha $(A \backslash \{n\}) \cup \{i\} = (H_1 \cup \{i\}) \in F_{i-1}$, amiből $(H_1 \cup \{i\}) \in F_{n-1}$-et kapjuk. Ebből $(H_1 \cup \{i\}) \cap (H_2 \cup \{n\}) = \emptyset$, ami ellentmondás, mert mindkettő eleme F_{n-1}-nek, mégsem metszik egymást. ■

1.3 Az eredeti Erdős-Ko-Rado tétel

Eredetileg az Erdős-Ko-Rado tétel Sperner-rendszerekre lett kimondva, ebben a fejezetben kimondjuk és bebizonyítjuk e rendszerekre a tételt. Ezen fejezet főleg [3] alapján készült.

1.3.1. Definíció Legyen F halmazrendszer. Ha $\forall A, B \in F$, $A \neq B$-re $A \not\subset B$ és $B \not\subset A$, akkor F-et Sperner-rendszernek nevezzük.

1.3.2. Tétel (EKR) Legyen $\{A_1, ..., A_m\}$ Sperner rendszer egy V, $|V| = n$ halmaz felett, hogy $\forall i : |A_i| \leq k$, $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ és $\forall i, j : |A_i \cap A_j| \geq 1$. Ekkor $m \leq \binom{n-1}{k-1}$ és ha $\exists i : |A_i| < k$, akkor $m < \binom{n-1}{k-1}$.

Bizonyítás Bontsuk szét két esetre:

1. eset: Legyen $\forall i : |A_i| = k$.

A $k = \frac{n}{2}$-es esetet láttuk már az 1.1.6. tételnél. A $k < \frac{n}{2}$-es esetet bontsuk két további esetre:

(i) Tegyük fel, hogy $\forall i : \forall \lambda \in V \backslash A_i$-re, $n \in A_i \in F$ esetén $A_i \backslash \{n\} \cup \{\lambda\} \in F$. Ez azt jelenti, hogy $S_{\lambda n}(A_i) = A_i$. Alkalmazzunk indukciót n szerint. Rendezzük úgy az A_i halmazokat, hogy valami $m_0 < m$, $i \leq m_0$ esetén $n \in A_i$, $m_0 < i \leq m$ esetén pedig $n \notin A_i$.

Definiáljunk $B_i = A_i \backslash \{n\}$ halmazokat, ha $i \leq m_0$. Mivel $j < i < m_0$-ra $|A_j \cup A_i| < 2k < n$, ezért létezik $\lambda \in (V \backslash A_i) \cap (V \backslash A_j)$. Mivel a feltétel szerint $B_j \cup \{\lambda\} \in F$, ezért tetszőleges i, j-re $B_i \cap B_j = (B_j \cup \{\lambda\}) \cap B_i = (B_j \cup \{\lambda\}) \cap A_i$. Mivel a metszetben nincs benne se λ, se n, ezért $B_i \cap B_j = (B_j \cup \{\lambda\}) \cap A_i \neq \emptyset$, mert ezek F-beli elemek metszetei, tehát azt kaptuk, hogy $\{B_1, ..., B_{m_0}\}$ is metsző halmazrendszer $V \backslash \{n\}$ felett. Vegyük észre, hogy $|B_i| = |A_i| - 1$. $|B_i| = k - 1 < \frac{n}{2} - 1$, $2(k-1) < n - 2 < n - 1$, tehát tudjuk alkalmazni az indukcós feltevést:

$$m_0 \leq \binom{n-2}{k-2} = \binom{(n-1)-1}{(k-1)-1}$$

Amikor $m_0 < i \leq m$, akkor hasonlóan $\{A_{m_0}, ..., A_m\}$ lesz metsző halmazrendszer $V \backslash \{n\}$ felett. Itt $|V \backslash \{n\}| = n - 1$, $\forall A_i : |A_i| = k$, tehát $m - m_0 \leq \binom{n-2}{k-1}$. Ebből

$$m = m_0 + (m - m_0) \leq \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$$

azaz teljesül az állítás.

(ii) Ebben a részben be akarjuk látni, hogy ha (i) nem telljesül, akkor ellentmondást kapunk.

Legyen k, n, m rögzített és definiáljuk az $f(A_1, ..., A_m)$ függvényt, mely a minimuma az $s_1 + ... + s_m$-nek, ahol s_i az a hozzátartozó A_i elemeinek az összege.

Tegyük fel, hogy $\exists A_i \in F$, hogy $\exists \lambda \in V \backslash A_i$, $\lambda < n$, hogy $n \in A_i$ és $((A_i \backslash \{n\}) \cup \{\lambda\}) \notin F$. Legyen $1 \leq m_0 \leq m_1 \leq m_2 \leq m$ felosztás olyan, hogy:

- $m_2 \leq i \leq m$: $n \notin A_i$, ekkor $B_i := A_i$,
- $m_1 \leq i \leq m_2$: $n \in A_i$, $\lambda \in A_i$ ekkor $B_i := A_i$,
- $m_0 \leq i \leq m_1$: ekkor $S_{\lambda n}(A_i) \neq A_i$, $n \in A_i$, $\lambda \notin A_i$ ekkor $B_i := A_i$ és $C_i := ((A_i \backslash \{n\}) \cup \{\lambda\}) \in F$
- $i \leq m_0$: ekkor $S_{\lambda n}(A_i) \neq A_i$, $n \in A_i$, $\lambda \notin A_i$, tehát $B_i := ((A_i \backslash \{n\}) \cup \{\lambda\}) \notin F$

Így a $\{B_1, ..., B_m\}$ halmazrendszerről kell megmutatnunk, hogy metsző ahhoz, hogy ellentmondásra jussunk, ehhez az kell, hogy $\forall i \neq j : B_i \cap B_j \neq \emptyset$.

Ha $j < i < m_0$, akkor $B_i \cap B_j = \{\lambda\}$.

Ha $m_0 \leq j < i$, akkor $A_i = B_i \in F$, $A_j = B_j \in F$, tehát ekkor is teljesül $B_i \cap B_j \neq \emptyset$.

Ha $j < m_0 \leq i$, akkor lehet:

- $m_0 \leq i < m_1$, ekkor $A_j, C_i \in F$, tehát $A_j \cap C_i \neq \emptyset$, így létezik μ közös elemük: $\mu \in A_j, C_i$. Ekkor $\mu \neq n$ és $\mu \neq \lambda$, mert az egyik A_j-ben, a másik C_i-ben van benne. Ebből $\mu \in A_i = B_i$, tehát $\mu \in B_i \cap B_j \neq \emptyset$.
- $m_1 \leq i < m_2$: ekkor $\lambda \in B_j$, $\lambda \in A_i$, amiből $\lambda \in B_j$, tehát $B_i \cap B_j \neq \emptyset$
- $m_2 \leq i < m$, ez hasonló az $m_0 < i \leq m_1$ esethez.

Beláttuk tehát, hogy $\{B_1, ..., B_m\}$ halmazrendszer metsző, ezek alapján

$$f(B_1, ..., B_m) - f(A_1, ..., A_m) = m_0(-n + \lambda) < 0$$

amivel ellentmondásra jutottunk, hiszen feltettük, hogy $f(A_1, ..., A_m)$ a minimum.

2. eset: Ekkor $\{A_1, ..., A_m\}$ nem k-uniform.

Legyen $k_0 = min|A_i|$, $i = 1, ..., n$, hogy $|A_i| = k_0 < k$. Ezt teljes indukcióval fogjuk bizonyítani $k - k_0$-ra. Feltehető, hogy $|A_i| = k_0$, ha $i \leq m_0$ és $|A_i| > k_0$, ha $1 \leq m_0 \leq i \leq m$. Definiáljuk a $H_1, ..., H_s$ halmazokat, amikre létezik i: $i \leq m_0$, $A_i \subset H_j \subset V$, $|H_j| = k_0 + 1$. A folytatáshoz szükségünk lesz egy lemmára.

1.3.3 Lemma (Sperner) Vegyük az $\{A_1, ..., A_{m_0}\}$-at és legyen $i \leq m_0$, így a felntiek miatt $|A_i| = k_0$. Ekkor legfeljebb $m_0(n - k_0)(k_0 + 1)^{-1}$ darab ilyen H_i halmaz létezik.

Bizonyítás Vegyünk m_5 darab a feltételeknek megfelelő H_j halmazt, melyek így Sperner-rendszert alkotnak. Számoljuk össze az (i, H_j) párokat kétféleképpen és megkapjuk, hogy $m_0(n - k_0)(k_0 + 1)^{-1}$. Minden i-hez tartozik egy A_i halmaz, amiből m_0 darab van és ehhez keresünk egy darab A_i-n kívüli elemet, hogy H_j-t kapjunk, így kapjuk meg a bal oldalát az egyenlőltenségnek. A jobb oldalon a H_j-hez számoljuk a párokat, feltettük, hogy ezekbők m_5 darab van. Ebből $|H_j| = |A_i| + 1$ darab eleméből kell kivenni $k_0 + 1$ darabot, tehát:

$$m_0(n - k_0)(k_0 + 1)^{-1}$$

■

Folytathatjuk a 2. eset bizonyítását. Ekkor $k < \frac{n}{2}$ miatt $(k_0 + 1) - (n - k_0) \leq 2(k - 1) - (n - 1) \leq 0$. A lemma nyomán $m_0 \leq m_5$, $\{A_{m_0}, ..., A_m, H_1, ..., H_{m_5}\}$ Sperner-rendszer, ahol a legkisebb halmaz $\{A_{m_0}, ..., A_m\}$-ben $k_0 + 1$ elemű. Az indukció miatt

$$m_5 + (m - m_0) \leq \binom{n-1}{k-1}$$

és mivel $m_0 \leq m_5$, ezért

$$m \leq m_5 + (m - m_0)$$

■

1.4 Történelmi és technikai áttekintés

Ebben a részben összefoglaljuk az EKR bizonyításaiban használt módszereinket, illetve vázlatosan ismertetünk egy új bizonyítást is, rövid történeti ismertetéssel egybefűzve. Az eredeti EKR tételt 1938-ban bizonyították Erdősék, a bizonyítást azonban csak 1961-ben [15] publikálták, mert eleinte nem tudták, hogy mennyire szignifikáns tételt fedeztek fel. Ez annak is köszönhető volt, hogy akkoriban nem volt nagy érdeklődés a téma iránt.

A bizonyításban használták a balra tolás technikáját, amit már láttunk hogy működik. Ahogy a név is sugallja, azért hívják balra tolásnak, mert azt csináljuk, hogy kicserélünk egy elemet egy tőle "balra" levő elemmel, amennyiben az így keletkezett halmaz nincs még benne a halmazrendszerben. Érdemes megnézni miért volt hasznos használni.

Akár Sperner-rendszerekről beszélünk, akár metsző halmazrendszerekről, nehéz elképzelni, hogy hogyan néznek ki ezek a halmazok. A balra tolás arra ad lehetőséget, hogy legyen struktúránk ahhoz, hogy ezeket kezeljük. Ezt mutatja az 1.2.2. állítás, melyik azt mondja, hogy a balra tolás megőriz számunkra fontos tulajdonságokat, például hogy nem változik a halmazok elemszáma, illetve a metszőséget is tartja.

Továbbá, a balra tolást tudjuk iterálni és véges lépésben eljuthatunk egy balra tolt halmazrendszerhez, ami szintén tartja a számunkra fontos tulajdonságokat. Az 1.2.4. tétel az ilyen balra tolt, t-metsző és k-uniform halmazrendszereknek írja le azt a tulajdonságát, hogy bármely két halmaz metszete az első $2k - t$ elem között található. Ezt fel is használtuk a tétel alatt levő bizonyításban.

Más módszer is a rendelkezésünkre áll a bizonyításhoz. Katona 1972-ben publikálta az EKR tétel legismertebb bizonyítását. Ez a bizonyítás azért ennyire elterjedt, mert egyszerű és elegáns. Ciklikus permutációk felhasználásával számolunk permutációkat és ezzel jutunk el a felső korláthoz. Azok a ciklikus permutációk érdekelnek minket, melyeknél valamelyik A_i elemei egymás mellett vannak. Mivel metsző a halmazrendszer, ezért ha másik A_j halmaz elemei is egymás mellett vannak ebben a permutációban, akkor nem lehet távol az A_i-től, hiszen metszenie kell nekik egymást. Ez azt jelenti, hogy egy adott ciklikus permutációban legfeljebb k darab A_i-nak lesznek egymás mellett az elemei, ez a lényege a bizonyításnak, innentől csak megszámoljuk a permutációkat.

Ennél többet is tud az EKR. Ha elhagyjuk most a halmazrendszereket, és tekintünk egy családot, akkor erre is mondhatunk ki egy EKR tételt. Egy család annyiban különbözik egy halmazrendszertől, hogy ugyanaz az elem többször is szerepelhet benne. Ugyanúgy definiáljuk metszőséget illetve az uniformságot. Egy $V = \{1, ..., n\}$ alaphalmaz felett egy $\{A_1, ..., A_m\}$ családot felfoghatunk egy hipergráfnak is (a halmazrendszereket pedig egyszerű hipergráfoknak, hiszen nincsenek megengedve a párhuzamos és hurokélek). Az ilyen k-uniform, metsző családokat nevezzük k-gráfnak is.

Ekkor az Erdős-Ko-Rado tételt le tudjuk vezetni a Kruskal-Katona [1] tételből árnyékok segítségével. Legyen $\mathbf{F}$ egy k-gráf és legyen adott l, $1 \leq l \leq k$ egész szám. Ekkor az $\mathbf{F}$ l-árnyéka a következő:

$$\sigma_l(\mathbf{F}) = \{G : |G| = l,\ \text{úgy, hogy létezik } F \in \mathbf{F},\ \text{melyre } G \subset F\}.$$

Azaz a család egy elemeinek az l-uniform részhalmazai vannak benne az árnyékban. Egy elemnek $\binom{k}{l}$ darab ilyen részhalmaza van, amiből kapunk egy felsőkorlátot $\sigma_l(\mathbf{F})$-re: $|\sigma_l(\mathbf{F})| \leq \binom{k}{l}|\mathbf{F}|$. A Kruskal-Katona tétel, amit Kruskal és Katona egymástól függetlenül bizonyítottak be 1963-ban [16] illetve 1968-ban [17], pedig egy alsó korlátot ad erre.

A tétel azt mondja ki, hogy adott egy $\mathbf{F}$ k-gráf, amire $|\mathbf{F}| \geq \binom{x}{k}$, ahol x egy valós szám (a binomiális együtthatót ki lehet terjeszteni egészekre például a Gamma függvény segítségével). Ekkor

$$|\sigma_l(\mathbf{F})| \geq \binom{x}{l} \text{fennáll minden } 0 \leq l \leq k\text{-ra.}$$

Tegyük fel, hogy $\mathbf{F}$ k-uniform metsző, $n \geq 2k$, viszont nem teljesül az EKR, tehát $|\mathbf{F}| > \binom{n-1}{k-1}$. A fő ötlete a bizonyításnak az, hogy definiáljuk a $\mathbf{G} = \{V \backslash F : F \in \mathbf{F}\}$ halmazt, mely $n-k$ uniform, mivel $\mathbf{F}$ k-uniform. Ekkor, a Kruskal-Katona tétel miatt $\mathbf{G}$ k-árnyékára igaz, hogy $|\sigma_k(\mathbf{G})| \geq \binom{n-1}{k}$, a definícióból pedig tudjuk azt is, hogy ez egy k-uniform halmaz, melyből egy n-elemű alaphalmazon lehet összesen $\binom{n}{k}$. Most ha összeadjuk $\mathbf{F}$ és $\sigma_l(\mathbf{G})$ elemszámát, akkor ennél többet kapunk:

$$|\mathbf{F}| + |\sigma_l(\mathbf{G})| > \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k},$$

tehát van közös elemük. Ez vezet ellentmondásra azzal, hogy $\mathbf{F}$ metsző. A részletes bizonyítás megtalálható [2]-ben.

Az EKR-t be lehet bizonyítani Kneser-gráfok segítségével is. A $K(n, k)$ Kneser-gráf egy olyan gráf, melynek a csúcsai megfelelnek egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak, ahol két csúcs össze van kötve, ha a csúcsokhoz tartozó halmazok diszjunktak. Egy

$K(n,k)$ Kneser-gráfban minden csúcsnak pontosan $\binom{n-k}{k}$ darab szomszédja van, tehát reguláris. Ekkor egy metsző halmazrendszer független ponthalmazként jelenik meg ebben a gráfban. A maximum független ponthalmaz elemszámára kaphatunk felsőkorlátot a gráf adjacencia mátrix sajátértékeit felhasználva.

Hoffman felső korlátját [18] fogjuk használni. Egy n-csúcsú $G = (V, E)$ gráf $A = (a_{ij})$ adjacencia mátrixa az egy olyan mátrix, melyben az oszlopok illetve a sorok indexei megfelelnek egy-egy csúcsnak a gráfban, és $a_{ij} = 1$, ha az ij csúcsok között megy él, különben az érték nulla. Mivel A összes értéke valós, valamint szimmetrikus mátrix, ezért az összes sajátértéke valós. Emiatt $\mathbb{R}^V$-n (V feletti valós értékű függvények vektortere) bármilyen skaláris szorzatot adunk meg, tudunk majd találni ortonormált bázist, amelyik A sajátvektoraiból áll. Legyen $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n = \lambda_{min}$ a sajátértékei A-nak. Ha A d-reguláris gráf, akkor a csupa 1-esekből álló $\mathbf{1}$ vektor a d-hez tartozó sajátvektora A-nak. Ekkor $\lambda_1 = d$. Mivel minden G gráfra $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = Trace(A) = 0$, ezért $\lambda_{min} \leq 0$.

Kimondhatjuk így már Hoffman tételét. Legyen $G = (V, E)$ egy n csúcsú d-reguláris gráf, aminke az adjacencia mátrixa A. Ha $S \subset V$ független csúcshalmaz, akkor

$$\frac{|S|}{n} \leq \frac{-\lambda_{min}}{d - \lambda_{min}}.$$

Ha egyenlőség áll fent, akkor S-nek az f_S karakterisztikus függvényére igaz, hogy

$$f_S - \frac{|S|}{n}\mathbf{1} \in Ker(A - \lambda_{min} I).$$

Az eddigiek alapján tudunk adni egy vázlatot a bizonyításra. Legyen $\mathbb{R}^V$-n a skaláris szorzat a következő:

$$\langle f \ , \ g \rangle = \frac{1}{n} \sum_{x \in V} f(x)g(x).$$

Legyen $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f \ , \ f \rangle}$. Legyen $\{\mathbf{1} = v_1, v_2, ..., v_n\}$ egy ortonormált bázis az A mátrixhoz tartozó sajátvektorokból, amikhez tartoznak a $d = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ sajátértékek. Legyen $S \subset V$ független csúcshalmaz, ehhez tartozzon az $f = f_S$ karakterisztikus függvény. Legyen $\alpha = \|f\|_2 = \frac{|S|}{n}$. Az f függvényt írjuk fel a sajátvektorok lineáris kombinációiként: $f = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$. Ekkor $a_1 = \langle f \ , \ v_1 \rangle = \langle f \ , \ \mathbf{1} \rangle = \alpha$ és $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \|f\|_2 = \alpha$. Ezekből

$$0 = \langle f \ , \ Af \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^2 \geq \lambda_1 a_1^2 + \lambda_{min} \sum_{i=2}^{n} a_i^2 = \lambda_1 \alpha^2 + (\alpha - \alpha)^2 \lambda_{min},$$

amiből átrendezéssel kapjuk a tétel első részét. Ha egyenlőség teljesül, akkor $a_i \neq 0$, amiből kapjuk, hogy $i = 1$ vagy $\lambda_i = \lambda_{min}$. ■

Lovász 1979-ben megmutatta [19], hogy ha $r \leq \frac{n}{2}$, akkor az $A_{K(n,r)}$-hez tartozó legkisebb sajátérték az $-\binom{n-r-1}{r-1}$. Fehasználva Hoffman tételét azt kapjuk, hogy

$$|S|\binom{n}{r} \leq \binom{n-r-1}{r-1}^{-1} \Bigg/ \left(\binom{n-r}{r} + \binom{n-r-1}{r-1}\right) = \frac{r}{n},$$

amiből kapjuk, hogy $|S| \leq \displaystyle\binom{n-1}{r-1}$.

Az Erdős-Ko-Rado tételnek léteznek természetesen általánosításai is. A legtermészetesebb amire gondolhatunk az az, hogy mi történik ha megköveteljük a halmazrendszerünkről, hogy t-metsző legyen. Erdősék már az eredeti 1961-es cikkükben foglalkoztak ezzel. Itt a Sperner-rendszer nem k-uniform, hanem az egyes halmazok legfeljebb k eleműek lehettek, a többi feltétel pedig a szokásos. Megmutatták, hogy ha $n \geq t + (k-t)\displaystyle\binom{k}{t}^3$, akkor $m \leq \displaystyle\binom{n-t}{k-t}$ [15]. Később Frankl [14], egy 1978-as cikkjében megmutatta, hogy ez ugyanúgy fennáll, ha $n \geq (t+1)(k-t+1)$, illetve azt is belátta, hogy ennél kisebb n-ekre nem igaz a tétel.

2 Metsző permutációk halmazai

Eddig a metsző halmazrendszerek témakörét tárgyaltuk, ebben a fejezetben rátérünk a metsző permutációkra [4] nyomán.

2.1 Előzetes eredmények

2.1.1. Definíció Egy X halmazt önmagára képező kölcsönösen egyértelmű leképzéseket, azaz bijekciókat, az X halmaz transzformációinak nevezzük, ezek halmazát S_X-szel jelöljük.

2.1.2. Definíció Legyen X tetszőleges halmaz. Az S_X csoportot a kompozíció műveletére nézve az X halmazon ható szimmetrikus csoportnak hívjuk. Az S_X egységelemét id_X (vagy id, vagy 1) jelöli, ez minden elemet önmagába visz. A szimmetriacsoportok egy X alakzat bizonyos transzformációiból állnak, ezek általában megőrzik X valamilyen tulajdonságát.

2.1.3. Definíció Az X véges halmazt önmagára képző bijekciókat az X halmaz permutációinak nevezzük. Ha $|X| = n$, akkor az S_X csoportot a kompozíció műveletére nézve n-edfokú szimmetrikus csoportnak nevezzük. Ha $X = \{1, ..., n\}$, akkor S_X helyett S_n-et írunk.

2.1.4. Definíció Legyen S_n a szimmetrikus csoport az $X = \{1, ..., n\}$ halmaz felett. Egy $S \subset S_n$ halmazt metszőnek nevezünk, ha bármely $g, h \in S$ permutációra $g(x) = h(x)$ valamilyen x-re.

2.1.5. Definíció Ha X és Y tetszőleges részhalmazai egy G csoportnak, akkor

$$XY = \{xy : x \in X, y \in Y\}$$

az X és Y komplexus-szorzata, és

$$X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\}$$

az X komplexus-inverze. Ha $X = \{a\}$ egyelemű, akkor ezt aY-al illetve Ya-val jelöljük.

2.1.6. Definíció Legyen G csoport, $H \leq G$ és $g \in G$. A gH halmazt (a H részhalmaz) bal oldali mellékosztályának nevezzük. Ugyanígy a Hg halmaz jobb oldali mellékosztály.

2.1.7. Definíció Legyen X halmaz. Az S_X szimmetrikus csoport részcsoportjait transzformációcsoportoknak, illetve permutációcsoportoknak nevezzük. Az X halmaz elemeit néha pontoknak is nevezzük.

2.1.8. Definíció Legyen G transzformációcsoport az X halmazon. Ha $x \in X$, akkor tekinsük azokat a $g \in G$ elemeket, melyek x-et fixen hagyják, azaz $g(x) = x$. Ezek nyilván részcsoportot alkotnak G-ben, melynek neve az x pont G-beli stabilizátora, jele

G_x. Ha $g(x) = x$, akkor mondjuk azt is, hogy x fixpontja g-nek. A g fixpontjainak halmazát $Fix(g) = \{x \in X : g(x) = x\}$-vel jelöljük. Valamint ha $S \subset S_n$, akkor $Fix(S) = \{Fix(g) : g \in S\}$ egy X feletti halmazrendszer.

2.1.9. Tétel Legyen S metsző permutációk halmaz $\{1, ..., n\}$ felett. Ekkor $|S| \leq (n-1)!$.

Fejezetünk fő eredménye a következő:

2.1.10. Tétel Legyen $n \geq 2$ és $S \subset S_n$ metsző permutációk halmaza, hogy $|S| = (n-1)!$. Ekkor S mellékosztálya egy pont stabilizátorának.

Ehhez tudunk az EKR-hez analóg dolgot megfogalmazni. Ha a metsző halmazrendszer olyan, hogy mindegyik tartalmaz egy közös elemet, akkor triviálisan metszőnek nevezzük. Az EKR tételben egyenlőség csak az ilyen triviálisan metsző halmazrendszereknél lehetséges. Hasonlóan itt is, metsző permutációk egy halmazára mindig fennáll $|S| \leq (n-1)!$ és az előző tétel azt mondja ki, hogy ha egyenlőség teljesül, akkor S mellékosztálya egy pont stabilizátorának.

Tegyük fel, hogy egy S halmaz teljesíti a 2.1.10. tétel feltételeit és nem tartalmazza az Id identitást. Ekkor, ha vesszük a $g \in G$, $S' = g^{-1}S = \{g^{-1}h : h \in S\}$ permutációt, akkor ez már tartalmazza Id-t és szintén eleget tesz a feltételeknek. Tehát feltehetjük, hogy $Id \in S$, ekkor elég megmutatni, hogy S egy pont stabilizátora.

Legyen $x \in X$, $g \in S_n$. Legyen az x pont rögzítését g szerint az a $g_x \in S_n$ permutáció, melyre
(i) Ha $g(x) = x$, akkor $g_x = g$, (ii) Ha $g(x) \neq x$, akkor

$$g_x(y) = \begin{cases} x & \text{ha } y = x \\ g(x) & \text{ha } y = g^{-1}(x) \\ g(y) & \text{ha } y \neq x, y \neq g^{-1}(x) \end{cases} \tag{2}$$

Induktívan mondjuk azt, hogy legyen a $g_{x_1,...,x_q}$ az x_q rögzítése $g_{x_1,...,x_{q-1}}$-el, ekkor $g_{x_1,...,x_q}$-nek az $\{x_1, ..., x_q\}$ pontok mind fixpontjai. Azt mondjuk, hogy permutációk egy S halmaza zárt rögzítésre, ha
minden $x \in X$-re és $g \in S$, $g_x \in S$. GAP[6] használatával meg lehet mutatni, hogy a 2.2.10. tétel igaz, ha $n \leq 5$, tehát feltehetjük, hogy $n \geq 6$. A továbbiakban szükségünk lesz még a következőkre:

Egy $G = (V, E)$ gráf csúcstranzitív, ha minden $u, v \in V$ csúcspárra létezik olyan $f : V \to V$ gráfautomorfizmus, melyre $f(u) = v$. Egy gráf részgráfját klikknek nevezzük, ha bármely két csúcsa szomszédos. Ha egy részgráfban semelyik két csúcs nem szomszédos, akkor független csúcshalmaznak nevezzük őket.

2.1.11. Tétel Legyen Γ egy n csúcsú, csúcstranzitív gráf. Legyen T a csúcsok egy részhalmaza és legyen a T-beli legnagyobb klikk mérete $\frac{|T|}{m}$. Ekkor minden Γ-ban levő

S klikkre teljesül, hogy $|S| \leq \frac{n}{m}$. Egyenlőségből $|S \cap T| = \frac{|T|}{m}$ következik.

Bizonyítás Számoljuk a (v, g) párokat, ahol $v \in S$, $g \in Aut(\Gamma)$. Minden $w \in T$-re van $\frac{|Aut(\Gamma)|}{n}$ darab választásunk olyan g-re, hogy $g(v) = w$. Tehát a párok száma $\frac{|S||Aut(\Gamma)|}{n}|T|$. Minden g automorfizmusra fennáll, hogy $|g(S) \cap T| \leq \frac{|T|}{m}$, mivel $g(S) \cap T$ egy klikk T-ben. Tehát a párok száma legfeljebb $\frac{|T|}{m}|Aut(\Gamma)|$, ebből

$$\frac{|S||Aut(\Gamma)|}{n}|T| \leq \frac{|T|}{m}|Aut(\Gamma)|,$$

tehát

$$|S| \leq \frac{n}{m}.$$

Ha egyenlőség áll fent, akkor $|g(S) \cap T| = \frac{|T|}{m}$ áll fent minden $g \in Aut(\Gamma)$-ra. Legyen $g = Id$, amiből az állítás következik. ∎

Ha T független csúcshalmaz, akkor a legnagyobb klikk, amit tartalmaz az 1 méretű, ekkor a tétel fennáll $m = |T|$-vel, amiből a következőt kapjuk:

2.1.12. Következmény Legyen C klikk és A egy független csúcshalmaz, egy n csúcsú, csúcstranzitív gráfban. Ekkor $|C||A| \leq n$, egyenlőség esetén $|C \cap A| = 1$ áll fent.

2.1.13. Tétel Legyen $S \subset S_n$ metsző permutációk halmaza. Ekkor $|S| \leq (n-1)!$. Ha egyenlőség áll fent, akkor S pontosan egy sort tartalmaz minden n-edrendű latin-négyzetből.

Bizonyítás Alkossunk gráfot az S_n csúcshalmazból úgy, hogy összekötjük g-t és h-t, ha létezik i pont, hogy $g(i) = h(i)$. A balról szorzás S_n elemeivel nyilvánvalóan gráf automorfizmus, tehát a gráf csúcstranzitív. Legyen L egy latin négyzet sorainak halmaza. Mivel S metsző, ezért a gráfban minden S-beli csúcs szomszédos, tehát klikket alkotnak és L független csúcshalmaz, mivel a latin-négyzetben szereplő permutációk nem metszhetik egymást és $|L| = n$. Tehát a 2.1.11. tétel alapján $|S| \leq \frac{n!}{n} = (n-1)!$, valamint ha egyenlőség áll fent, akkor $|S \cap L| = 1$. ∎

A következő állítás előtt szükségünk van még egy definícióra. Legyen g egy permutáció S_n-ben, ekkor legyen

$$D(g) = \{w \in S_n : w(i) \neq g(i) \ \forall i = 1, ..., n\}$$

tehát, ez a halmaz azokat a permutációkat tartalmazza, amik g-vel egy helyen sem egyeznek meg.

2.1.14. Állítás Legyen $n \geq 2k$. Ekkor minden $g_1, ...g_k \in S_n$-re fennáll, hogy $D(g_1) \cap ... \cap D(g_k) \neq \emptyset$.

Bizonyítás Egy $h \in S_n$ permutáció akkor és csak akkor van benne a $D(g_1) \cap ... \cap D(g_k)$, ha elemei reprezentánsai az $A_1, ..., A_n$ halmazoknak, ahol

$$A_i = \{x : x \neq g_1(i), ..., x \neq g_k(i)\}.$$

Ekkor $|A_i| \geq n - k$.

Ellenőriznünk kell a Hall-tétel feltételeit. Legyen $A(J) = \bigcup_{j \in J} A_j$, ahol $J \subseteq \{1, ..., n\}$. Azt kell megmutatnunk, hogy $|A(J)| \geq |J|$ minden J-re. Ha $J \leq n - k$, akkor ez egyértelműen teljesül, tehát tegyük fel, hogy $J \geq n - k + 1$.

Legyen $x \in \{1, ..., n\}$. Ekkor $x \notin A(J)$ akkor és csak akkor, ha minden $j \in J$-re létezik $i \in \{1, ..., k\}$, hogy $x = g_i(j)$. Azonban legfeljebb k darab (i, j) pár létezik, amire $x = g_i(j)$, mivel i adott, ezért j értéke meg van határozva, hiszen $j = g_i^{-1}(x)$. Mivel $|J| \leq n - k + 1 \leq k + 1$, ezért ez nem állhat fent minden $j \in J$-re, amiből $A(j) = \{1, ..., n\}$ és $|A(J)| = n \geq |J|$. Teljesül tehát a Hall-feltétel, amiből tudjuk, hogy létezik h reprezentánsa az A_i halmazrendszernek.■

Ezzel a tétellel azt láttuk be, hogy ha a feltételek teljesülnek, akkor bárhogy veszünk k darab permutációt S_n-ből, létezik olyan permutáció, amelyik ezen k permutáció közül, nem egyezik meg egyik helyen sem, ez fontos lesz amikor bizonyítjuk, hogy a rögzítés operáció zárt.

Megjegyzés Ha a $g_1, ..., g_k$ permutációk páronként nem metszik egymást, akkor a feltétel gyengíthető $n \geq 2k$-ról $n \geq k + 1$-re. Tehát minden $k \times n$ latin téglalap (páronként nem metsző permutációk halmaza) kiegészíthető latin négyzetté.
Legyen $g_1, ..., g_k$ egy k-adrendű latin négyzet sorai, kiegészítve, hogy rögzítsék a $k + 1, ..., n$ pontokat. Minden $D(g_1) \cap ... \cap D(g_k)$-beli permutációnak az $1, ..., k$ pozícióban kelltartalmaznia a szimbólumokat a halmaz $k + 1, ..., n$-es pozícióiból, tehát, ha $n \leq 2k - 1$, akkor nem létezhet ilyen permutáció.

2.1.15. Állítás (Hall, 1945) Minden $k \times n$-es latin téglalap kiegészíthető egy $n \times n$-es latin négyzetté.

2.2 A rögzítés operáció zárt

Ebben az alfejezetben be fogjuk bizonyítani, hogy bizonyos feltételek mellett egy $S \subset S_n$ metsző permutációk halmaza zárt a korábban definiált rögzítés operációra.

Legyen $g \in S_n$ és $A \subseteq X$. Ha $g(A) = A$, akkor azt mondjuk, hogy a g permutáció korlátozva van A-ra, ezt $g|_A$-val jelöljük. Ez egy bijekció A-ból saját magába, tehát eleme a $Sym(A)$-nak. Általában $g|_A$, egy bijekció X-nek $|A|$ méretű halmazai között, tehát ez egy részleges permutáció.

2.2.1. Tétel Legyen $S \subseteq S_n$ metsző permutációk halmaza, olyan, hogy $Id \in S$, $|S| = (n-1)!$, ahol $n \geq 6$. Ekkor S zárt a rögzítés operációra.

$$\begin{array}{rl}
Id & : \cdots x \cdots u \cdots y \cdots \\
g & : \cdots y \cdots a_u \cdots x \cdots \\
\bar{Id} & : \cdots \blacksquare \cdots u \cdots \blacksquare \cdots \\
\bar{g} & : \cdots \blacksquare \cdots a_u \cdots \blacksquare \cdots \\
\bar{h} & : \cdots \blacksquare \cdots b_u \cdots \blacksquare \cdots \\
h & : \cdots y \cdots b_u \cdots x \cdots \\
g_x & : \cdots x \cdots a_u \cdots y \cdots
\end{array}$$

Ábra 1

Bizonyítás Tegyük fel, hogy S nem zárt a rögzítés operációra. Ekkor létezik $x \in X$ és $g \in S$ olyan, hogy $g(x) \neq x$ és $g_x \notin S$. Legyen $g = a_1 a_2 ... a_x ... a_y ... a_n$ olyan, hogy $a_x \neq x$ és $a_y = x$, tehát

$$g_x = a_1 a_2 ... a_{x-1} a_y a_{x+1} ... a_{y-1} a_x a_{y+1} ... a_n.$$

Nézzük meg a következő eseteket:

(i) $a_x = y$

Legyen $X \backslash \{x, y\} = A$. Ekkor $\bar{Id} = Id|_A$ és $\bar{g} = g|_A = g_x|_A$ elemei $Sym(A)$-nak. A 2.1.14. állítás alapján, létezik $\bar{h} \in D(\bar{Id}) \cap D(\bar{g})$, mivel $n - 2 \geq 4$. Így alkossunk meg egy h permutációt X-en a következő módon:

$$h(i) = \begin{cases} \bar{h}(i) & \text{ha } i \in A \\ y & \text{ha } i = x \\ x & \text{ha } i = y \end{cases} \tag{3}$$

Ekkor g_x és h egy $2 \times n$-es latin téglalapot alkotnak. A 2.1.15. állítás alapján, ekkor létezik egy $n \times n$-es latin négyzet, mely tartalmazza mind g_x-et, mind h-t. Vegyük észre, hogy ezen latin négyzet bármely g_x és h-n kívüli r sorára fent kell állnia, hogy $r \in D(g_x) \cap D(h)$, amiből $r \in D(g)$, tehát r és g nem egyeznek meg X egyik pontján sem. Ebből kapjuk, hogy $r \notin S$, mivel $g \in S$ és S metsző. Továbbá, h és Id sem egyeznek meg X egyik pontján sem, tehát $h \notin S$, mivel $Id \in S$ és S metsző. Feltevés miatt tudjuk, hogy $g_x \notin S$. Azt kaptuk, hogy a latin négyzet egyik sora sem eleme S-nek, azonban ez ellentmond a 2.1.13. tételnek.

Az ábráról könnyen leolvasható, hogy melye permutációk nem egyeznek sehol sem. Az oszlopok mutatják meg, hogy melyik permutáció mit képez az x, az $A = X\backslash\{x, y\}$, valamint y helyekre.

(ii) $a_x = z \neq y$.
Legyen $A = X\backslash\{x, z\}$. Tehát $\bar{Id} = Id_A$ az identitás $Sym(A)$-ban. Definiáljuk a $\bar{g}$ permutációt A-n a következő módon:

$$\bar{g}(i) = \begin{cases} g(i) & \text{ha } i \neq y \\ g(z) & \text{ha } i = y \end{cases} \tag{4}$$

Azonban $|A| = n - 2 \geq 4$, tehát a 2.1.15. állítás alapján létezik $\bar{h} \in D(\bar{Id}) \cap D(\bar{g}) \subseteq Sym(A)$. Most egy h_* permutációt definiálunk X-en a következő módon:

$$h_*(i) = \begin{cases} \bar{h}(i) & \text{ha } i \in A \\ y & \text{ha } i = x \\ x & \text{ha } i = z \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{array}{rl}
Id & : \cdots\ x\ \cdots\ u\ \cdots\ y \cdots\ z \cdots \\
g & : \cdots\ z\ \cdots\ a_u\ \cdots\ x \cdots\ a_z \cdots \\
\bar{Id} & : \cdots\ \blacksquare\ \cdots\ u\ \cdots\ y \cdots\ \blacksquare \cdots \\
\bar{g} & : \cdots\ \blacksquare\ \cdots\ a_u\ \cdots\ a_z \cdots\ \blacksquare \cdots \\
\bar{h} & : \cdots\ \blacksquare\ \cdots\ b_u\ \cdots\ b_y \cdots\ \blacksquare \cdots \\
h_* & : \cdots\ z\ \cdots\ b_u\ \cdots\ b_y \cdots\ x \cdots \\
h & : \cdots\ z\ \cdots\ b_u\ \cdots\ x \cdots\ b_y \cdots \\
g_x & : \cdots\ x\ \cdots\ a_u\ \cdots\ z \cdots\ a_z \cdots
\end{array}$$

Ábra 2

Továbbá definiálunk még egy h permutációt X-en a következő módon:

$$h(i) = \begin{cases} h_*(i) & \text{ha } i \neq y, z \\ h_*(z) = x & \text{ha } i = y \\ h_*(y) & \text{ha } i = z \end{cases} \tag{6}$$

Azt állítjuk, hogy g_x és h alkotnak egy $2 \times n$-es latin négyzetet. Látható, hogy egyedül azt kell ellenőriznünk, hogy g_x és h megegyeznek-e a z pontban, mivel X semelyik másik pontján nem egyezhetnek meg, viszont $h(z) = h_*(y) = \bar{h}(y)$ és $\bar{h} \in D(\bar{g})$, tehát

$h(z) \neq \bar{g}(y) = g(z) = g_x(z)$. Ezzel beláttuk, amit kellett, a 2.1.15. állítás alapján létezik $n \times n$-es latin négyzet. mely tartalmazza g_x-et és h-t.

Vegyük észre, hogy a latin négyzet bármely r sorára g_x-en és h-n kívül fennáll, hogy nem egyeznek meg egy X-beli ponton sem g-vel, valamint feltevésünk miatt $g_x \notin S$. Az maradt hátra, hogy leellenőrizzük, hogy h eleme-e S-nek. Abból adódóan, ahogy a permutációkat definiáltuk, tudjuk, hogy ha h és $\bar{Id}$ megegyeznének valami i ponton, akkor $i \neq x, y, z$. Azonban ebből következne, hogy $\bar{h}$ és $\bar{Id}$ megegyeznek egy ponton. Ez egyellentmondás, mivel $\bar{h} \in D(\bar{Id})$, (lásd: ábra 2), tehát $h \notin S$. Ez azonban azt mutatja, hogy ennek a latin négyzetnek egyik sora sincs S-ben, mely ellentmond a 2.1.13. tételnek. ■

2.3 Fix(S) metsző halmazrendszer

2.3.1. Lemma Legyen $g, h \in S_n$ olyan, hogy $g(x) = h(x)$ és $g(y) \neq h(y)$. Ekkor $g_x(y) \neq h(y)$.

Bizonyítás Ha $g(y) = x$, akkor $g_x(y) = g(x) = h(x) \neq h(y)$. Ha $g(y) \neq x$, akkor $g_x(y) = g(y) \neq h(y)$. ■

2.3.2. tétel Legyen $S \subseteq S_n$ metsző permutációk halmaza zárt a rögzítés operációra. Ekkor $Fix(S)$ metsző halmazrendszer.

Bizonyítás Azt állítjuk, hogy ha $g, h \in S_n$ olyan, hogy $g(x) = h(x)$ és $g(y) \neq h(y)$, akkor $g_x(y) \neq h(y)$ és $g_x \in S$. Ez következik a 2.3.1. lemmából és abból, hogy S zárt a rögzítés operációra.

Tegyük fel, hogy $Fix(S)$ nem metsző. Ekkor létezik $g \neq h \in S$ olyan, hogy $Fix(g) \cap Fix(h) = \emptyset$. Legyen $B = \{x \in X : g(x) = h(x)\}$. Mivel S metsző, ezért $B = \{x_1, ..., x_k\}$ valamilyen pozitív egész k-ra.

Legyen $w = g_{x_1,...,x_k}$. Az első bekezdés nyomán, $w(y) \neq h(y)$ minden $y \in X \backslash B$-re, és $w \in S$. Ha létezne olyan i, amire $w(x_i)$ egyenlő lenne $h(x_i)$-vel, akkor azt kapnánk, hogy $x_i = w(x_i) = h(x_i) = g(x_i)$, ahol az utolsó egyenlőséget $x_i \in B$-ből kaptuk. Ekkor $Fix(g) \cap Fix(h) \neq \emptyset$, ami ellentmondás. Tehát, $w(x) \neq h(x)$ minden $x \in X$-re. Azonban ez is ellentmondás $w, h \in S$ miatt. ■

2.4 2.1.10. tétel bizonyítása

Szükségünk lesz néhány ismert tételre az extremális halmazelméletből [7].

2.4.1. Állítás (LYM-egyenlőtlenség) Legyen $\mathcal{A}$ antilánc az n elemű X halmaz részhalmazain.

Ekkor
$$\sum_{A\in\mathcal{A}} |A|!(n-|A|)! \le n!.$$

2.4.2. Állítás (EKR) Legyen $n, k \in \mathbb{N}$, $k < \frac{n}{2}$ $F = \{A_1, ..., A_m\}$ egy k-uniform, metsző halmazrendszer V felett, $|V| = n$. Ekkor
$$|F| \le \binom{n-1}{k-1}.$$

2.4.3. Lemma Ha $\mathcal{A}$ egy n elemű X halmaz részhalmazaiból álló antilánc, amire $|A| \ge k$, minden $A \in \mathcal{A}$-ra, akkor
$$\sum_{A\in\mathcal{A}} (n-|A|)! \le \frac{n!}{k!}.$$

Bizonyítás A LYM-egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy
$$\sum_{A\in\mathcal{A}} (n-|A|)! \le \sum_{A\in\mathcal{A}} \frac{|A|!}{k!}(n-|A|)! \le \frac{n!}{k!}.$$

■

Néhány dolgot megfigyelhetünk.

Legyen $Y \subseteq X$ és $G = Sym(X) = S_n$. Legyen $G_{(Y)}$ azon $g \in S_n$ permutációk halmaza, melyre $g(y) = y$ minden $y \in Y$-ra. Ekkor $G_{\{x\}}$ az x pont stabilizátora, valamint $|G_{(Y)}| = (n-|Y|)!$. Ha g egy olyan S-beli permutáció, melyre $Fix(g) = F$, akkor $g \in G_{(F)}$. Ebből következik, hogy
$$|S| \le \sum_{F\in Fix(S)} |G_{(F)}| = \sum_{F\in Fix(S)} (n-|F|)!.$$

Ennét többet is tudunk állítani. Vegyük észre, hogy ha $A \subseteq B$ valamilyen $A, B \in Fix(S)$-re, akkor $G_{(B)} \subseteq G_{(A)}$.

Tehát ha
$$\mathcal{F} = \{F \in Fix(S) : \text{F minimális eleme a } (Fix(S), \subseteq) \text{ részbenrendezett halmaznak}\},$$

akkor kapjuk, hogy
$$|S| \leq \sum_{F \in \mathcal{F}} (n - |F|)!.$$

A 2.1.10. tétel bizonyítása

Tegyük fel, hogy $Id \in S$, azt akarjuk megmutatni, hogy S stabilizátora egy pontnak. Először megjegyezzük azt, hogy a tétel igaz, ha $n \leq 5$, ezt be lehet bizonyítani kézzel vagy számítógéppel GAP [6] használatával. (Klikkeket keresünk a 2.1.13. tételben használt gráfban, melyet GAP-pal tehetünk meg.) Legyen $n \geq 6$. A 2.2.1. tétel, illetve a 2.3.2. tétel alapján feltehetjük, hogy $Fix(S)$ metsző. Legyen $\mathcal{F}$ $Fix(S)$ részhalmaza olyan, mint ahogy fentebb definiáltuk. Ekkor $\mathcal{F}$ az X halmaz részhalmazain metsző antiláncot alkot és nem üres halmaz.

Mivel $\mathcal{F}$ metsző, ezért $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Továbbá vegyük észre, hogy ha egy g permutáció több, mint $n-2$ pontot rögzít, akkor szükségképpen az identitásnak kell lennie, tehát $|Fix(g)| \neq n-1$ minden $g \in S$-re, ami azt is jelenti, hogy $|F| \neq n-1$ minden $F \in \mathcal{F}$-re. Mivel $\mathcal{F}$ antilánc, ezért $X \notin \mathcal{F}$. Összefoglalva kaptuk, hogy $1 \leq |F| \leq n-2$ minden $F \in \mathcal{F}$.

Tegyük fel, hogy $Fix(S)$ tartalmaz egy 1 számosságú $\{x\}$ elemet. Ekkor $Fix(S)$ metszősége miatt minden permutációnak rögzítenie kell az x pontot. Mivel $|S| = (n-1)!$, ezért S-nek az x pont stabilizátorának kell lennie. A továbbiakban feltehetjük, hogy $|Fix(g)| \geq 2$ minden $g \in S$-re, tehát $|F| \geq 2$ minden $F \in \mathcal{F}$-re.

$\mathcal{F}$ definíciója miatt, ha $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$, akkor minden S-beli permutáció egy közös pontot rögzít, amiből következik az állítás, tehát feltehetjük, hogy $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$. Ezeket az egyszerűsítéseket elvégezve az a célunk, hogy ellentmondásra jussunk úgy, hogy belátjuk, hogy $|S| < (n-1)!$. Ahhoz, hogy ezt elérjük, bontsuk fel a következő esetekre az állítást:

(i) $|F| \geq 3$ minden $F \in \mathcal{F}$-re, tehát $\mathcal{F}$-nek nincs kételemű eleme, amiből
$$|S| \leq \sum_{F \in \mathcal{F}} (n - |F|)! =$$
$$= \sum_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ 3 \leq |F| \leq [\frac{n}{2}]}} (n - |F|)! + \sum_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ |F| \geq [\frac{n}{2}]+1}} (n - |F|)! \leq$$
$$\leq \sum_{k=3}^{[\frac{n}{2}]} a_k (n-k)! + \frac{n!}{([\frac{n}{2}]+1)!},$$

a 2.4.3. lemmát felhasználva, és a_k az $\mathcal{F}$-beli k elemszámú elemek száma.

Ekkor

$$|S| \leq \sum_{k=3}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n-1}{k-1}(n-k)! + \frac{n!}{([\frac{n}{2}]+1)!}$$

mivel a kettébontás miatt teljesülnek az EKR feltételei, tehát

$$|S| \leq (n-1)! \sum_{k=3}^{[\frac{n}{2}]} \frac{1}{(k-1)!} + \frac{n!}{([\frac{n}{2}]+1)!} \leq$$

$$\leq (n-1)!\frac{4}{5} + \frac{n!}{([\frac{n}{2}]+1)!},$$

mivel $\displaystyle\sum_{k=3}^{[\frac{n}{2}]} \frac{1}{(k-1)!} < e-2 < \frac{4}{5}$.

Tehát elég megmutatnunk, hogy $\dfrac{n!}{([\frac{n}{2}]+1)!} < \dfrac{(n-1)!}{5}$. Azonban ez igaz minden $n \geq 8$-ra. Ha $n = 6, 7$, akkor abból, hogy $|S| \leq (n-1)!\frac{4}{5} + \dfrac{n!}{([\frac{n}{2}]+1)!}$ kapjuk, hogy $|S| < (n-1)!$ azaz, ha $\mathcal{F}$-nek nincsenek kételemű elemei, akkor $|S| < (n-1)!$ minden $n \geq 6$-ra.

(ii) $\mathcal{F}$-nek van kételemű eleme.

Legyen $\mathcal{F}_2 = \{F \in \mathcal{F} : |F| = 2\}$.

(ii) aleset (a): $\displaystyle\bigcap_{F \in \mathcal{F}_2} F = \emptyset$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\} \in \mathcal{F}_2$ a metsző tulajdonság miatt. Legyen $F \in \mathcal{F} \backslash \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$.
Mivel $F \cap \{2,3\} \neq \emptyset$ fennáll, ezért vagy $2 \in F$, vagy $3 \in F$. Ez azt mutatja, hogy $1 \notin F$, különben az állna fent, hogy $\{1,2\} \subseteq F$ vagy $\{1,3\} \subseteq F$, ami ellentmondana az $\mathcal{F}$ antilánc tulajdonságának. Most $\{1,2\} \cap F \neq \emptyset$ és $\{1,3\} \cap F \neq \emptyset$, amiből kapjuk, hogy $\{2,3\} \subseteq F$, ami ellentmond annak, hogy $\mathcal{F}$ antilánc. Tehát $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2$, $|\mathcal{F}_2| = 3$, amiből kapjuk, hogy

$$|S| \leq \sum_{F \in \mathcal{F}} (n - |F|)! = \sum_{F \in \mathcal{F}_2} (n - |F|)! = 3(n-2)! < (n-1)!$$

minden $n \geq 6$-ra.

(ii) aleset (b): $\bigcap_{F\in\mathcal{F}_2} F \neq \emptyset$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\mathcal{F}_2 = \{\{1,i\}|2 \leq i \leq c\}$ valamilyen $c \in \{2,3,...,n\}$-re. Legyen

$$\mathcal{D} = \{F \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{F}_2 : 1 \notin F\}$$

$$\mathcal{E} = \{F \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{F}_2 : 1 \in F\}.$$

Ha g egy permutáció, aminek fixpontjainak halmaza $Fix(g)$ olyan, hogy tartalmaz egy $F \in \mathcal{D}$ halmazt, akkor $Fix(g)$ tartalmazza $\{2,3,...,c\}$-t is, hiszen $\mathcal{F}$ metsző. Tehát $g \in G_{(\{2,3,...,c\})}$. Tegyük fel most egy ideig, hogy $c = n$. Ekkor $\mathcal{D}$ üres halmaz, mivel különben, ha létezne $F \in \mathcal{D}$, hogy $\{2,3,...,n\} \subseteq F$, akkor ebből következne, hogy $|F| > n-2$, ami ellentmondás. Tehát, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{E}$ és ekkor minden $F \in \mathcal{F}$ halmaznak tartalmaznia kell az 1-et, amiből következik, hogy $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$, azonban ez ellentmondás, tehát $c \leq n-1$.

Ha $F \in \mathcal{E}$, akkor $\{1,x,y\} \subseteq F$ valamilyen $x,y \notin \{2,3,...,c\}$-re, mivel $\mathcal{F}$ antilánc. Tehát, legfeljebb $\binom{n-c}{2}$ darab választási lehetőségünk van az $\{x,y\}$ rendezetlen párra. Ha g egy permutáció, aminek fixpontjainak halmaza $Fix(g)$ olyan, hogy tartalmaz egy $F \in \mathcal{E}$ halmazt, akkor $g \in G_{(\{1,x,y\})}$. Ebből, azt kapjuk, hogy

$$|S| \leq \sum_{F\in\mathcal{F}} (n-|F|)! + |G_{(\{2,3,...,c\})}| +$$

$$+ \sum_{B\in\binom{X\backslash\{1,2,...,c\}}{2}} |G_{(\{1\}\cup B)}| \leq$$

$$\leq (c-1)(n-2)! + (n-c+1)! + \binom{n-c}{2}(n-3)!.$$

Feltéve, hogy $3 \leq c \leq n-2$, azt kapjuk, hogy $|S| \leq f(c)$, ahol $f(c) = c(n-2)! + \binom{n-c}{2}(n-3)!$, azonban $\frac{n-c}{2} < n-2$, tehát

$$\frac{(n-c)(n-c-1)}{2} < (n-2)(n-c-1),$$

mivel $n-c-1 > 0$. Tehát

$$\binom{n-c}{2}(n-3)! < (n-2)!(n-c-1),$$

$$f(c) < (n-1)!,$$

amiből kapjuk, hogy $|S| < (n-1)!$ minden $n \geq 6$-ra.

Ha $c = n-1$, akkor

$$|S| \leq \sum_{F \in \mathcal{F}_2} (n - |F|)! + |G_{(\{2,3,\dots,c\})}| = (n-2)(n-2)! + 2 < (n-1)!,$$

minden $n \geq 6$-ra.

Most feltehetjük, hogy $c = 2$ azaz, $\mathcal{F}_2 = \{\{1,2\}\}$ minden $n \geq 6$-ra. Ekkor $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, ahol

$$\mathcal{B}_1 = \{F \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{F}_2 : 1 \in F\}$$
$$\mathcal{B}_1 = \{F \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{F}_2 : 2 \in F\}.$$

Vegyük észre, hogy $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, az $\mathcal{F}$ antilánc tulajdonsága miatt. Továbbá, ha $F \in \mathcal{B}_i$ $i = 1,2$, akkor F tartalmazza az $\{i,a,b\}$ halmazt, ahol $a,b \in X \backslash \{1,2\}$. Tehát,

$$|S| \leq \sum_{F \in \mathcal{F}_2} (n - |F|)! + \sum_{\{a,b\} \in \binom{X \backslash \{1,2,\dots,c\}}{2}} |G_{(\{1,a,b\})}| +$$
$$+ \sum_{\{a,b\} \in \binom{X \backslash \{1,2,\dots,c\}}{2}} |G_{(\{2,a,b\})}| \leq$$
$$\leq (n-2)! + 2\binom{n-2}{2}(n-3)! \leq$$
$$\leq (n-2)(n-2)! < (n-1)!.$$

Tehát azt kaptuk, hogy, ha $\mathcal{F}$ tartalmaz kételemű elemet, ahhor $|S| < (n-1)!$ minden $n \geq 6$-ra, amivel az állítást beláttuk.■

3 Metszési sűrűség

Ebben a fejezetben bevezetjük a metszési sűrűség fogalmát és ez alapján vizsgálunk permutációcsoportokat. Ez a fejezet főleg [8] és [13] alapján készült, kivéve, ahol másképp fel van tüntetve.

3.1. Definíció Azt mondjuk, hogy a G csoport az Ω halmazon hat, ha minden $g \in G$ és $\omega \in \Omega$ esetén értelmezve van a $g * \omega \in \Omega$ elem úgy, hogy bármely $g, h \in G$ és $\omega \in \Omega$ esetén

$$g * (h * \omega) = (g * h) * \omega$$

tehát G elemeinek szorzatai kompozícióként hatnak.

3.2. Definíció Legyen G az Ω-en ható csoport, ekkor $\omega \in \Omega$ pályája a $g * \omega$ alakú pontokból áll, azaz azokból, ahová ω-et el lehet vinni G elemeivel. Jele: $G(\omega)$.

3.3. Definíció G hatása Ω-en tranzitív, ha csak egyetlen pályálya van, azaz Ω bármely két eleme egymásba vihető a G egy elemével.

3.4. Definíció Legyen G egy Ω-en ható csoport. Az Ω egy ekvivalencia relációját (partícióját) G kongrueniájának nevezzük, ha tetszőleges $x \sim y$ és $g \in G$ esetén $g * x \sim g * y$. Bármi is legyen az Ω és a G, mindig létezik két triviális kongruencia. Az egyik, amikor az összes Ω-beli elem egyedül, egy elemű osztályban van, a másik, amikor az Ω halmaz egésze egy osztályt alkot.

3.5. Definíció A G csoport primitívan hat az Ω halmazon, ha tranzitív és az Ω halmaznak pontosan két kongruenciája van: a triviálisok.

Az előző fejezetben megmutattuk, hogy minden $S \subseteq S_n$ metsző permutációk halmazára igaz, hogy felső korlátja egy pont stabilizátorának elemszáma, valamint azt, hogy a maximális elemszámú S metsző permutációk halmazai, azok egy pont stabilizátorának mellékosztályai. Ebben a fejezetben, a szimmetrikus csoport primitív részcsoportjaival, azaz primitív permutációcsoportokkal fogunk foglalkozni.

3.6. Definíció Egy Ω-án ható G permutációcsoportról azt mondjuk, hogy EKR-tulajdonságú, ha a pontok stabilizátorai maximális metsző halmazok. Továbbá azt mondjuk, hogy a csoport szigorúan EKR-tulajdonságú, ha kizárólag pontok stabilizátorainak mellékosztályai a maximális metsző halmazok G-ben.

Be fogjuk látni, hogy a tranzitív permutációcsoportok "távol" vannak attól, hogy EKR-tulajdonságúak legyenek. Ahhoz, hogy ezt a távolságot mérjük, vezessük be a következő mérőszámot:

3.7. Definíció Legyen G egy Ω-án ható tranzitív permutációcsoport. Jelöljük $\rho(G, \Omega)$-val az $\dfrac{|S|}{|G_\omega|}$ hányadost, ahol S maximális metsző halmaz és $\omega \in \Omega$.

Mivel G_ω metsző halmaz, ezért $\rho(G,\Omega) \geq 1$. Egy G csoport akkor és csak akkor EKR-tulajdonságú, ha $\rho(G,\Omega) = 1$. Megmutatjuk, hogy $\rho(G,\Omega)$ tetszőlegesen nagy lehet általános permutációcsoportok esetén.

3.8. Definíció Legyen T egy test és $n \geq 1$ egész. Ekkor a T test fölötti $n \times n$-es invertálható mátrixok csoportját a szorzásra általános lineáris csoportnak nevezzük, és $GL(n,T)$-vel jelöljük. Azok a mátrixok, melyeknek determinánsa 1, részcsoportot alkotnak $GL(n,T)$-ben. Ezt a csoportot speciális lineáris csoportnak nevezzük, jele: $SL(n,T)$.

3.9. Definíció Legyen T test, $n \geq 1$ egész, és tekintsük az

$$AGL(n,T) = \{v \to Mv + b : b \in T^n, M \in GL(n,T)\}$$

leképzéseket a T^n halmazon. Ezek csoportját a kompozícióra affin csoportnak hívjuk, elemeik az affin transzformációk.

Példa A sík és a tér egybevágósági transzformációi az $AGL(n,\mathbb{R})$ csoport elemeinek tekinthetők, ha $n = 2$ vagy $n = 3$.

3.10. Definíció Legyen G csoport és H részcsoportja G-nek. A különböző H szerinti mellékosztályok számát a H részcsoport G-beli indexének nevezzük, jele: $|G : H|$.

Bármely két H-szerinti bal oldali mellékosztály vagy megegyezik, vagy diszjunkt, és a bal oldali mellékosztályok uniója G. Ugyanez igaz a jobboldali mellékosztályokra is. Ha G véges, akkor $|G| = |H||G : H|$.

3.11. Definíció Legyen G csoport, és $g \in G$. Ekkor a g elem egész kitevőjű hatványaiból álló részcsoportot a g elem által generált részcsoportnak nevezzük, és $\langle g \rangle$-vel jelöljük.

3.12. Definíció Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre. Azt mondjuk, hogy egy $\psi : G \to H$ leképzés csoport-homomorfizmus, ha művelettartó, vagyis ha tetszőleges $a, b \in G$ esetén

$$\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b).$$

Ha ψ kölcsönösen egyértelmű is a G és H halmazok között, akkor ψ izomorfizmus. A G és H csoportok izomorf csoportok, ha létezik közöttük izomorfizmus. Jele $G \cong H$.

3.13. Definíció Ha $\psi : G \to H$ egy csoport-homomorfizmus, akkor legyen

$$Im(\psi) = \{\psi(a) | a \in G\} \subseteq H$$

a ψ képe, vagyis az értékkészlete.

3.14. Definíció Ha $\psi : G \to H$ egy csoport-homomorfizmus, akkor legyen

$$Ker(\psi) = \{a \in G : \psi(a) = 1_H\} \subseteq G$$

a ψ magja, ahol 1_H a H csoport egységeleme.

3.15. Definíció A G csoport egy N részcsoportját akkor nevezzük normális részcsoportnak, vagy normálosztónak. ha egy aklalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak a magja. Jelölés: $N \lhd G$.

Legyen G csoport és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessük be rajta a szorzást a

$$(g_1N)(g_2N) = g_1g_2N$$

képlettel. Ekkor K csoport lesz, melynek egységeleme az $N = 1 * N$ mellékosztály, a gN inverze pedig $g^{-1}N$. Az a $\psi : G \to K$ leképzés, ami g-hez gN-et rendeli, homomorfizmus lesz, melynek magja N.

3.16. Definíció Legyen N normálosztó a G csoportban. A fent definiált K csoportot a G csoport N szerinti faktorcsoportjának nevezzük, jele G/N. A $\psi : g \to gN$ leképzés neve természetes homomorfizmus.

3.17. Definíció Legyenek N, H csoportok, és $\psi : H \to Aut(N)$ tetszőleges homomorfizmus. Definiáljuk a G csoportot úgy, hogy elemei az (n, h) rendezett párok $(n \in N, h \in H)$, a szorzás pedig

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1(\psi(h_1))(n_2), h_1h_2).$$

A kapott csoportot N és H szemidirekt szorzatának nevezzük, és $N \rtimes H$-val jelöljük.

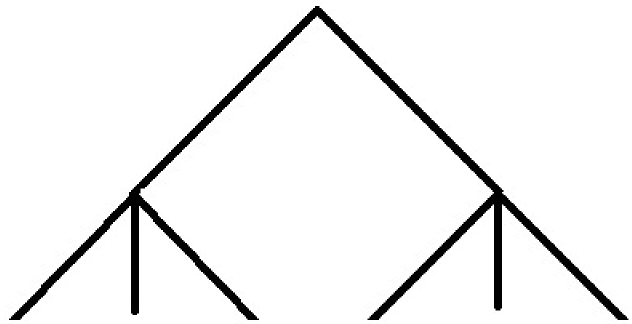
3.18. Definíció Legyen A csoport és legyen H egy Ω-án ható csoport. Legyen A^Ω az A halmaz önmagával vett direkt szorzata, megindexelve Ω-val. Ekkor az A és H halmazok koszorúszorzatát úgy definiáljuk, hogy

$$A \wr H = A^\Omega \rtimes H = (A \times A \times ... \times A) \rtimes H.$$

Példa [9] Az általánosított szimmetrikus csoportot koszorúszorzattal definiáljuk: $S(m, n) = Z_m \wr S_n$, azaz az m-edrendű ciklikus csoport valamint az n-edfokú szimmetrikus csoport szorzata. Ha $m = 1$, akkor visszakapjuk S_n-et.

Példa [10] Az alábbi fa automorfizmusai is kifejezhetők koszorúszorzatként. A legalsó szinten az egyes ágakban levő levelek permutációi alkotják az S_3 csoportot, illetve a gráf középső szintjének permutációi adják az S_2 csoportot. Azt látjuk, hogy a gráf automorfizmusainak csoposrtja:

$$(S_3 \times S_3) \rtimes S_2 = S_3 \wr S_2.$$



Egy G csoportban felcserélhetőnek nevezzük a $g, h \in G$ elemeket, ha $g * h = h * g$. Azokat az $x \in G$ elemek halmazát melyek G minden elemével felcserélhetők a G centrumának nevezzük. Jele: $Z(G)$.

Minden permutációcsoportot két különböző kategóriába tudunk elhelyezni. Egy $G \leq Sym(\Omega)$ permutációcsoportról azt mondjuk, hogy van szorzat felbontása, ha léteznek $H \leq Sym(\Delta)$ és $K \leq Sym(\Theta)$ permutációcsoportok úgy, hogy G ekvivalens $H \wr K \leq Sym(\Delta^{\Theta})$-val.

Egy G permutációcsoportot regulárisnak nevezünk, ha tranzitív, és minden minden pont stabilizátora az egyelemű részcsoport.

3.19. Lemma Legyen G egy tranzitív permutációcsoport Ω-án egy $\omega \in \Omega$ fixponttal. Ekkor, minden $S < G$ részcsoportra, az alábbi állítások ekvivalensek:

1. S az egy metsző részhalmaz,
2. S minden eleme rögzíti Ω valamelyik pontját,
3. S minden eleme konjugáltja egy Ω-beli elemnek.

Bizonyítás Először megmutatjuk, hogy 1-ből következik 2. Mivel S metsző halmaz, ezért adott $h \in S$-re $he^{-1} = h$ rögzíti Ω egy pontját.

Legyen $h \in G$ olyan, hogy rögzít valamilyen $\alpha \in \Omega$ pontot, tehát $h \in G_\alpha$. Mivel G hatása tranzitív, ezért G_α és G_ω konjugáltak, tehát h G_ω valamelyik elemének a konjugáltja. Ez mutatja, hogy 2-ből következik 3.

Legyen $h, x \in G$ olyan, hogy $x^{-1}hx \in G_\omega$. Ebből látszik, hogy h rögzíti ω^x-et. Ez mutatja, hogy 3-ból következik 1.$\blacksquare$

Ezen lemma alapján tudunk konstruálni nagy metsző halmazokat.

Példa Legyen p egy páratlan prím, $V = \mathbb{Z}_p^d$ és $G = AGL(d,p) = V : GL(d,p)$ az affin csoport. Vegyünk egy x involúciót (másodrendű elemet) $GL(d,p)$ centrumából és egy másik y involúciót $(V : \langle x \rangle) \backslash \langle x \rangle$-ből. Ekkor, $G_\omega := \langle x, y \rangle \cong D_{2p}$. Figyeljük meg G hatását $[G : G_\omega]$-án.

Mivel $GL(d,p)$ tranzitívan hat a nemnulla vektorokon, láthatjuk, hogy $S = V : \langle x \rangle$ minden eleme konjugált G_ω valamelyik eleméhez. Tehát, a 3.19. lemmából következik, hogy S metsző halmaz. Láthatjuk, hogy

$$|S| = 2p^d \text{ , illetve } |G_\omega| = 2p.$$

tehát $|S|$ tetszőlegesen nagyobb lehet $|G_\omega|$-nál, d-től függően.

Ezt a példát alapul véve, be tudjuk bizonyítani, hogy a metszési sűrűség $\rho(G, \Omega)$ tetszőlegesen nagy lehet.

3.20. Tétel Adott $M > 0$, ekkor létezik egy tranzitív permutációcsoport $G \leq Sym(\Omega)$ és egy metsző halmaz $S \subseteq G$ oly módon, hogy $|S| > M|G_\omega|$, ahol G_ω az $\omega \in \Omega$ pont stabilizátora.

Bizonyítás Ezen bizonyítás során konstruálunk permutációcsopokat nagy metsző halmazokkal.

Legyen p prím, $q = p^d$. Legyenek $E = (\mathbb{F}_q, +)$ és $F = (\mathbb{F}_{q^2}, +)$ rendre a p^d és p^{2d} elemű véges testek additív csoportjai. Legyenek $E^\times$ és $F^\times$ rendre a p^d és p^{2d} elemű véges testek multiplikatív csoportjai. Tekintsük az affin csoport $G = AGL(1, p^{2d}) = F : F^\times$ hatását $\Omega = [G : H]$-án, ahol $H = E : E^\times$. Ekkor G egy Ω-án tranzitívan ható permutációcsoport. Válasszuk a metsző halmaznak az $S = F : E^\times$ részcsoportot. $\blacksquare$

3.21. Tétel Adott $M > 0$ és $\epsilon \in (0,1)$, ekkor létezik egy permutációcsoport $G \leq Sym(\Omega)$ melynek nincsen szorzatfelbontása olyan, hogy $\rho(G, \Omega) > M$ és $(1-\epsilon)\sqrt{\Omega} < \rho(G, \Omega) < \sqrt{\Omega}$.

Mielőtt bizonyítjuk ezt a tételt, kimondunk egy lemmát, ami hasznos lesz számunkra. A lemma bizonyítása ekvivalens a 2.2. következménnyel [12]-ben.

Egy C permutációcsoport egy $G \leq Sym(\Omega)$ részcsoportját élesen tranzitívnak hívjuk, ha bármely $(\alpha, \beta) \in \Omega \times \Omega$-ra létezik pontosan egy $c \in C$, oly módon hogy $\alpha^c = \beta$. Megjegyezzük, hogy egy reguláris részcsoport élesen tranzitív. A következő lemma azt mondja ki, hogy az élesen tranzitív csoportot tartalmazó permutációcsoportok EKR-tulajdonságúak.

3.22. Lemma Legyen G véges permutációcsoport Ω-án, $\omega \in \Omega$. Ha G tartalmaz egy élesen tranzitív C részhalmazt, akkor a következő állítások igazak:

1. Ha $S \subset G$ metsző, akkor létezik egy $\{H_c | c \in K\}$ H részhalmazainak páronként diszjunkt halmazainak halmaza (azaz $H_c \subset H$ és $H_c \cap H_d = \emptyset$ minden $c, d \in K$-ra, hogy $c \neq d$) oly módon, hogy $S = \bigcup_{c \in K} H_c c$,
2. G EKR-tulajdonságú.

Bizonyítás (3.21. Tétel) A tétel bizonyításához segítségül hívunk egy lemmát.

3.23. Lemma Legyen G, H, Ω, és S olyanok, ahogy 3.20. tételnél definiáltuk őket. Ekkor a következő állítások igazak:

1. S maximum metsző,
2. $|S| < \sqrt{|\Omega|}|H|$,
3. $\lim\limits_{q \to \infty} \dfrac{|S|}{\sqrt{|\Omega|}|H|} = 1$.

Bizonyítás Legyen $x \in F^{\times}$ and $y \in E^{\times}$, és tekintsük az $(x, y) \in S$ elemet. Ekkor $(0, x^{-1})(x, y)(0, x) = (1, y) \in E : E^{\times} = H$. Tehát S minden eleme H valamelyik elemének a konjugáltja. A 3.19. lemma alapján láthatjuk, hogy S metsző részhalmaz. Mivel $H \leq S$, ezért H minden eleme konjugáltja egy S-beli elemnek. Tehát egy $g \in G$ konjugáltja H egy elemének akkor és csak akkor, ha konjugáltja S egy elemének. Azt kaptuk, hogy $g \in G$ rögzít egy pontot $[G : S]$-ben akkor és csak akkor, ha g konjugáltja S egy elemének. Ennek eredményeképpen egy X részhalmaz metsző G hatását tekintve $\Omega = [G : H]$-án akkor és csak akkor, ha metsző G hatását tekintve $[G : S]$-en.

Így $F^{\times}$-nek a $q + 1$ elemű ciklikus részcsoportja reguláris részcsoport G hatását tekintve $[G : S]$-en. A 3.22. lemma alapján minden reguláris részcsoportot tartalmazó permutációcsoportnak EKR-tulajdonságúnak kell lennie, hiszen élesen tranzitívak. Ennélfogva, S maximum metsző G hatását nézve $[G : S]$-en, amiből kapjuk, hogy G Ω-ra vett hatását tekintve is az.

Ω elemszámát tekintve kapjuk, hogy:

$$|\Omega| = \frac{|G|}{|H|} = \frac{q^2(q^2 - 1)}{q(q - 1)} = q(q + 1).$$

Továbbá az is igaz, hogy

$$\frac{|S|}{|H|} = \frac{q^2(q - 1)}{q(q - 1)} = q = \sqrt{q^2} < \sqrt{q(q + 1)} = \sqrt{|\Omega|}.$$

Észrevehetjük, hogy $\lim_{q\to\infty} \frac{|S|}{\sqrt{|\Omega|}|H|} = 1$. ■

A 3.21. tétel bizonyításához már csak annira van szükségünk, hogy megmutassuk, hogy G-nek nincs szorzat felbontása. A G permutációcsoport rendje $q(q+1)$, ami nem n^m-es alakban van, tehát G-nek nincs szorzatfelbontása. Ezzel befejeztük a 3.21. tétel bizonyítását. ■

Most nézzük meg hogy lehet konstruálni egy permutációcsoportot a koszorúszorzattal. Legyen p prím. Tekintsük a $\mathbb{Z}_l$ csoportot és egy X halmazt. Jelöljük $X^{\mathbb{Z}_l}$-el az X értékű függvényeket $\mathbb{Z}_l$-en. A $\mathbb{Z}_l$ csoportnak van egy természetes hatása $X^{\mathbb{Z}_l}$-en, ami megadható $(m \cdot \pi)(j) = \pi(j-m)$-el minden $m \in \mathbb{Z}_l$, $\pi \in X^{\mathbb{Z}_l}$, és $j \in \mathbb{Z}_l$-re.

Legyen $G \leq Sym(\Omega)$ egy permutációcsoport. Ekkor a $G^{\mathbb{Z}_l}$ halmaz tekintheő egy $\Omega^{\mathbb{Z}_l}$-en ható csoportnak a következőképpen: $(f\pi)(j) = f(j)\pi(j)$, minden $f \in G^{\mathbb{Z}_l}$, $\pi \in X^{\mathbb{Z}_l}$, és $j \in \mathbb{Z}_l$-re. Vegyük észre, hogy $\mathbb{Z}_l$ normalizálja $G^{\mathbb{Z}_l}$-t $Aut(X^{\mathbb{Z}_l})$-ban, mivel $mfm^{-1} = m \cdot f$, amiből $G^{\mathbb{Z}_l} : \mathbb{Z}_l \leq Sym(\Omega^\Gamma)$. Az $(f,m) \in G^{\mathbb{Z}_l} : \mathbb{Z}_l$ elem hat $\pi \in \Omega^\Gamma$-án a következőképpen: $((f;m)\pi)(i) = f(i-m)\pi(i-m)$. Ezt a permutációcsoportot $G \wr \mathbb{Z}_l \leq Sym(\Omega^\Gamma)$-val jelöljük. A következő lemma segít megérteni az összefüggést $\rho(G,\Omega)$ és $\rho(G \wr \mathbb{Z}_l, \Omega^{\mathbb{Z}_l})$ között.

3.24. Lemma Ha S metsző részcsoportja $G \leq Sym(\Omega)$-nak, akkor $\mathbb{S} = S \wr \mathbb{Z}_l$ metsző részcsoportja $G \wr \mathbb{Z}_l \leq Sym(\Omega^{\mathbb{Z}_l})$-nek.

Bizonyítás Nézzük $f \in S^{\mathbb{Z}_l}$ és $m \neq 0 \in \mathbb{Z}_l$-t. Megmutatjuk, hogy $(f;m) \in S \wr \mathbb{Z}_l$ rögzíti $\Omega^{\mathbb{Z}_l}$ egy pontját. A 3.19. lemma alapján S minden eleme rögzít egy pontot Ω-ban. Kiválaszthatunk egy $x_{-m} \in \Omega$ pontot, amit rögzítünk $\left(\prod_{j=0}^{l-1} f((l-j-2)m)\right)$-el.
Minden $0 \leq i \leq l-2$-re, legyen

$$\left(\prod_{j=i+1}^{l-1} f(jm)\right) x_{-m}.$$

Ebből kapjuk, hogy $f((i-1)m)x_{(i-1)m} = x_{im}$. Tehát

$$\{im| -1 \leq i \leq l-2\} = \mathbb{Z}_l.$$

Legyen $\pi \in \Omega^{\mathbb{Z}_l}$ olyan, hogy $\pi(im) = x_{im}$ minden $-1 \leq i \leq l-2$-re, ekkor $(f;m)\pi(im) = f((i-1)m)\pi((i-1)m) = \pi(im)$, amiből kapjuk, hogy $(f;m)$ rögzíti π-t, tehát a 3.19. lemma alapján S metsző részcsoport. ■

Ezzel készen állunk bebizonyítani a következő tételt.

3.25. Tétel Végtelen sok olyan $G \leq Sym(\Omega)$ permutációcsoport van, melynek létezik szorzat felbontása és $\rho(G,\Omega) > \sqrt{|\Omega|}$.

Bizonyítás Legyen $P \leq Sym(\Delta)$ permutációcsoport, melynek S egy maximum metsző részcsoportja. Ekkor a 3.24. lemma alapján $\mathbb{S} = S \wr \mathbb{Z}_l \leq Sym(\Omega^{\mathbb{Z}_l})$ metsző részcsoportja $P \wr \mathbb{Z}_l \leq Sym(\Omega^{\mathbb{Z}_l})$-nek, ahol l prím. Adott $\delta \in \Delta$, a $P_\delta^{\mathbb{Z}_l} : \mathbb{Z}_l$ csoport a $P \wr \mathbb{Z}_l \leq Sym(\Omega^{\mathbb{Z}_l})$ permutációcsoport egy pontjának a stabilizátora. Ebből kapjuk, hogy

$$\rho(P \wr \mathbb{Z}_l, \Omega^{\mathbb{Z}_l}) \geq \frac{|\mathbb{S}|}{|P_\delta^{\mathbb{Z}_l} : \mathbb{Z}_l|} = \left(\frac{|S|}{|P_\delta|}\right)^l.$$

Tehát, ha találunk egy $P \leq Sym(\Delta)$ permutációcsoportot, aminek van egy metsző $S < P$ részcsoportja, melyre $\dfrac{|S|}{|P_\delta|} > \sqrt{|\Delta|}$, akkor beláttuk a 3.25. tételt. Ilyen csoportra található példa [11]-ben az 5.1. tételnél.

4 Irodalomjegyzék

[1] Frankl P., R. L. Graham: Old and New Proof of the Erdős – Ko – Rado Theorem, *Journal of Sichuan University, Natural Science Edition*, Vol. 26 Special Issue, (1989), 112 – 122.

[2] Frankl P.: The Shifting Technique in Extremal Set Theory, in: *Surveys in Combinatorics* (ed. C. Whitehead) 1987, Cambridge University Press, (1987), 81 – 110.

[3] Ulviczki Tünde: Extremális halmazrendszerek, Szakdolgozat, ELTE, 2016

[4] Peter J. Cameron, C.Y. Ku: Intersecting families of permutations, *School of Mathematical Sciences, Queen Mary, University of London, Mile End Road, London E1 4NS, UK* (2003)

[5]M. Deza, P. Frankl, On the maximum number of permutations with given maximal or minimal distance, J. Combin. Theory Ser. A (22) (1977) 352–360.

[6] The GAP Group (2002). GAP—Groups, Algorithms, and Programming, Aachen, St Andrews. Available from: http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/gap.

[7] I. Anderson, Combinatorics of Finite Sets. Clarendon Press, Oxford, 1987.

[8] Cai Heng Li, Shu Jiao Song, and Venkata Raghu Tej Pantangi *Erdos-Ko-Rado problems for permutation groups.* arXiv preprint arXiv:2006.10339, 2020.

[9] *Wikipedia,* Wreath product https://en.wikipedia.org/wiki/Wreath_product

[10] *Youtube,* Richard E. Borcherds, *Group theory 19: Wreath products,* https://www.youtube.com/watch?v=2Ik9m84AT2E

[11] Andriaherimanana Sarobidy Razafimahatratra, Karen Meagher, and Pablo Spiga. *On triangles in derangement graphs.* arXiv preprint arXiv:2009.01086, 2020.

[12] Bahman Ahmadi and Meagher Karen. *The Erdos-Ko-Rado property for some permutation groups.* Australasian Journal of Combinatorics, 61(1):23–41, 2015

[13] Kiss Emil. Bevezetés az algebrába. 2007

[14] P. Frankl, The Erdős-Ko-Rado theorem is true for $n = ckt$, *Col. Soc. Math. J. Bolyai 18 (1978), 365–375.*

[15] P. Erdős, Chao Ko, R. Rado, Intersection theorems for systems of finite sets, *Quart. J. Mat. Oxford*, 12 (1961), pp. 313-320.

[16] Kruskal J. B., *The number of simplicies in a complex, Mathematical Optimization Techniques*, 251-278, Univ. of. California Press, Berkley (1963)

[17] Katona, Gyula O. H. (1968), *"A theorem of finite sets",* in Erdős, Paul; Katona, Gyula O. H. (eds.), Theory of Graphs, Akadémiai Kiadó and Academic Press. Reprinted in Gessel Rota (1987, pp. 381–401).

[18] David Ellis, Eigenvalue methods in extremal combinatorics: an overview. Lecture notes, 2012.

[19] Lovász, L., On the Shannon capacity of a graph, IEEE Tram. Inform. Theory, Volume IT-25, pp. 1-7.