Magasdimenziós geometriai módszerek

BSc szakdolgozat

Írta:

Gyurkovszky Réka

Matematika BSc

matematikai elemző specializáció

Témavezető:

Dr. Sziklai Péter

Matematikai Intézet

Számítógéptudományi Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest, 2024

NYILATKOZAT

Név: Gyurkovszky Réka

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: BVLEA2

Szakdolgozat címe:
Magasdimenziós Geometriai Módszerek

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2024. 05. 31.

Gyurkovszky Réka

a hallgató aláírása

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni a témavezetőmnek, Dr. Sziklai Péternek, hogy megismertette velem ezt az érdekes témát. A rengeteg belefektetett idejét, hogy útmutatásával, szakmai tanácsaival és türelmével segítette munkámat. Köszönöm, hogy bármiben számíthattam rá és a biztatást, amely mindig motivációt nyújtott számomra a nehezebb pillanatokban is.

Ezen kívül szeretném megköszönni a szüleimnek a támogatást, akik nemcsak a tanulmányaim során, hanem egész életemben mellettem álltak és segítették továbbtanulásomat.

Végül, de nem utolsó sorban szeretném megköszönni barátaimnak, akik az elmúlt évek során sokat segítettek és bátorítottak. Örülök, hogy a sok közös órával a tanulást is vidámmá tudtuk tenni.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A dolgozatomban részletesen szeretném bemutatni a véges projektív terekben található "valódi" (proper) k-lefogó ponthalmazok elméletét és jellemzőit. A valódi jelző itt arra utal, hogy a lefogó ponthalmaz minimális lefogó tulajdonsággal bír, azaz nem tartalmaz felesleges pontokat, másrészt kifeszíti a szóbanforgó projektív teret. Ez a tulajdonság különösen érdekes geometriai és kombinatorikai szempontból.

A dolgozat első részében áttekintem a véges projektív terek alapvető fogalmait és tulajdonságait, majd rátérek a lefogó ponthalmazok definíciójára és alapvető tulajdonságaira. Ezt követően részletesen tárgyalom a proper lefogó ponthalmazok jellegzetességeit, példákkal és tételekkel alátámasztva. Az elméleti rész mellett programozási eszközökkel és a kódelmélettel is vizsgálom ezen halmazok tulajdonságait.

2. Alapfogalmak

A dolgozat megértéséhez elengedhetetlen néhány alapfogalom tisztázása. Ezek a fogalmak a projektív terek szerkezetére, a homogén koordináták alkalmazására és a lefogó halmazokra vonatkoznak. [7, 4]

1. Definíció. Adott egy $\mathbb{F}$ test fölötti $d+1$ dimenziós vektortér, $V(d+1, \mathbb{F})$. Ekkor a vektortér lineáris alterei a tartalmazásra nézve struktúrát alkotnak. Az $\mathbb{F}$ test fölötti d dimenziós projektív tér azon geometriai struktúra, amelynek az r dimenziós projektív alterei jelentsék a $V(d+1, \mathbb{F})$ vektortér $r+1$ dimenziós lineáris altereit $r = 0, 1, \ldots, d$-re. (Azaz megőrizzük az illeszkedési struktúrát.)

- A 0-dimenziós projektív alterek (a projektív tér pontjai) pontosan a vektortér egydimenziós lineáris alterei.
- Az egydimenziós projektív altereket projektív egyeneseknek,
- a k-dimenziósokat néha k-síkoknak,
- a $(d-1)$-dimenziósokat hipersíkoknak nevezzük.

2. Definíció (Homogén koordináta)**.** Az egy dimenziós lineáris alterek az adott irányvektorú, origón átmenő egyenesek. Persze bármelyik generáló (azaz nemnulla) irányvektora alkalmas irányvektornak, ennek $d+1$ koordinátája pedig a megfelelő projektív pont homogén koordinátáinak. Ez azt jelenti, hogy egy projektív pont minden koordinátáját végigszorozzuk egy nemnulla konstans szorzóval, akkor ugyanazt a projektív pontot kapjuk.

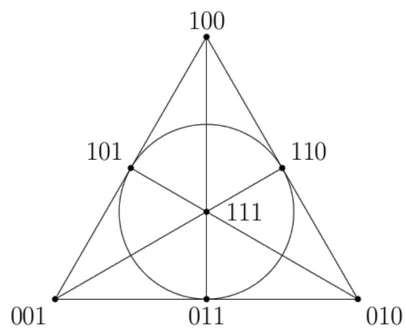
Egy d dimenziós projektív tér tehát a $d+1$-dimenziós vektortér pontjainak homogén koordinátáival van reprezentálva. A hipersíkok a normálvektorok homogén koordinátáival hasonlóan reprezentálhatók.

A projektív tér alterei a tartalmazásra nézve egy részben rendezett halmazt alkotnak. Igaz a **dualitás** tétele. Ez azt jelenti, hogy az i és $d-(i+1)$ dimenziós projektív alterek megfeleltethetők egymásnak. Azaz

üres halmaz	egész tér
pontok halmaza	hipersíkok halmaza
egyenesek halmaza	$d-2$-síkok halmaza
$\vdots$	$\vdots$
$d-2$-síkok halmaza	egyenesek halmaza
hipersíkok halmaza	pontok halmaza
egész tér	üres halmaz

Egy példa egy véges projektív síkra:

3. Példa. [8] $PG(2,2)$, azaz a Fano-sík:



4. Tétel (Dimenzióformula)**.** [5] Tetszőleges $S,T \subseteq P$ projektív alterekre

$$\dim(\langle S,T\rangle) + \dim(S \cap T) = \dim(S) + \dim(T).$$

Bizonyítás. Ha $P = P(W)$, $S = P(U)$ és $T = P(V)$, ahol $U,V \leq W$ lineáris alterek, akkor $\dim\langle S,T\rangle = \dim(U+V) - 1$, $\dim(S \cap T) = \dim(U \cap V) - 1$, $\dim(S) = \dim(U) - 1$ és $\dim(T) = \dim(V) - 1$ miatt elég a $\dim(U+V) + \dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V)$ "lineáris" dimenzióformulát ellenőrizni. Ez pedig rögtön adódik abból, hogy ha az $U \cap V$ altér egy bázisát külön-külön kiegészítjük egy-egy bázissá U-ban és V-ben, akkor ezek a vektorok együttesen bázist alkotnak az $U+V$ altér számára. □

Például a 3 dimenziós projektív térben az egyenesek és síkok nem lehetnek párhuzamosak, hanem mindig metszik egymást legalább egy pontban.

5. Definíció (Jelölés)**.** A továbbiakban jelölje $\mathbb{F}_q$ a q elemű véges testet, ahol q egy prímhatvány.

6. Állítás. Egy $PG(d,q)$ projektív tér pontjainak száma:

$$\theta_d = \frac{q^{d+1}-1}{q-1} = q^d + q^{d-1} + \cdots + q + 1$$

Bizonyítás. Minden pontnak pontosan $d+1$ koordinátája van. Ezt q^{d+1}-féle lehetőség, mert mindegyik koordináta helyére q-féle elemet írhatunk. Viszont ebbe beleszámoltuk a csupa-nullát is, így egyet ki kell vonni. Mivel a koordináták homogének, bármely nemnulla konstanssal végigszorozva ugyanazt a pontot kapjuk, ezért $q-1$-gyel le kell osztanunk. Azaz megkaptuk az összes projektív pont homogén koordinátáját. □

Ebből persze tetszőleges k-dimenziós altér pontszámát is tudjuk, az éppen $\theta_k = q^k + q^{k-1} + \dots + 1$. Speciálisan minden egyenesnek $q+1$ pontja van.

Egy projektív térben a k-dimenziós alterekre vonatkozó lefogó ponthalmaz egy olyan ponthalmaz, amely minden k-dimenziós alteret metsz. Mivel egy lefogó halmaz és még egy pont uniója még mindig lefogó ponthalmaz, ezért minket elsősorban a tartalmazásra nézve minimálisak érdekelnek.

7. Definíció. Egy d-dimenziós projektív tér $(d-k)$-dimenziós, azaz k-kodimenziós altereit lefogó ponthalmazt **k-lefogó halmaz**nak nevezzük. Az 1-lefogó halmazt a (hipersíkokat) lefogó halmaznak nevezzük.

8. Definíció. Egy B k-lefogó halmaz P pontja **lényeges pont**, ha $B \setminus \{P\}$ már nem k-lefogó, azaz létezik egy olyan $(d-k)$-dimenziós "érintő" altér, amely csak P-ben metszi B-t. Ezért egy k-lefogó halmaz pontosan akkor minimális, ha minden pontja lényeges.

9. Definíció (Alappont, alapszimplex)**.** **Alappont**oknak nevezzük az olyan d-dimenziós e_i $(i = 1, \dots, d+1)$ vektorokat, amelyeknek az i-edik koordinátája 1, az összes többi 0. Ezen pontok az alapszimplex pontjait alkotják.

10. Definíció (Súly)**.** Egy pont **Hamming súlyán** a nemnulla koordinátáinak számát értjük. Az alappontok tehát éppen az egy súlyú pontok.

11. Tétel. Egy d dimenziós projektív térben egy altér k-lefogó halmaza egyben a teljes tér k-lefogó halmaza is.

Bizonyítás. Dimenziótétel segítségével. Vegyünk a $P = PG(d,q)$ projektív térben egy s dimenziós S projektív alteret. Tegyük fel, hogy S-ben létezik egy k-lefogó halmaz. Legyen K egy k-lefogó halmaz P-ben.

$$\dim(\langle S, K\rangle) + \dim(S \cap K) = \dim(S) + \dim(K)$$

$$d + \dim(S \cap K) = d - k + s$$

$$\dim(S \cap K) \geq s - k$$

Tehát a tér minden k-kodimenziós altere legalább egy $s-k$ dimenziós altérben metszi az S alteret. Így, ha S-ben létezik egy k-kodimenziós altereket lefogó ponthalmaz, akkor ez lefogja a P minden k-kodimenziós altereit. Azaz k-lefogó marad a teljes projektív térben. □

12. Következmény. Egy d dimenziós projektív térben egy k-dimenziós altér ponthalmaza k-lefogó halmazát alkotja a teljes projektív térnek is.

Bizonyítás. Veszünk egy S k-kodimenziós alteret és egy T k-dimenziós alteret és megvizsgáljuk a metszetüket. Ha a metszet ≥ 0, akkor biztosan állíthatjuk, hogy minden k-kodimenziós alteret metsz egy k-dimenziós altér, azaz a $PG(d,q)$ projektív téren egy k-lefogó halmazt ad. A dimenziótétel alapján tudjuk, hogy

$$\dim(\langle S, T\rangle) + \dim(S \cap T) = \dim(S) + \dim(T)$$

$$d + \dim(S \cap T) = d - k + k = d$$

$$\dim(S \cap T) \geq 0$$

Tehát T és S legalább egy pontban metszik egymást.

□

13. Tétel (Bose-Burton). A $PG(d;q)$ projektív téren egy k-lefogó halmaznak legalább θ_k pontja van. Egyenlőség esetén a lefogó halmaz egy k-dimenziós altér minden pontja. Azaz, egy k-dimenziós altér pontjai a lehető legkisebb k-lefogó halmaz.

Bizonyítás. Ez az előző 12. következmény folytatása, hogy ennél kevesebb ponttal nem is lehet lefogni a k-kodimenziós altereket. Indukcióval bizonyítjuk be.

- $P = PG(d;q)$, a q rendű projektív téren szeretnénk lefogni a $k = d-1$-kodimenziós altereket, azaz az egyeneseket. Tegyük fel, hogy létezik egy B, egyeneseket lefogó halmaz, azaz egy $d-1$-lefogó halmaz, amelynek legfeljebb $\theta_{d-1} = q^{d-1} + \cdots + q + 1$ az elemszáma. Legyen p egy pont, amely nem eleme B-nek. A p ponton keresztül

  $$\frac{q^d - 1}{q^{d-(d-1)} - 1} = \frac{q^d - 1}{q - 1} = \frac{(q-1)(q^{d-1} + \cdots + q + 1)}{q - 1} = \theta_{d-1}$$

  darab egyenes megy át. Ebből adódik, hogy legalább θ_{d-1} pontra szükségünk van ezen egyenesek lefogására, tehát $|B| = \theta_{d-1}$.

  Ez valóban egy $d-1$-dimenziós altér, azaz egy hipersík összes pontja.[7]

  Hiszen válasszuk ki a B ponthalmaz bármelyik q^{d-1} darab pontját. Ez kiad egy H hipersíkot. Ha B nem ez a H hipersík, akkor választhatunk egy $p \notin B$, $p \in H$ pontot. Az ezen p ponton átmenő θ_{d-1} darab egyenes közül θ_{d-2} darab, azok, amik H-ban vannak, legalább egy B-beli pontot tartalmaznak, azaz le vannak fogva. Tehát a fennmaradó q^{d-1} darab egyenes lefogására

  $$|B| - q^{d-1} = \theta_{d-1} - q^{d-1} = \theta_{d-2} = \frac{q^{d-1} - 1}{q - 1}$$

  darab B-beli pont marad. Mivel $q - 1 \geq 1$, ezért

  $$q^{d-1} > \frac{q^{d-1} - 1}{q - 1}$$

  Így ellentmondásba ütköztünk, azaz $B = H$.

- Most P-ben a $k = d-2$-kodimenziós altereket, vagyis a síkokat kívánjuk lefogni. Ekkor a 11. tétel alapján P egy hipersíkjában egy egyenes-lefogó ponthalmaz megfelelő lesz. Tehát, ha $d-1$ dimenzióban sikerül lefogni az összes egyenest, akkor d dimenzióban lefogtuk az összes síkot. Az előző állítás alapján ekkor szükségünk van legalább $\theta_{d-1-1} = \theta_{d-2}$ pontra, amelyek éppen egy $d-2$ dimenziós altérre esnek.

- Tegyük fel, hogy igaz az állítás a k-kodimenziós alterekre. Ekkor a $k \quad 1$-lefogó ponthalmazra az alábbi írható fel:

  A $d \quad (k \quad 1) = d \quad k + 1$-dimenziós altereket szeretnénk lefogni. Ezt megint megtehetjük a 11. tétel miatt úgy, hogy $d \quad 1$ dimenzióban fogjuk le a $d \quad k$ dimenziósokat. Így az indukciós állítás miatt tehát szükségünk van $_{d \quad 1} \, _{(d \quad k)} = \, _{k \quad 1}$ pontra, amelyek éppen egy $k \quad 1$ dimenziós altérre esnek.

$\square$

Láttuk, hogy ha k-lefogókat keresünk, akkor egy altérben lévő, arra nézve k-lefogó halmaz az egész térnek is k-lefogó halmaza. Tehát az érdekes eset az, amikor a lefogó halmaz kifeszíti az egész teret. Ezért az alábbi módon vezetjük be a valódi lefogó halmazok fogalmát.

14. Definíció. [1] A $PG(d;q)$ projektív térben egy B k-lefogó halmazt **valódi**nak (propernek) nevezünk, amennyiben a B halmaz d-dimenziós, azaz feszíti a teret és tartalmazásra nézve minimális.

Egy másik módja lehetne a valódi lefogó ponthalmaz bevezetésének, ahogy Udo Heim által definiálta.

15. Definíció (Udo Heim). [6] Egy q rendű d dimenziós P projektív tér B lefogó halmazát akkor nevezzük valódinak, ha P egyetlen hipersíkjában sem alkot lefogó halmazt, azaz, ha P egyetlen H hipersíkja sem tartalmazza B egy részhalmazát, amely önmagában lefogó halmaz lenne H-n. Egy $PG(d;q)$-ban lévő valódi lefogó halmaz minimális számosságát $f(d;q)$-val jelöljük.

A továbbiakban a 14 definícióban megfogalmazott valódi lefogó ponthalmazzal számolunk.

16. Megjegyzés. Ha van egy valódi lefogó ponthalmazunk, akkor az általánosítás megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az alappontok benne vannak. Tehát ezentúl mindig az alappontokat próbáljuk kiegészíteni valódi lefogó ponthalmazzá.

17. Megjegyzés. Egy adott ponthalmaz esetében kettő dolgot kell leellenőrizni:

1. lefogja-e az összes hipersíkot

2. minden pont lényeges-e, azaz minden pontjára létezik-e egy olyan hipersík, amelyet csak az adott pont fog le.

Kérdés: Különböző d-re és q-ra mik a valódi lefogó halmazok a $PG(d;q)$ projektív téren?

3. A hipersíkokat lefogó valódi lefogó halmazok

3.1. Programozás Pythonban

Egy B ponthalmaz **lefogó halmaz** a d dimenziós, q rendű projektív téren, P-n, ha az alábbi teljesül:

> minden P-beli hipersík legalább egy B-beli pontot tartalmaz.

Ezen B ponthalmazok közül keressük azokat, amelyek

1. feszítik a teret és
2. tartalmazásra nézve minimálisak.

Az utóbbi azt jelenti, hogy B-nek nincs olyan valódi részhalmaza, ami lefogó halmaz lenne. Ez pontosan akkor következik be, ha B minden eleme lényeges pont.

Ahhoz, hogy egy ilyen ponthalmaz feszítse a teret elég feltételeznünk, hogy a $(d+1)$-dimenziós alappontok mindegyike eleme B-nek.

Az alábbi algoritmus éppen ilyen megfelelő valódi lefogó ponthalmazt ad outputként.

Algoritmus:

```
adott $B$ lényeges ponthalmaz
while van olyan hipersík, amit nem fogtunk le do
    beveszünk egy új $p$ pontot $B$-be
    if a $p$ pont lényeges then
        if $B \cup p$ minden pontja lényeges then
            visszaadja új ponthalmazként a $B \cup p$ ponthalmazt
        else
            if valamelyik alappont vált nem lényegessé then
                visszaadja $B$-t
            else
                kitöröljük $B$ összes nem lényeges pontját $\Rightarrow$ $B' \cup p$-t adja vissza
            end if
        end if
    else
        visszaadja $B$-t.
    end if
end while
```

3.1.1. Mellékprogramok, mellékszámolások

A galois csomagban a q elemű véges test elemeit a $\{0, 1, 2, \ldots, q-1\}$ számokkal reprezentálják (persze ekkor nem feltétlenül maradnak érvényben a szokásos számműveletek).

Ekkor az összes pontot a $PG(d, q)$ véges projektív téren $d+1$ hosszú homogén koordinátákkal reprezentálhatjuk. Feltehetjük, hogy minden pontnak az utolsó koordinátája 1, vagy 0. Végigmegyünk a koordinátákon. Amikor éppen az i-edik koordinátánál tartunk, az i-edik koordinátát 1-esre állítjuk, i-től $d+1$-ig pedig 0-ra. Az i-edik koordináta előtt az elemek összes lehetséges kombinációját, Descartes-szorzatát írjuk.

Az alábbi program inputja 2 szám, a kívánt dimenzió és a q rendű véges test elemszáma. Outputja a $PG(d, q)$ véges projektív tér összes pontjának homogén koordinátája.

A dualitás miatt a hipersíkokat megfeleltethetjük egy normálvektorának koordinátáival, tehát ez a program az összes hipersíkot is megadja.

```python
import numpy as np
from itertools import product
import galois

def all_points(d,q):

    GF = galois.GF(q)
    elem = GF.elements
    res = np.array([[1] + [0 for i in range(d)]])

    for a in range(1, d+1):
        perm = product(elem, repeat = a)
        for i in perm:
            r = [0 for i in range(d+1)]
            for j in range(len(i)):
                r[j] = i[j]
            r[a] = 1
            res = np.append(res, [r], axis = 0)

    return GF(res)
```

Az alábbi program inputja kettő numpy array a q elemű test fölött, az egyik a normálvektorukkal megadott hipersíkok halmaza, a másik pedig pár (teret feszítő) pontok halmaza.

Outputja szintén egy numpy array, mégpedig azon pontok koordinátáiból áll, amelyek nem lényegesek a ponthalmazban.

A 8. definícióban leírtak alapján a nem lényeges pontok azon pontok, amelyekhez nem létezik érintő hipersík. Ha egy pont eleme egy hipersíknak, akkor a koordinátáiknak a skaláris szorzata éppen nulla. Ha egy adott hipersík normálvektorának koordinátáit végigszorozzuk az összes pont koordinátáival, kapunk egy újabb vektort. Ha ebben a vektorban éppen egy darab nulla található, akkor ez az egyetlen pont, amely eleme a megadott hipersíknak, azaz ez egy érintő hipersík.

Ezért, úgy működik a program, hogy a mátrixszorzatát vesszük a hipersíkok normálvektorainak és a pontoknak a koordinátáinak, majd ebből kiválasztjuk azon sorokat, amelyekben pontosan egy darab nulla van. Ha ezen sorokból alkotott mátrixnak van olyan oszlopa, amelyben nincsen nulla, akkor az a pont nem lényeges.

A mátrixszorzatból megkaphatjuk még a le nem fogott hipersíkok halmazát is. Amely sorban egyetlen nulla sincsen, azt a hipersíkot még nem sikerült lefognunk.

```
import numpy as np
import galois


def not_essential_points(hyper_planes, set_of_points):

    matrix = hyper_planes @ np.transpose(set_of_points)
    a = matrix[np.sum(matrix == 0, axis=1)==1]

    return set_of_points[np.all(a != 0, axis = 0)]


def not_blocked_hyper_planes(hyper_planes, set_of_point):

    matrix = hyper_planes @ np.transpose(set_of_point)

    return hyper_planes[np.all(matrix != 0, axis=1)]
```

3.2. Eredmények

3.2.1. A két elemű véges test

Ebben a részben nem szükséges használnunk a számítógépes eredményeket.

18. Állítás (A 2 elemű test). $PG(d;2)$-ben a $d+1$ darab alappont e_i minden hipersíkot lefog, kivéve azt, amelynek minden koordinátája 1-es, azaz az $[1;1;\dots;1]$ hipersík.

Bizonyítás. Válasszunk ki egy H hipersíkot a hipersíkokat reprezentáló normálvektorok halmaza közül. Ha H normálvektorának az i-edik koordinátája 0, akkor ez a hipersík lefogható az e_i alapponttal. Ez azt jelenti, hogy a koordinátáinak skaláris szorzata éppen 0.

$$[\ ;0;\ ;\dots;\ ]\ (0;1;0;\dots;0) = \ 0 + 0\ 1 + \ 0 \ \ 0 = 0$$

A projektív téren pontosan egy olyan pont van, aminek nincsen 0 koordinátája és ez a csupa 1 koordinátájú hipersík. Beláttuk, hogy ezen kívül bármely másik hipersík lefogható az alappontokkal. □

19. Tétel (A 2 elemű test fölötti valódi lefogó ponthalmaz). $PG(d;2)$-ben:

1. ha a d páratlan, akkor a $d+1$ darab alappont és az $(1;1;\dots;1)$ koordinátájú pontokból álló ponthalmaz valódi lefogó ponthalmaz.
2. ha a d páros, akkor nincsen ilyen valódi lefogó ponthalmaz.

Bizonyítás. Ha d páratlan, akkor $d+1$ páros. A kimaradt csupa 1-es hipersík tényleg lefogható a csupa 1-es koordinátájú ponttal, mert a skaláris szorzatuk 0. Mivel páros számú egyest adunk össze, kongruens 0 moduló 2.

$$(1;1;\dots;1)\ [1;1;\dots;1] = 1\ \ 1 + 1\ \ 1 + \ \ + 1\ \ 1 \ \ 0 \pmod 2$$

Ha d páros, akkor $d+1$ páratlan. Ekkor nem fogtuk még le a csupa 1-es koordinátájú hipersíkot, bármely másik hipersík viszont le van fogva (előző állítás). A csupa 1-es koordinátájú hipersík lefogásához olyan pont kell, amelynek páros számú 1-es koordinátája van. Legyen egy ilyen pont P. P-t bevéve viszont megszűnik pár pont szükségessége a ponthalmazban. Dobjuk ki az eredeti alappontok közül azt, amelynek olyan helyen van az 1-es koordinátája, ahol P-nek 0 koordinátája van. Ekkor ugyan lefogó ponthalmazt találtunk, de ez nem feszíti ki a teret, azaz egy altérben találtunk valódi lefogó ponthalmazt. Pl.:

Ha $PG(2;2)$-ben ha bevesszük az $(1;1;0)$ pontot, akkor a $(0;0;1)$ alappont kidobható: a

$$\{(1;0;0);(0;1;0);(1;1;0)\}$$

ponthalmaz egy projektív egyenes minden pontja, amely egy altér a projektív síkon (azaz lefogó halmazt alkot). □

dim	2	3	4	5	6	7
$q = 2$	nincs	5	nincs	7	nincs	9
$q = 3$	6	7	9	10	12	13
$q = 4$	7	9	11	15	19	26
$q = 5$	9	11	17	23	30	39
$q = 7$	12	19	30	42	55	
$q = 8$	13	24	37	52		
$q = 9$	13	28	45			

1. táblázat. Néhány példa a programmal, random pontokkal talált, valódi, legkisebb lefogó halmaz pontszámára d dimenzióban a q elemű véges testen

A program által kapott ponthalmazokban található bizonyos mintázat. Ezt részletezem az alábbiakban.

3.2.2. Páratlan dimenziókban

Az alábbi ponthalmaz valódi lefogó ponthalmaz minden prím hatványrendű testre. Páratlan d dimenzióban éppen páros számú, $d + 1$ koordinátája van minden pontnak.

Az alábbiakban az összes lehetséges módon kiválasztjuk $\in \mathrm{F}_q \setminus \{0; \ 1\}$-t.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
(1; & 0; & 0; & 0; & \dots & 0; & 0; & 0; & 0; & 0; & 0) \\
(0; & 1; & 0; & 0; & \dots & 0; & 0; & 0; & 0; & 0; & 0) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(0; & 0; & 0; & 0; & \dots & 0; & 0; & 0; & 1; & 0; & 0) \\
(0; & 0; & 0; & 0; & \dots & 0; & 0; & 0; & 0; & 1; & 0) \\
(0; & 0; & 0; & 0; & \dots & 0; & 0; & 0; & 0; & 0; & 1) \\
(0; & 0; & 0; & 0; & \dots & 0; & 0; & 0; & 0; & ; & 1) \\
(0; & 0; & 0; & 0; & \dots & 0; & 0; & ; & 1; & \ 1; & 1) \\
(0; & 0; & 0; & 0; & \dots & ; & 1; & \ 1; & 1; & \ 1; & 1) \\
(0; & 0; & 0; & 0; & \dots & \ 1; & 1; & \ 1; & 1; & \ 1; & 1) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(0; & 0; & ; & 1; & \dots & \ 1; & 1; & \ 1; & 1; & \ 1; & 1) \\
(\ ; & 1; & \ 1; & 1; & \dots & \ 1; & 1; & \ 1; & 1; & \ 1; & 1) \\
(\ 1; & 1; & \ 1; & 1; & \dots & \ 1; & 1; & \ 1; & 1; & \ 1; & 1)
\end{array}
$$

Ez a ponthalmaz teljes dimenziós, mert eleme az összes alappont. Tartalmazásra nézve minimális, mivel minden pontja lényeges, amit azzal tudunk bebizonyítani, hogy mutatunk minden ponthoz egy-egy megfelelő érintő hipersíkot, amelyet csak ezen pont fog le.

Az e_i alappontban $i = 1; 2; \dots; d; d + 1$ érinti a B valódi lefogó ponthalmazt az $[1; 1; \dots; 1; 0; 1; \dots; 1; 1]$ normálvektorú hipersík, ahol 0 éppen az i-edik koordináta.

Csak a felső alakú koordinátájú pontok fogják le az alsó normálvektorú hipersíkot, ahol $\quad 1 (\mathrm{mod}\ q)$

$$\begin{array}{cccccccccc}
(0, & 0, & 0, & 0, & \ldots & 0, & 0, & 0, & 0, & \quad, \ 1) \\
[1, & 1, & 1, & 1, & \ldots & 1, & 1, & 1, & 1, & \quad, \ 1]
\end{array}$$

Ugyanígy felírható a többi pontra is az alábbi hipersík:

$$\begin{array}{cccccccccc}
(0, & 0, & 0, & 0, & \ldots & 0, & 0, & \quad, & 1, & 1, \ 1) \\
[1, & 1, & 1, & 1, & \ldots & 1, & 1, & \quad, & 1, & 1, \ 1] \\
 & & & & & & & & & \\
(0, & 0, & \quad, & 1, & \ldots & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, \ 1) \\
[1, & 1, & \quad, & 1, & \ldots & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, \ 1] \\
 & & & & & & & & & \\
(\quad, & 1, & 1, & 1, & \ldots & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, \ 1) \\
[\quad, & 1, & 1, & 1, & \ldots & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, \ 1] \\
 & & & & & & & & & \\
(\ 1, & 1, & 1, & 1, & \ldots & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, \ 1) \\
[1, & 1, & 1, & 1, & \ldots & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, \ 1]
\end{array}$$

Így minden páratlan d dimenzióban minden q rendű test fölött találtunk egy

$$d + 1 + \frac{d+1}{2} \quad (q \quad 2) + 1 = \frac{3}{2} \quad (d+1)(q+1) + 1 = \frac{1}{2} \quad q \quad (d+1) + 1$$

elemű valódi lefogó ponthalmazt. Ez néhány esetben a legkisebb valódi lefogó ponthalmaz, de magas dimenziókban nem lehetünk biztosak ebben. Egy pár példát a 2 táblázat mutatja.

dim	3	5	7	9	11	13
$q = 2$	5	7	9	11	13	15
$q = 3$	7	10	13	16	19	22
$q = 4$	9	13	17	21	25	29
$q = 5$	11	16	21	26	31	36
$q = 7$	15	22	29	36	43	50
$q = 8$	17	25	33	41	49	57
$q = 9$	19	28	37	46	55	64

2. táblázat. A megkonstruált valódi lefogó halmaz mérete páratlan d dimenziókban a q elemű testen

A 2. táblázat esetében látszik, hogy a 1. táblázat random pontjainál sokkal kisebb elemű ponthalmazokat kapunk. Például az 5 elemű test esetén 5 dimenzióban a random pontokkal csak 23 elemű ponthalmazt talált legkisebbnek, de az előző konstrukció alapján tudjuk, hogy létezik 16 elemű valódi lefogó ponthalmaz is. Egy másik példa ugyanígy az 5 elemű test felett 7 dimenzióban a random pontokkal 39 elemű lett a legkisebb ponthalmaz, míg ezzel a konstrukcióval tudjuk, hogy 21 elemű valódi lefogó ponthalmaz is létezik. Viszont például a 2 és 3 elemű test fölött 3, 5 és 7 dimenzióban ugyanannyi elemű ponthalmazokat kaptunk a random pontokkal, mint ezzel a konstrukcióval.

3.2.3. Páros dimenziókban

Az alábbi ponthalmaz megfelelő lesz minden prímhatvány elemszámú testre, ez alól kivételt képez a másodrendű test, mert ahogy a 19. tételben bebizonyítottuk, ilyen esetben nem létezik valódi lefogó ponthalmaz. Összes lehetséges módon kiválasztjuk $\ \in \mathbb{F}_q \setminus \{0; \ 1\}$ és $\ \in \mathbb{F}_q \setminus \{ \ 1\}$.

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
(1; & 0; & 0; & 0; & 0; & \ldots & 0; & 0; & 0; & 0; & 0; & 0) \\
(0; & 1; & 0; & 0; & 0; & \ldots & 0; & 0; & 0; & 0; & 0; & 0) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(0; & 0; & 0; & 0; & 0; & \ldots & 0; & 0; & 0; & 1; & 0; & 0) \\
(0; & 0; & 0; & 0; & 0; & \ldots & 0; & 0; & 0; & 0; & 1; & 0) \\
(0; & 0; & 0; & 0; & 0; & \ldots & 0; & 0; & 0; & 0; & 0; & 1) \\
(0; & 0; & 0; & 0; & 0; & \ldots & 0; & 0; & 0; & 0; & ; & 1) \\
(0; & 0; & 0; & 0; & 0; & \ldots & 0; & 0; & ; & 1; & 1; & 1) \\
(0; & 0; & 0; & 0; & 0; & \ldots & ; & 1; & 1; & 1; & 1; & 1) \\
(0; & 0; & 0; & 0; & 0; & \ldots & 1; & 1; & 1; & 1; & 1; & 1) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(0; & 0; & 0; & ; & 1; & \ldots & 1; & 1; & 1; & 1; & 1; & 1) \\
(0; & ; & 1; & 1; & 1; & \ldots & 1; & 1; & 1; & 1; & 1; & 1) \\
(\ 1; & 1; & 1; & 1; & 1; & \ldots & 1; & 1; & 1; & 1; & 1; & \ )
\end{array}
$$

Megint a B ponthalmazból csak az e_i alappont $i = 1; 2; \ldots; d; d+1$ eleme azon normálvektorú hipersíknak, amelynek $[1; 1; \ldots; 1; 0; 1; \ldots; 1; 1]$ a koordinátája és a 0 éppen az i-edik koordináta.

Ugyanúgy megint igaz, hogy a B ponthalmazt csak a felső alakú koordinátájú pontban érinti az alsó normálvektorú hipersík, ahol $\qquad 1 \pmod q$. Az előzőek alapján felírható az összes pontra egy megfelelő érintő hipersík.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
(0, & 0, & 0, & 0, & \ldots & 0, & 0, & 0, & 0, & , & 1) \\
[1, & 1, & 1, & 1, & \ldots & 1, & 1, & 1, & 1, & , & 1]
\end{array}
$$

Ami változik 3.2.2 fejezetben leírtakhoz képest, hogy melyek azok az érintő hipersíkok, amelyek a $(\ 1; 1; \ 1; 1; \ 1; \ldots 1; \ 1; 1; \ 1; 1; \ )$ pontokban érinti a B valódi lefogó ponthalmazt. Most $\qquad + 1 \pmod q$. Ekkor az érintő hipersík normálvektorának koordinátája az alsó alakban írható.

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
(-1, & 1, & -1, & 1, & -1, & \ldots & 1, & -1, & 1, & -1, & 1, & \ ) \\
[\ , & 1, & 1, & 1, & 1, & \ldots & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1]
\end{array}
$$

dim	2	4	6	8	10	12
$q = 3$	6	9	12	15	18	21
$q = 4$	8	12	16	20	24	28
$q = 5$	10	15	20	25	30	35
$q = 7$	14	21	28	35	42	49
$q = 8$	16	24	32	40	48	56
$q = 9$	18	27	36	45	54	63
$q = 11$	22	33	44	55	66	77
$q = 13$	26	39	52	65	78	91

3. táblázat. A megkonstruált valódi lefogó halmaz mérete páros d dimenziókra a q páratlan prím elemű testen

Így minden páros d dimenzióban minden q prímhatvány elemű test fölött (kivételt jelent a kételemű test) találtunk egy

$$d + 1 + \frac{d}{2}(q - 2) + q - 1 = \left(1 + \frac{1}{2}d\right)q$$

elemű valódi lefogó ponthalmazt. Ez néhány esetben a legkisebb valódi lefogó ponthalmaz, de magas dimenziókban nem lehetünk biztosak ebben. Egy pár példát a 3. táblázat mutatja.

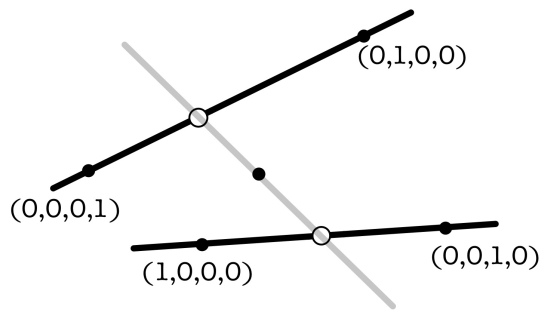
A 3. táblázaton látszik, hogy a 1. táblázat random pontjainál sokkal kisebb elemű ponthalmazokat kapunk például az 5 elemű test fölött 6 dimenzióban a random pontokkal csak 30 elemű, a konstrukcióval viszont 20 elemű valódi lefogó ponthalmazt is találtunk. Egy másik példa a 7 elemű test fölött 4 dimenzióban random pontokkal 30 elemű, pedig tudjuk, hogy létezik 21 elemű valódi lefogó ponthalmaz is.

2 dimenzióban viszont éppen a másik esetben állunk. Míg a random pontokkal tudjuk, hogy a 2^2 rendű test fölött létezik 7 elemű valódi lefogó ponthalmaz, a konstrukció csak 8 eleműt talál. Egy másik példa a 2^3 és 3^2 rendű test fölött random pontokkal 13 elemű valódi lefogó ponthalmaz is létezik, a konstrukció viszont csak 16 és 18 eleműt ad.

3.2.4. Geometriai magyarázat

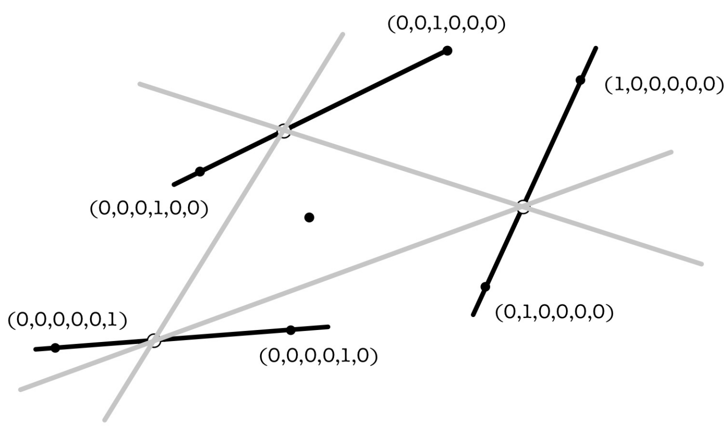
3 dimenzióban

Veszünk kettő darab, 2 alapponton átmenő kitérő egyenest, mind a kettőből kihagyunk egy-egy pontot (ami ne az alappont legyen). Ekkor azok a (hiper)síkok, amelyek átmennek azon az egyenesen, amely átmegy a kettő kihagyott ponton, még nincsenek lefogva. Tehát ezen az egyenesen kell vennünk még egy pontot. Ez valóban $2 \quad (q+1) \quad 2+1 = 2q+1$ pont.



5 dimenzióban

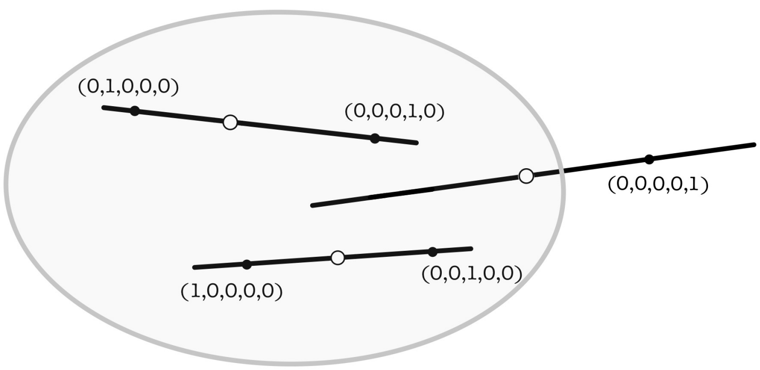
Hasonló, mint 3 dimenzióban, csak most három darab, 2-2 alapponton átmenő kitérő egyenest kell vennünk. Mindhárom egyenesből kihagyunk egy-egy pontot, amik nem az alappontok. Ekkor a kihagyott három ponton átmenő síkon kell vennünk egy pontot, mivel az ezen a síkon átmenő hipersíkok még lefogatlanok.



Minden további páratlan dimenzióban tehát ezzel az algoritmussal kapjuk meg a valódi lefogó ponthalmazt. Vennünk kell $\frac{d+1}{2}$ darab egyenes pontjait úgy, hogy minden egyenes pontosan 2 alapponton menjen át. Minden egyenesből kihagyunk egy-egy pontot. Mivel minden egyenesnek pontosan $q + 1$ darab pontja van, ezért így kapunk $q \quad \frac{d+1}{2}$ pontot. Ekkor viszont a kihagyott $\frac{d+1}{2}$ darab pont kifeszít egy $\frac{d+1}{2} \quad 1$ dimenziós projektív alteret. Ezen az altéren kell vennünk még 1 darab (általános helyzetű) pontot, hogy lefogjuk azokat a hipersíkokat, amelyeket eddig nem tettünk meg.

4 dimenzióban

Veszünk kettő kitérő egyenest 2-2 alapponton keresztül. Ez a kettő egyenes egy 3 dimenziós alteret feszít ki, legyen ez V. Így a dimenziótétel miatt, még egy kitérő e egyenest már nem tudunk venni. Mivel V és e egy pontban mindenképpen metszik egymást. Vegyük fel úgy a harmadik e egyenest, hogy a már bevett két egyenes egyikébe se metsszen bele és menjen át az ötödik alapponton. Mindhárom egyenesnek azt a pontját hagyjuk ki, ami a metszete a másik két egyenes által kifeszített 3 dimenziós altérnek és magának az egyenesnek. Így valóban megkapjuk a $(4{=}2 + 1) \quad q = 3 \quad q$ pontot.



Minden további páros d dimenzióban tudunk venni $d{=}2$ darab kitérő egyenest 2-2 alapponton keresztül. Ez kifeszít egy $d \quad 1$ dimenziós V alteret. Hozzáveszünk még egy e egyenest a kimaradt alapponton keresztül úgy, hogy ne metsszen bele a V alteret kifeszítő egyenesek egyikébe sem. Bármely $\frac{d}{2}$ darab egyenes kifeszít egy $d \quad 1$ dimenziós W alteret. Biztosan tudjuk, a W alteret döfi a kimaradt egyenes, ezt a közös metszéspontot hagyjuk ki a ponthalmazból minden egyenes esetében. Így valóban megkapjuk a $(\frac{d}{2} + 1) \quad q$ elemű ponthalmazt.

3.2.5. További érdekességek

Blokhuis-becslés $PG(2,p)$-ben

Blokhuis bizonyította be [2], hogy amennyiben q egy prímszám p, akkor a projektív síkon egy B valódi lefogó ponthalmaz elemszáma

$$|B| \geq \frac{3}{2} \cdot (p+1)$$

Egyenlőség esetén B azon a 3 egyenesen van, amely két-két alappontot köt össze. Minden egyenesen még $\frac{1}{2} \cdot (p-1)$ pont van az alappontokon kívül. Így összességében tényleg kijön

$$3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (p-1) + 3 = \frac{3}{2}p - \frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}p + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot (p+1)$$

Bruen-becslés $PG(2,q)$-ben

A projektív síkon egy valódi lefogó ponthalmaz B elemszáma [3]

$$|B| \geq q + \sqrt{q} + 1$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha q egy négyzetszám és B a projektív sík egy $\sqrt{q}$-rendű, úgynevezett Baer-részsíkja.

Általánosan $PG(t,q^t)$-ban, tehát ha a rend egy t-edik hatvány, akkor létezik egy olyan B valódi lefogó ponthalmaz, amelynek elemszáma

$$|B| = q^t + q^{t-1} + \cdots + q + 1$$

és ez a $PG(t,q)$ részgeometria, ami jóval kisebb, mint a 3.2.2 és 3.2.3 fejezetekben megadott ponthalmazok elemszáma.

Ebben az az érdekes, hogy azt gondolnánk, a legkisebb valódi lefogó ponthalmazok elemszámából alkotott 1. táblázat oszlopai szigorú monoton növekedő sorozatok, viszont így még csak nem is monoton növekedő sorozatokról van szó.

Azt viszont be tudjuk látni, hogy a táblázat sorai monoton növekedő sorozatok.

20. Tétel. Egy adott q rendű test felett a dimenzió növelésével a legkisebb valódi lefogó halmazok nagysága egyre nagyobb lesz.

Bizonyítás. Először bizonyítsuk be, hogy egy lefogó halmaz vetülete is lefogó halmaz.

Egy $P = PG(d,q)$ projektív téren vegyünk egy B valódi hipersík lefogó halmazt és egy C pontot a B ponthalmazon kívül. Ebből a C pontból levetítjük B-t a P projektív tér egy H, $(d-1)$-dimenziós hipersíkjára. Ekkor a levetített B' ponthalmaz H-ban is valódi hipersík lefogó halmaz lesz, azaz B' lefogja az összes $(d-2)$-dimenziós alteret.

Vegyünk H-ban egy V hipersíkot, ekkor a $\langle C, V\rangle$ generátum egy hipersík P-ben. Ez azt jelenti, hogy $\langle C, V\rangle$-nak van pontja B-ben (mivel B hipersík lefogó volt P-ben). Ennek a pontnak a vetülete tehát B'-nek egy pontja lesz, amely benne van V-ben, azaz lefogja.

Ha C-t úgy választjuk, hogy B egy szelő egyenesének egy pontja legyen, akkor B' elemszáma legalább eggyel kisebb, mint B pontszáma. $\square$

4. A k-kodimenziós altereket lefogó valódi lefogó halmazok

Az eddigi hipersíkok helyett a továbbiakban a k-kodimenziós altereket lefogó valódi lefogó legkisebb elemű halmazokat keresünk.

4.1. Másodrendű test

21. Tétel. A k-kodimenziós altereket le tudjuk fogni az alapszimplex $(k - 1)$ dimenziós lapjainak a pontjaival a 2 elemű test fölött, amennyiben $k > 1$.

22. Megfigyelés. Ez teljes dimenziós lefogó halmazt ad, ami feszíti a teret, de nem minden esetben ad **minimális** teljes dimenziós lefogó halmazt.

Bizonyítás. Teljes indukció:
$k = 2$-re: A $2 - 1 = 1$ dimenziós lapok, amelyek a legfeljebb 2 súlyú pontok, lefognak minden 2-kodimenziós alteret. Pl.: 3 dimenzióban a "tetraéder alapváza" lefog minden egyenest.
A $k - 1$ dimenziós lapok azok a lapok, amelyeket a legfeljebb k súlyú pontok alkotják. Minden k-kodimenziós altérben van olyan pont, aminek "kicsi" a súlya (legfeljebb k). A legfeljebb k súlyú lapok lefogják a k-kodimenziós, azaz $n - k$ dimenziós altereket. Egy ilyen alteret $n - k + 1$ pont feszít ki. Ábrázoljuk ezen pontokat egy mátrixban, úgy, hogy az első $n - k + 1$ darab oszlop az egységmátrixot adja ki. Ez megtehető, hiszen ez az $n - k + 1$ darab pont független, rangja $n - k + 1$ és bázist alkot. Minden pont $n + 1$ koordinátából áll. Nézzük a maradék k darab oszlopot.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \end{bmatrix}$$

Legfeljebb összesen minden sorban $k + 1$ darab egyes lehet. Ha minden sorban végig $k + 1$ db egyes van, akkor 2 sort összeadva kapnánk egy 2 súlyú pontot.

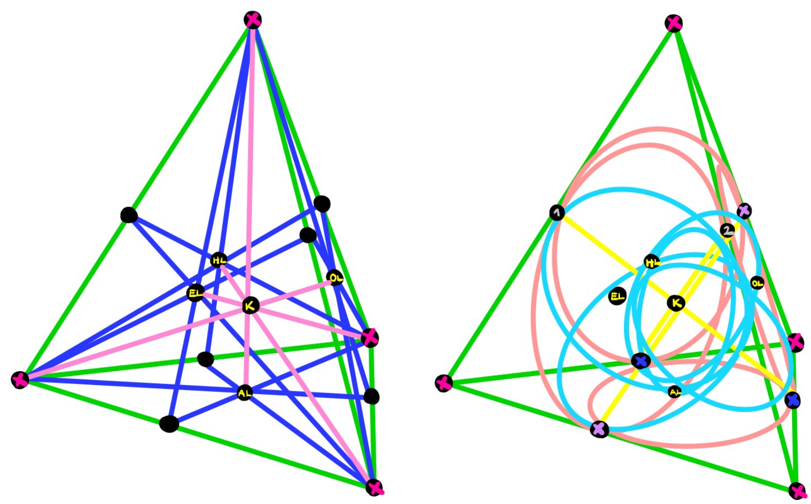
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

□

23. Megjegyzés. Nagyobb elemszámú test fölött is igaz hasonló tétel, az egyszerűség kedvéért csak erre bizonyítottam be.

4.2. Példa

24. Példa ($PG(3;2)$-ben)**.** Egy példa 3 dimenzióban a másodrendű test fölött szeretnénk lefogni a 2-kodimenziós altereket, azaz az 1 dimenziós projektív altereket, az egyeneseket. A 21. tétel alapján az alapszimplex 1-dimenziós lapjainak a pontjaival le tudjuk fogni az összes egyenest. Ez 3 dimenzióban a tetraéder éleit foglalja magában.



Ez valóban 2-lefogó ponthalmaz és ebben az esetben nem is lehet kevesebb ponttal lefogni az összes egyenest.

Bizonyítás. Először bevesszük az alapszimplex 0 dimenziós lapjait, azaz a tetraéder csúcsait. Ez a 4 pont lefog minden alapcsúcsból kiinduló egyenest. Az összesen 35-ből 22 darab egyenest fog le, ami a bal oldali képen látható. A jobb oldali kép egyenesei azok, amelyek még nincsenek lefogva. Először próbáljuk meg legkedvezőbben lefogni a narancssárga egyeneseket, amelyek éppen azok, amik 3 élfelező ponton mennek keresztül. Kettő élfelezőt kell bevennünk a ponthalmazba, legyenek ezek a lila x-szel jelöltek. Ezután próbáljuk lefogni a középponton átmenő, sárga egyeneseket. Ebből egy már le van fogva, így még kettő darab élfelezőt kell bevennünk. Legyenek ezek a sötétkék x-szel jelöltek. Már csak a 6 darab világoskék, egy élfelezőn és kettő síkközépponton átmenő egyenesek. Ekkor csak az a két egyenes nincs lefogva, amelyek azon két élfelezőn megy át, amit még nem vettünk be. Ha bevennénk az alsó lap középpontját, akkor mind a kettő egyenest sikerült volna lefognunk, de ekkor bevettük egy sík összes pontját, de ezt nem tehetjük. Így mindenképpen be kell vennünk az összes élfelező pontot. □

4.3. Eredmények ($q = 2$)

Tehát már tudjuk, hogy a k-kodimenziós altereket le tudjuk fogni

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{d+1}{i}$$

darab ponttal. (Az $1; ::: ; k$ Hamming-súlyú pontok vannak az alapszimplex $0; ::: ; k \quad 1$ dimenziós lapjain.) Ez a $k = 1$, azaz a hipersíkokat lefogó esetben még éppen nem jó, mert csak a $d + 1$ darab alappontból alkotott ponthalmazt jelenti, amiről tudjuk, hogy nem lefogó ponthalmaz.

Ebből következik a kérdés, hogy létezik-e ennél kevesebb elemű lefogó ponthalmaz.

Legyen R az alapszimplex legfeljebb $r \quad 1$ dimenziós lapjainak uniója. Szeretnénk r-et minél kisebbre választani úgy, hogy R lefogja a k-kodimenziós altereket.

R elemei pontosan a legfeljebb r Hamming-súlyú pontok.

Így átírható a probléma a lineáris kódelmélet nyelvére. Milyen r-re igaz, hogy minden $d+1 \quad k$ dimenziós lineáris altér tartalmaz legalább egy darab legfeljebb r súlyú pontot.

Ezt a Singleton-korlát segítségével kapjuk meg. Ha $d + 1$ jelenti a kódszavak hosszát, vagyis a koordinátákat, r a legkisebb távolságot, azaz súlyt, $d \quad k + 1$ a lineáris altér dimenzióját és q a véges test rendjét. A Singleton-korlát felsőbecslést ad r-re.

$$\text{legkisebb súly} \quad \text{kódszavak hossza} \quad \text{kód dimenziója} + 1$$

$$r \quad d + 1 \quad (d \quad k + 1) + 1 = k + 1$$

Tehát $r \quad 1 = k$ dimenziós lapok uniója már megfelelő lenne a k-kodimenziós alterek lefogására. Viszont az előbb bebizonyított 21. tétel eggyel jobbat mond ki.

Létezik-e ennél is jobb becslés?

A Griesmer-korlát az alábbit mondja ki.

$$\text{kódszavak hossza} \quad \sum_{i=0}^{\text{kód dim} \quad 1} \left\lceil \frac{\text{legkisebb súly}}{2^i} \right\rceil$$

A mi esetünkben így írható fel a képlet.

$$d + 1 \quad \sum_{i=0}^{d \quad k} \left\lceil \frac{r}{2^i} \right\rceil$$

$$d+1 \le \left\lceil \frac{r}{1} \right\rceil + \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{r}{2^2} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{r}{2^{d-k}} \right\rceil$$

Ha elég nagy a hatvány, azaz $r \le 2^i$, onnantól kezdve $\frac{r}{2^i} \le 1$, tehát $\lceil \frac{r}{2^i} \rceil = 1$.

$$d+1 \le \left\lceil \frac{r}{1} \right\rceil + \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{r}{2^2} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{r}{2^{\lceil \log_2 r \rceil}} \right\rceil + 1 + \cdots + 1$$

$$d+1 \le 2 \cdot r - 1 + d - k - \lceil \log_2 r \rceil$$

$$k+2 \le 2 \cdot r - \lceil \log_2 r \rceil$$

Ez azt jelenti, hogy az alapszimplex (kicsit nagyobb, mint) körülbelül $r = \frac{k}{2}$ dimenziós lapjainak uniója is már elegendő a k-kodimenziós alterek lefogására.

Abban az esetben, ha nincsenek 1-esek, akkor r mindig nagyobb, mint 2^i, azaz

$$r > 2^{d-k}$$

Griesmer-korlát:

$$d+1 \le \frac{r}{1} + \frac{r}{2} + \cdots + \frac{r}{2^{d-k}} \le 2r - \frac{r}{2^{d-k}} = r\left(2 - \frac{1}{2^{d-k}}\right)$$

$$\frac{d+1}{\left(2 - \frac{1}{2^{d-k}}\right)} \ge r > 2^{d-k}$$

$$d+1 > 2^{d-k}\left(2 - \frac{1}{2^{d-k}}\right)$$

$$d+1 > 2^{d-k+1} - 1$$

$$d+2 > 2^{d-k+1}$$

$$\log_2 d+1 > d-k+1$$

$$\log_2 d > d-k$$

Tehát ez csak abban az esetben fordulhat elő, ha a lefogni kívánt dimenzió, $d \quad k$, kisebb, mint a projektív tér dimenziójának 2 alapú logaritmusa. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{d+1}{\left(2 \quad \frac{1}{2^{d \quad k}}\right)} \qquad r:$$

Megjegyzem, hogy nem csak a 2 elemű test fölött működik. Bármilyen más q prímhatvány rendű test felett a Griesmer-korlát hasonló módon megadható.

Irodalomjegyzék

[1] Tamás Szőnyi Aart Blokhuis, Péter Sziklai. *Blocking sets in projective spaces*. Nova Academic, 2011.

[2] Aart Blokhuis. *On the size of a blocking set in PG(2,p)*. Combinatorica, 14, 111–114, 1994.

[3] A. Bruen. *Baer subplanes and blocking sets*. Bull. Amer. Math. Soc. 76(2): 342-344, 1970.

[4] T. Szőnyi Gy. Kiss. *Finite geometries*. Taylor and Francis, 2020.

[5] Moussong Gábor. *Geometria*. Typotex, 2014.

[6] Udo Heim. *Proper blocking sets in projective spaces*. Elsevier Science B.V., 1997.

[7] Szőnyi Tamás Kiss György. *Véges geometriák*. Typotex, 2001.

[8] Bácsó Sándor, Papp Ildikó, and Szabó József. *Projektív Geometria*. mobi-DIÁK könyvtár, 2004.