

# Szakdolgozat

Szabó Gergely

fizikatanár-matematikatanár  
osztatlan tanári mesterszak

2024

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
Természettudományi Kar

# Szakdolgozat

*Cassini-görbék*

**Témavezető:**

Dr. Moussong Gábor  
nyugdíjas egyetemi adjunktus  
Geometriai Tanszék

**Készítette:**

Szabó Gergely  
fizikatanár - matematikatanár  
osztatlan tanári mesterszak



2024

# Eredetiségi nyilatkozat

Alulírott Szabó Gergely (M14CE8) ezennel kijelentem és aláírással megerősítem, hogy az ELTE fizikatanár-matematikatanár osztatlan tanári mesterszakján írt jelen diplomamunkám saját szellemi termékem, melyet korábban más szakon még nem nyújtottam be szakdolgozatként és amelybe mások munkáját (könyv, tanulmány, kézirat, internetes forrás, személyes közlés stb.) idézőjel és pontos hivatkozások nélkül nem építettem be.

Budapest, 2024. április 22.



Szabó Gergely

## Köszönetnyilvánítás

Szeretném köszönetemet kifejezni Moussong Gábor tanár úrnak a téma kiválasztásáért, a rengeteg ötletért, segítségért és útmutatásért, a javítási tanácsokért; hogy nyugdíjba vonulása után is vállalta a témavezetést; és hogy példaként szolgáló egyetemi előadásaival és gyakorlataival elmélyítette a geometria iránti érdeklődésemet.

Köszönöm Basa István, Boller Balázs és Harasztos Barnabás ötleteit, segítségét.

# Tartalomjegyzék

1.	Bevezetés . . . . .	4
2.	A Cassini-görbe definíciója és egyenlete . . . . .	7
2.1.	A Cassini-görbe egyenlete Descartes-féle koordináta-rendszerben	7
2.2.	A Cassini-görbe egyenlete polárkoordinátákkal . . . . .	9
3.	A görbe alakja . . . . .	10
3.1.	A Cassini-görbék szimmetriatulajdonságai . . . . .	12
4.	Cassini-görbék és a tórusz . . . . .	14
5.	A lemniszkáta szerkesztése . . . . .	17
6.	A lemniszkáta mint talpponti görbe . . . . .	20
7.	A lemniszkáta mint inverz alakzat . . . . .	25
8.	Négyzetreemelés, négyzetgyökvonás a komplex síkon . . . . .	30
8.1.	Komplex számok, komplex számsík, a komplex számok trigono- metrikus alakja . . . . .	30
8.2.	Négyzetreemelés . . . . .	32
8.3.	Négyzetgyökvonás . . . . .	37
9.	Inverzió a komplex síkon . . . . .	40
9.1.	Cassini-görbék és az inverzió . . . . .	40
10.	Derékszögű hiperbolák és ortogonális trajektóriák . . . . .	45
11.	Lemniskáta mint körök burkolója . . . . .	51
12.	Módszertani lehetőségek . . . . .	54
	Irodalomjegyzék . . . . .	70

# 1. Bevezetés

Giovanni Domenico Cassini neve leginkább azok számára lehet ismerős, akik érdeklődnek a csillagászat iránt, esetleg nyomon követik az űrkutatás fontosabb, aktuális eredményeit. Legutóbb a nevét viselő Cassini űrszondáról hallhattunk, amelyről – annak húsz éves működése alatt – többször is beszámoltak különböző híradások, híroldalak, tudományos szakoldalak. [13], [14], [15]



Giovanni Domenico Cassini (1625 – 1712)

Az eszköz eredetileg társával, a Huygens leszállóegységgel indult 1997. október 15-én, és hét évvel később érte el célját, a Szaturnuszt. [12]

A Huygens leszállóegység sikeres landolást hajtott végre a névadója által felfedezett Titánon, a Szaturnusz legnagyobb holdján, ahol a sűrű köd alatt szilárd felszínre bukkant. Az űrszonda és a leszállóegység által végzett vizsgálatok alapján kiderült, hogy a Titán felszínén nagy kiterjedésű etán- és metántavak találhatóak, amelyek párolognak, majd eső formájában visszahullanak a felszínre. Ezek a körülmények nagyban megegyezhetnek azokkal az időjárási és légköri viszonyokkal, amelyek a Földet jellemezték történetének korai szakaszában.

A bolygó körül keringő Cassini űrszonda küldetése során vizsgálta a Szaturnusz összetételét, szerkezetét, a gyűrűi és a holdjai között lejátszódó dinamikai folyamatokat, a holdak felszínét, összetételét és belső szerkezetét. A program legjelentősebb eredményei között tartják számon, hogy az eszköz a felszínt borító jégtakaró alól kitörő gejzíreket figyelt meg az Enceladuson, a Szaturnusz hatodik legnagyobb holdján. Ebből arra lehet következtetni, hogy a hold jégrétege alatt globális víz-óceán húzódik. Az Enceladus e gejzirjei táplálják a bolygó E-gyűrűjét, amely miatt a gyűrűk aktívak, időben változnak, és így a holdak keletkezésének folyamatait figyelhetjük meg ezek vizsgálatán keresztül.

Az űrszonda 2016 végén megkezdte küldetésének végső, Nagy Finálénak nevezett fázisát. A program utolsó szakaszában az eszköz megközelítette a Szaturnuszt, többször a legbelső gyűrű és a bolygó között haladva adatokat gyűjtött annak légköréről, a gyűrűkről, a bolygó gravitációs és mágneses teréről. Végül 2017. szeptember 15-én belépett a légkörbe, és befejezte küldetését.

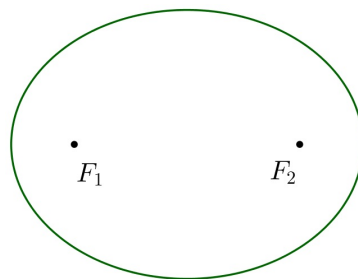
Az űrszonda névadójának kiválasztása nem a véletlen eredménye: Cassini volt korának legfejlettebb eszközökkel rendelkező csillagásza, és több olyan tudományos eredményt is

neki köszönhetünk, amely a Szaturnuszhoz kapcsolódik. Ő fedezte fel a bolygó holdjai közül az Iapetus, Rhea, Tethys és Dione holdakat, valamint a Szaturnusz A- és B-gyűrűi közötti hézagot, a róla elnevezett Cassini-rést.

Középiskolai tanulmányinkból jól ismerjük a bolygók mozgását leíró Kepler-törvényeket. [9] A három törvény közül az első a mozgások pályájának alakját határozza meg: a bolygók pályája ellipszis, és annak egyik fókuszpontjában a Nap van. Cassini elutasította Keplernek ezt az elképzelését. Ehelyett ő úgy gondolta, hogy a pálya valójában – a később róla elnevezett – Cassini-görbe. Hogy mik a Cassini-görbék, és milyen tulajdonságokkal rendelkeznek, ezzel foglalkozunk a szakdolgozatban.

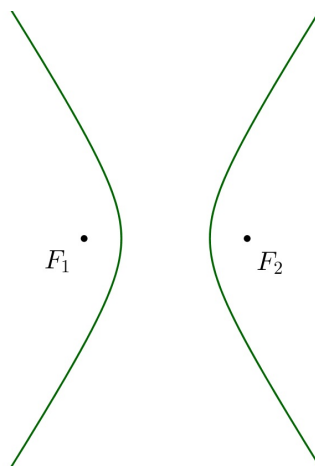
A Kepler-törvényekben is előkerülő ellipszis, valamint a hiperbola definíciója szintén jól ismert az iskolás tananyagból. Tulajdonképpen ezeknek a természetes folytatásaként jutunk a Cassini-görbékhez. Közös ezekben a görbékben, hogy mindannyian két, rögzített fókuszpont segítségével vannak meghatározva.

Az *ellipszis* azon pontok mértani helye a síkon, amelyek fókuszpontoktól mért távolságainak összege állandó.



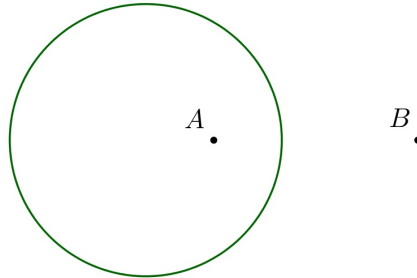
1. ábra. Ellipszis  $F_1, F_2$  fókuszpontokkal.

A *hiperbola* a sík azon pontjainak mértani helye, amelyek fókuszpontoktól mért távolságai különbségének abszolút értéke állandó.



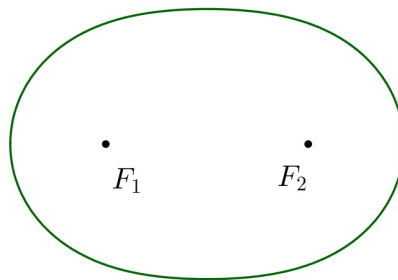
2. ábra. Hiperbola  $F_1, F_2$  fókuszpontokkal.

A definíciókban szereplő összeg, illetve különbség szavak helyettesíthetők más műveletekkel is. Így jutottunk egyetemi tanulmányaink során az *Apollóniusz-kör*hez. Ezt úgy definiálhatjuk, hogy a sík azon pontjai alkotják, amelyek fókuszpontoktól – azaz a két rögzített ponttól – mért távolságainak hányadosa állandó.



3. ábra. Egy, az  $A$ ,  $B$  pontokhoz tartozó Apollóniusz-kör.

Végül tekinthetük a fókuszpontoktól mért távolságoknak a szorzatát is, ekkor érkezünk a *Cassini-görbék*hez: azok a pontok alkotnak egy Cassini-görbét, amelyek esetén ez a szorzat ugyanakkora, meghatározott értéket vesz fel.



4. ábra. Cassini-görbe  $F_1$ ,  $F_2$  fókuszpontokkal.

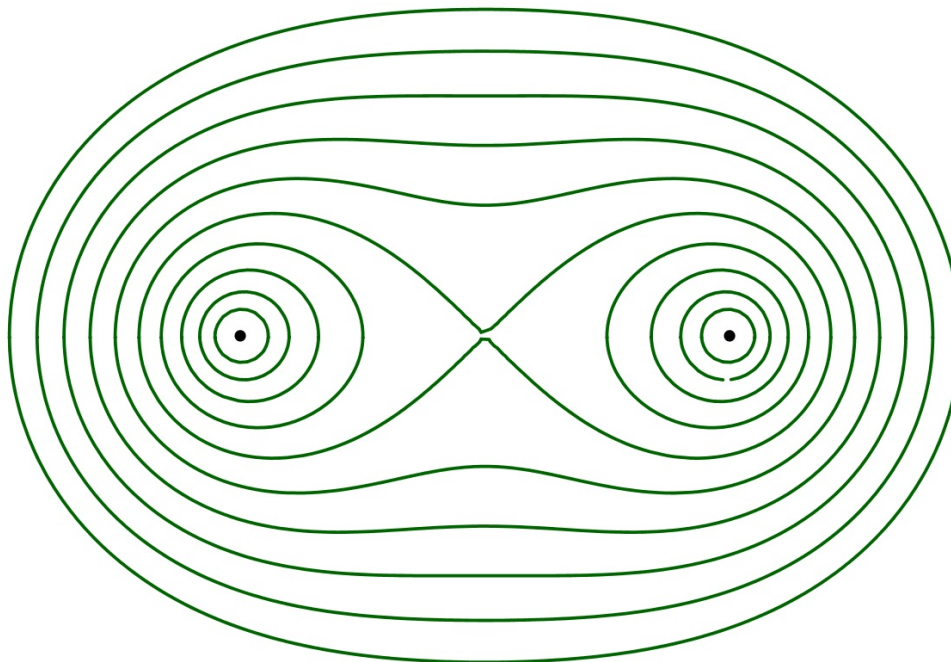
A szakdolgozat a tanárszakos bevezető matematikatantervek anyagára támaszkodik. A szükséges geometriai háttérismeretek megtalálhatók Hajós György: Bevezetés a geometriába (Tankönyvkiadó, 1966) című könyvében.



## 2. A Cassini-görbe definíciója és egyenlete

**Definíció.** Legyenek adva az  $a$  és  $c$  pozitív valós számok, továbbá legyenek adva a síkban az egymástól  $2a$  távolságra lévő  $F_1$  és  $F_2$  pontok.

Az  $F_1, F_2$  fókuszpontokkal és a  $c^2$  paraméterrel meghatározott Cassini-féle görbe azon pontok mértani helye a síkban, amely pontokra  $F_1P$  és  $F_2P$  távolságok szorzata állandó,  $c^2$  nagyságú.

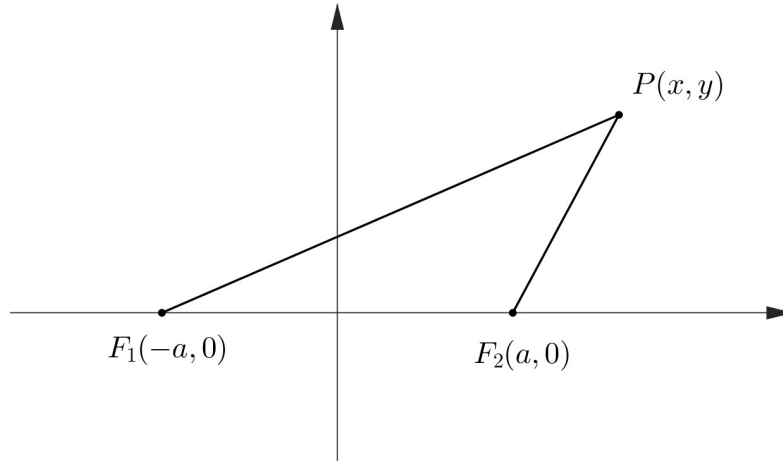


5. ábra. Rögzített fókuszpontú Cassini-görbék különböző  $c^2$  paraméterek esetén. A görbék fókuszpontjai a fekete pontok.

### 2.1. A Cassini-görbe egyenlete Descartes-féle koordináta-rendszerben

Vegyük fel úgy a koordináta-rendszert, hogy az  $x$ -tengelye az  $F_1F_2$  egyenes, origója az  $F_1F_2$  szakasz felezőpontja legyen. A fókuszpontok koordinátái ekkor  $F_1(-a, 0)$ ,  $F_2(a, 0)$ .

A Cassini-görbét kanonikus helyzetűnek hívjuk, ha fókuszpontjai a koordináta-rendszer  $x$ -tengelyén úgy helyezkednek el, hogy az  $F_1F_2$  szakasz felezőpontja az origó.



6. ábra. A Cassini-görbe fókuszpontjai és a  $P(x, y)$  pontja.

A  $P(x, y)$  pont és a fókuszpontok távolsága a következőképpen írható fel:

$$F_1P = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}, \quad F_2P = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}.$$

A  $P(x, y)$  pont pontosan akkor van rajta az  $F_1, F_2$  fókuszpontú,  $c^2$  paraméterű Cassini-görbén, ha  $F_1P \cdot F_2P = c^2$ , azaz

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = c^2.$$

Mindkét oldalon nemnegatív kifejezések állnak, ezért a négyzetreemelés ekvivalens átalakítás,

$$\left( (x+a)^2 + y^2 \right) \cdot \left( (x-a)^2 + y^2 \right) = c^4.$$

Az így kapott egyenletet tovább alakítjuk:

$$\left( (x+a)(x-a) \right)^2 + y^2 \cdot \left( (x+a)^2 + (x-a)^2 \right) + y^4 = c^4,$$

$$\left( x^2 - a^2 \right)^2 + y^2 \cdot \left( 2x^2 + 2a^2 \right) + y^4 = c^4,$$

$$x^4 - 2x^2a^2 + a^4 + 2x^2y^2 + 2y^2a^2 + y^4 = c^4,$$

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2a^2x^2 + 2a^2y^2 = c^4 - a^4,$$

$$\boxed{\left( x^2 + y^2 \right)^2 - 2a^2 \left( x^2 - y^2 \right) = c^4 - a^4.} \quad (1)$$

Mivel az egyenletrendezési lépések során ekvivalens átalakításokat hajtottunk végre, a végeredményül kapott (1)-es egyenletet pontosan a görbe pontjai elégítik ki. Az (1)-es egyenlet a Cassini-féle görbe egyenlete a Descartes-féle koordináta-rendszerben.

A Cassini-féle görbe egy speciális esete, amikor  $c = a$ . Ekkor az (1)-es egyenlet

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2) \quad (2)$$

alakra hozható. Ez a Bernoulli-féle lemniszkáta egyenlete, ami a Cassini-görbék közé tartozó speciális síkgörbe.

**Megjegyzés.** A Bernoulli-féle lemniszkátán kívül léteznek még más, szintén lemniszkátának nevezett görbék is. A továbbiakban a Bernoulli-féle lemniszkátát egyszerűen lemniszkátának fogjuk nevezni.

## 2.2. A Cassini-görbe egyenlete polárkoordinátákkal

Az (1) egyenletből indulunk ki, és elvégezzük az  $x = r \cdot \cos \varphi$ ,  $y = r \cdot \sin \varphi$  helyettesítést, ahol  $0 \leq r$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

$$(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)^2 - 2a^2(r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi) = c^4 - a^4$$

$$(r^2 \cdot (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi))^2 - 2a^2(r^2 \cdot (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)) = c^4 - a^4$$

$$(r^2 \cdot 1)^2 - 2a^2(r^2 \cdot \cos(2\varphi)) = c^4 - a^4$$

$$\boxed{r^4 - 2a^2 r^2 \cos(2\varphi) = c^4 - a^4} \quad (3)$$

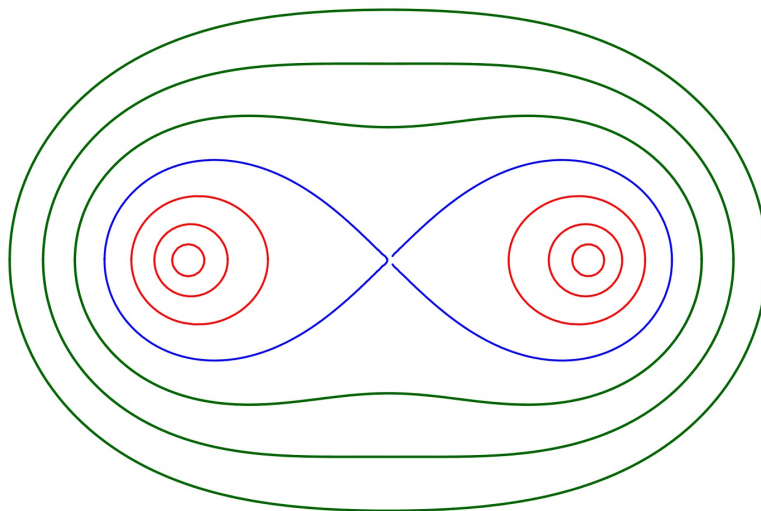
Ebből  $r^2$ -et kifejezve:

$$r^2 = \frac{2a^2 \cos(2\varphi) \pm \sqrt{4a^4 \cos^2(2\varphi) + 4(c^4 - a^4)}}{2},$$

$$\boxed{r^2 = a^2 \cos(2\varphi) \pm \sqrt{a^4 \cos^2(2\varphi) + c^4 - a^4}} \quad (4)$$

### 3. A görbe alakja

Ahogy az 5-ös és a 7-es ábrán is látható, a Cassini-görbéknek több, egymástól lényegesen különböző típusa lehetséges. Van olyan Cassini-görbe, amely egyetlen összefüggő, önmagát nem metsző zárt görbe, van olyan Cassini-görbe, amely önmagát metszi, és létezik olyan típus is, amelyik két külön darabból áll. Ez a görbe  $a$  és  $c$  paraméterének viszonyától függ. A (4)-es egyenlet felhasználásával tudjuk az esetek szétválasztását precízen megtenni.



7. ábra. Cassini-görbék  $c > a$  (zöld),  $c = a$  (kék),  $c < a$  (piros) típusai.

Megkülönböztetünk három esetet:

1. Ha  $c > a$ , akkor  $c^4 > a^4$ , vagyis  $c^4 - a^4 > 0$ . Emiatt a (4)-es egyenletben szereplő négyzetgyökös kifejezés minden  $\varphi$  szög esetén biztosan értelmezve van a valós számok halmazán, ugyanis  $a^4 \cos^2(2\varphi)$  – mivel négyzetszám – nemnegatív, tehát a négyzetgyök alatt biztosan pozitív szám áll. Továbbá a feltétel miatt fennáll, hogy

$$\sqrt{a^4 \cos^2(2\varphi) + c^4 - a^4} > \sqrt{a^4 \cos^2(2\varphi)} = a^2 |\cos(2\varphi)| \geq a^2 \cos(2\varphi),$$

vagyis

$$\sqrt{a^4 \cos^2(2\varphi) + c^4 - a^4} > a^2 \cos(2\varphi).$$

Emiatt a (4)-es egyenletben a négyzetgyök előtti negatív előjel választása esetén a jobb oldal negatív lenne. Az egyenlet bal oldalán viszont második hatvány szerepel, ami nem lehet negatív, tehát a negatív előjel választása nem ad megoldást. Ezért  $c > a$  esetén a (4)-es egyenletben csak pozitív előjel választható a négyzetgyök előtt. Ebben az esetben viszont minden  $\varphi$  szöghöz pontosan egy  $r$ -érték tartozik, mivel  $r$

nemnegatív a definíció szerint. Az  $r$ -et egyértelműen ki tudjuk fejezni  $\varphi$  segítségével:

$$r = \sqrt{a^2 \cos(2\varphi) + \sqrt{a^4 \cos^2(2\varphi) + c^4 - a^4}}.$$

Ez az összefüggés megadja ebben az esetben a görbe összes pontját. Ahogy az ábrán látható, ekkor összefüggő, önmagát nem metsző, zárt görbét kapunk.

2. Ha  $c = a$ , akkor a (3)-as egyenlet

$$r^2 (r^2 - 2a^2 \cos(2\varphi)) = 0$$

alakra hozható átrendezéssel és kiemeléssel. Ennek minden  $\varphi$  szög esetén megoldása az  $r = 0$  pont, tehát a Cassini-görbének ebben az esetben eleme az origó mint pont. Viszont megoldást kaphatunk akkor is, ha azt vizsgáljuk, hogy  $r^2 - 2a^2 \cos(2\varphi) = 0$  mikor teljesül, azaz az

$$r^2 = 2a^2 \cos(2\varphi) \quad (5)$$

egyenlet megoldásait keressük. Mivel  $r^2$  és  $2a^2$  nemnegatív, ezért  $\cos(2\varphi)$ -nek is biztosan legalább 0 értéket kell felvennie. Ezt a feltételt azok a  $\varphi$  szögek biztosítják, amelyeket egy egyszerű trigonometrikus egyenlőtlenség megoldásán keresztül tudunk megtalálni:  $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ . Ekkor az (5)-ös egyenlet jobb oldala nemnegatív, a négyzetgyökvonás elvégezhető, és mivel  $r \geq 0$ , ezért adott, a feltételnek megfelelő  $\varphi$  szöghöz egyetlen  $r$  érték, egészen pontosan az  $r = \sqrt{2a^2 \cos(2\varphi)}$  tartozik. A görbe ebben az esetben is összefüggő, viszont önmagát metszi a középpontban. Ez az eset a lemniszkáta esete.

3. Ha  $c < a$ , akkor  $c^4 - a^4 < 0$ . Ebből az következik, hogy van olyan  $\varphi$  szög, amelyhez nem tartozik a görbének pontja. Ugyanis  $c < a$  esetén lehetséges, hogy a (4)-es egyenletben található négyzetgyök alatt álló kifejezés negatív értéket vesz fel, emiatt a jobb oldalon álló kifejezés bizonyos  $\varphi$  szögek esetén nincs értelmezve a valós számok halmazán. Ez akkor történik meg, ha

$$a^4 \cos^2(2\varphi) + c^4 - a^4 < 0,$$

azaz

$$\cos^2(2\varphi) < \frac{a^4 - c^4}{a^4} = 1 - \frac{c^4}{a^4},$$

vagyis

$$-\sqrt{1 - \frac{c^4}{a^4}} < \cos(2\varphi) < \sqrt{1 - \frac{c^4}{a^4}}. \quad (6)$$

Olyan  $\varphi$  szögek esetén viszont, amikor a (4)-es egyenletben található gyökjel alatt nemnegatív kifejezés áll, vagyis ha

$$a^4 \cos^2(2\varphi) + c^4 - a^4 \geq 0,$$

mivel  $c^4 - a^4 < 0$ , és  $a^4 \cos^2(2\varphi) \geq 0$ , ezért a következő egyenlőtlenség teljesül:

$$a^4 \cos^2(2\varphi) + c^4 - a^4 < a^4 \cos^2(2\varphi).$$

Mivel itt mindkét oldal nemnegatív, és a négyzetgyök-függvény szigorúan monoton nő, ezért ezek négyzetgyökei között a következő egyenlőtlenség áll fenn:

$$\sqrt{a^4 \cos^2(2\varphi) + c^4 - a^4} < \sqrt{a^4 \cos^2(2\varphi)} = a^2 |\cos(2\varphi)|. \quad (7)$$

Ebből az következik, hogy abban az esetben, ha a (4)-es egyenletben a négyzetgyököt tartalmazó kifejezés értelmezve van, és  $a^2 \cos(2\varphi)$  pozitív, azaz  $\cos(2\varphi)$  pozitív, mind a pozitív, mind a negatív előjel választása esetén a jobb oldal nemnegatív, hiszen összeadás esetén két pozitív szám összege is pozitív, kivonás esetén pedig az  $a^2 \cos(2\varphi)$ -ből nála kisebb számot vonunk ki (7) miatt.

Abban az esetben viszont, amikor  $a^2 \cos(2\varphi)$  negatív, azaz  $\cos(2\varphi)$  negatív, mind a plusz, mind a mínusz előjel választása esetén negatív szám áll a (4)-es egyenlet jobb oldalán. Ugyanis (7) miatt összeadás esetén a negatív  $a^2 \cos(2\varphi)$ -hez az abszolút értékénél kisebb számot adunk hozzá, emiatt a végeredmény negatív, kivonás esetén pedig mindenképpen negatív a művelet végeredménye.

Tehát minden megfelelő  $\varphi$  szöghöz – a határhelyzetek kivételével – két pontja tartozik a Cassini-görbének. A határhelyzetek esetén – amikor  $\sqrt{a^4 \cos^2(2\varphi) + c^4 - a^4} = 0$  és  $\cos(2\varphi)$  nemnegatív – a határszöghöz a görbének csak egyetlen pontja tartozik. A nem megfelelő  $\varphi$  szögekhez nem tartozik pontja a görbének. Továbbá az is megállapítható, hogy a megfelelő  $\varphi$  szögek intervalluma a jobb félsíkban a 0-ra, a bal félsíkban a  $\pi$ -re szimmetrikus. Ez a koszinusz-függvény páros voltának a következménye:

$$\cos(2(2\pi - \varphi)) = \cos(2\varphi),$$

és persze

$$\cos(2(\pi - \varphi)) = \cos(2(\pi + \varphi)).$$

### 3.1. A Cassini-görbék szimmetriatulajdonságai

Először azt vizsgáljuk, hogy a sík milyen egybevágósági transzformációi viszik az adott Cassini-görbét önmagába, azaz milyen szimmetriái vannak a görbéknek.

**1. Állítás.** A Cassini-görbe tengelyesen szimmetrikus az  $F_1F_2$  egyenesre, az  $F_1F_2$  szakasz felezőmerőlegesére, és középpontosan szimmetrikus az  $F_1F_2$  szakasz felezőpontjára.

**Bizonyítás.** A Cassini-görbét meghatározza a két fókuszpontja és a  $c^2$  paramétere, ezért pontosan azok a szimmetriái, mint a két pontból álló halmaznak. Ugyanis azok az egybevágósági transzformációk, amelyek a görbét önmagára képezik, a görbe fókuszpontját is fókuszpontba képezik. Ez kétféleképpen lehetséges:

- 1.) a geometriai transzformáció fixen hagyja mindkét fókuszpontot;
- 2.) a geometriai transzformáció mindkét fókuszpontot a másikra képezi.

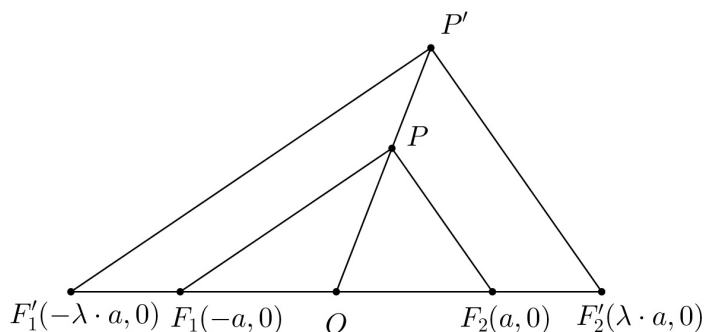
Az első eset úgy lehetséges, ha a geometriai transzformáció az a tengelyes tükrözés, amelynek tengelye az  $F_1F_2$  egyenes. (Természetesen úgy is lehetséges, ha a geometriai transzformáció a helybenhagyás, azaz a sík identikus leképezése önmagára – ez nem meglepő, az identikus leképezés minden alakzatot önmagára képez.)

A második eset kétféleképpen lehetséges: ha a geometriai transzformáció az a tengelyes tükrözés, amelynek tengelye az  $F_1F_2$  szakasz felezőmerőlegesese; illetve ha a geometriai transzformáció az a középpontos tükrözés, amelynek középpontja az  $F_1F_2$  szakasz felezőpontja, hiszen a két tengelyes tükrözés kompozíciójaként előáll a középpontos tükrözés.

□

A következő állítást, amely a görbék hasonlóságára ad szükséges és elégséges feltételt, a későbbi fejezetek során fogjuk alkalmazni.

**2. Állítás.** A Cassini-görbét hasonlóság erejéig meghatározza az  $a$  és  $c$  paramétereinek aránya.



8. ábra. Cassini-görbe fókuszai és egy pontja, valamint ezek képei az origó centrumú középpontos hasonlóságnál.

**Bizonyítás.** Tekintsük az  $F_1(-a, 0)$ ,  $F_2(a, 0)$  fókuszpontokkal és  $c^2$  paraméterrel megadott Cassini-görbét, amelynek az origó a középpontja. Legyen  $P$  pont a Cassini-görbe pontja, ekkor  $F_1P \cdot F_2P = c^2$ .

Tekintsünk az origó középpontú,  $\lambda$  arányú középpontos hasonlóságot. Ekkor az  $F_1(-a, 0)$  pont képe az  $F'_1(-\lambda a, 0)$  pont, az  $F_2(a, 0)$  pont képe az  $F'_2(\lambda a, 0)$  pont. A  $P$  pont  $P'$  képére teljesül egyrészt, hogy  $P'$  rajta van a Cassini-görbe  $\lambda$ -szoros nagyítottján, másrészt  $OP' = \lambda \cdot OP$ ,  $F'_1P' = \lambda \cdot F_1P$  és  $F'_2P' = \lambda \cdot F_2P$ . Innen

$$F'_1P' \cdot F'_2P' = \lambda \cdot F_1P \cdot \lambda \cdot F_2P = \lambda^2 \cdot F_1P \cdot F_2P = \lambda^2 c^2 = (\lambda \cdot c)^2.$$

Vagyis a  $\lambda$  arányú középpontos hasonlóság során az eredeti  $a$  és  $c$  paraméterek  $\lambda$ -szorosukra változtak, azaz az arányuk állandó maradt.

Ha két Cassini-görbe esetén a paramétereik aránya megegyezik, akkor az itt leírt gondolatmenet és számolás visszafelé is elvégezhető: a Cassini-görbék hasonlóak.  $\square$

## 4. Cassini-görbék és a tórusz

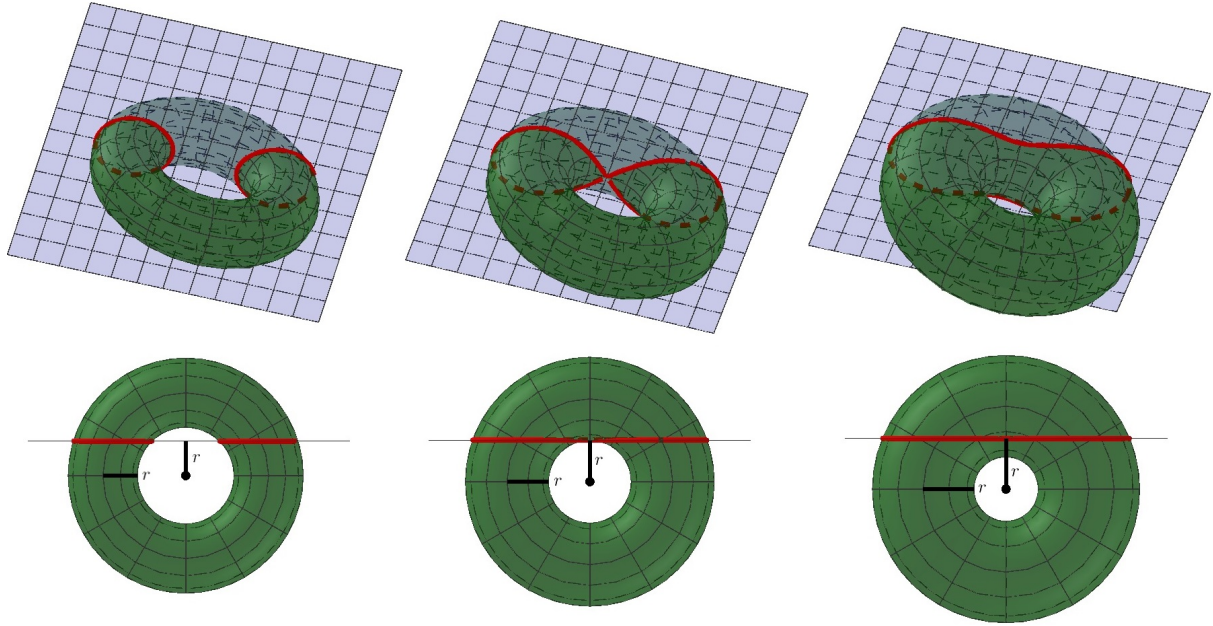
Középiskolai tanulmányainkból ismerjük, hogy körök, ellipszisek, parabolák, hiperbolák előállnak forgáskúp és sík metszeteként. Tudjuk, hogy köröket kaphatunk, ha forgásfelületeket olyan síkokkal metszünk, amelyek merőlegesek a forgásfelület tengelyére. Későbbi tanulmányaink során találkoztunk például azzal is, hogy a parabolák segítségével előállítható nyeregfelület – a hiperbolikus paraboloid – megfelelő síkkal vett metszeteiként hiperbolákat kapunk.

Most a Cassini-görbét szeretnénk valamilyen felület síkmetszeteként előállítani. Ez a felület a tórusz. A tórusznak nem minden síkmetszete Cassini-görbe: például köröket kapunk, ha olyan síkkal metsszük a tóruszt, amely tartalmazza a tórusz tengelyét, és a körök nem Cassini-görbék. De speciálisan elhelyezkedő síkok segítségével előállíthatók a Cassini-görbék.

**3. Állítás.** *Legyen adva egy tórusz és a tórusz tengelyével párhuzamos sík, amelynek a tórusz tengelyétől mért távolsága egyezzen meg a tóruszt generáló kör sugarával. Ekkor tórusz és a sík metszeteként előálló alakzat Cassini-féle görbe.*

**Bizonyítás.** Egy olyan tórusz esetét vizsgáljuk, amely az  $xy$ -síkbán található kör  $y$ -tengely körüli körbefogatása során keletkezik.





9. ábra. Tórusz és a tengelyével párhuzamos, megfelelő sík metszete.

Legyen  $0 < r < R$  és legyen a körünk az

$$(x - R)^2 + y^2 = r^2 \quad (8)$$

egyenletű,  $(R, 0)$  középpontú,  $r$  sugarú kör az  $xy$ -síkban. A zárójelet felbontva az egyenlet:

$$x^2 - 2Rx + R^2 + y^2 = r^2. \quad (9)$$

A tórusz az a forgásfelület, amely ennek a körnek az  $y$ -tengely körüli körbeforgatása-kor forgásfelületként keletkezik, ennek az egyenlete a következő gondolatmenet alapján vezethető le.

A kiindulási kör bármely pontját ha tekintjük, a forgatás során ennek a pontnak forgástengelytől mért távolsága végig állandó. Legyen a  $P(x, y)$  a kiindulási kör egy pontja. Mivel mivel  $x$  pozitív, ennek a pontnak az  $y$ -tengelytől mért távolsága  $x$ , azaz  $\sqrt{x^2}$ .

A pont a tengely körüli forgatás során végig egy olyan síkban mozog, amelyre merőleges az  $y$ -tengely, tehát ez a sík az  $xz$ -síkkal párhuzamos. Továbbá a pont és az  $y$ -tengely távolsága állandó, általános helyzetében ez egyenlő  $\sqrt{x^2 + z^2}$ -tel.

A forgásfelületnek bármely, az  $y$ -tengelyt tartalmazó síkkal vett metszete olyan kör, amely a kiindulási körrel egybevágó. Ennek a körnek az egyenlete megkapható a kiindulási kör egyenletéből úgy, hogy a (8)-as és (9)-es egyenletekben szereplő  $x$ -re az általános helyzetű elforgatott esetén a  $\sqrt{x^2 + z^2}$  helyettesítést alkalmazzuk. Vagyis egy általános szögben

elforgatott síkban a kiindulási kör a (9)-es egyenlete a következő alakot veszi fel:

$$x^2 + z^2 - 2R\sqrt{x^2 + z^2} + R^2 + y^2 = r^2,$$

illetve átrendezés után

$$x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2 = 2R\sqrt{x^2 + z^2}.$$

Mivel mindkét oldal nemnegatív, a négyzetreemelés ekvivalens átalakítás, így az általános helyzetű kör egyenlete:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + z^2). \quad (10)$$

A tórusz mint forgásfelület ezeknek a köröknek az uniójaként áll elő, vagyis pontosan azok a pontok alkotják a tóruszt, amelyek ezeken a körökön vannak. Tehát a tóruszt leíró egyenlet ugyanez, vagyis a (10)-es egyenlet.

Metsszük el a tóruszt a  $z = r$  egyenletű síkkal. A metszet pontjai rajta vannak a síkon és a tóruszon is, vagyis kielégítik mindkét alakzat egyenletét. A metszetként kapott alakzat egyenletének meghatározásához tehát elvégezzük a (10)-es egyenletben a  $z = r$  helyettesítést, így a (11)-es egyenletet kapjuk, majd a négyzetreemelést követően megfelelő módon rendezzük ezt.

$$(x^2 + y^2 + R^2)^2 = 4R^2(x^2 + r^2) \quad (11)$$

$$(x^2)^2 + 2x^2y^2 + (y^2)^2 + R^4 + 2x^2R^2 + 2y^2R^2 = 4R^2x^2 + 4R^2r^2$$

$$(x^2 + y^2)^2 - 2x^2R^2 + 2y^2R^2 = 4R^2r^2 - R^4$$

$$(x^2 + y^2)^2 - 2R^2(x^2 - y^2) = 4R^2r^2 - R^4 \quad (12)$$

Az így kapott (12)-es egyenlet pedig a Cassini-görbe (1)-es egyenlete  $a = R$  és  $c^2 = 2Rr$  adatokkal. Speciálisan, abban az esetben, ha a forgástengely és a tóruszt generáló kör középpontjának távolsága kétszerese a kör sugarának, vagyis  $R = 2r$ , a metszet egyenlete a (12)-es egyenlet alapján

$$(x^2 + y^2)^2 - 8r^2(x^2 - y^2) = 0, \quad (13)$$

amely a lemniszkáta egyenlete  $a = 2r$  adattal. □

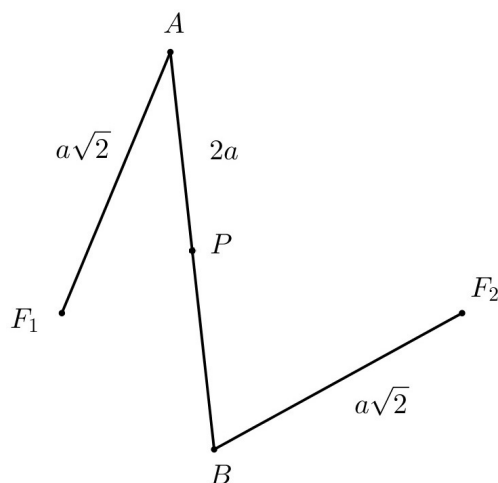
## 5. A lemniszkáta szerkesztése

A szerkesztés alatt matematikaórán az euklideszi eszközökkel – azaz körzővel és beosztás nélküli vonalzóval – végrehajtott szerkesztéseket értjük. Rengeteg példát ismerünk arra, hogy milyen alakzatokat tudunk ezekkel az eszközökkel megszerkeszteni, és milyeneket nem. Ellipszist nem tudunk így szerkeszteni, viszont vannak olyan módszerek, amelyekkel bizonyos pontossági szintig megfelelő ellipszist lehet rajzolni. Ilyen például, hogy rögzítjük egy kötél darab két végét úgy, hogy magától ne feszüljön a köté, és a ceruzát végighúzzuk a kötél darab mentén, miközben azt a ceruzával kifeszítjük. Ábrázoló geometrián úgy szokás ellipszist rajzolni – ez a pontosság miatt tulajdonképpen már szerkesztésnek minősül –, hogy az ellipszisnek euklideszi eszközökkel megszerkesztjük megfelelően sok pontját és ezeken áthaladó érintőjét, majd speciális, görbe vonalzó segítségével megrajzoljuk az érintési ponton keresztül az ellipszist. Ez a műszaki gyakorlat számára elfogadható pontosság.

Most a lemniszkáta szerkesztésével foglalkozunk, amely alatt nem euklideszi eszközökkel és módszerekkel történő szerkesztést értünk, hanem sokkal inkább annak megrajzolását.

A lemniszkáta megrajzolható olyan eszköz segítségével, amely három merev rúdból áll. A három rúd közül kettő egyforma hosszú, hosszuk a harmadik rúd hosszának a  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ -szerese. A három rudat szabadon forgó csuklók segítségével egymás után kapcsoljuk úgy, hogy a hosszabbik rúd helyezkedik el középen. A két rövidebb rúd szabad végeit rögzítjük a sík egy-egy pontjában úgy, hogy a rögzítési pontok távolsága megegyezzen a középső rúd hosszával, és a rögzítési pontok körül a rudak szabadon tudjanak forogni.

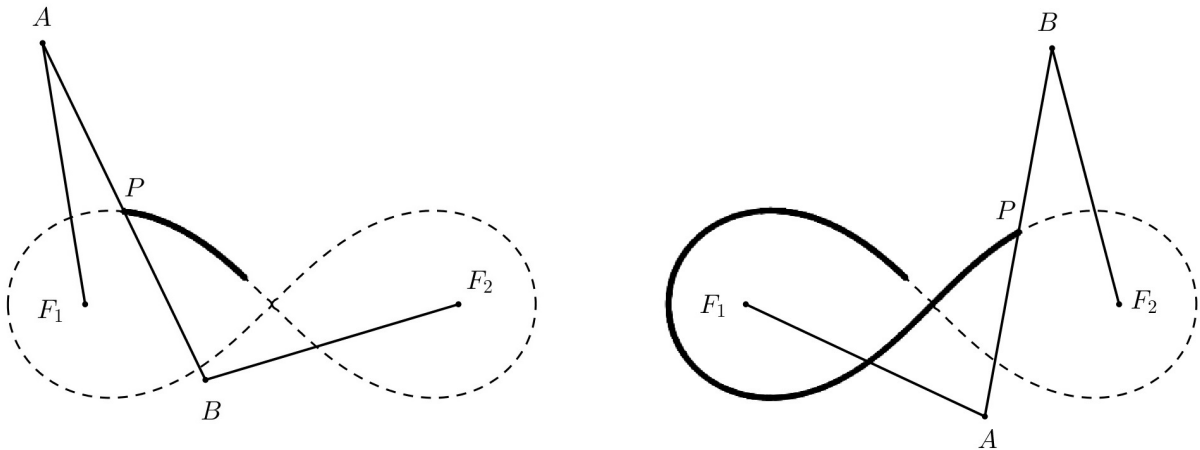
Ez az eszköz otthon is előállítható néhány kartonpapírcsík és rajzszög felhasználásával.



10. ábra. Lemniszkáta szerkesztésére alkalmas csuklós szerkezet  $F_1$  és  $F_2$  rögzítési pontokkal.

**4. Állítás.** Legyen adva a síkon két pont –  $F_1$  és  $F_2$  – egymástól  $2a$  távolságra. A csuklós szerkezet szabad végeit rögzítsük az  $F_1$ , illetve  $F_2$  pontokban, rúdjaik hosszát válasszuk

meg úgy, hogy a rövidebb rudak hossza  $a\sqrt{2}$ , a középső, hosszabbik rúd hossza  $2a$  legyen. Legyenek az  $A$  és  $B$  pontok a rudakat összekötő, csuklós pontok. A mozgást úgy kezdjük meg, hogy a kiindulási pillanatban az  $F_1$  és  $F_2$  pontok ne essenek az  $AB$  egyenesnek ugyanabba a nyílt félsíkjába, és ezt a mozgatas során végig fenntartjuk. Legyen a középső rúd felezőpontja  $P$ . Ekkor a szerkezet mozgatas során a  $P$  pont bejárja az  $F_1$  és  $F_2$  pontokhoz mint fókuszpontokhoz tartozó, a paraméterű lemniszkáta pontjait.



11. ábra. Lemniszkáta szerkesztése az eszközzel.

**Bizonyítás.** Legyen a csuklós szerkezet  $F_1$  pontban rögzített rúdjának másik végpontja az  $A$ ,  $F_2$  pontban rögzített rúdjának másik végpontja a  $B$  pont – az ábrának megfelelően.

Az  $AF_2BF_1$  négyszög szimmetrikus trapéz a következők miatt:

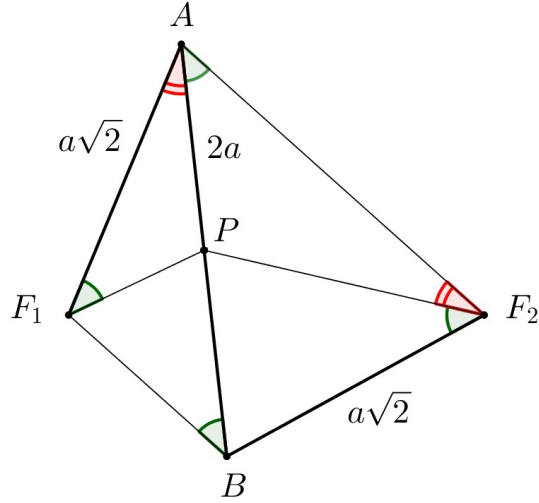
1.  $ABF_1\Delta$  háromszög egybevágó  $F_2F_1B\Delta$  háromszöggel, mert megfelelő oldalaiik egyenlők. Emiatt a megfelelő szögeik is egyenlők, így  $BF_1A\angle = F_1BF_2\angle$ .
2.  $AF_2F_1\Delta$  háromszög egybevágó  $F_2AB\Delta$  háromszöggel, mert megfelelő oldalaiik egyenlők. Emiatt a megfelelő szögeik is egyenlők, így  $F_1AF_2\angle = BF_2A\angle$ .

Az  $AF_2BF_1$  négyszög belső szögeinek összege  $360^\circ$ , a fenti két megállapítás felhasználásával adódik, hogy  $F_1AF_2\angle + BF_1A\angle = 180^\circ$  és  $BF_2A\angle + F_1BF_2\angle = 180^\circ$ .

Az  $APF_1\Delta$  háromszög és az  $AF_1B\Delta$  háromszög hasonló, mert az  $A$  csúcsnál lévő belső szögük közös, és az  $A$  csúcsnál lévő belső szögüket közbezáró oldalaiik aránya megegyezik.

$$\frac{AP}{AF_1} = \frac{AF_1}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Így  $AF_1P\angle = ABF_1\angle$ .



12. ábra. A szerkesztési mód igazolása.

A  $BPF_2\Delta$  háromszög és a  $BF_2A\Delta$  háromszög hasonló, mert a  $B$  csúcsnál lévő belső szögük közös, és a  $B$  csúcsnál lévő belső szögüket közbezáró oldalaik aránya megegyezik.

$$\frac{BP}{BF_2} = \frac{BF_2}{BA} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Így  $BF_2P\hat{=} BAF_2\hat{}$ .

Az  $AF_2BF_1$  négyszögben  $ABF_1\hat{}$  és  $BAF_2\hat{}$  váltószögek, ezért  $ABF_1\hat{=} BAF_2\hat{}$ , így

$$AF_1P\hat{=} ABF_1\hat{=} BAF_2\hat{=} BF_2P\hat{}$$

Tekintsük az  $F_1AP\Delta$  és  $AF_2P\Delta$  háromszögeket, ezek belső szögeit:

$$F_1AP\hat{=} F_1AF_2\hat{=} - PAF_2\hat{=} = F_1AF_2\hat{=} - BAF_2\hat{=} = BF_2A\hat{=} - PF_2B\hat{=} = AF_2P\hat{=},$$

tehát

$$\overline{F_1AP\hat{=} = AF_2P\hat{=}}$$

Ebből az következik, hogy  $F_1AP\Delta$  és  $AF_2P\Delta$  háromszögek hasonlóak, mert szögeik megegyeznek. Ekkor a megfelelő oldalaik aránya is megegyezik:

$$\frac{F_1P}{AP} = \frac{AP}{F_2P},$$

tehát

$$F_1P \cdot F_2P = AP^2 = a^2.$$

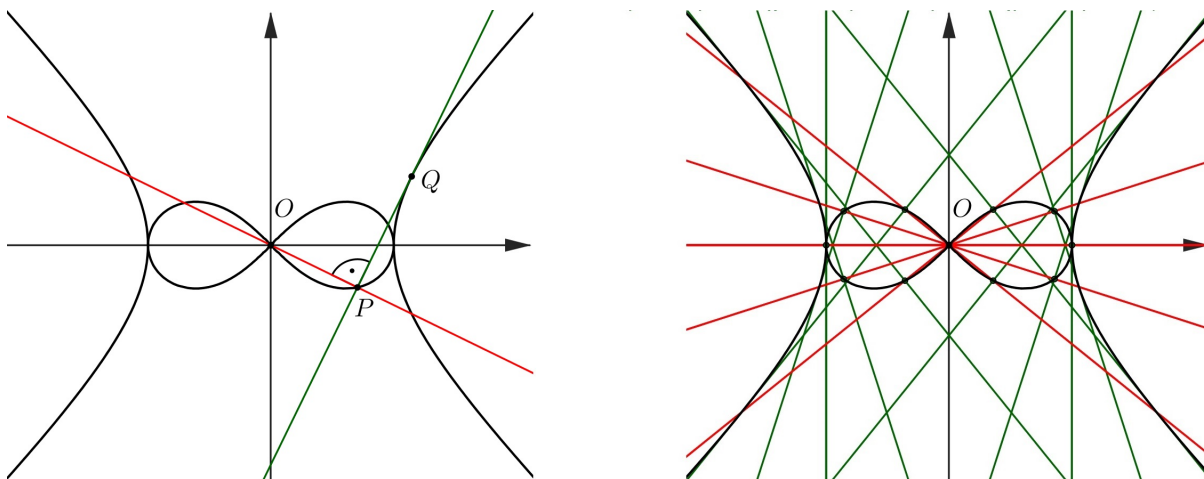
Vagyis a  $P$  pont befutja az  $F_1, F_2$  fókuszpontú,  $a^2$  paraméterű Cassini-görbe pontjait. Mivel az összeállításban  $a$  a fókuszpontok távolságának a fele, ezért a (2)-es egyenlet esete áll fenn: a Cassini-görbe itt speciálisan a lemniszkáta.  $\square$

## 6. A lemniszkáta mint talpponti görbe

Ebben a fejezetben az úgynevezett talpponti görbével foglalkozunk. A talpponti görbe egy adott görbéhez és a sík egy adott pontjához tartozik. Az adott görbe egy érintőjének a kijelölt ponthoz legközelebbi pontja az érintő talppontja. Ha előállítjuk az összes érintő talppontját, akkor e talppontok mértani helyeként a talpponti görbét kapjuk.

**Definíció.** Legyen adva a síkon az  $O$  pont és a  $g$  görbe, amelynek minden pontján át húzható érintő. A  $g$  görbe  $Q$  pontján áthaladó érintő egyenese és az erre merőleges,  $O$  ponton áthaladó egyenes metszéspontja legyen a  $P$  pont. A  $g$  görbe  $O$  pontra vonatkozó talpponti görbéje a  $P$  pont pályája, miközben a  $Q$  pont befutja a  $g$  görbét. Vagyis a  $g$  görbe  $O$  pontra vonatkozó talpponti görbéje azon pontok mértani helye, amelyek a görbe érintőjének és az  $O$  ponton áthaladó, az érintőre merőleges egyenesnek a metszéspontjaként állnak elő.

**5. Állítás.** A kanonikus helyzetű derékszögű hiperbola origóra vonatkozó talpponti görbéje egy lemniszkáta.



13. ábra. Kanonikus helyzetű derékszögű hiperbola és origóra vonatkozó talpponti görbéje.

**Megjegyzés.** A hiperbola érintői közé soroljuk az aszimptotákat is. Ezzel érhetjük el azt, hogy a lemniszkáta középpontja – azaz az origó – is előálljon talppontként. A bizonyítás során látni fogjuk ennek a szükségességét.

**Bizonyítás.** Az állítás igazolásához először a hiperbola érintőjének egyenletét fogjuk meghatározni.

A kanonikus helyzetű hiperbola úgy helyezkedik el a Descartes-féle koordináta-rendszerben, hogy fókuszpontjainak egyenese egybeesik a koordináta-rendszer  $x$ -tengelyével, a középpontja pedig megegyezik koordináta-rendszer origójával.

Ekkor a hiperbola egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (14)$$

alakban írható fel, ahol  $a$  a hiperbola valós tengelyhosszának fele, és ha  $2c$  a fókuszpontok távolsága, akkor  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ .

A hiperbola paraméterezése többféleképpen is lehetséges, most a szokásos paraméterezést fogjuk alkalmazni.

Legyen  $\mathbf{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  egy vektor-skalár leképezés. A kanonikus helyzetű hiperbola jobb oldali ágának pontjait az

$$\mathbf{r}(t) = (a \cdot \operatorname{ch} t, b \cdot \operatorname{sh} t) \quad (15)$$

vektorértékű függvény adja meg, ugyanis a koordinátái kielégítik a (14) egyenletet, vagyis

$$\frac{a^2 \operatorname{ch}^2 t}{a^2} - \frac{b^2 \operatorname{sh}^2 t}{b^2} = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1,$$

továbbá az első koordinátafüggvényének értékkészlete az  $[a, \infty)$  intervallum, a második koordinátafüggvényének értékkészlete pedig a valós számok halmaza.

A kanonikus helyzetű hiperbola bal oldali ágának pontjait az

$$\mathbf{r}(t) = (-a \cdot \operatorname{ch} t, b \cdot \operatorname{sh} t)$$

vektorértékű függvény adja meg, hiszen itt az első koordinátafüggvény értékkészlete a  $(-\infty, -a]$  intervallum. A hiperbola adott pontján áthaladó érintőjének egyenletét csak a jobb oldali ág esetén fogjuk levezetni, a bal oldali ág érintőire hasonló levezetéssel ugyanaz az eredmény jön ki.

Legyen az  $O$  pont a koordináta-rendszer origója. Legyen a  $Q(x_0, y_0)$  pont a hiperbola jobb oldali ágának egy pontja, ekkor  $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ . Legyen az  $\mathbf{r}(t_0)$  vektor az origó kezdőpontú,  $Q$  végpontú vektor. Emiatt (15) alapján

$$(x_0, y_0) = \overrightarrow{OQ} = \mathbf{r}(t_0) = (a \cdot \operatorname{ch} t_0, b \cdot \operatorname{sh} t_0),$$

vagyis

$$\begin{aligned} x_0 &= a \cdot \operatorname{ch} t_0, \\ y_0 &= b \cdot \operatorname{sh} t_0. \end{aligned} \quad (16)$$

Az  $\mathbf{r}$  függvény deriváltja a  $t_0$  helyen

$$\mathbf{r}'(t_0) = (a \cdot \operatorname{sh} t_0, b \cdot \operatorname{ch} t_0). \quad (17)$$

A hiperbola  $Q$  pontbeli érintője az az egyenes, amely áthalad a  $Q$  ponton, és  $\mathbf{r}'(t_0)$  vektor az irányvektora.

Legyen  $\mathbf{s}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  az a vektor-skalár leképezés, amely megadja a hiperbola  $Q$  pontján áthaladó érintő egyenesének pontjait. Így (17) alapján

$$\mathbf{s}(u) = \overrightarrow{OQ} + u \cdot \mathbf{r}'(t_0) = \mathbf{r}(t_0) + u \cdot \mathbf{r}'(t_0) = (a \cdot \operatorname{ch} t_0, b \cdot \operatorname{sh} t_0) + u \cdot (a \cdot \operatorname{sh} t_0, b \cdot \operatorname{ch} t_0),$$

vagyis

$$\mathbf{s}(u) = (a \cdot \operatorname{ch} t_0 + u \cdot a \cdot \operatorname{sh} t_0, b \cdot \operatorname{sh} t_0 + u \cdot a \cdot \operatorname{ch} t_0). \quad (18)$$

Legyen  $P(x, y)$  pont a hiperbola  $Q$  pontján áthaladó érintő egyenesének azon pontja, amelyre

$$\overrightarrow{OP} = (x, y) = \mathbf{s}(u). \quad (19)$$

Az érintő egyenletének felírásához a  $P$  pont koordinátái között állítunk fel kapcsolatot. A következő egyenletrendszert kapjuk (18) és (19) alapján:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cdot \operatorname{ch} t_0 + u \cdot a \cdot \operatorname{sh} t_0 \\ y &= b \cdot \operatorname{sh} t_0 + u \cdot b \cdot \operatorname{ch} t_0 \end{aligned} \right\}$$

A második egyenletből kifejezzük  $u$ -t:

$$u = \frac{y - b \cdot \operatorname{sh} t_0}{b \cdot \operatorname{ch} t_0}.$$

Az így kapott kifejezést behelyettesítjük az első egyenletbe, és rendezzük az egyenletet:

$$x = a \cdot \operatorname{ch} t_0 + \frac{y - b \cdot \operatorname{sh} t_0}{b \cdot \operatorname{ch} t_0} \cdot a \cdot \operatorname{sh} t_0,$$

mindkét oldalt  $b \cdot \operatorname{ch} t_0$ -al szorozva

$$b \cdot \operatorname{ch} t_0 \cdot x = ab \cdot \operatorname{ch}^2 t_0 + a \cdot \operatorname{sh} t_0 \cdot y - ab \cdot \operatorname{sh}^2 t_0,$$

amely rendezés és kiemelés után

$$b \cdot \operatorname{ch} t_0 \cdot x - a \cdot \operatorname{sh} t_0 \cdot y = ab \cdot (\operatorname{ch}^2 t_0 - \operatorname{sh}^2 t_0) \quad (20)$$

alakra hozható.

A (20)-as egyenlet további alakításához felhasználjuk, hogy  $\operatorname{ch}^2 t_0 - \operatorname{sh}^2 t_0 = 1$ , továbbá azt, hogy (16) alapján  $\operatorname{ch} t_0 = \frac{x_0}{a}$ , és  $\operatorname{sh} t_0 = \frac{y_0}{b}$ . Így

$$\frac{b \cdot x_0 \cdot x}{a} - \frac{a \cdot y_0 \cdot y}{b} = ab,$$

azaz

$$\frac{x_0 \cdot x}{a^2} - \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1. \quad (21)$$

A végeredményül kapott (21)-es egyenlet a kanonikus helyzetű hiperbola  $(x_0, y_0)$  koordinátájú pontján áthaladó érintőjének egyenlete. Ez az egyenlet érvényes akkor is, ha a  $Q(x_0, y_0)$  érintési pont a hiperbola bal oldali ágán található.



A bizonyítás második lépésében megmutatjuk, hogy hiperbola érintője és az érintőre merőleges, origón áthaladó egyenes metszéspontjaként előálló pontok egy lemniszkátán helyezkednek el.

Általánosan, ha az  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$  vektor merőleges egy adott egyenesre, amelynek  $Q(x_0, y_0)$  az egyik pontja – tehát  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$  a  $Q$  pont helyvektora –, akkor pontosan azok a pontok alkotják az egyenest, amelyek  $\mathbf{r} = (x, y)$  helyvektorára teljesül, hogy

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0. \quad (22)$$

A (22)-es egyenlet a vektorok koordinátáinak segítségével úgy írható fel átrendezés után, hogy

$$n_1 \cdot x + n_2 \cdot y = n_1 \cdot x_0 + n_2 \cdot y_0 = q. \quad (23)$$

Ha a normálvektor egységvektor, azaz  $|\mathbf{n}| = 1$ , akkor a  $q$  értéke egyenlő az origó és az egyenes távolságával.

Legyen adva a hiperbola  $Q(x_0, y_0)$  pontja, és legyen  $P(x_P, y_P)$  pont a hiperbola  $Q$  pontján áthaladó érintőjének és az érintőre merőleges, origón áthaladó egyenesnek a metszéspontja. Ekkor az  $\overrightarrow{OP} = (x_P, y_P)$  vektor merőleges a  $Q$  ponton áthaladó érintőre, tehát az  $\overrightarrow{OP}$  vektor az érintő normálvektora.

Olyan normálvektor segítségével írjuk fel az érintő egyenletét, amelynek hossza egységnyi. Ehhez a  $P(x_P, y_P)$  pont koordinátáit polárkoordináta-alakban adjuk meg:

$$\left. \begin{aligned} x_P &= r \cdot \cos \varphi \\ y_P &= r \cdot \sin \varphi \end{aligned} \right\}, \quad (24)$$

ahol  $r$  a  $P$  pont origótól mért távolsága – amely egyben az érintő egyenes origótól mért távolsága, hiszen az  $OP$  szakasz merőleges az érintőre –,  $\varphi$  pedig az  $OP$  irány által meghatározott irányított szög. A  $P$  pont Descartes-koordinátáival az  $r$  távolság kifejezhető:

$$r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}. \quad (25)$$

A polárkoordinátás felírásmód miatt egység hosszú normálvektor az  $\mathbf{n}_e = (\cos \varphi, \sin \varphi)$  vektor, hiszen párhuzamos az érintőre merőleges  $\overrightarrow{OP} = (r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi)$  vektorral, és a hossza egységnyi, ugyanis  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$  minden  $\varphi$  szög esetén.

Így a  $Q(x_0, y_0)$  ponton áthaladó érintő egyenlete (23) és  $\mathbf{n}_e$  felhasználásával

$$\cos \varphi \cdot x + \sin \varphi \cdot y = r$$

alakban írható, hiszen  $r$  az érintő origótól mért távolsága. Mivel a kanonikus helyzetű hiperbolának nem halad át érintője az origón, ezért minden érintő origótól mért távolsága

pozitív, vagyis  $r > 0$  minden érintő esetén. Így az érintő előbb leírt egyenlete

$$\frac{\cos \varphi \cdot x}{r} + \frac{\sin \varphi \cdot y}{r} = 1 \quad (26)$$

alakra hozható.

A hiperbola érintőjének egyenlete felírható a korábban levezetett alakban is a (21)-es egyenlet alapján:

$$\frac{x_0 \cdot x}{a^2} - \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1. \quad (27)$$

A (26)-os és (27)-es egyenletek ugyanazt az egyenest adják meg. Mivel mindkét egyenlet jobb oldalán ugyanaz a szám áll, az egyenletek bal oldalának is meg kell egyeznie, tehát

$$x_0 = \frac{a^2 \cdot \cos \varphi}{r}, \quad \text{és} \quad y_0 = -\frac{b^2 \cdot \sin \varphi}{r}. \quad (28)$$

Mivel a  $Q(x_0, y_0)$  érintési pont a hiperbola egy pontja, ezért koordinátái kielégítik a hiperbola egyenletét, vagyis

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$$

Ez az egyenlőség a (28)-as összefüggések behelyettesítése után felírható

$$\frac{a^4 \cos^2 \varphi}{a^2 r^2} - \frac{b^4 \sin^2 \varphi}{b^2 r^2} = 1$$

alakban, amelyet az  $r > 0$  feltétel felhasználásával tovább alakítva az

$$a^2 \cos^2 \varphi - b^2 \sin^2 \varphi = r^2$$

egyenletet kapjuk. Mivel  $r$  és  $\varphi$  a  $P(x_P, y_P)$  pont polárkoordinátái, a (24)-es és (25)-ös összefüggések alapján az előbbi egyenlet

$$a^2 \cdot \frac{x_P^2}{r^2} - b^2 \cdot \frac{y_P^2}{r^2} = r^2,$$

vagyis

$$a^2 x_P^2 - b^2 y_P^2 = r^4 = (x_P^2 + y_P^2)^2$$

alakra hozható.

Ha a hiperbola derékszögű, azaz  $a = b$ , akkor ez az egyenlet végső soron

$$a^2 \cdot (x_P^2 - y_P^2) = (x_P^2 + y_P^2)^2$$

alakra hozható.

Ez a lemniszkáta egyenlete, amelyet a  $P$  pont koordinátái kielégítenek. Vagyis a vizsgált pontok mind ezen a lemniszkátán helyezkednek el. Mivel az egyetlen feltételünk az volt, hogy  $r > 0$ , és emellett végig ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért lemniszkáta minden pontja, amelyre  $r > 0$ , előáll ilyen metszéspontként. Az  $r = 0$  ponton csak a hiperbola aszimptotái mennek át, ez a pont az aszimptoták talppontja. Ha az aszimptotákat is az érintők közé soroljuk, akkor a lemniszkáta középpontja is előáll talppontként.  $\square$

## 7. A lemniszkáta mint inverz alakzat

Az inverzióval mint geometriai transzformációval egyetemi tanulmányaink során találkozunk, sok tulajdonságát megismertük. Célunk, hogy meghatározzunk a Cassini-görbék inverzeit a középpontjuk körüli körre vonatkozóan. Ebben a fejezetben a lemniszkáta megrajzolásáról szóló 5. fejezetben leírtakat fogjuk alkalmazni. Így azt a kérdést vizsgáljuk, hogy a lemniszkáta milyen alakzat inverzeként áll elő. Később, a 9. fejezetben, új módszerek alkalmazásával az összes Cassini-görbe terítékre kerül.

**Definíció.** Legyen adva az  $s$  síkban az  $O$  középpontú,  $r$  sugarú  $k$  kör. A  $k$  körre vonatkozó inverzió az  $\iota: s \setminus \{O\} \rightarrow s \setminus \{O\}$  leképezést értjük, ahol egy tetszőleges  $P$  pont képe az a  $P'$  pont az  $OP$  félegyenesen, amelyre

$$OP \cdot OP' = r^2.$$

A  $k$  kört az inverzió alapkörének, az  $O$  pontot az inverzió pólusának, az  $r^2$  értéket pedig az inverzió hatványának nevezzük. A  $P'$  pont a  $P$  pont inverz pontja, Egy alakzat pontjainak inverzei az inverz alakzatot alkotják. Ha egy alakzatról az inverz alakzatra térünk át, akkor azt mondjuk, hogy az alakzatot invertáljuk.

**6. Állítás.** Legyenek adva az  $F_1, F_2$  pontok, legyen az  $F_1F_2$  szakasz felezőpontja az  $O$  pont. Az  $F_1, F_2$  fókuszpontokkal megadott derékszögű hiperbola  $O$  középpontú,  $OF_1$  sugarú körre vonatkozó inverze az  $F_1, F_2$  fókuszpontokkal megadott lemniszkáta – annak  $O$  pontja kivételével.

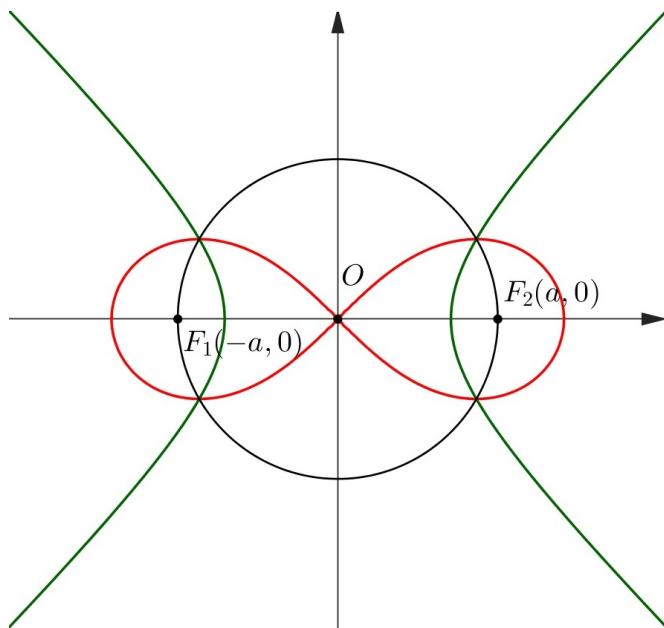
**Bizonyítás.** Az állítás bizonyítása a lemniszkáta szerkesztési módjának felhasználásával történik. A 4. állítással megegyezően legyenek adva az  $F_1$  és  $F_2$  pontok egymástól  $2a$  távolságra, az  $F_1F_2$  szakasz felezőpontja legyen az  $O$  pont. Legyen ugyanúgy az  $F_1, A$  pontok távolsága és az  $F_2, B$  pontok távolsága fixen  $a\sqrt{2}$ , az  $A$  és  $B$  pontok távolsága fixen  $2a$  nagyságú. Ha a  $P$  pont az  $AB$  szakasz felezőpontja, akkor a  $P$  pont az  $F_1, F_2$  fókuszpontokkal megadott lemniszkáta egy pontja.

Ha a  $P$  pont nem esik egybe az  $O$  ponttal, akkor az  $AF_1$  és  $BF_2$  egyenesek metszik egymást (különböző párhuzamosak). Legyen a  $Q$  pont az  $AF_1$  és  $BF_2$  egyenesek metszéspontja. Legyen az  $R$  pont a  $Q$  pont tükörképe az  $F_1F_2$  egyenesre. Cél, hogy megmutassuk, az  $R$  pontnak a  $P$  pont az  $O$  középpontú,  $OF_1$  sugarú körre vonatkozó inverze.

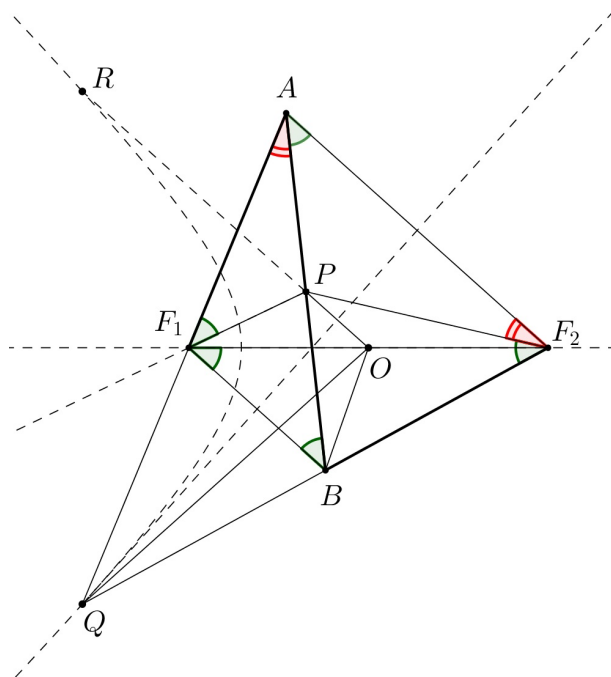
A tengelyes tükrözés tulajdonságai miatt  $F_2R = F_2Q$  és  $F_1R = F_1Q$ . Mivel az  $AF_1BF_2$  négyszög húrtrapéz, ezért  $F_2Q = AQ$ . Így

$$|F_2R - F_1R| = |F_2Q - F_1Q| = |AQ - F_1Q| = AF_1 = a\sqrt{2} = \frac{F_1F_2}{\sqrt{2}}.$$

Ez azt jelenti, hogy  $R$  és  $Q$  pontok rajta vannak az  $F_1, F_2$  fókuszpontokkal megadott derékszögű hiperbolán. Az  $R$  pont a hiperbola bármelyik pontja lehet.



14. ábra. Az  $F_1, F_2$  fókuszpontokkal megadott derékszögű hiperbola (zöld) és az  $O$  középpontú,  $OF_1$  sugarú körre vonatkozó inverze (piros).



15. ábra. A szerkesztési mód alkalmazása az inverzióra vonatkozó állítás igazolásához.

Megmutatjuk, hogy  $F_1PO\Delta$  és  $QF_1O\Delta$  háromszögek hasonlók.

Mivel  $F_1B$  és  $PO$  szakaszok párhuzamosak, ezért az  $F_1POB$  négyszög trapéz. Emiatt

$$OPF_1\angle + PF_1B\angle = 180^\circ,$$

hiszen ezek a szögek a trapéz egyazon szárán fekvő belső szögei.

Továbbá, mivel  $AF_1Q\angle$  szög egyenesszög, ezért

$$AF_1O\angle + OF_1Q\angle = 180^\circ.$$

A 15-ös ábra és a húrtrapéz tengelyes szimmetriája alapján  $F_2F_1B\angle = ABF_1\angle$ . Így

$$PF_1B\angle = AF_1B\angle - AF_1P\angle = AF_1B\angle - ABF_1\angle = AF_1B\angle - F_2F_1B\angle = AF_1O\angle,$$

vagyis

$$PF_1B\angle = AF_1O\angle.$$

Toljuk el az  $OPF_1\angle$  szöget az  $F_1$ -be mint szögcsúcsba. Ekkor

$$OPF_1\angle = OF_1Q\angle. \quad (29)$$

Mivel  $PF_2B\angle = PF_1A\angle$ , ezért  $PF_1Q\angle + QF_2P\angle = 180^\circ$ . Emiatt a  $QF_1PF_2$  négyszög húrnégyszög, vagyis van köréírt köre. Az  $F_2F_1P\angle$  és  $F_2QP\angle$  szögek a körülírt körön ugyanahhoz az ívhez tartozó kerületi szögek, így  $F_2F_1P\angle = F_2QP\angle$ .

A húrtrapéz tengelyes szimmetriája miatt  $F_2F_1P\angle = F_1QO\angle$ . Vagyis

$$F_2F_1P\angle = F_1QO\angle. \quad (30)$$

Ezzel beláttuk, hogy  $F_1PO\triangle$  és  $QF_1O\triangle$  háromszögek hasonlóak, hiszen (29) és (30) alapján két szögük megegyezik.

Mivel két szögük megegyezik, a harmadik szögük is egyenlő, azaz  $F_1OP\angle = F_1OQ\angle$ . Ennek felhasználásával jutunk oda, hogy az  $R$  pont az  $OP$  félegyenesen található, mivel a  $Q$  pontból az  $R$  pontot az  $F_1F_2$  egyenesre történő tengelyes tükrözéssel kapjuk.

Mivel  $RF_1O\triangle$  és  $QF_1O\triangle$  háromszögek egybevágók, ezért  $F_1PO\triangle$  és  $RF_1O\triangle$  háromszögek hasonlóak. Így megfelelő oldalaik arány megegyezik, tehát

$$\frac{OP}{OF_1} = \frac{OF_1}{OR},$$

azaz

$$OP \cdot OR = OF_1^2.$$

Tehát  $R$  és  $P$  pontok egymás képei az  $O$  középpontú,  $OF_1$  sugarú körre vonatkozó inverzióánál. Az  $R$  pont a hiperbola bármelyik pontja lehet, az inverze – vagyis a  $P$  pont – mindig a lemniszkáta pontja. Valamint a lemniszkáta bármely  $P \neq O$  pontjának  $R$  inverze mindig a hiperbolán van. Így a lemniszkáta – az  $O$  pontja kivételével – és a hiperbola egymás inverzei.  $\square$

**Második bizonyítás.** Az állítás belátható másképpen is, analitikus geometriai eszközök segítségével. Ehhez először az inverzió analitikus leírását tesszük meg.

Legyen a koordináta-rendszer origója az  $O$  pont, és tekintsük az  $O$  középpontú,  $r$  sugarú körre vonatkozó inverziót.

Legyen a  $P(x, y)$  pont inverze a  $P'(x', y')$  pont. Mivel  $\overrightarrow{OP}$ ,  $\overrightarrow{OP}'$  vektorok párhuzamosak és egyirányúak, ezért

$$\overrightarrow{OP}' = OP' \cdot \frac{\overrightarrow{OP}}{OP} = \frac{r^2}{OP} \cdot \frac{\overrightarrow{OP}}{OP} = \frac{r^2}{x^2 + y^2} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{r^2}{x^2 + y^2} \cdot (x, y) = \left( \frac{r^2}{x^2 + y^2} \cdot x, \frac{r^2}{x^2 + y^2} \cdot y \right).$$

Vagyis a  $P(x, y)$  pont  $P'(x', y')$  képének koordinátái:

$$x' = \frac{r^2 \cdot x}{x^2 + y^2}, \quad \text{és} \quad y' = \frac{r^2 \cdot y}{x^2 + y^2}.$$

Legyen adva az  $F(x, y) = c$  egyenletű alakzat. A  $P(x, y)$  pont pontosan akkor tartozik az  $F(x, y) = c$  egyenletű alakzat inverzéhez, ha  $P$  inverze, azaz a  $P' \left( \frac{r^2 \cdot x}{x^2 + y^2}, \frac{r^2 \cdot y}{x^2 + y^2} \right)$  pont az alakzathoz tartozik, vagyis az  $F \left( \frac{r^2 \cdot x}{x^2 + y^2}, \frac{r^2 \cdot y}{x^2 + y^2} \right) = c$  egyenlet teljesül.

Tehát az  $F(x, y) = c$  egyenletű alakzat inverze az

$$F \left( \frac{r^2 \cdot x}{x^2 + y^2}, \frac{r^2 \cdot y}{x^2 + y^2} \right) = c \tag{31}$$

egyenletű alakzat.

Legyenek az  $F_1, F_2$  pontok a koordináta-rendszer  $x$ -tengelyének pontjai úgy, hogy távolságuk  $2a$ , a koordináta-rendszer  $O$  origója pedig az  $F_1F_2$  szakasz felezőpontja legyen.

A derékszögű hiperbola valós féltengelyének hossza egyenlő a centruma és egyik fókuszpontja távolságának  $\sqrt{2}$ -ed részével. Tehát az állításban szereplő hiperbola egyenlete:

$$\frac{x^2}{\left( \frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2} - \frac{y^2}{\left( \frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2} = 1,$$

azaz

$$x^2 - y^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Ennek az inverze az  $O$  középpontú,  $r = OF_1 = a$  sugarú körre (31) alapján:

$$\left(\frac{a^2x}{x^2+y^2}\right)^2 - \left(\frac{a^2y}{x^2+y^2}\right)^2 = \frac{a^2}{2},$$

$$\frac{a^4x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{a^4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{a^2}{2},$$

$$a^4(x^2 - y^2) = \frac{a^2(x^2 + y^2)^2}{2},$$

$$2a^2(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2. \quad (32)$$

A végeredményül megkapott (32)-es egyenlet az  $F_1$  és  $F_2$  pontokhoz mint fókuszpontokhoz tartozó lemniszkáta egyenlete. Természetesen a hiperbola inverzéhez nem tartozik hozzá az origó, ugyanis  $x^2 + y^2 = 0$  esetén nincs értelmezve a (31)-es összefüggés, az inverzió alapkörének középpontja nem invertálható.  $\square$

## 8. Négyzetreemelés, négyzetgyökvonás a komplex síkon

A komplex számokkal és a velük végezhető műveletekkel az érdeklődők már középiskolában is találkozhattak. Míg a valós számok kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők a számegyenes pontjainak, a komplex számok a sík pontjaival állnak ilyen bijektív kapcsolatban. A komplex számokkal végzett műveletek is szemléltethetők a sík pontjaival és vektoraival. Kiemelten fontos a témakörünk szempontjából a komplex számokon végzett négyzetreemelés és négyzetgyökvonás. Ha a sík pontjait komplex számnak tekintjük, akkor ezek a műveletek a síknak önmagára való leképezéseit jelentik. Érdekes kérdés, hogy bizonyos alakzatokat mivé transzformálnak ezek a leképezések. Először megvizsgáljuk körök, egyenesek, hiperbolák négyzetét, körök gyökét. A négyzetreemelés és négyzetgyökvonás mint a leképezések önmagukban is figyelemre méltók, viszont a későbbi fejezetekben kiemelt szerepe lesz az itt terítékre kerülő esetek alkalmazásának.

Először – csak emlékeztetőül – felsoroljuk a komplex számok és a komplex számsík néhány tulajdonságát, jellemzőjét.

### 8.1. Komplex számok, komplex számsík, a komplex számok trigonometrikus alakja

Komplex számoknak nevezzük az  $a + bi$  alakú formális kifejezéseket, ahol  $a$  és  $b$  valós számok.

Az  $a + bi$  és  $c + di$  komplex számok akkor egyenlők, ha  $a = c$  és  $b = d$ .

A komplex számok összeadását és szorzását a következőképpen definiáljuk:

$$\begin{aligned}(a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i, \\ (a + bi) \cdot (c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}\tag{33}$$

A  $z = a + bi$  komplex szám valós része  $\operatorname{Re}(z) = a$ , képzetes része  $\operatorname{Im}(z) = b$ .

A komplex számok testet alkotnak az összeadás és a szorzás művelettel.

A  $z = a + bi$  komplex szám konjugáltjának a  $\bar{z} = a - bi$  komplex számot, abszolút értékének a  $|z| = \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{a^2 + b^2}$  nemnegatív valós számot nevezzük.

Vegyük a Descartes-féle koordináta-rendszerrel ellátott euklideszi síkot, és a sík  $(a, b)$  koordinátájú pontjához rendeljük hozzá az  $a + bi$  komplex számot. Ez a hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű, azaz a sík minden pontjához pontosan egy komplex számot rendelünk, és minden komplex szám megfeleltethető a sík egy pontjának. Az így felkoordinátázott síkot nevezzük komplex számsíknak.



Ha az  $O(0,0)$  pont a koordináta-rendszer origója, akkor az  $O$  kezdőpontú,  $A(a,b)$  végpontú irányított szakasz az  $\overrightarrow{OA} = (a,b)$  helyvektor. Vagyis a felkoordinátázott sík helyvektorai és a komplex számok között is létesíthető kölcsönösen egyértelmű a hozzárendelés, ha az  $a+bi$  komplex számot megfeleltetjük az  $(a,b)$  helyvektornak. Emiatt a komplex számokkal végzett műveleteket a nekik megfeleltetett vektorok segítségével is értelmezni tudjuk.

A komplex számok összeadása a vektorösszeadásnak felel meg, ugyanis az  $(a,b)$  és  $(c,d)$  vektorok összege az  $(a+c,b+d)$  vektor, amely a (33)-as művelet-definíció alapján az  $a+bi$  és  $c+di$  komplex számok  $(a+c) + (b+d)i$  összegének megfeleltetett vektor.

A  $z = a+bi$  komplex szám abszolút értéke egyenlő a neki megfeleltetett  $(a,b)$  vektor hosszával, amelyet  $r$ -rel jelölünk:  $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Ha  $z \neq 0$ , akkor a  $z = a+bi$  komplex szám szögén vagy argumentumán – amelyet  $\varphi = \arg(z)$ -vel jelölünk – az őt reprezentáló helyvektornak a koordináta-rendszer  $x$ -tengelye pozitív irányától mért előjeles szögét értjük.

A  $z = a+bi$  komplex szám  $\bar{z} = a-bi$  konjugáltját reprezentáló helyvektor a  $z$ -t reprezentáló helyvektornak az  $x$ -tengelyre vonatkozó tükörképe. Vagyis, ha  $z$  szöge  $\varphi$ , akkor  $\bar{z}$  szöge  $-\varphi$ .

Egy helyvektort egyértelműen megadhatunk a hossza és a koordináta-rendszer  $x$ -tengelyének pozitív irányától mért előjeles szöge segítségével. Ha a  $z = a+bi$  komplex szám szöge  $\varphi$ , akkor a  $z$ -t reprezentáló  $(a,b)$  helyvektor koordinátáira teljesül, hogy

$$\begin{aligned} a &= r \cdot \cos \varphi, \\ b &= r \cdot \sin \varphi. \end{aligned}$$

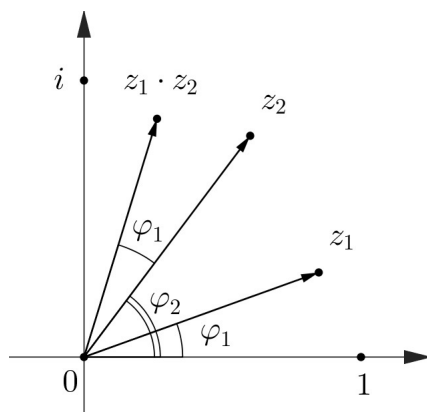
Tehát  $z = r \cdot \cos \varphi + i \cdot r \cdot \sin \varphi = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ , amely felírást a  $z$  komplex szám trigonometrikus alakjának nevezzük.

A komplex számok szorzását is értelmezni tudjuk a nekik megfeleltetett vektorok segítségével, felhasználva a trigonometrikus alakot: legyen  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  és  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ . Ekkor a szorzatuk

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \quad (34)$$

Komplex számok szorzása során a hosszuk összeszorzódik, a szögük összeadódik. Ez geometriai értelemben azt jelenti, hogy a  $z$  komplex számot reprezentáló vektor a  $w$ -vel való szorzás során  $|w|$ -szeresére nyúlik, és elfordul  $\arg w$  előjeles szöggel. Azaz a  $w$ -vel való szorzás egy forgatva nyújtást jelent.

Komplex számok szorzatának hossza egyenlő a hosszaik szorzatával, azaz  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ .



16. ábra. Komplex számok szorzása.

## 8.2. Négyzetreemelés

A  $z = a + bi$  komplex szám négyzete a (33)-as művelet-definíció alapján a  $w = z^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$  komplex szám.

Tekintsük most a négyzetreemelést a komplex számsík pontjain értelmezett függvényként, amely a síkot önmagára képezi. Láthatjuk, hogy ez nem a szokásos iskolás értelemben vett geometriai transzformáció, mert például nem bijektív:  $z^2 = (-z)^2$ , azaz vannak olyan pontok, amelyeknek ugyanaz a képe. Viszont néhány alakzat esetén érdemes megvizsgálni, hogy mivé transzformálja azokat ez a leképezés.

A komplex számsík  $(a, b)$  pontjához a négyzetreemelés-függvény a sík  $(a^2 - b^2, 2ab)$  pontját rendeli. A szorzás tulajdonságai alapján, geometriai értelemben a komplex szám – és így az azt reprezentáló vektor – hosszát a négyzetreemelés-függvény négyzetre emeli, a szögét pedig megkétszerezi.

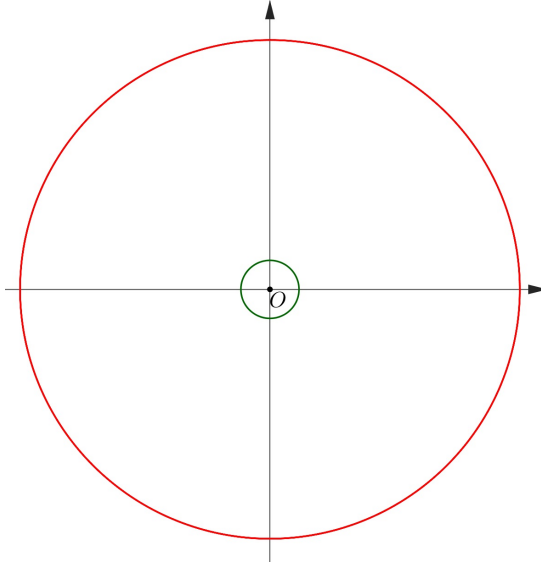
Tekintsük az  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$  görbét a síkon. E görbe négyzetének az

$$\mathbf{r}^2(t) = (x^2(t) - y^2(t), 2x(t)y(t))$$

görbét nevezzük. Vagyis az  $\mathbf{r}(t)$  görbe négyzete az a görbe, amelyet az  $\mathbf{r}(t)$  görbe pontjainak – mint a komplex síkon elhelyezkedő komplex számoknak – a négyzete alkot.

**7. Állítás.** *Origó középpontú kör négyzete origó középpontú kör.*

**Bizonyítás.** Az origó középpontú,  $r$  sugarú kör minden pontját olyan komplex szám reprezentálja, amelynek hossza  $r$ . A négyzetreemelés során ez a hossz  $r^2$ -re változik, a komplex szám szöge pedig megkétszereződik az összes ilyen pont esetén, így minden pont képe rajta van az origó középpontú,  $r^2$  sugarú körön. Továbbá az utóbbi körnek minden pontja az eredeti kör valamelyik pontjának a képe, ugyanis e kör pontjait reprezentáló komplex számok hosszából gyököt vonva, szögét megfelelve az eredeti kör egy pontját reprezentáló komplex számot kapunk.  $\square$



17. ábra. Origó középpontú kör (zöld) és négyzete (piros).

**Második bizonyítás.** Az origó középpontú,  $r$  sugarú kör pontjait az  $\mathbf{r}: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{r}(t) = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t)$  vektorértékű függvény adja meg. Ennek a görbének a képe a négyzetreemelés után az

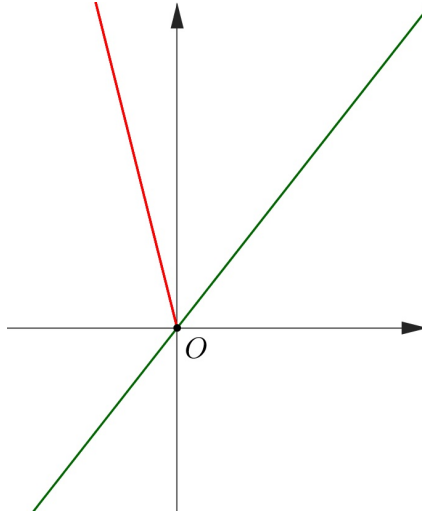
$$\mathbf{r}^2(t) = (r^2 \cdot \cos^2 t - r^2 \cdot \sin^2 t, r^2 \cdot 2 \sin t \cos t) = (r^2 \cdot \cos(2t), r^2 \cdot \sin(2t))$$

görbe, amely az origó középpontú,  $r^2$  sugarú kör pontjait írja le.  $\square$

**Megjegyzés.** Látható, hogy a képként kapott kör minden pontja két, az eredeti körön lévő pontnak is a képe: a  $\varphi$  és a  $\varphi + \pi$  szögű – ahol  $\varphi \in [0, \pi)$  – komplex számok négyzeteinek szöge  $2\varphi$  és  $2\varphi + 2\pi$ . Utóbbi szög pedig ugyanúgy a  $2\varphi$  szögnek felel meg: a  $2\varphi + 2\pi$  szög jelentése, hogy a komplex számot reprezentáló vektort az  $x$ -tengelytől mérve  $2\varphi$  szöggel, majd egy teljes körbefordulással forgattuk el. Ezt a forgatást egyszerűen csak a  $2\varphi$  szöggel való forgatással is elérhetjük. Ezért e komplex számok képeinek szöge megegyezik. Ha a hosszuk is egyenlő, akkor a négyzetük is egyenlő. Ezzel arra láttunk példát, hogy a négyzetreemelés nem bijektív, egy képpont több eredeti pont képe is lehet.

**8. Állítás.** *Origón átmenő egyenes négyzete origóból induló félegyenes.*

**Bizonyítás.** Az origón áthaladó egyenes egyik felét reprezentáló komplex számok szöge  $\varphi$ , a másik felének  $\varphi + \pi$ , ahol  $\varphi \in [0, \pi)$ . Így a négyzetük szöge  $2\varphi$  és  $2\varphi + 2\pi$ . Ezek a szögek az előbbi megjegyzés alapján ugyanazok, vagyis a képalakzat pontjait reprezentáló komplex számok szöge megegyezik. Azok a komplex számok, amelyek szöge megegyezik, az origóból induló, az origót nem tartalmazó, nyílt félegyenes pontjai a komplex síkon. Origón áthaladó egyenes négyzetreemelésakor az origó képe az origó, a többi pont pedig – az előbb leírt módon – az origóból induló, az origót nem tartalmazó, nyílt félegyenesre képeződik. Ennek a félegyenesnek minden pontja az eredeti egyenes valamely pontjának a



18. ábra. Origón átmenő egyenes (zöld) és négyzete (piros).

képe, amelyet reprezentáló komplex számot a kép a szögének felezésével, és a hosszából történő négyzetgyökvonással visszakaphatunk.  $\square$

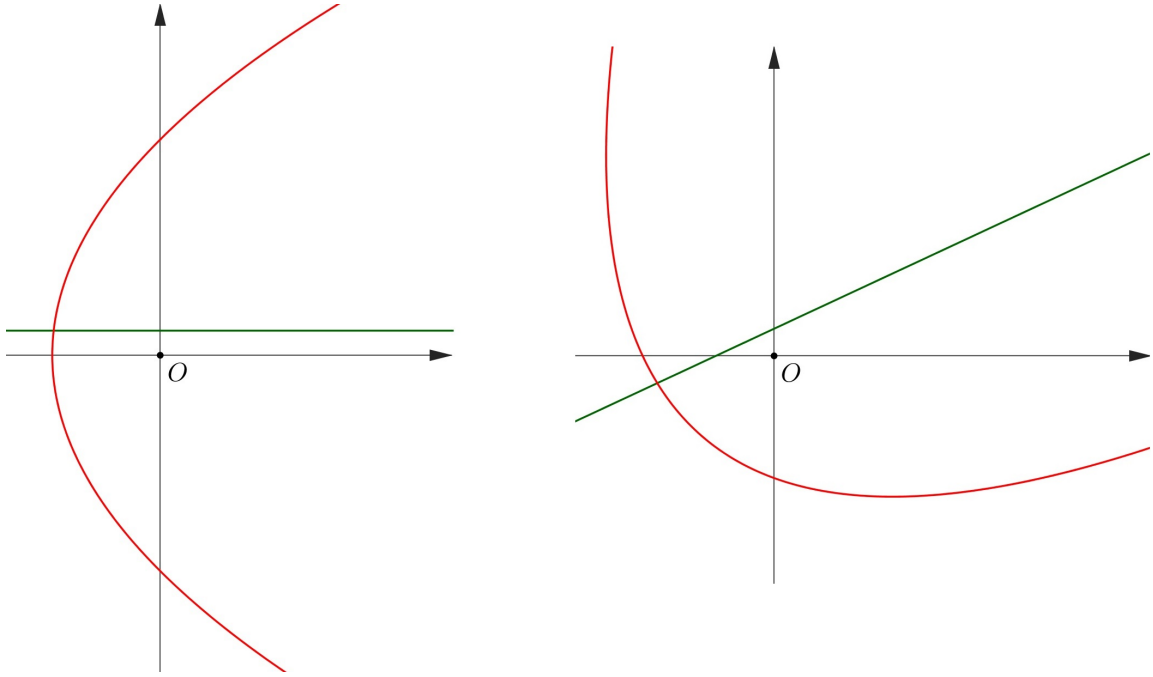
**Második bizonyítás.** Az origón áthaladó egyenest az  $\mathbf{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{r}(t) = (a \cdot t, b \cdot t)$  görbe adja meg, ahol  $a$  és  $b$  olyan valós számok, hogy közülük legalább az egyik nem 0. Ennek a görbének a képe a négyzetreemelés után az  $\mathbf{r}^2(t) = \left( (a^2 - b^2) \cdot t^2, 2ab \cdot t^2 \right)$  görbe. Itt  $t^2$  a nemnegatív számok halmazát futja be, vagyis a képgörbe egy origóból induló félegyenes.  $\square$

**9. Állítás.** *Origón át nem menő egyenes négyzete origó fókuszú parabola.*

**Bizonyítás.** Az  $x$ -tengellyel párhuzamos egyeneseket az  $\mathbf{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{r}(t) = (t, c)$  görbe írja le, ahol  $c$  egy tetszőleges, nem 0 valós szám. Az egyenes képe a négyzetreemelésnél az  $\mathbf{r}^2(t) = (t^2 - c^2, 2tc)$  görbe. Ennek a koordinátáira teljesül, hogy  $y^2 = 4c^2x + 4c^4$ , vagyis a képalakzat egy jobbra nyíló, az  $x$ -tengely egyenesével megegyező tengelyű parabola.

A kanonikus helyzetű parabola egyenlete  $y^2 = 2px$ , ahol a  $p$  paraméter a parabola vezéregyenesének és fókuszpontjának távolsága, azaz a parabola csúcsa és fókuszpontja távolságának kétszerese. A képgörbe egyenlete  $y^2 = 4c^2(x + c^2)$  alakra hozható, amelyből leolvashatjuk, hogy a parabola paramétere a  $p = 2c^2$  szám, valamint azt is, hogy a parabola a kanonikus helyzethez képest, az  $x$ -tengely mentén negatív irányban,  $c^2$ -tel el van tolva. Ebből az következik, hogy a parabola fókusza az origó, hiszen ez a pont van a parabola tengelyén a csúcsától  $\frac{p}{2} = c^2$  távolságra (a megfelelő irányban).

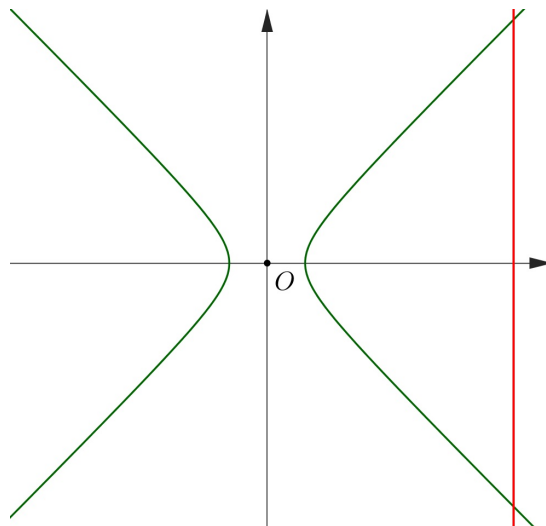
Ha egy alakzat helyett az alakzat origó körüli  $\varphi$  szöggel elforgatottjának nézzük a négyzetét, akkor az az eredeti alakzat képének a  $2\varphi$  szöggel vett elforgatottja. Ez a komplex számok trigonometrikus alakjából következik: ha az alakzat minden pontjának szögéhez hozzáadunk  $\varphi$ -t, akkor a képek szöge  $2\varphi$ -vel nő. Vagyis minden, origón át nem haladó



19. ábra. Origón át nem menő egyenes (zöld) és négyzete (piros).

egyenesre teljesül az állítás: minden egyenes előáll egy  $x$ -tengellyel párhuzamos egyenes  $\varphi$  szögű, origó körüli elforgatottjaként. Az elforgatott egyenes képe pedig az eredeti egyenes képének origó körüli,  $2\varphi$  szöggel vett elforgatottja, azaz továbbra is egy origó fókuszú parabola. Például függőleges egyenesek képei így balra nyíló parabolák.  $\square$

**10. Állítás.** *Origó középpontú derékszögű hiperbola négyzete origón át nem menő egyenes.*



20. ábra. Origó középpontú derékszögű hiperbola (zöld) és négyzete (piros).

**Bizonyítás.** Kanonikus helyzetű, derékszögű hiperbola jobb oldali ágát az  $\mathbf{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{r}(t) = (a \cdot \operatorname{ch} t, a \cdot \operatorname{sh} t)$  görbe írja le, bal oldali ágát az  $\mathbf{s}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{s}(t) = (-a \cdot \operatorname{ch} t, a \cdot \operatorname{sh} t)$

görbe írja le, ahol  $a$  egy tetszőleges, pozitív valós szám. Ezek négyzete rendre az

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^2(t) &= \left( a^2 \cdot (\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t), a^2 \cdot 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \right) = \left( a^2, a^2 \cdot \operatorname{sh}(2t) \right), \\ \mathbf{s}^2(t) &= \left( a^2 \cdot (\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t), -a^2 \cdot 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \right) = \left( a^2, -a^2 \cdot \operatorname{sh}(2t) \right)\end{aligned}$$

görbe. Mivel a szinusz hiperbolikus függvény értékkészlete a valós számok halmaza, a négyzetreemelés eredményéül kapott görbe mindkét esetben megegyezik az  $(a^2, 0)$  ponton áthaladó,  $y$ -tengellyel párhuzamos egyenessel. A 9-es állítás bizonyításában leírt gondolatmenet felhasználásával bármilyen állású, origó középpontú derékszögű hiperbolára igazoljuk az állítást: a kanonikus helyzetű hiperbolának az origó körüli, bármilyen  $\varphi$  szöggel vett elforgatásakor a képe  $2\varphi$  szöggel fordul el az origó körül, azaz a kép továbbra is origón át nem menő egyenes marad.  $\square$

**11. Állítás.** *A négyzetreemelés szögtartó, pontosabban: ha két görbe egy az origótól különböző pontban metszi egymást, akkor a négyzetreemeléssel kapott két görbe ugyanakkora szögben metszi egymást.*

**Bizonyítás.** Legyen  $f$  a síkot önmagára képező négyzetreemelés-függvény:  $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ . Mivel  $f$  egy vektor-vektor leképezés, a deriváltja az

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

mátrix.

Legyen  $t$  a paraméter, és legyen  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$  egy mindenhol differenciálható görbe. Ennek a négyzete az  $\mathbf{r}^2(t) = (f \circ \mathbf{r})(t) = (x^2(t) - y^2(t), 2x(t)y(t))$  görbe. Az  $\mathbf{r}(t)$  görbe  $\mathbf{r}(t_0)$  pontbeli – azaz a  $t = t_0$  helyen vett – érintőjének irányvektora az  $\mathbf{r}'(t_0)$  vektor. Tegyük fel, hogy a görbe reguláris  $t_0$ -ban, azaz  $\mathbf{r}'(t_0)$  nem a nullvektor.

Az  $\mathbf{r}(t)$  görbe négyzete érintőinek irányvektorait az

$$(\mathbf{r}^2)'(t) = (f \circ \mathbf{r})'(t) = (f' \circ \mathbf{r})(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} 2x(t) & -2y(t) \\ 2y(t) & 2x(t) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{r}'(t)$$

deriváltfüggvényből kapjuk: a görbe  $\mathbf{r}(t_0)$  pontjának négyzetén áthaladó érintő irányvektora az

$$(\mathbf{r}^2)'(t_0) = (f \circ \mathbf{r})'(t_0) = \begin{pmatrix} 2x(t_0) & -2y(t_0) \\ 2y(t_0) & 2x(t_0) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{r}'(t_0) \quad (35)$$

vektor.

Legyenek  $\mathbf{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$  és  $\mathbf{r}_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$  olyan paraméterezett sima görbék, amelyek metszik egymást az origótól különböző  $\mathbf{r}_1(t_0) = \mathbf{r}_2(t_0)$  pontban, továbbá tegyük

fel, hogy a görbék regulárisak  $t_0$ -ban. Ekkor

$$(x_1(t_0), y_1(t_0)) = (x_2(t_0), y_2(t_0)),$$

azaz

$$x_1(t_0) = x_2(t_0), \quad y_1(t_0) = y_2(t_0). \quad (36)$$

Az  $\mathbf{r}_1$  és  $\mathbf{r}_2$  görbék szögén a metszéspontjukon áthaladó érintők szögét értjük, amely megegyezik az érintők irányvektorainak a szögével – vagy az ezt a szöveget  $2\pi$ -re kiegészítő szöggel, ha előbbi nagyobb lenne  $\pi$ -nél. Azaz a görbék szöge egyenlő az  $\mathbf{r}'_1(t_0)$  és  $\mathbf{r}'_2(t_0)$  vektorok szögével – vagy az ezt  $2\pi$ -re kiegészítő szöggel.

Ha az  $\mathbf{r}_1$  és  $\mathbf{r}_2$  görbék metszik egymást az  $\mathbf{r}_1(t_0) = \mathbf{r}_2(t_0)$  pontban, akkor négyzeteik metszik egymást az  $\mathbf{r}_1^2(t_0) = \mathbf{r}_2^2(t_0)$  pontban. Négyzeteik metszéspontjában a szögük szintén az érintők irányvektorának szögéből származik, amely vektorokat a (35)-ös egyenlőség alapján kapjuk:

$$(\mathbf{r}_1^2)'(t_0) = \begin{pmatrix} 2x_1(t_0) & -2y_1(t_0) \\ 2y_1(t_0) & 2x_1(t_0) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{r}'_1(t_0), \quad (37)$$

$$(\mathbf{r}_2^2)'(t_0) = \begin{pmatrix} 2x_2(t_0) & -2y_2(t_0) \\ 2y_2(t_0) & 2x_2(t_0) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{r}'_2(t_0).$$

Az itt szereplő mátrixok a (36)-os összefüggések miatt egyenlők. Emiatt ezek a mátrixok ugyanazt a forgatva nyújtást jelentik mindkét érintő-irányvektor esetén, továbbá ez a transzformáció csak  $t_0$ -tól függ. Mivel a négyzetreemelésnél az eredeti érintő-irányvektorok ugyanazon a forgatva nyújtáson esnek át, a szögük változatlan marad, ezért a görbék szöge is változatlan marad. Ha a metszéspont az origó lenne, a mátrix a nullmátrix lenne, és az érintő-irányvektorra a nullvektort kapnák. Ez azt jelentené, hogy a görbe itt nem reguláris, és a metszéspontjukban nem reguláris görbéknek (az érintők híján) nem tudunk metszési szöget tulajdonítani.  $\square$

### 8.3. Négyzetgyökvonás

Értelmezhetjük komplex síkbeli ponthalmazok négyzetgyökét is:

**Definíció.** A  $\mathcal{H}$  halmaz négyzetgyöke azokból a pontokból áll, amelyeknek a négyzete  $\mathcal{H}$ -ban van.

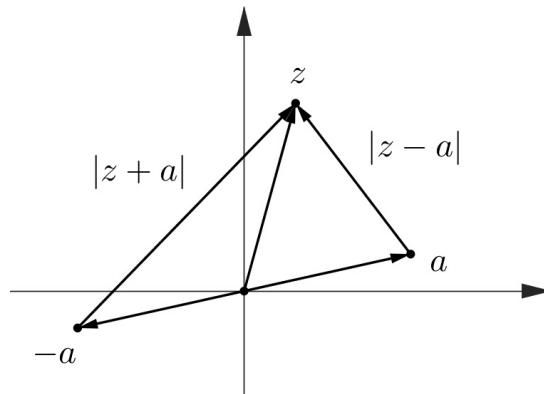
#### 12. Állítás.

- (I.) A Cassini-görbék pontosan a nem origó középpontú körök négyzetgyökei.
- (II.) Aszerint kapunk  $c > a$  típusú,  $c < a$  típusú Cassini-görbét, illetve lemniszkátát, hogy az origó a körnek a belsejében, a külsejében, vagy a körvonalon van.

(III.) A rögzített  $(-a, 0)$ ,  $(a, 0)$  fókuszokkal megadott Cassini-görbék seregét az  $(a^2, 0)$  középpontú koncentrikus körök seregéből kapjuk négyzetgyökvonással. Ezek közül pontosan a  $c^2$  sugarú kör négyzetgyöke lesz a  $c^2$  paraméterű Cassini-görbe.

**Bizonyítás.** Legyen  $c$  pozitív valós szám, és a komplex számsíkon helyezkedjen el úgy a  $c^2$  paraméterű Cassini-görbe, hogy a fókuszpontjai az  $a$  és  $-a$  komplex számok legyenek. Ekkor a Cassini-görbe középpontja az origó.

A  $z$  komplex szám pontosan akkor tartozik hozzá a Cassini-görbéhez, ha a fókuszoktól mért távolságainak szorzata egyenlő a paraméterrel, azaz  $|z + a| \cdot |z - a| = c^2$ .



21. ábra. A komplex számsík  $a$  és  $-a$  pontja mint a Cassini-görbe fókuszpontjai és a görbe  $z$  pontja.

A komplex számok és hosszuk szorzására vonatkozó tulajdonság alapján

$$|z + a| \cdot |z - a| = |(z + a) \cdot (z - a)| = |z^2 - a^2|,$$

vagyis

$$|z^2 - a^2| = c^2.$$

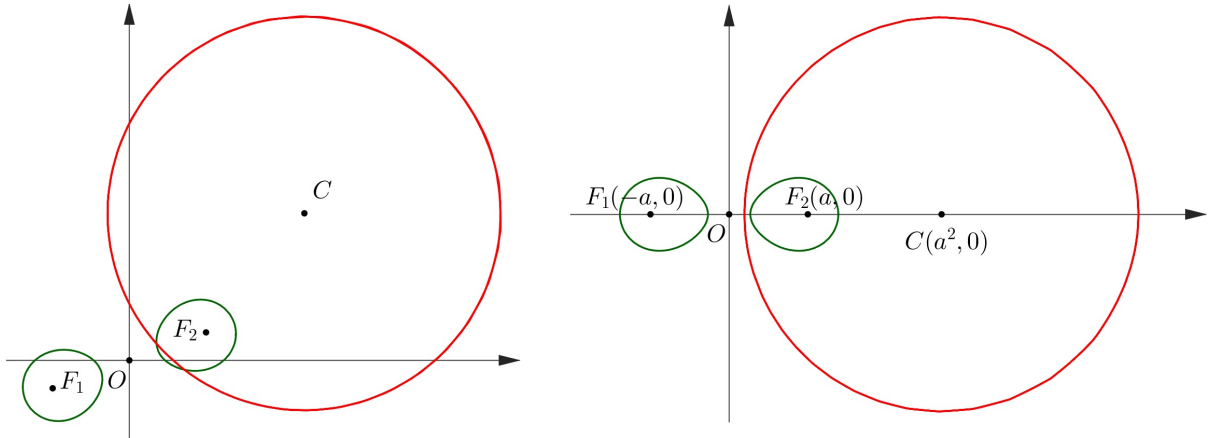
Ez azt jelenti, hogy  $z$  négyzete, azaz  $z^2$  az  $a^2$  ponttól  $c^2$  távolságra van, vagyis  $z^2$  rajta van az  $a^2$  középpontú,  $c^2$  sugarú körön. Mivel  $z$  a Cassini-görbe egy tetszőleges pontja, így a Cassini-görbe négyzete a körön van. És a kör bármely pontjával elvégezhető az imént leírt számolás visszafelé, azaz a kör minden pontja a Cassini-görbe valamely pontjának négyzete.

Továbbá bármilyen, nem origó középpontú kör négyzetgyöke Cassini-görbe: a kör sugara a Cassini-görbe  $c^2$  paramétere, a középpontjának  $a$  és  $-a$  négyzetgyökei pedig a Cassini-görbe fókuszpontjai.

Ha az origó a kör belsejében található, vagyis ha  $c^2 > |a^2| = |a|^2$ , akkor  $c > |a|$ . Tehát a Cassini-görbe összefüggő, önmagát nem metsző típusát kapjuk négyzetgyökként.

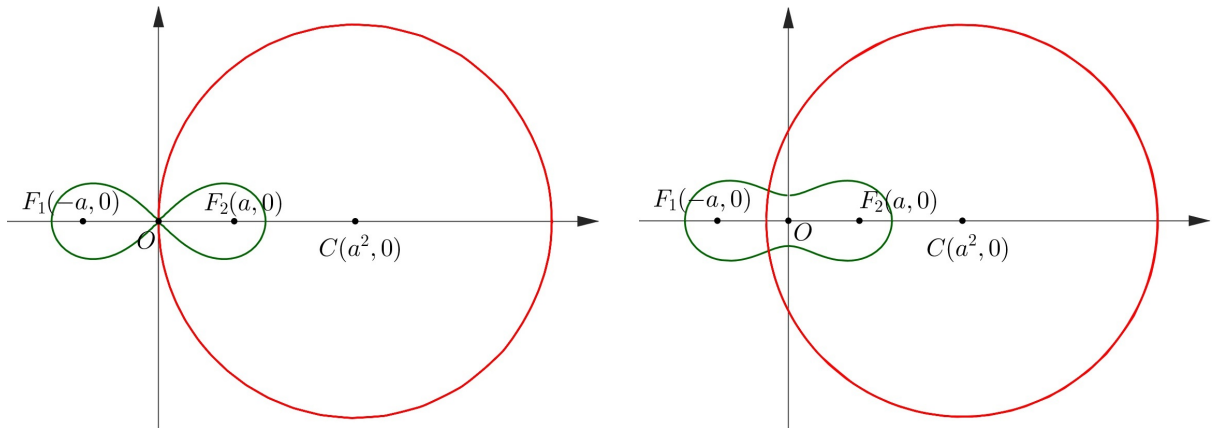
Ha az origó a körön kívül található, vagyis ha  $c^2 < |a^2| = |a|^2$ , akkor  $c < |a|$ . Tehát a Cassini-görbe nem összefüggő, két diszjunkt részből álló típusát kapjuk négyzetgyökként.





22. ábra. Kör (piros) és négyzetgyöke (zöld).

Ha az origó a körön van, vagyis ha  $c^2 = |a^2| = |a|^2$ , akkor  $c = |a|$ . Tehát a lemniszkátát kapjuk négyzetgyökként.



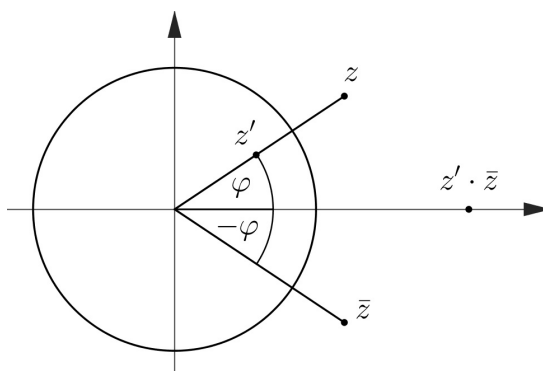
23. ábra. Kör (piros) és négyzetgyöke (zöld).

Ha a kör középpontja a komplex számsík valós tengelyén – azaz a valós számpárok síkján az  $x$ -tengelyen – helyezkedik el, akkor középpontjának koordinátái:  $(a^2, 0)$ , ahol  $a^2$  és  $a$  is valós számok. Ekkor a kör négyzetgyöke az a Cassini-görbe, amelynek paramétere egyenlő a kör  $c^2$  sugarával, fókuszpontjainak négyzete pedig egyenlő  $a^2$ -tel, vagyis a fókuszpontjai az  $(a, 0)$  és  $(-a, 0)$  pontok.  $\square$

## 9. Inverzió a komplex síkon

A komplex számokra vonatkozó ismereteink alapján először azt szeretnénk meghatározni, hogy a komplex számsík  $z$  pontjának mely komplex szám az origó középpontú,  $r$  sugarú körre vonatkozó inverze. Ezt követően – a Cassini-görbék négyzetéről leírtak felhasználásával – megkeressük az összes Cassini-görbe inverzét a görbék középpontja körüli körre vonatkozóan, azaz tulajdonképpen a 7. fejezetet folytatjuk új módszerek alkalmazásával.

**13. Állítás.** *Legyen a sík a komplex számsík, legyen  $r$  egy pozitív valós szám. Az origó középpontú,  $r$  sugarú körre vonatkozó inverzió a  $z$  komplex számhoz a  $z' = \frac{r^2}{\bar{z}}$  komplex számot rendeli képként.*



24. ábra. A  $z$  komplex szám inverze, konjugáltja, inverzének és konjugáltjának szorzata.

**Bizonyítás.** Az inverzió definíciója alapján  $z$  és  $z'$  ugyanazon az origóból induló félegyenesen van. Tehát  $z$  és  $z'$  szöge megegyezik,  $\arg z = \arg z' = \varphi$ . Szintén a definíció alapján írhatjuk, hogy  $|z| \cdot |z'| = r^2$ . Innen  $|z| \cdot |z'| = |\bar{z}| \cdot |z'|$ , hiszen a komplex számnak és a konjugáltjának megegyezik a hossza. A korábban már alkalmazott tulajdonság miatt  $|\bar{z}| \cdot |z'| = |\bar{z} \cdot z'|$ . Mivel a komplex számnak és konjugáltjának szöge egymás ellentettje, ezért  $\arg z' = \arg z = -\arg \bar{z}$ . Ebből az következik, hogy a  $\bar{z} \cdot z'$  szorzat egy olyan (komplex) szám, amelynek szöge 0 – hiszen szorzásnál a szög összeadódik –, vagyis a  $\bar{z} \cdot z'$  szorzat egy pozitív valós szám. Ez a szám megegyezik  $|\bar{z} \cdot z'|$ -vel, azaz  $|\bar{z} \cdot z'| = \bar{z} \cdot z'$ . A gondolatmenet elejét és végét összefoglalva:  $r^2 = \bar{z} \cdot z'$ . Innen  $z' = \frac{r^2}{\bar{z}}$ .  $\square$

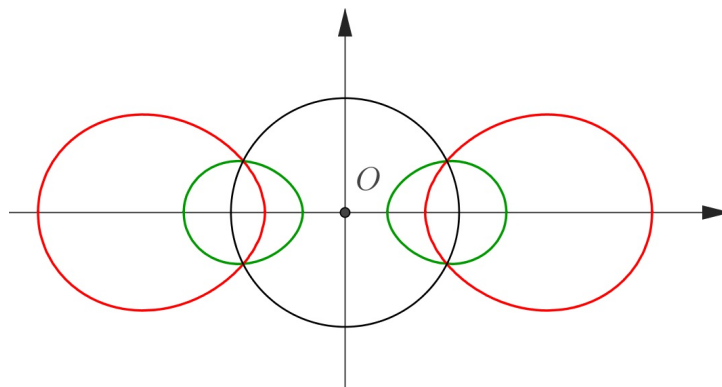
**14. Következmény.** *A négyzetreemelés és az inverzió sorrendje felcserélhető, ha az inverzió körének sugara  $r = 1$ .*

**Bizonyítás.**  $(z^2)' = \frac{1}{\bar{z}^2} = \frac{1}{\bar{z}^2}$ , és  $(z')^2 = \left(\frac{1}{\bar{z}}\right)^2 = \frac{1}{\bar{z}^2}$ .  $\square$

### 9.1. Cassini-görbék és az inverzió

Meghatározzuk a kanonikus helyzetű Cassini-görbe képét origó középpontú inverzióval.

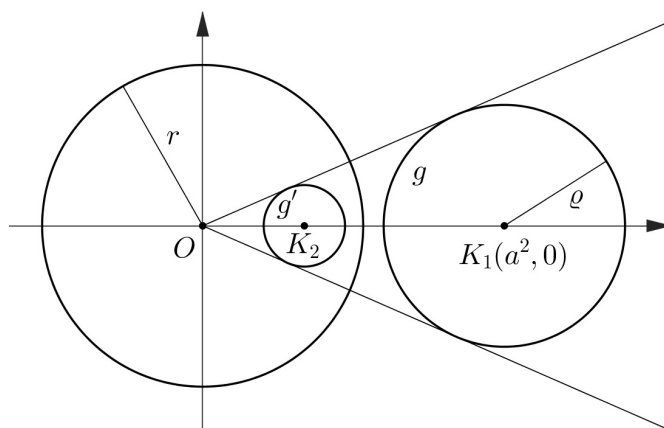
**15. Állítás.** Ha a kanonikus helyzetű Cassini-görbe  $c < a$  típusú, akkor az inverze középpontosan hasonló hozzá.



25. ábra.  $c < a$  típusú Cassini-görbe (zöld) és inverze (piros).

**Bizonyítás.** A bizonyítás során felhasználjuk a 14-es következményt: az origó középpontú,  $r = 1$  sugarú körre vonatkozóan végezzük el az inverziót, ugyanis ekkor az inverzió és a négyzetreemelés sorrendje felcserélhető. Az inverzió helyett először az alakzat négyzetét határozzuk meg, utána invertáljuk az így kapott alakzatot, majd vesszük ennek az alakzatnak négyzetgyökét. A felcserélhetőség miatt így ugyanazt a képet kapjuk végeredményül, amelyet csak az inverzió során kapnánk. Utána az eredményt általánosítjuk bármilyen origó középpontú körre mint az inverzió alapkörére.

A 12-es állítás alapján a  $c < a$  típusú Cassini-görbe négyzete olyan kör, amelynek az origó külső pontja, továbbá amelynek középpontja az  $x$ -tengely pozitív felén található. Ennek a körnek az origó középpontú,  $r = 1$  sugarú körre vonatkozó inverze olyan kör, amelynek az origó külső pontja, középpontja  $x$ -tengely pozitív felén található, továbbá az origóra mint centrumra vonatkozóan középpontosan hasonló hozzá.



26. ábra. A  $g$  kör és az origó középpontú,  $r$  sugarú körre vonatkozó  $g'$  inverze.

Így az inverz alakzatként kapott kör négyzetgyöke egy  $c < a$  típusú Cassini-görbe, amely kanonikus helyzetű a 12-es állítás alapján. Mivel az inverzió eredményül kapott kör

origó középpontú hasonlósággal is előállítható az eredeti körből, az inverzió megőrizte az invertált kör sugarának és középpontja origótól mért távolságának arányát. A Cassini-görbét hasonlóság erejéig meghatározza az  $a$  és  $c$  paramétereinek aránya. Mivel ez az arány megmaradt a transzformáció során, az eredeti és a végeredményül kapott Cassini-görbe középpontosan hasonló az origóra vonatkozóan.

Tudjuk az inverzióról, hogy ha az inverzió alapkörének a sugarát úgy változtatjuk, hogy a középpontja fix, az inverzió során kapott kép csak az eredetihez középpontosan hasonló alakzattá változik. Azaz bármilyen, nem csak  $r = 1$  sugarú körre vonatkozó inverzió esetén teljesül az állítás.  $\square$

**Megjegyzés.** Az előző bizonyítás utolsó bekezdése alapján láthatjuk, ha az inverzió körét megfelelően választjuk meg, akkor elérhető, hogy a végeredményként kapott Cassini-görbe megegyezzen az eredeti görbével: ehhez azt kell elérni, hogy az invertálandó kör az inverzió során önmagára képeződjön, hiszen így ugyanannak az alakzatnak kell venni a négyzetgyökét, amelyet négyzetreemeléssel állítottunk elő.

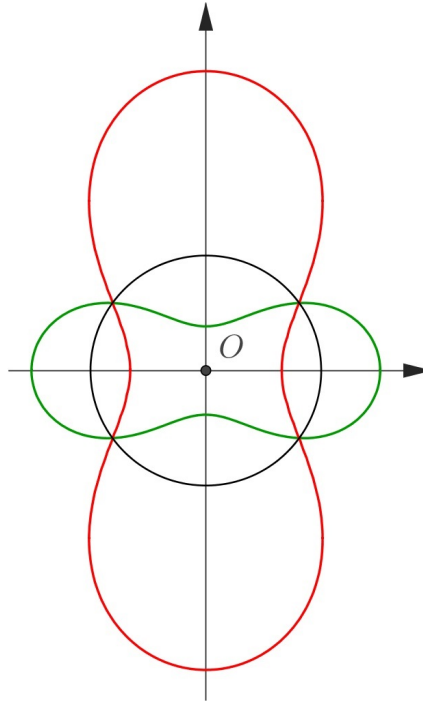
**16. Lemma.** *Legyen  $g$  egy olyan kör, amelynek  $K_1$  középpontja az  $x$ -tengely pozitív felének egy pontja, a sugara pedig  $\rho$ . Ennek a körnek az origó középpontú,  $r$  sugarú körre vonatkozó inverze olyan kör, amely az origóra vonatkozóan középpontosan hasonló hozzá, vagyis az inverz kör középpontja is az  $x$ -tengely pozitív felén található. A hasonlóság aránya  $\lambda = \frac{r^2}{h(O, g)}$ , ahol  $h(O, g)$  az origónak a  $g$  körre vonatkozó hatványa, és  $h(O, g) = OK_1^2 - \rho^2$ .*

Mivel esetünkben  $OK_1 = a^2$  és  $\rho = c^2$  – hiszen  $K_1$  az  $(a^2, 0)$  középpontú,  $c^2$  sugarú kör középpontja a 12-es állítás alapján –, ezért  $h(O, g) = a^4 - c^4$ . A kör képe abban az esetben önmaga az inverzió során, ha a hasonlóság aránya  $\lambda = 1$ , vagyis  $1 = \frac{r^2}{a^4 - c^4}$ . Azaz az  $r = \sqrt{a^4 - c^4}$  sugarú, origó középpontú körre vonatkozó inverzió során lesz a Cassini-görbe képe önmaga.

**17. Állítás.** *Ha a Cassini-görbe  $c > a$  típusú, akkor az origó körüli  $90^\circ$ -os forgatva nyújtás viszi az origó középpontú körre vonatkozó inverzébe.*

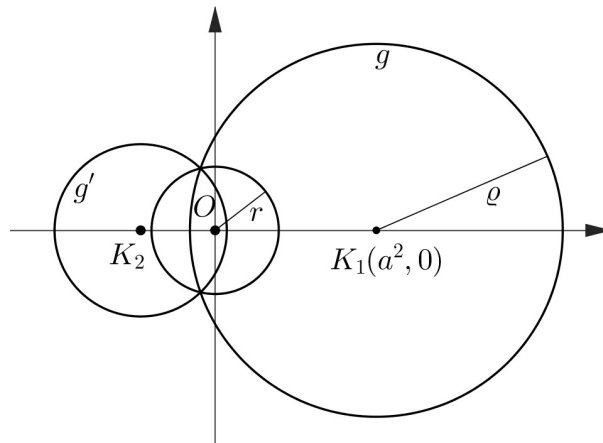
**Bizonyítás.** Ebben az esetben is a 15-ös állítás bizonyításánál leírt eljárást hajtjuk végre: az origó középpontú,  $r = 1$  sugarú kör mint inverziós alapkör esetét vizsgáljuk először, hiszen ekkor az inverzió a felcserélhetőség miatt elvégezhető egy négyzetreemelés-inverzió-négyzetgyökvonás sorozattal is. Ezt követően – szintén a 15-ös állítás bizonyításánál leírtak alapján – bármilyen sugarú alapkörre általánosítjuk az állítást.

A 12-es állítás alapján a  $c > a$  típusú Cassini-görbe négyzete olyan kör, amelynek az origó belső pontja, továbbá amelynek középpontja az  $x$ -tengely pozitív felén található. Ennek



27. ábra.  $c > a$  típusú Cassini-görbe (zöld) és inverze (piros).

a körnek az origó középpontú,  $r = 1$  sugarú körre vonatkozó inverze olyan kör, amelynek középpontja  $x$ -tengely negatív felén található – hiszen itt az origónak a körre vonatkozó hatványa negatív. Az inverz alakzatként kapott körnek az origó belső pontja, így ennek a körnek a négyzetgyöke egy  $c > a$  típusú Cassini-görbe a 12-es állítás alapján.



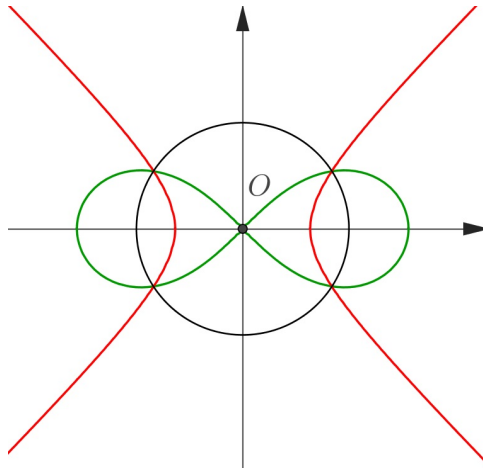
28. ábra. A  $g$  kör és az origó középpontú,  $r$  sugarú körre vonatkozó  $g'$  inverze.

Mivel olyan körnek vettük a négyzetgyét, amely az origó körüli  $180^\circ$ -os elforgatottja egy olyan körnek, amelynek négyzetgyökeként kapott Cassini-görbe tengelye az  $x$ -tengely lenne, ezért a körünk négyzetgyöke az origó körüli  $90^\circ$ -os elforgatottja egy ilyen Cassini-görbének, vagyis egy függőleges tengelyű Cassini-görbe.

Az inverzió alapköre sugarának változtatása csak egy, a korábbi képhez középpontosan hasonló képet hoz létre, ezért bármilyen, origó középpontú kör mint inverziós alapkör esetén igaz az állítás.  $\square$

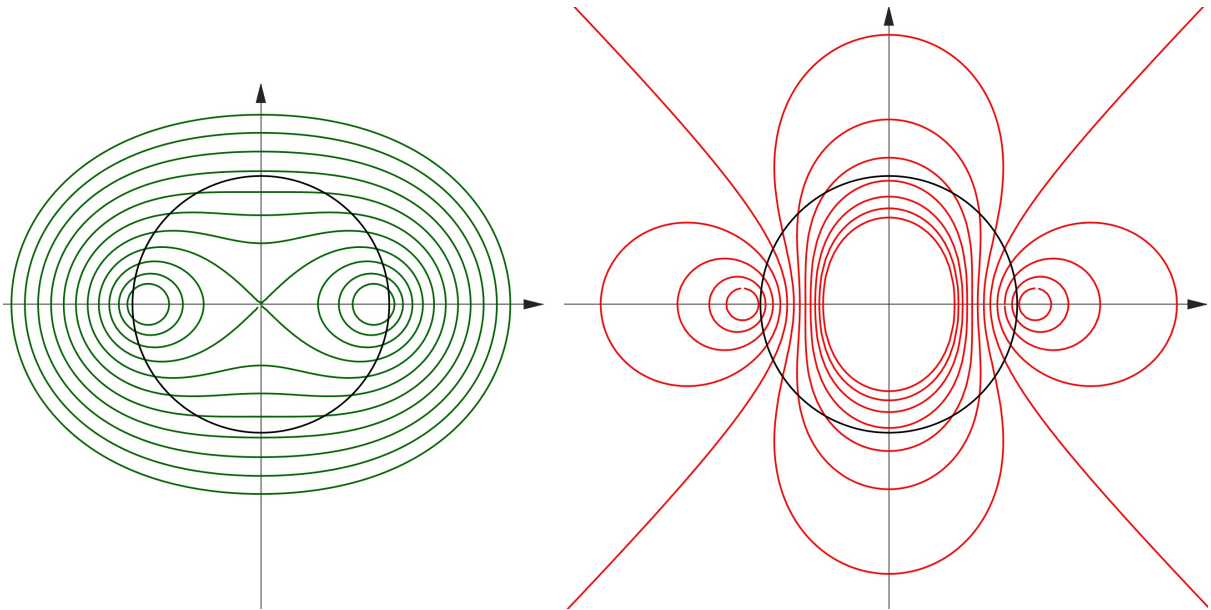
**Megjegyzés.** Ha azt akarjuk elérni, hogy az inverzió végeredményeként kapott Cassini-görbét elő tudjuk állítani csak egy origó körüli forgatással, és ne történjen nyújtás, az inverzió körének sugarát úgy kell megválasztani, hogy az inverzió során az eredeti és a képként kapott kör hasonlóságának aránya  $\lambda = -1$  legyen. Azaz – a korábbi számolást alkalmazva – az inverzió körének sugarát  $r = \sqrt{c^4 - a^4}$ -nek kell választani.

**Megjegyzés.** Korábban már láttuk, hogy a kanonikus helyzetű lemniszkáta – azaz a  $c = a$  típusú Cassini-görbe – inverze egy kanonikus helyzetű derékszögű hiperbola. Ennek az eredménynek egy harmadik fajta bizonyítását kaphatjuk, ha a 15. és 17. állítások bizonyításának gondolatmenetét alkalmazzuk erre az esetre.



29. ábra. Lemniszkáta, azaz  $c = a$  típusú Cassini-görbe (zöld) és az origó középpontú körre vonatkozó inverze.

**Megjegyzés.** Ha egyetlen, origó középpontú körre vonatkozó inverziót alkalmazunk egyszerre az összes, rögzített  $(-a, 0)$ ,  $(a, 0)$  fókuszpontú Cassini-görbére, akkor is Cassini-görbék seregét és egy derékszögű hiperbolát kapunk, amelyek belepik a síkot. Ez látható a 30. ábrán.



30. ábra. Rögzített,  $(-a, 0)$ ,  $(a, 0)$  fókuszú Cassini-görbék (zöld) és inverzük (piros).

## 10. Derékszögű hiperbolák és ortogonális trajektóriák

Fizikából ismerjük, [7] hogy az elektromosan töltött testek elektrosztatikus terét erővonalakkal lehet szemléltetni. Az elektromos erővonalak olyan görbék, amelyek pontjaiban az érintő megmutatja az elektromos térerősség irányát, az erővonalak sűrűsége pedig kifejezi a térerősség nagyságát. Ponttöltés elektromos erővonalai olyan egyenessereget alkotnak, amelynek minden egyede áthalad a ponttöltésen. Ha egy ponttöltés elektromos terében úgy mozgatunk egy másik, elektromos töltéssel rendelkező pontszerű testet, hogy a sebessége végig merőleges az erővonalakra – azaz a test pályája merőlegesen metszi az erővonalakat – akkor fizikai értelemben nem történik munkavégzés a folyamat során. Az ilyen pályákat ekvipotenciális felületeknek – síkban ekvipotenciális görbéknek – nevezzük.

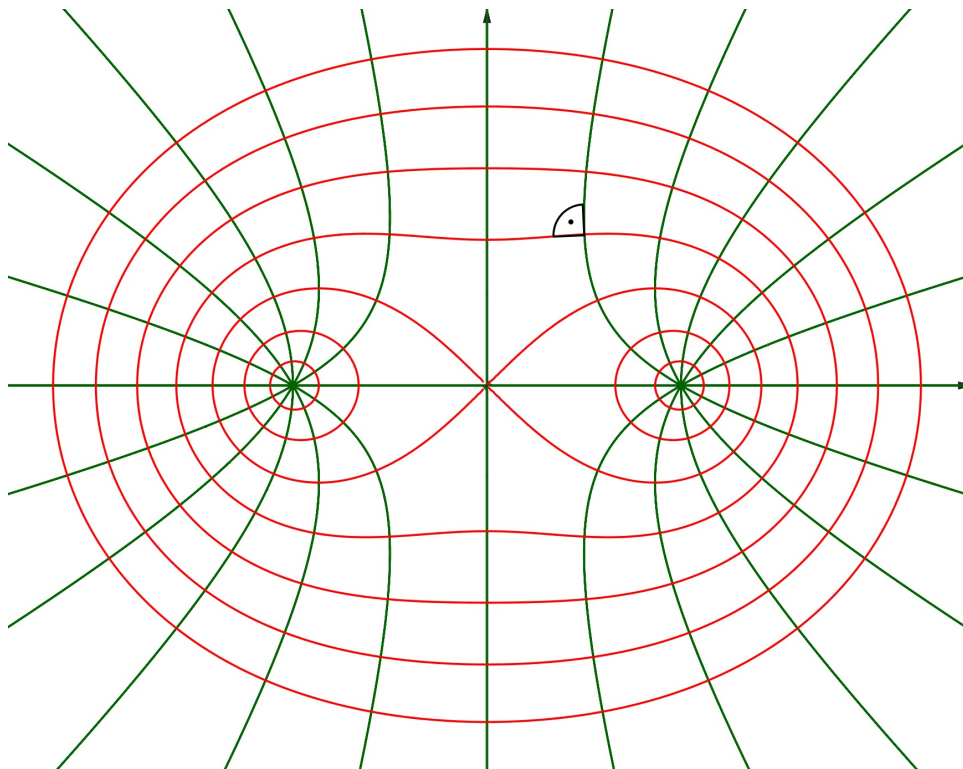
A sík egy meghatározott pontján keresztülhaladó egyenesseregre – mint erővonalakra – vonatkozóan ezek az ekvipotenciális görbék a ponthoz mint középponthoz tartozó koncentrikus körök. Ezek a körök mind merőlegesek a ponton áthaladó összes egyenesre. Matematikai megnevezéssel ezek a körök az egyenessereg ortogonális trajektóriái. Ez fordítva is érvényes: a koncentrikus körsereg ortogonális trajektóriái a körök közös középpontján áthaladó egyenesek.

Most azzal foglalkozunk, hogy a közös fókuszpontú Cassini-görbék milyen görbeseregnek az ortogonális trajektóriái, majd az így felfedezett, valamint a már korábban is bemutatott görbék további tulajdonságait vizsgáljuk.

**Definíció.** Az olyan görbét, amelyek egy görbesereg minden egyedét merőlegesen metszik, ortogonális trajektóriáknak nevezzük.

**18. Állítás.** Tekintsük a koordinátasíkon az összes olyan derékszögű hiperbolát, amelynek az origó a középpontja, és áthalad a  $(-a, 0)$  és  $(a, 0)$  pontokon. A  $(-a, 0)$ ,  $(a, 0)$  fókuszpontú Cassini-görbék ezeket a hiperbolákat mind merőlegesen metszik.

**Megjegyzés.** Ez azt jelenti, hogy a Cassini-görbék ennek a hiperbolaseregnek az ortogonális trajektóriái.



31. ábra. Rögzített pontokon áthaladó derékszögű hiperbolák (zöld) és ortogonális trajektóriáik (piros).

**Bizonyítás.** A 10-es állítás alapján ezeknek a hiperboláknak a négyzete egyenes. Mivel minden hiperbola átmegy a  $(-a, 0)$  és  $(a, 0)$  ponton, a négyzetük átmegy e pontok négyzetén, azaz az  $(a^2, 0)$  ponton.

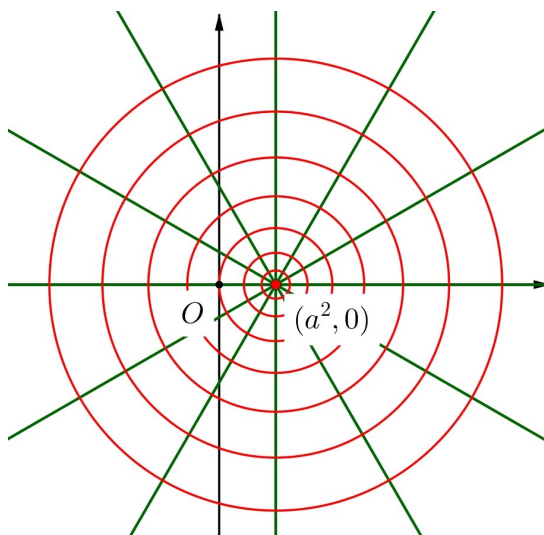
A 12-es állítás alapján a  $(-a, 0)$ ,  $(a, 0)$  fókuszpontú Cassini-görbék négyzetei  $(a^2, 0)$  középpontú körök. Az  $(a^2, 0)$  ponton áthaladó egyenesek mind merőlegesek az  $(a^2, 0)$  középpontú körökre, hiszen ezek a körök átmérőinek egyenesei.

Mivel az alakzatok négyzetei merőlegesek egymásra, és a négyzetreemelés szögtartó, az eredeti alakzatok is merőlegesek egymásra.

□

**Megjegyzés.** A vizsgált hiperbolasereghez hozzásoroljuk a tengelykeresztet is. (Ez is ugyanúgy kúpszelet, a hiperbola egy elfajuló változatának tekinthető.) Ezzel a görbesereg belepíti az egész síkot. A tengelykeresztet is – az origó kivételével – merőlegesen metszik

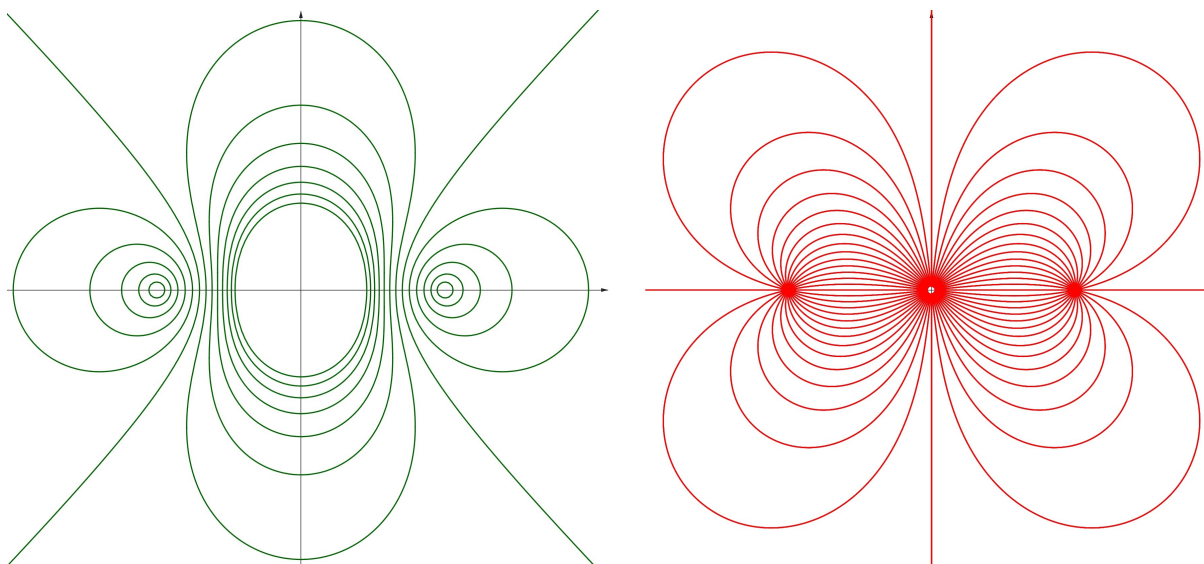




32. ábra. A hiperbolák (zöld) és a Cassini-görbék (piros) négyzetei.

a Cassini-görbék. A sík minden pontjára igaz – az origó és a fókuszpontok kivételével –, hogy ott pontosan egy hiperbola és egy Cassini-görbe metszi egymást, és ezek merőlegesek egymásra.

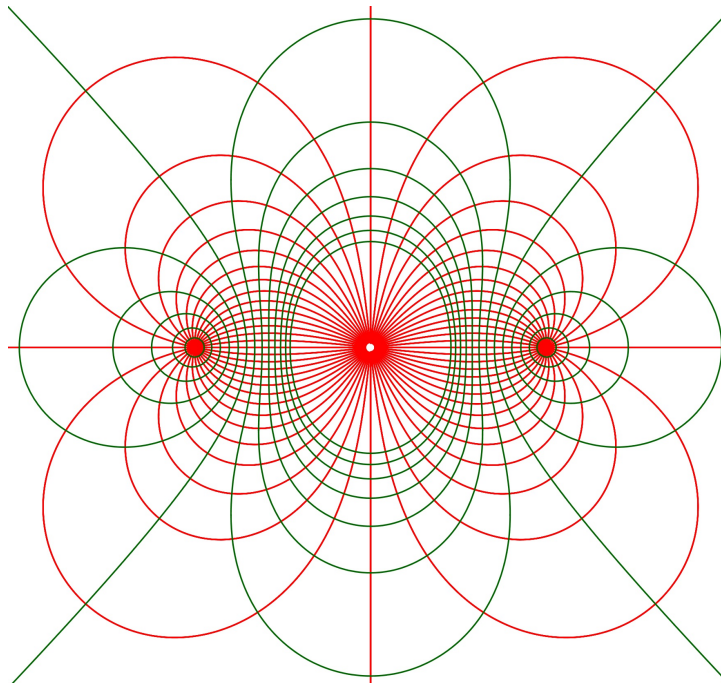
**19. Állítás.** A 9.1-es pontban legyártott Cassini-görbesereg ortogonális trajektóriái mind lemniszkáták – a tengelykereszt mellett.



33. ábra. Rögzített fókuszú Cassini-görbék inverzei (zöld) és ezek ortogonális trajektóriái, amelyek a Cassini-görbék fókuszain áthaladó derékszögű hiperbolák inverzei és a tengelykereszt (piros).

**Bizonyítás.** Alkalmazzunk origó középpontú,  $r = 1$  sugarú körre vonatkozó inverziót a 18-as állításban szereplő,  $(-a, 0)$  és  $(a, 0)$  pontokon áthaladó, origó középpontú derékszögű hiperbolákra és a tengelykeresztre, valamint az  $(-a, 0)$ ,  $(a, 0)$  fókuszpontú Cassini-

görbékre. A hiperbolák inverzei lemniszkáták, a tengelykereszt inverze a tengelykereszt, a Cassini-görbék inverzei pedig a 9.1-es pontban legyártott Cassini-görbesereg és egy derékszögű hiperbola. Mivel az eredeti görbék a 18-as állítás alapján merőlegesek, és az inverzió szögtartó, az inverzióval előálló képek is merőlegesek.



34. ábra. Rögzített fókuszú Cassini-görbék inverzei (zöld) és ezek ortogonális trajektóriái (piros).

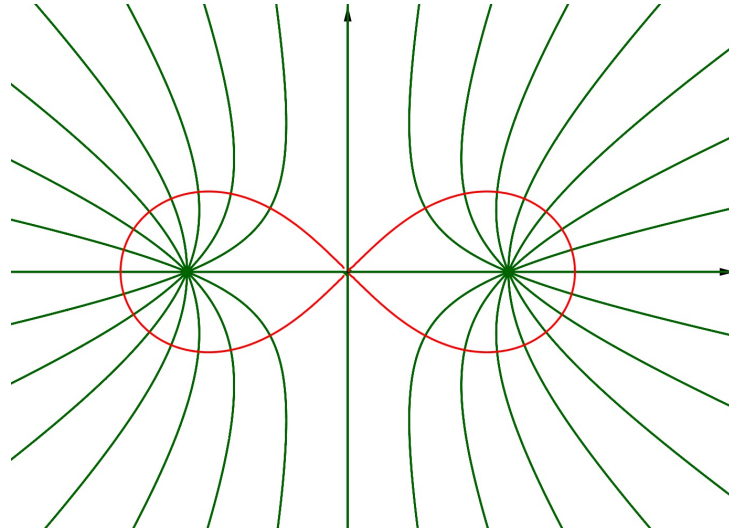
□

**20. Állítás.** A  $(-a, 0)$  és  $(a, 0)$  pontokon áthaladó, origó középpontú derékszögű hiperbolák fókuszpontjai pontosan a  $(-a, 0)$ ,  $(a, 0)$  fókuszú lemniszkáta origótól különböző pontjai.

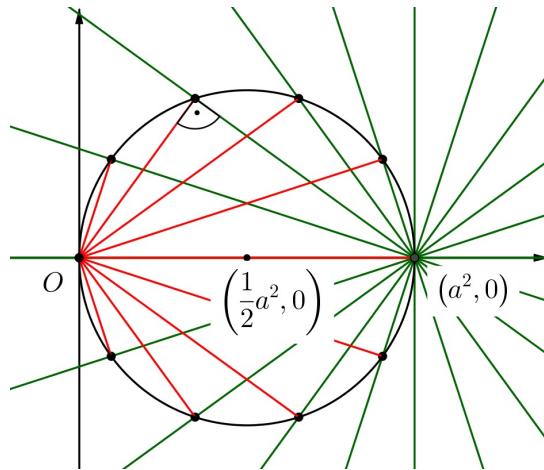
**Bizonyítás.** Először a hiperbolák csúcspontjait vizsgáljuk meg. Mivel minden hiperbola középpontja az origó, a hiperbolák csúcspontjai az origóhoz legközelebb lévő pontjai a hiperboláknak. A hiperbolák négyzetének is az origóhoz legközelebbi pontjai lesznek a csúcspontjaik négyzetei, mert a pont négyzetre emelésénél a pont origótól mért távolsága is a négyzetére változik, a távolság nemnegatív, és a négyzetreemelés-függvény a pozitív valós számokon szigorúan monoton nő.

Mivel egy ponthoz a rajta át nem haladó egyenesnek a legközelebbi pontja az egyenes és a pontból az egyenesre bocsátott merőleges metszéspontja, továbbá mivel a hiperbolák négyzete egyenes, a hiperbolák csúcspontjainak négyzete ezeknek az egyeneseknek az origóra vonatkozó talppontja.

A  $(-a, 0)$  és  $(a, 0)$  pontokon áthaladó, origó középpontú derékszögű hiperbolák négyzetei az  $(a^2, 0)$  ponton áthaladó egyenesek. Ezeknek az egyeneseknek az origóhoz legközelebbi



35. ábra. Rögzített pontokon áthaladó derékszögű hiperbolák (zöld) és fókuszaik mértani helye (piros).



36. ábra. Hiperbolák négyzetei (zöld) és csúcspontjaik négyzetének mértani helye.

pontjait úgy kapjuk meg, hogy mindegyikre merőlegest állítunk az origóból, és a metszéspontok lesznek a keresett pontok. Ezekből a metszéspontokból tehát az origó és az  $(a^2, 0)$  pontok mint végpontok által meghatározott szakasz derékszögben látszik, azaz – a Thálész-tétel megfordítása értelmében – ezek a pontok rajta vannak az origó és az  $(a^2, 0)$  pontok mint végpontok által meghatározott szakaszhoz mint átmérőhöz tartozó körön. Ennek a körnek a középpontja az  $(\frac{1}{2}a^2, 0)$  pont.

A 12-es állítás alapján ennek a körnek a gyöke  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}a, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}a, 0)$  fókuszú lemniszkáta. Vagyis a hiperbolák csúcsai ennek a lemniszkátának a pontjai.

Az origó középpontú, derékszögű hiperbolánál úgy kapjuk meg a fókuszt a csúcspontból, hogy a csúcspontot az origóból mint középpontból  $\lambda = \sqrt{2}$  aránnyal középpontosan

nagyítjuk, hiszen ebben az esetben a hiperbola fókuszának és középpontjának távolsága egyenlő a félnagy tengely hosszának  $\sqrt{2}$ -szörösével.

Tehát ha a csúcspontok a  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}a, 0\right)$ ,  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a, 0\right)$  fókuszú lemniszkátát futják be, akkor a fókuszok ennek az origóból  $\sqrt{2}$ -szörösre nagyítottját, azaz a  $(-a, 0)$ ,  $(a, 0)$  fókuszú lemniszkátát futják be.

Az  $(a^2, 0)$  ponton keresztül húzható összes egyenes létrejön – az  $x$  tengely kivételével –, amikor a hiperbolákat négyzetre emeljük, hiszen az egyenes és a hiperbola között kölcsönösen egyértelmű a megfeleltetés, és a megadott pontokon áthaladó összes hiperbolát számításba vettük. Vagyis a lemniszkáta minden origótól különböző pontja valamelyik hiperbola fókuszpontja.  $\square$

## 11. Lemniskáta mint körök burkolója

Képzeld el azt, ahogyan a vízszintes úton végiggurul az autónak egy kereke. A kerék modellezhető egy kör segítségével, és ez a kör minden időpillanatban más helyen van. A mozgás során a mozgó körből egy görbesereg – körsereg – keletkezett ilyen módon. A körsereget alulról és felülről is határolja egy-egy egyenes: alulról az út, felülről egy úttal párhuzamos, az úttól a körök átmérőjével megegyező távolságra lévő egyenes érinti a körsereg mindegyik egyedét. Azt mondjuk, hogy a két egyenes ekkor a körsereg burkológörbéje.

Középiskolai fizikatanulmányainkból emlékezhetünk a hullámok terjedését leíró Huygens-elvre [10]. (Huygens nevével és felfedezéseinek egyikével a bevezetőben már találkozhatunk.) Ez az elv azt mondja ki, hogy egy hullámfront minden pontjából elemi (síkban kör-, térben gömb)hullámok indulnak ki, és a hullámfront egy későbbi állapotát ezeknek az elemi (kör- vagy gömb)hullámoknak a burkolója adja meg. Egy egyszerű példán keresztül ezt könnyen el is tudjuk képzelni: legyen a hullámfront egy egyenes. Az elv alapján ennek az egyenesnek minden pontjából körhullámok indulnak ki. Ezeknek a körhullámoknak megegyezik a terjedési sebessége, ami azt jelenti, hogy a körök sugara ugyanolyan mértékben változik az időben. Az új hullámfront ennek a körseregnek a burkológörbéje, vagyis az eredeti hullámfronttal párhuzamos egyenes.

Most szintén körsereg burkológörbét vizsgáljuk, azonban a körök középpontjai most egy hiperbolán helyezkednek el, és a körök átmennek a hiperbola középpontján.

**Definíció.** Egy egyenessereg burkológörbéje az a görbe, amelynek érintői az egyenessereg egyenesei.

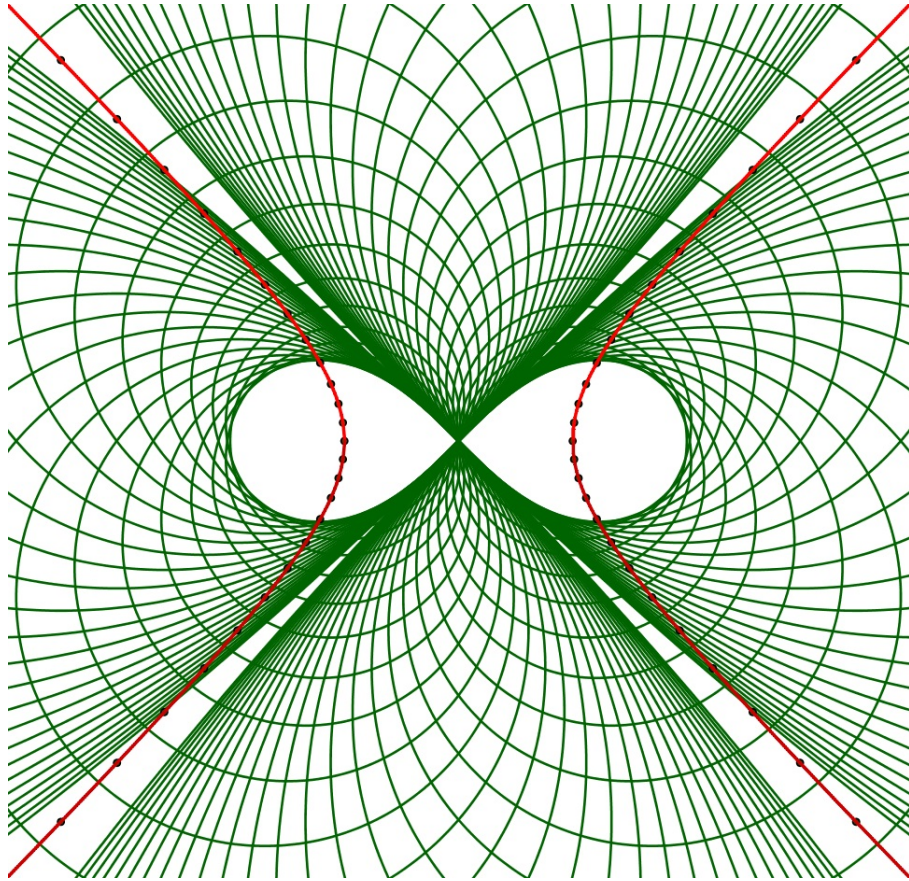
**Definíció.** Görbesereg burkológörbéje az a görbe, amely érinti a görbesereg mindegyik tagját, azaz az érintési pontban a burkoló érintője és a görbe adott példányának érintője megegyezik.

**21. Állítás.** *A lemniskáta előáll az olyan körök burkolójaként, amelyek középpontja a derékszögű hiperbolán van, és áthaladnak a hiperbola középpontján.*

**Bizonyítás.** A definíció alapján következik, hogy derékszögű hiperbola előáll mint a saját érintőiből álló egyenessereg burkológörbéje.

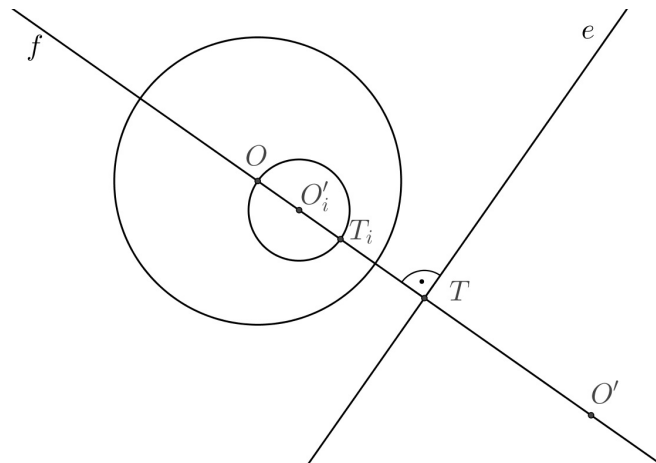
Origó középpontú körre vonatkozó inverziót alkalmazuk a hiperbola érintőiből álló egyenesseregnek minden tagjára. Mivel ezek az egyenesek nem haladnak át az origón, képeik origón áthaladó körök lesznek.

Válasszunk ki egy ilyen érintőt. Legyen ez az érintő az  $e$  egyenes, és legyen ennek az érintőnek az origóra vonatkozó talppontja a  $T$  pont, azaz legyen  $T$  az origón áthaladó,



37. ábra. Lemniskáta mint körök burkolója.

az érintőre merőleges  $f$  egyenesnek és az érintőnek a metszéspontja. Legyen  $T_i$  pont a  $T$  pont inverze, és jelöljük az origót  $O$ -val. Az érintő inverze az  $OT_i$  szakaszhoz mint átmérőhöz tartozó kör (az  $O$  pont kivételével).



38. ábra. Hiperbola érintője, ennek origóra vonatkozó talppontja és inverzük.

Legyen az inverz alakzatként kapott kör középpontja  $O'_i$ . Legyen  $O'$  az  $O$  pont tengelyes tükörképe az érintőre mint tengelyre vonatkozóan. Az  $O, O'_i, T_i, T$  és  $O'$  pontok kollineárisak, az  $O$ -n áthaladó, az  $e$  érintőre merőleges  $f$  egyenes pontjai.

Mivel az  $O'$  pont kétszer olyan messze van az origótól, mint a  $T$  pont, ezért – az inverzió definíciója alapján – az inverze fele olyan messze van az origótól, mint a  $T$  pont inverze. A  $T$  pont inverze a  $T_i$  pont, így az  $O'$  pont inverze éppen az  $O'_i$  pont, azaz az érintő inverzeként előálló kör középpontja.

Vegyük az összes ilyen, a hiperbola érintőjének inverzeként előálló kört. A körök középpontjai által befutott görbe inverzióval áll elő a talpponti görbe kétszeres kinagyítottjából, azaz – az 5-ös állítás alapján – egy lemniszkáta kétszeres kinagyítottjából, amely szintén lemniszkáta. Mivel a lemniszkáta inverze hiperbola, ezért a körök középpontjai a hiperbolát futják be.

Az érintők burkolója a hiperbola, tehát az érintők inverzeinek – azaz a köröknek – a burkolója a hiperbola inverze, azaz a lemniszkáta.  $\square$

## 12. Módszertani lehetőségek

### Óraterv I.

**Tantárgy:** matematika

**Évfolyam:** 12. osztály

**Osztály típusa:** matematika fakultáció / matematika tagozat / szakkör

**Témakör:** koordinátageometria

**Tananyag:** Cassini-görbék bevezetése

**Az óra típusa:** új ismeretet átadó óra

**Az óra célja:** a Cassini-görbék definiálása, egyenletük levezetése, a görbék ábrázolása GeoGebra programmal

#### Fejlesztendő kompetenciák:

- Matematikai, gondolkodási kompetencia (Matematikai gondolkodás és érvelés, a matematikai gondolkodásmód elsajátítása.)
- Digitális kompetencia (A megfelelő segédeszközök használata összetett információk létrehozása, bemutatása vagy értelmezése céljából.)
- Tanulás kompetenciái (Kitartó tanulás, saját tanulás megszervezése egyénileg és csoportban, az idővel és az információval való hatékony gazdálkodás.)

#### Az óra előzménye:

Az ezt megelőző alkalm(ak)on az ellipszis és a hiperbola tárgyalása történik, ezeken keresztül juthatunk a Cassini-görbékhez úgy, hogy azok bevezetése természetes legyen. Ha nem akarjuk tartani a szokásos sorrendet, akkor az ellipszis bevezetése után közvetlenül rátérhetünk a Cassini-görbékre: a hiperbola ismerete nem szükséges, az ellipszissel analóg módon be tudjuk vezetni a Cassini-görbét. Azért is célszerű az ellipszissel összehasonlítani a Cassini-görbét, mert maga Cassini is az ellipszisek és a később róla elnevezett görbék közötti különbségeket vizsgálta a bolyók pályájának meghatározásakor.

Most felsoroljuk azokat az ellipszire vonatkozó fogalmakat, tulajdonságokat, amelyek szükségesek az ellipszisek és a Cassini-görbék összehasonlításához, így azok előzményként szolgálnak:

- Legyenek adva az  $F_1, F_2$  pontok és egy  $a$  pozitív valós szám, amelyre fennáll, hogy  $2a > F_1F_2$ . Az  $F_1, F_2$  fókuszpontú,  $2a$  nagytengelyhosszú *ellipszisen* a sík azon



pontjainak halmazát értjük, amelyeknél a fókuszpontoktól mért távolságok összege  $2a$ .

- Az ellipszist *kanonikus helyzetűnek* hívjuk, ha fókuszpontjai a koordináta-rendszer  $x$ -tengelyén úgy helyezkednek el, hogy az  $F_1F_2$  szakasz felezőpontja az origó.
- Ha az ellipszis kanonikus helyzetű, akkor a fókuszpontjainak koordinátáira teljesül, hogy  $F_1(-c, 0)$ ,  $F_2(c, 0)$ , ahol  $c$  egy pozitív valós szám.
- Az ellipszis *nagytengelelyének* az ellipszis  $F_1F_2$  egyenesen található két pontját összekötő szakaszt nevezzük, amelynek hossza  $2a$ .
- Az ellipszis *kistengelelyének* az ellipszisnek az  $F_1F_2$  szakasz felezőmerőlegesén található két pontját összekötő szakaszt nevezzük, amely hossza  $2b$ , ahol  $b$  egy pozitív valós szám.
- Az ellipszis *centruma* az  $F_1F_2$  szakasz felezőpontja.
- Az ellipszis tengelyesen szimmetrikus a nagytengelelyének és kistengelelyének egyenesére, valamint középpontosan szimmetrikus a centrumára.
- Az  $a$ ,  $b$  és  $c$  számokra teljesül, hogy  $a^2 = b^2 + c^2$ .
- A definíció úgy is megfogalmazható, hogy a  $P$  pont pontosan akkor van rajta az ellipszisen, ha  $PF_1 + PF_2 = 2a$ .
- Ezek felhasználásával levezethető a kanonikus helyzetű ellipszis egyenlete: egy pont pontosan akkor van rajta a kanonikus helyzetű ellipszisen, ha koordinátái kielégítik az  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  egyenletet.

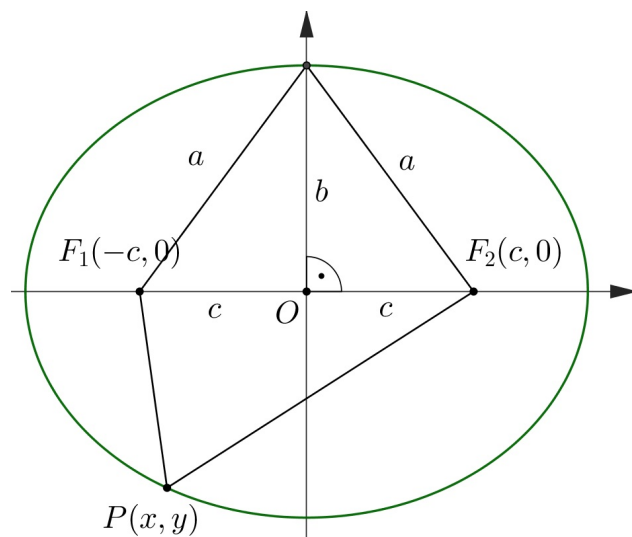
Ezt követően GeoGebra programot készítünk, amellyel a következőket ábrázoljuk:

- Állítható  $a$  és  $c$  paraméterek segítségével különböző fókuszpontokhoz tartozó ellipsziseket ábrázolunk.
- Fix fókuszpontokhoz sorozatként ellipszissereget ábrázolunk.

### **Az óra tartalma:**

Az órán először definiáljuk a Cassini-görbéket. Az ellipszishoz hasonlóan ezek is két fókuszpont és egy szám által meghatározott görbék, azonban ez a meghatározó szám most nem a fókuszpontoktól mért távolságok összege, hanem a távolságok szorzata.

A 2.1. pontban már megfogalmazott definíciót és az ott levezetett, kanonikus helyzetre vonatkozó egyenletet fogjuk tulajdonképpen ezen az órán is szerepeletni, azonban – mivel



39. ábra. Ellipszis a fókuszpontjaival, kis- és nagytengelyével.

célunk, hogy az ellipszissel jobban össze tudjuk hasonlítani a Cassini-görbéket – a jelölésekben változtatásokat alkalmazunk. Most a fókuszpontok távolságát határozza meg a  $c$  szám – ahogyan az ellipszis esetén is –, és az ellipszis esetére vonatkozó  $2a$  helyett  $a^2$  lesz a görbe pontjainak fókuszoktól mért távolságára vonatkozó paraméter.

**Definíció.** Legyenek adva az  $a$  és  $c$  pozitív valós számok, továbbá legyenek adva a síkban az egymástól  $2c$  távolságra lévő  $F_1$  és  $F_2$  pontok.

Az  $F_1, F_2$  fókuszpontokkal és az  $a^2$  paraméterrel meghatározott Cassini-görbe azon pontok mértani helye a síkban, amely pontokra  $F_1P$  és  $F_2P$  távolságok szorzata állandó,  $a^2$  nagyságú.

Ha a Cassini-görbe kanonikus helyzetű, és a fókuszpontjai az  $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$  pontok, a görbe  $P(x, y)$  pontjának a fókuszpontoktól mért távolsága a következőképpen írható fel:

$$F_1P = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad F_2P = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

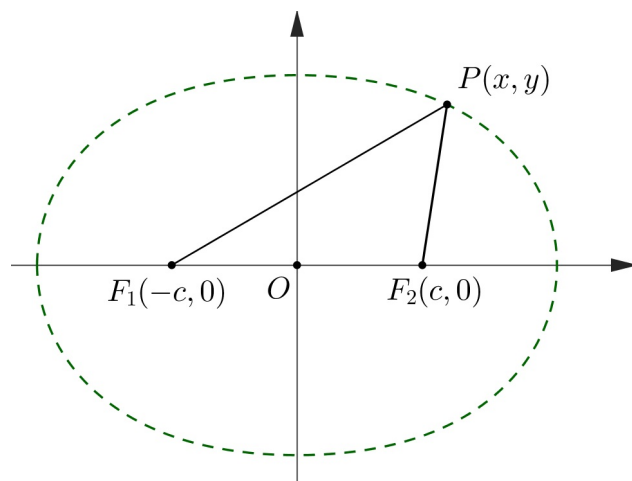
A  $P(x, y)$  pont pontosan akkor van rajta az  $F_1, F_2$  fókuszpontú,  $a^2$  paraméterű Cassini-görbén, ha  $F_1P \cdot F_2P = a^2$ , azaz

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2.$$

Itt végrehajtjuk a 2.1. pontban leírt számolást, amely eredményeként magkapjuk a görbe egyenletét:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4.$$

A szimmetriatulajdonságokra is elmondjuk a már leírt gondolatmenetet: a Cassini-görbék szimmetriatengelyei a fókuszok egyenese és a fókuszok felezőmerőlegese, szimmetriaközéppontja a fókuszok által meghatározott szakasz felezőpontja, ugyanis az ezekre vonatkozó



40. ábra. Cassini-görbe fókuszpontjai és egy pontja.

szimmetriák a fókuszpontokat fókuszpontokba képezik, és távolságtartók, vagyis a görbe pontjának a fókuszoktól mért távolságai szorzata nem változik a transzformáció során.

Ezt követően GeoGebra programot készítettünk, amellyel a következőket ábrázoljuk:

- Állítható  $a$  és  $c$  paraméterek segítségével különböző fókuszpontokhoz tartozó Cassini-görbéket ábrázolunk. Megfigyeljük, hogy milyen a görbe alakja  $c < a$ ,  $c = a$ ,  $c > a$  esetben.
- Fix fókuszpontokhoz sorozatként Cassini-görbék seregét ábrázoljuk.

Az elkészítendő GeoGebra programok csatolva megtalálhatók. Ezeken a gyerekek önállóan dolgoznak, saját maguk készítik el számítógépen. Mivel az ellipszis esetén ugyanezek a feladatok már szerepeltek, most csak az új görbe egyenletével kell elkészíteni azokat.

Az óra végén a Cassini-görbék tudománytörténeti vonatkozására térünk rá, és ismertetjük a szakdolgozat bevezetésében leírtakat:

- Cassini élete, elsősorban tudományos tevékenysége, felfedezései.
- A bolygók mozgását leíró Kepler-törvények, elsősorban a pálya alakját megadó I. törvény.
- Cassini ötlete a pálya alakjára vonatkozóan.

Az utóbbihoz kapcsolódóan bevezetünk egy új fogalmat, amellyel az ellipszist jellemezzük, és utána a gondolatot alkalmazzuk a Cassini-görbékre is.

Az ellipszis *numerikus excentricitása* az  $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$  szám. ( $\varepsilon < 1$ .) [8] A numerikus excentricitás azt fejezi ki, hogy az ellipszis mennyire tér el a körtől: ha  $\varepsilon$  nagy, az azt

jelenti, hogy a fél nagytengely hosszához képest egymástól nagy távolágra helyezkedik el a két fókuszpont, azaz az ellipszis „lapos”; ha pedig kicsi a numerikus excentricitás, azaz a fél nagytengely hosszához képest egymástól kis távolágra helyezkedik el a két fókuszpont, az ellipszis körszerű.

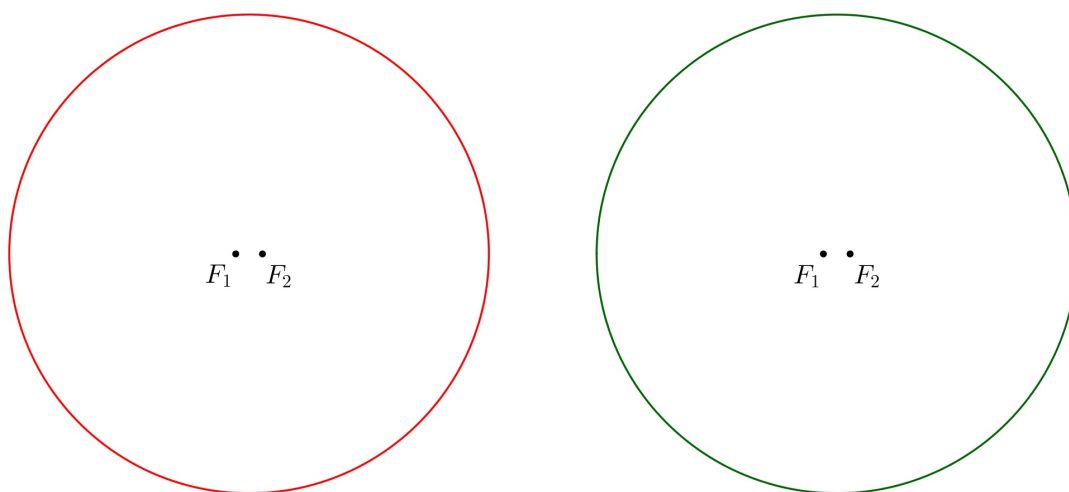
A következő táblázat a Kepler és Cassini idejében ismert bolygók pályájának numerikus excentricitását tartalmazza.

Bolygó neve	Merkúr	Vénusz	Föld	Mars	Jupiter	Szaturnusz
Pálya-excentricitása	0,2056	0,0068	0,0167	0,0934	0,0484	0,0557

1. táblázat. Bolygók és pályájuk numerikus excentricitása [8].

A Merkúr kivételével a bolygók pályájának numerikus excentricitása kicsi, azaz a pálya alakja közel van a körhöz. (A Merkúr mozgását nem is magyarázzák meg hiánytalanul a Kepler-törvények, azt csak az Einstein-féle általános relativitáselmélettel lehet megfelelően leírni.)

Az  $\varepsilon = \frac{c}{a} = 0$  esetben az ellipszis megegyezik az  $a$  sugarú körrel, a fókuszpontjai egybeesnek. A Cassini-görbék esetén is, ha a  $\frac{c}{a}$  értéket 0-nak választjuk, a fókuszpontok egybeesnek, és a görbe az  $a$  sugarú kör. Ezért lehet kis excentricitás esetén nagyon hasonlóknak látni az ellipsziseket és a Cassini-görbéket, mindkettőnek az elfajult változata az egybeeső fókuszpontjaik köré húzott kör. Az alábbi ábrán olyan ellipszis és Cassini-görbe látható, amelyek adataira fennáll, hogy  $\frac{c}{a} = 0,0557$ , vagyis a Szaturnusz pályájának felnek meg.



41. ábra. Ellipszis (piros) és Cassini-görbe (zöld)  $\frac{c}{a} = 0,0557$  adatokkal.

Kepler Tycho de Brahe dán csillagász megfigyelési adatainak felhasználásával alkotta meg a bolygók mozgását leíró törvényeket, numerikus módon, számadatokból. Az ábrán is látszik, hogy például a Szaturnusz esetén is már nagyon kicsi a különbség az ellipszis és a Cassini-görbe között. Csak nagyon pontos mérési adatokkal lehet igazolni a bolygók pályájának alakjára vonatkozó hipotézist.

**Az órán szereplő GeoGebra programok:**

- Cassini-görbék ábrázolása I.: [online verzió](#), [letölthető verzió](#)
- Cassini-görbék ábrázolása II.: [online verzió](#), [letölthető verzió](#)

A fájlok GeoGebra 5.0 verzióban készültek.

Idő (perc)	Óra menete	Módszerek, munkaformák, eszközök	Megjegyzések
5	<p><b>Ismétlés</b> Az ellipszisről tanultak ismétlése: definíciója, egyenlete, szimmetriái, tulajdonságai.</p>	Tanulói kérdések.	Előkészítjük a számítógépeken az előző alkalommal elkészített GeoGebra programokat, amelyekkel az ellipsziseket ábrázoltuk.
5	<p><b>Bevezetés</b> Tudománytörténeti bevezető Keplerről, Cassiniról, a Kepler-törvényekről, Cassini csillagászati eredményeiről, az ellipszisek és a Cassini-göbök „versenyéről”. Ezt tartalmazza a szakdolgozat Bevezetés fejezete.</p>	Frontális, tanári magyarázat.	A fizika tantárgyhoz kapcsolódunk ezzel.
10	<p><b>Cassini-görbék definíciója</b> Az ellipszissel analóg módon definiáljuk az új görbét, az „összeg” szót „szorzatra” cseréljük. <b>Cassini-görbék kanonikus egyenlete</b> Levezetjük az egyenletet a 2.1. pontban és az óraterv elején részletezett módon. <b>Cassini-görbék szimmetriatulajdonságai</b> A 2.1. pontban és az óraterv elején részletezett módon, az ellipszis mintájára.</p>	Frontális, tanári magyarázat. Tábla.	A levezetés pontosan azt a gondolatmenetet igényli, mint az ellipszis esete, még könnyebb is a számolás, ezért a diákok egyedül is végre tudják azt hajtani.

15	<p><b>Cassini-görbék ábrázolása</b></p> <p>GeoGebra programot készítünk, amellyel a következőket ábrázoljuk:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Állítható <math>a</math> és <math>c</math> paraméterek segítségével különböző fókuszpontokhoz tartozó Cassini-görbéket ábrázolunk. Megfigyeljük, hogy milyen a görbe alakja <math>c &lt; a</math>, <math>c = a</math>, <math>c &gt; a</math> esetben. Az <math>a</math> és <math>c</math> értékeket csúszkával változtatjuk.</li> <li>• Fix fókuszpontokhoz sorozatként Cassini-görbék seregét ábrázoljuk.</li> </ul>	<p>Önálló munka számítógépeken. GeoGebra.</p>	<p>Az ellipszisre vonatkozóan az előző alkalmakon ez a feladat már szerepelt, ezt kell újra végrehajtani, csak a most levezetett, Cassini-görbéket leíró egyenlettel.</p>
10	<p><b>Visszatérés az alapproblémára</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ellipszis numerikus excentricitásának bevezetése, bolygók pályájának numerikus excentricitása</li> <li>• numerikus excentricitás alkalmazása a Cassini-görbékre: az elkészített GeoGebra programokkal kis excentricitású ellipszis és Cassini-görbe rajzolása (pl. a Szaturnusz esete)</li> </ul>	<p>Frontális, tanári magyarázat. Tábla. Önálló munka számítógépeken. GeoGebra.</p>	<p>Az előző órán elkészített ellipszisábrázolást és a most elkészített Cassini-görbe ábrázolást használjuk.</p>

## Óraterv II.

**Tantárgy:** matematika

**Évfolyam:** 12. osztály

**Osztály típusa:** matematika fakultáció / matematika tagozat / szakkör

**Témakör:** koordinátageometria

**Tananyag:** tórusz síkmetszetei

**Az óra típusa:** új ismeretet átadó óra

**Az óra célja:** a tórusz egyenletének levezetése, tórusz speciális síkmetszeteinek, a Cassini-görbéknek a meghatározása, a metszet ábrázolása GeoGebra programmal

**Fejlesztendő kompetenciák:**

- Matematikai, gondolkodási kompetencia (Matematikai gondolkodás és érvelés, a matematikai gondolkodásmód elsajátítása.)
- Digitális kompetencia (A megfelelő segédeszközök használata összetett információk létrehozása, bemutatása vagy értelmezése céljából.)
- Tanulás kompetenciái (Kitartó tanulás, saját tanulás megszervezése egyénileg és csoportban, az idővel és az információval való hatékony gazdálkodás.)

**Az óra előzménye:**

Az ezt megelőző alkalm(ak)on a *forgásfelületekkel* foglalkoztunk: ezek olyan felületek, amelyek egy sígörbének a görbe síkjában található egyenes körül való megforgatásával állnak elő. Speciális esetekben meghatározzuk ezeknek a felületeknek az egyenletét.

A következő feladatokon keresztül vizsgáljuk a forgásfelületeket:

1. Milyen forgásfelület keletkezik, ha a  $z = 0$  koordinátasíkban található  $x^2 + y^2 = 1$  egyenletű kört megforgatjuk először az  $y$ -tengely körül, majd pedig az  $x$ -tengely körül? Adjuk meg az így kapott forgásfelületek egyenletét!

**Megoldás.** A szakdolgozat 4. fejezetében leírtaknak megfelelő gondolatmenetet alkalmazunk. Ez a gondolatmenet használható lesz az összes további feladat megoldása során.

Az  $y$ -tengely körül történő forgatás során keletkező forgásfelület egyenlete megkapható a kiindulási kör egyenletéből úgy, hogy az eredeti sígörbe egyenletében szereplő  $x^2$ -re az  $x^2 + z^2$  helyettesítést alkalmazzuk. Tehát a forgásfelületet leíró egyenlet:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Vagyis beláttuk, hogy a forgásfelület az origó körüli,  $r = 1$  sugarú gömb.



Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a kört az  $x$ -tengely körül forgatjuk, ekkor az egyenletben szereplő  $y^2$ -re az  $y^2 + z^2$  helyettesítést alkalmazzuk.

2. Milyen forgásfelület keletkezik, ha a  $z = 0$  koordinátasíkban található  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  egyenletű hiperbolát megforgatjuk először az  $y$ -tengely körül, majd pedig az  $x$ -tengely körül? Adjuk meg az így kapott forgásfelületek egyenletét!

**Megoldás.** Az előző feladatban leírt gondolatmenet alapján az  $y$ -tengely körüli forgatáskor az  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$  egyenletű egyköpenyű forgáshiperboloid, az  $x$ -tengely körüli forgatáskor az  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{a^2} = 1$  egyenletű kétköpenyű forgáshiperboloid keletkezik forgásfelületként.

3. Milyen alakzatot ír le a térben a  $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$  egyenlet?

**Megoldás.** Az egyenlet átírható  $x^2 + y^2 = \left(\frac{z}{2}\right)^2$  alakra. Ez az egyenlet a  $z = c$  síkban a  $(0, 0, c)$  középpontú,  $\frac{z}{2} = \frac{c}{2}$  sugarú kört adja meg. Vesszük az összes ilyen kört, a forgásfelület ezeknek a köröknek az uniójaként áll elő. Az egyenletben csak  $x^2$  és  $y^2$  szerepel, a forgásfelület így a  $z$ -tengely körüli forgatás során keletkezett. Az eredeti egyenlet az  $y = 0$  síkban a  $4x^2 - z^2 = 0$  alakot veszi fel, amely feírható  $(2x + z)(2x - z) = 0$  alakban is. Ennek megoldásai:  $z = 2x$ ,  $z = -2x$ , amely egy egymást metsző egyenespár a síkban. A forgásfelület ezeknek az egyeneseknek a  $z$ -tengely körüli forgatásával keletkezik, vagyis a forgásfelület egy forgáskúp.

Az óra további előzménye, hogy ismerjük, milyen alakzatok állnak elő forgáskúpok síkkal való metszeteként: kör, ellipszis, parabola, hiperbola, pont, egyenes, metsző egyenespár.

### Az óra tartalma:

Most a Cassini-görbét szeretnénk valamilyen felület síkmetszeteként előállítani. Ez a felület a tórusz. Az órán meghatározzuk a tórusz egyenletét, és felfedezzük, hogy a tórusz megfelelő síkkal vett metszetei a Cassini-görbék.

A tórusz egyenletének levezetéséhez a korábbi óra feladataiban használt gondolatmenetet alkalmazzuk. A szakdolgozat 4. fejezetében leírt módon juthatunk a tórusz egyenletéig: a  $z = 0$  síkban található  $(x - R)^2 + y^2 = r^2$  egyenletű kör  $y$ -tengely körüli megforgatásakor keletkező tóruszt az

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + z^2)$$

egyenlet írja le.

Tórusz és sík metszeteként akkor kapunk Cassini-görbét, ha a sík párhuzamos a tórusz tengelyével, és a síknak a tórusz tengelyétől mért távolsága megegyezik a tóruszt generáló

kör sugarával, azaz  $z = r$ . Ekkor ugyanis a metszetként előálló görbe egyenlete

$$(x^2 + y^2)^2 - 2R^2(x^2 - y^2) = 4R^2r^2 - R^4,$$

amely a Cassini-görbe egyenlete  $c = R$  és  $a^2 = 2Rr$  adatokkal. Azt a levezetést használjuk az órán, amely a szakdolgozat 4. fejezetében található.

Ezt követően GeoGebra programokkal szemléltetjük a metszetet. A diákok önállóan elkészítik az első GeoGebra programot, amelyben a metszetként előálló síkgörbe jelenik meg. Nemcsak a speciális síkokkal való metszetet ábrázoljuk, hanem a tetszőleges  $z = p$  síkkal vett metszetet. Vagyis az

$$(x^2 + y^2 + p^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + p^2)$$

egyenlet által meghatározott síkgörbét ábrázoljuk, amelyben  $p$ ,  $R$  és  $r$  csúszkákkaal változtatható paraméterek. Így van módunk megfigyelni azt is, hogy a metszet mikor nem Cassini-görbe.

A második GeoGebra programot a diákok előre elkészítve kapják meg: ezen térben van ábrázolva a tórusz és a megfelelő síkkal vett metszetei – amikor a metszet Cassini-görbe.

#### **Az órán szereplő GeoGebra programok:**

- tórusz és sík metszete: [online verzió](#), [letölthető verzió](#)
- térbeli ábrázolás, csak a speciális síkok: [online verzió](#), [letölthető verzió](#)

A fájlok GeoGebra 5.0 verzióban készültek.

Idő (perc)	Óra menete	Módszerek, munkaformák, eszközök	Megjegyzések
5	<p><b>Ismétlés</b> A forgásfelületekről tanultak ismétlése, egyenletük származtatása.</p>	Tanulói kérdések.	—
15	<p><b>Tórusz egyenletének levezetése</b> Az <math>(x - R)^2 + y^2 = r^2</math> egyenletű kör <math>y</math>-tengely körüli megforgatásakor keletkező tórusz egyenlete: <math display="block">(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + z^2)</math></p>	Frontális, tanári magyarázat. Tábla.	A levezetés megegyezik a szakdolgozat 4. fejezetében leírtakkal.
10	<p><b>Tórusz síkmetszetei</b> A tórusznak a <math>z = r</math> egyenletű síkkal vett metszeteként az <math display="block">(x^2 + y^2)^2 - 2R^2(x^2 - y^2) = 4R^2r^2 - R^4</math> egyenletű Cassini-görbét kapjuk.</p>	Frontális, tanári magyarázat. Tábla.	A számolás megegyezik a szakdolgozat 4. fejezetében leírtakkal.
15	<p><b>A metszetek ábrázolása GeoGebrával</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a tórusz <math>z = p</math> síkkal vett metszeteinek ábrázolása</li> <li>a tórusz <math>z = r</math> síkkal vett metszeteinek megtekintése térbeli ábrázoláson</li> </ul>	Önálló munka számítógépeken. GeoGebra.	A feladat megegyezik az óratervben korábban leírtakkal.

## Óraterv III.

**Tantárgy:** matematika

**Évfolyam:** 12. osztály

**Osztály típusa:** matematika szakkör

**Témakör:** koordinátageometria

**Tananyag:** négyzetreemelés, négyzetgyökvonás a komplex számsíkon

**Az óra típusa:** új ismeretet átadó óra

**Az óra célja:** néhány alakzat képének meghatározása a komplex számsíkot önmagára képező négyzetreemelés függvény esetén, Cassini-görbék előállításuk kör négyzetgyökeként, mindezek ábrázolása GeoGebrában

**Fejlesztendő kompetenciák:**

- Matematikai, gondolkodási kompetencia (Matematikai gondolkodás és érvelés, a matematikai gondolkodásmód elsajátítása.)
- Digitális kompetencia (A megfelelő segédeszközök használata összetett információk létrehozása, bemutatása vagy értelmezése céljából.)
- Tanulás kompetenciái (Kitartó tanulás, saját tanulás megszervezése egyénileg és csoportban, az idővel és az információval való hatékony gazdálkodás.)

**Az óra előzménye:**

A korábbi alkalmakon a komplex számokkal foglalkozunk, ennek az órának feltételei a következők ismerete:

- komplex számok definíciója,
- a komplex számok közötti műveletek,
- a komplex számok trigonometrikus alakja,
- műveletek a trigonometrikus alakkal,
- a komplex számsík,
- (a Cassini-görbék.)

Ezek összefoglalásával foglalkozunk a szakdolgozat 8.1. pontjában.

**Az óra tartalma:**

Az órán tárgyalt fogalmak, levezetések, számolások, bizonyítások megegyeznek a szakdolgozat 8.2. és 8.3. pontjaiban leírtakkal.

Az óra végén a diákok GeoGebra programokkal ábrázolják az órán tárgyalt állítások tartalmát: a görbéket és négyzetüket, négyzetgyöküket.

**Az órán szereplő GeoGebra programok:**

- alakzatok és négyzetük: [online verzió](#), [letölthető verzió](#)
- kör gyöke: [online verzió](#), [letölthető verzió](#)

A fájlok GeoGebra 5.0 verzióban készültek.

Idő (perc)	Óra menete	Módszerek, munkaformák, eszközök	Megjegyzések
5	<p><b>Ismétlés</b></p> <p>A komplex számsík <math>(x, y)</math> pontjához az <math>(x^2 - y^2, 2xy)</math> pontot rendel. A négyzetreemelés a komplex számsík helyvektorainak előjeles irányszögét megkétszerezi, hosszát négyzetre emeli.</p>	Tanulói kérdések.	—
15	<p><b>Alakzatok négyzetei</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• origó középpontú kör négyzete origó középpontú kör</li> <li>• origón áthaladó egyenes négyzete origóból induló félegyenes</li> <li>• origón át nem menő egyenes négyzete origó fókuszú parabola</li> </ul>	Frontális, tanári magyarázat. Tábla.	A számolások megegyeznek a szakdolgozat 8.2. pontjában leírtakkal.
10	<p><b>Kör négyzetgyöke</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• A Cassini-görbék pontosan a nem origó középpontú körök négyzetgyökei.</li> <li>• Aszerint kapunk <math>a &gt; c</math> típusú, <math>a &lt; c</math> típusú Cassini-görbét, illetve lemmiszkátát, hogy az origó a körnek a belsejében, a külsejében, vagy a körvonalon van.</li> <li>• A rögzített <math>(-c, 0)</math>, <math>(c, 0)</math> fókuszokkal megadott Cassini-görbék seregét a <math>(c^2, 0)</math> középpontú koncentrikus körök seregéből kapjuk négyzetgyökvonással. Ezek közül pontosan az <math>a^2</math> sugarú kör négyzetgyöke lesz az <math>a^2</math> paraméterű Cassini-görbe.</li> </ul>	Frontális, tanári magyarázat. Tábla.	A levezetés megegyezik a szakdolgozat 8.3. pontjában leírtakkal.

15	<p><b>A görbék ábrázolása GeoGebrával</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• origó középpontú kör és négyzete</li> <li>• origón áthaladó egyenes és négyzete</li> <li>• origón át nem menő egyenes és négyzete</li> <li>• nem origó középpontú kör és négyzetgyöke</li> </ul>	<p>Önálló munka számítógépeken. GeoGebra.</p>	—
----	---	---	---

## Irodalomjegyzék

- [1] Hajós György. *Bevezetés a geometriába*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.
- [2] Reiman István. *A geometria és határterületei*. Gondolat Kiadó, Budapest, 1986.
- [3] Pelikán József. *Új matematikai mozaik*, chapter Klasszikus algebrai görbék. Typotex Kiadó, Budapest, 2002.
- [4] I. N. Bronstejn, K. A. Szemengyajev, G. Musiol, and H Mühling. *Matematikai kézikönyv*. Typotex Kiadó, Budapest, 2009.
- [5] Arseny Akopyan. The lemniscate of bernoulli, without formulas. <https://arxiv.org/abs/1003.3078v2>, 2014.
- [6] Ann E. Hirst and E. Keithlloyd. Cassini, his ovals and a space probe to saturn. *The Mathematical Gazette*, 81(492):409–421, 1997.
- [7] Hevesi Imre. *Elektromosságtan*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1998.
- [8] Budó Ágoston. *Kísérleti fizika I*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997.
- [9] Tasnádi Péter, Skrapits Lajos, and Bérces György. *Mechanika I*. Dóm Kiadó, Budapest, 2013.
- [10] Tasnádi Péter, Skrapits Lajos, and Bérces György. *Mechanika II*. Dialóg Campus Kiadó, Budapest, 2001.
- [11] Simonyi Károly. *A fizika kultúrtörténete*. Gondolat Kiadó, Budapest, 1986.
- [12] Internet. <https://science.nasa.gov/mission/cassini/>.
- [13] Szabados László. Megkezdte a nagy finálét a cassini űrszonda. [https://mta.hu/tudomany\\_hirei/nagy-finalera-keszul-a-cassini-bolygoszonda-107639](https://mta.hu/tudomany_hirei/nagy-finalera-keszul-a-cassini-bolygoszonda-107639), 2017. április 26.
- [14] Internet. [https://index.hu/tudomany/2017/09/15/megsemmisult\\_a\\_cassini\\_urszonda/](https://index.hu/tudomany/2017/09/15/megsemmisult_a_cassini_urszonda/).
- [15] Internet. [https://hvg.hu/tudomany/20221015\\_cassini\\_huygens\\_urszonda\\_felbocsatas\\_a\\_25\\_eve](https://hvg.hu/tudomany/20221015_cassini_huygens_urszonda_felbocsatas_a_25_eve).