

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Homogén struktúrák és automorfizmus-csoportjaik

Rigó Petra

BSc szakdolgozat

Alkalmazott matematika szakirány

Témavezető:

Sági Gábor

Algebra és Geometria Tanszék



Budapest, 2025

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Sági Gábornak, a szakdolgozat megírásához nyújtott pótolhatatlan segítségéért. Továbbá köszönöm a családomnak és barátaimnak, hogy tanulmányaim során mindenben támogattak.

Tartalomjegyzék

0. Bevezető	4
0.1. Általános bevezető	4
0.2. Technikai bevezető	6
1. Alapfogalmak	8
2. Automorfizmusok metrikus terei	15
3. Hrushovski Tételkör	19
4. Gyengén generikus automorfizmusok	22
5. A Rado-gráf	27
6. A koherens Hrushovski-tulajdonság	32

0. Bevezető

A bevezetőt két alfejezetre tagoljuk. Az általános bevezetőben a vizsgált kérdéskört tágabb perspektívából mutatjuk be, a technikai bevezetőben pedig azokat az alapvető jelöléseket és definíciókat foglaljuk össze, melyeket később további magyarázatok nélkül használunk majd.

0.1. Általános bevezető

Egy elsőrendű $\mathcal{A}$ struktúrát ultrahomogénnek nevezünk, ha a véges (vagy végesen generált) részstruktúrái közti izomorfizmusok mindig kiterjeszthetők $\mathcal{A}$ egy automorfizmusává. A szakdolgozatban arra az esetre fókuszálunk, amikor $\mathcal{A}$ alaphalmaza megszámlálhatóan végtelen. Megszámlálhatóan végtelen, ultrahomogén struktúrákat elég könnyen konstruálhatunk: az 1.7. Tételben látjuk majd, hogy bizonyos véges struktúrák Fraïssé-limeszei mindig ultrahomogének lesznek. Az ultrahomogén struktúrák modellelméleti, véges (és megszámlálhatóan végtelen) kombinatorikai és csoportelméleti módszerekkel vizsgálhatók, melyek sok esetben kapcsolatba hozhatók bizonyos metrikus terek elemi tulajdonságaival. A téma szépségét és egyben nehézségét e különböző területek közti kapcsolatok felismerése és kidolgozása adja. Az ultrahomogén struktúrák tanulmányozása az 1950-es években, Fraïssé kombinatorikus indíttatású vizsgálataival kezdődött meg, és jelenleg is igen aktív. Az újabb eredményekkel kapcsolatban [5]-re utalunk.

A (véges nyelvű) megszámlálhatóan végtelen struktúrák tisztán logikai, modellelméleti szempontból is érdekesek, mert elméletük megszámlálhatóan kategorikus (azaz elméleteiknek izomorfia erejéig pontosan 1 megszámlálhatóan végtelen modellje van). Ebben a szakdolgozatban a logikai iránnyal nem foglalkozunk. A szakdolgozat célja ultrahomogén struktúrákra (és azok véges részstruktúráira) vonatkozó néhány klasszikus eredmény bemutatása a szükséges fogalmak bevezetésétől a bizonyítások rekonstrukciójáig.

Részletesebben, a szakdolgozat 2. fejezetében az ultrahomogén struktúrák automorfizmus-csoportjainak metrikus szerkezetét vizsgáljuk. Ultrahomogén struktúrák automorfizmus-csoportjain meg fogunk adni különböző metrikus tereket, melyekben az automorfizmus-csoport műveletei folytonosak lesznek. Noha egy rögzített ultrahomo-

gén struktúra automorfizmus-csoportján több ilyen természetesen adódó metrika is van, a 2.5. Állításban be fogjuk látni, hogy a nyílt halmazok rendszere ezekben a metrikus terekben ugyanaz (tehát topológiai szempontból ezek a terek azonosak). A továbbiakban, ultrahomogén struktúrák automorfizmus-csoportjaival kapcsolatban, a nyílt, zárt, sűrű, stb. kifejezések mindig e metrikus terek egyikére vonatkoznak (mindegy, hogy melyikre, mert a nyílt halmazok, és ezért a zárt, sűrű, stb. halmazok rendszere ezekben a metrikus terekben mindig ugyanaz). Továbbá, a 2.8. Tételben igazoljuk majd, hogy ezek a metrikus terek teljesek (minden Cauchy-sorozat konvergens bennük).

A 3. fejezetben Hrushovski kiterjesztési tulajdonságát vizsgáljuk, mely (ahogy azt a 3.1. Definícióban is részletezzük) egy véges struktúrákból álló K struktúraosztályra akkor áll fenn, ha minden $\mathcal{B} \in K$ -hoz van olyan $\mathcal{C} \in K$, hogy $\mathcal{B}$ beágyazható $\mathcal{C}$ -be, és a $\mathcal{B}$ részstruktúrái közti izomorfizmusok mindig kiterjeszthetők $\mathcal{C}$ egy automorfizmusává. A 3. fejezet fő eredménye a 3.4. Tétel bizonyításának rekonstrukciója, mely ekvivalens feltételt ad arra, hogy egy ultrahomogén $\mathcal{A}$ struktúra összes véges részstruktúráiból álló K osztály mikor rendelkezik a kiterjesztési tulajdonsággal. Ez az ekvivalens jellemzés a 2. fejezetben bemutatott metrikus terek segítségével adható meg. Részletesebben, a 3.4. Tételből az derül ki, hogy K akkor és csak akkor rendelkezik a kiterjesztési tulajdonsággal, ha $\mathcal{A}$ automorfizmus-csoportjában a véges jellegű automorfizmusok halmaza sűrű (a véges jellegű automorfizmusok definíciójával kapcsolatban a 3.3. Definícióra utalunk).

A 4. fejezetben azt vizsgáljuk, hogy ultrahomogén struktúrák automorfizmus-csoportjaiban hogyan konstruálhatók olyan sűrű halmazok, melyeknek minden eleme véges jellegű. Konkrétabban, azt vizsgáljuk, hogy egyetlen véges jellegű automorfizmusnak (vagy automorfizmusok egy rögzített hosszú véges sorozatának) milyen feltételek mellett lesz sűrű a (csoportelméleti értelemben vett) konjugátosztálya. A fejezet fő eredményei a 4.4. és 4.6. Tételek bizonyításainak rekonstrukciója.

Az 5. fejezetben egy fontos speciális ultrahomogén struktúrán, a Rado-gráfon (megszámlálhatóan végtelen véletlen gráfon) illusztráljuk a korábbi fejezetek absztraktabb tételeit. A fejezet fő eredménye Hrushovski tétele (azaz az 5.4 Tétel) egyik bizonyításának rekonstrukciója. Ezt a tételt sok különböző módon be lehet bizonyítani, mi a Herwig-től és Lascar-tól származó bizonyítást rekonstruáljuk, mely egy teljesen elemi kombinatorikus megfigyelésen alapul.

Végül a 6. fejezetben röviden felidézünk [1] fő eredményét, mely szerint a Rado-gráf automorfizmus-csoportjának van olyan sűrű G részcsoportha, hogy G minden végesen generált részcsoportha véges marad (azaz G lokálisan véges csoport, mely sűrű részhalmaza a Rado-gráf automorfizmus-csoportjának).

Az alábbiakban röviden összefoglaljuk azokat az alapvető jelöléseket és definíciókat, melyeket később további magyarázatok nélkül használunk majd.

0.2. Technikai bevezető

A természetes számok halmazát ω -val jelöljük. Ha A egy halmaz, és $n \in \omega$, akkor ${}^n A$ jelöli az A elemeiből képezhető n -hosszú sorozatok halmazát.

A hasonlósági típus fogalmát ismertnek tekintjük. Az L hasonlósági típus véges, ha csak véges sok relációszimbólum, függvényszimbólum és konstanssimbólum szerepel benne. A későbbiekben olyan hasonlósági típusokkal foglalkozunk, amelyekben csak relációszimbólumok vannak. Ha az L hasonlósági típusban az $(R_i : i \in I)$ relációszimbólumok szerepelnek, akkor egy L -típusú struktúrán egy $\mathcal{A} = (A, R_i^A)_{i \in I}$ alakú struktúrát értünk. Itt A az $\mathcal{A}$ alaphalmaza, és R_i^A olyan (többváltozós) reláció A -n, melyet a nyelv szintjén R_i jelöl.

0.1. Definíció (Részstruktúra). Legyen $\mathcal{A}$ egy L -típusú struktúra, aminek A az alaphalmaza. Legyen $\mathcal{B}$ egy L -típusú struktúra, aminek B az alaphalmaza. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ részstruktúrája $\mathcal{B}$ -nek, ha $A \subseteq B$, és ha $R \in L$ (mondjuk n -változós) relációszimbólum, akkor $R^A = R^B \cap {}^n A$. Jelölés: $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$.

0.2. Definíció (Izomorfizmus). Az $\mathcal{A} = (A, R^A)_{R \in L}$ és $\mathcal{B} = (B, R^B)_{R \in L}$ struktúrákat izomorfnek nevezzük, ha van olyan $f : A \rightarrow B$ bijekció, hogy minden (mondjuk n -változós) $R \in L$ relációszimbólumra és $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ -ra

$$(a_0, \dots, a_{n-1}) \in R^A \Leftrightarrow (f(a_0), \dots, f(a_{n-1})) \in R^B.$$

Az f függvényt $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ közti izomorfizmusnak hívjuk. Ha f nem feltétlenül bijektív, akkor homomorfizmusnak nevezzük.

0.3. Definíció (Automorfizmus). Ha $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, akkor az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ közti izomorfizmusokat $\mathcal{A}$ automorfizmusainak nevezzük. $\mathcal{A}$ összes automorfizmusa csoportot alkot (a kompozíció műveletével), ezt a csoportot $\text{Aut}(\mathcal{A})$ -val jelöljük.

Speciálisan, legyenek G, H csoportok. Egy $\varphi : G \rightarrow H$ leképezést csoporthomomorfizmusnak nevezünk, ha művelettartó: $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ és $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$ minden $a, b \in G$ -re.

Az A halmaz összes permutációinak csoportját $Sym(A)$ -val jelöljük.

0.4. Definíció (Pályák). Legyen $G \leq Sym(A)$ és $a \in A$. Ekkor a pályája G szerint a következő módon definiálható: $O_G(a) = \{b : \exists g \in G : g(a) = b\} = \{g(a) : g \in G\}$.

0.5. Definíció (Metrika). Legyen M halmaz. Egy $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvényt metrikának, vagy távolság-függvénynek nevezünk, ha d -re teljesülnek a következők:

1. Minden $x, y \in M$ esetén $d(x, y) = 0$ ekvivalens azzal, hogy $x = y$.
2. **Szimmetria:** Minden $x, y \in M$ esetén $d(x, y) = d(y, x)$.
3. **Háromszög-egyenlőtlenség:** Minden $x, y, z \in M$ esetén $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

0.6. Definíció (Metrikus tér). Az (M, d) párt metrikus térnek nevezzük, ha d metrika M felett.

0.7. Definíció (Uniform hipergráfok). Egy hipergráf akkor uniform, ha minden hiperéle ugyanannyi csúcsot köt össze.

A szakdolgozatot azzal folytatjuk, hogy a következő, 1. fejezetben az ultrahomogén struktúrákra vonatkozó speciális alapismereteket foglaljuk össze.

1. Alapfogalmak

Ebben a fejezetben [3] (Wilfrid Hodges "Model Theory" című könyve) hetedik fejezetét alapul véve összefoglaljuk azokat az előismereteket, definíciókat, állításokat és tételeket, amelyekre később szükségünk lesz.

A fejezet fő eredményei az 1.4 Állítás és 1.7 Tétel, melyek tisztázzák, hogy bizonyos megszámlálható $\mathcal{A}$ struktúrák hogyan rekonstruálhatók végesen generált részstruktúráik összességéből.

Továbbiakban $\mathcal{A}$ beágyazható $\mathcal{B}$ -be, ha $\mathcal{B}$ -nek van $\mathcal{A}$ -val izomorf részstruktúrája. Az ilyen izomorfizmusokat az $\mathcal{A}$ struktúra $\mathcal{B}$ -be való beágyazásának nevezzük.

1.1. Definíció. Legyen K véges struktúrák egy osztálya. K rendelkezik az öröklődési tulajdonsággal, közös beágyazási tulajdonsággal, amalgamációs tulajdonsággal, ha az alábbi feltételek közül teljesül a megfelelő.

- **Öröklődési tulajdonság (HEP):** Ha $\mathcal{A} \in K$ és $\mathcal{B}$ részstruktúrája $\mathcal{A}$ -nak, akkor $\mathcal{B}$ izomorf valamilyen K -beli struktúrával.
- **Közös beágyazási tulajdonság (JEP):** Ha $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in K$ akkor létezik olyan $\mathcal{C} \in K$, amelybe $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ is beleágyazható.
- **Amalgamációs tulajdonság (AP):** Ha $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in K$ és $e : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ és $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ beágyazások, akkor létezik $\mathcal{D} \in K$, és $g : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}$ és $h : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ beágyazások úgy, hogy $ge = hf$.

Legyen L egy hasonlósági típus. Innentől kezdve K jelölje L -típusú véges struktúrák egy osztályát.

1.2. Definíció. $\text{Age}(\mathcal{A})$ az $\mathcal{A}$ végesen generált részstruktúráinak osztálya.

1.3. Állítás. Ha $K = \text{Age}(\mathcal{A})$, akkor K nem üres, és teljesülnek rá a *HEP* és *JEP* tulajdonságok.

Bizonyítás. Nyilvánvaló. □

A továbbiakban az 1.3. Állítás megfordítását fogjuk vizsgálni, vagyis azt szeretnénk tisztázni, hogy mely véges struktúrákból álló K osztályok származtathatók egy megszámlálható $\mathcal{A}$ struktúra összes véges részstruktúrájaként (azaz mely K osztályokhoz van olyan megszámlálható $\mathcal{A}$, hogy $K = \text{Age}(\mathcal{A})$ teljesüljön).

Ezentúl a megszámlálható kifejezést a véges vagy megszámlálhatóan végtelen esetekre használjuk.

1.4. Állítás (7.1.1 Tétel [3]-ban). Tegyük fel, hogy K megszámlálható, amelyre teljesül HEP és JEP . Ekkor létezik olyan megszámlálható $\mathcal{A}$ struktúra, hogy $K = Age(\mathcal{A})$.

Bizonyítás. ([3]-ban a 7.1.1 Tételhez tartozó bizonyítás alapján.)

Ha K véges, akkor az állítás triviális, ezért feltesszük, hogy $|K| = \omega$. Mivel K megszámlálható, elemeit fel tudjuk sorolni. Legyen $(\mathcal{A}_i : i < \omega)$ K elemeinek egy felsorolása. A következő bekezdésben definiálni fogjuk struktúráknak egy $(\mathcal{B}_i : i < \omega)$ láncát, melyben mindegyik $\mathcal{B}_i$ izomorf lesz K egy elemével.

Először legyen $\mathcal{B}_0 = \mathcal{A}_0$. Ha $\mathcal{B}_i \in K$ -t megkonstruáltuk, akkor a JEP tulajdonság segítségével keressünk olyan $\mathcal{B}'$ struktúrát K -ban, hogy $\mathcal{B}_i$ és $\mathcal{A}_{i+1}$ is beágyazható legyen $\mathcal{B}'$ -be. Ez a $\mathcal{B}'$ legyen $\mathcal{B}_{i+1}$. Végül legyen $\mathcal{C} = \bigcup_{i < \omega} \mathcal{B}_i$.

Mivel $\mathcal{C}$ megszámlálhatóan sok megszámlálható struktúra uniója, $\mathcal{C}$ is megszámlálható. A konstrukció alapján K minden eleme beágyazható $\mathcal{C}$ -be. Ha $\mathcal{A}$ valamely végesen generált részstruktúrája $\mathcal{C}$ -nek, akkor van olyan i , hogy $\mathcal{B}_i$ tartalmazza $\mathcal{A}$ összes (véges sok) generátorát. Mivel $\mathcal{B}_i \in K$, ezért $\mathcal{A}$ a HEP tulajdonság szerint izomorf K egy elemével. Tehát $K = Age(\mathcal{C})$. $\square$

Azt kaptuk, hogy véges struktúrák egy megszámlálható K osztálya akkor és csak akkor $Age(\mathcal{A})$ alakú, ha K -ra teljesülnek a HEP és JEP tulajdonságok.

1.5. Definíció. f parciális izomorfizmusa $\mathcal{A}$ -nak, ha $Dom(f) \subseteq A$, $Ran(f) \subseteq A$ és f izomorfizmus a $Dom(f)$ és $Ran(f)$ által generált részstruktúrák között.

1.6. Definíció. A $\mathcal{D}$ struktúrát ultrahomogénnek nevezzük, ha a $\mathcal{D}$ végesen generált részstruktúrái közötti izomorfizmusok kiterjednek $\mathcal{D}$ egy automorfizmusává.

Az 1.3. és 1.4. Állítások mintájára a következőkben arra keresünk szükséges és elégséges feltételt, hogy véges struktúrák egy megszámlálható K osztálya mikor áll elő egy ultrahomogén struktúra összes véges részstruktúrájaként, azaz milyen K -ra vonatkozó feltételek esetén létezik olyan megszámlálható, ultrahomogén $\mathcal{A}$, amelyre $K = Age(\mathcal{A})$.

1.7. Tétel (Fraïssé tétele (7.1.2-es Tétel [3]-ban)). Legyen K véges struktúráknak egy nem üres halmaza, amelyre teljesül HEP , JEP és AP . Ekkor létezik olyan L -típusú $\mathcal{D}$ struktúra, hogy

- $|\mathcal{D}| \leq \omega$,
- $K = \text{Age}(\mathcal{D})$,
- $\mathcal{D}$ ultrahomogén.

A $\mathcal{D}$ struktúrát K Fraïssé-limeszének nevezzük; az 1.11. Lemma utáni megjegyzésben látjuk majd, hogy a Fraïssé-limesz izomorfia erejéig egyértelmű.

A következő részben az 1.7. Tétel bizonyítását készítjük elő. A bizonyítás az 1.12. Lemma után található.

1.8. Definíció. A $\mathcal{D}$ struktúrát gyengén homogénnek nevezzük, ha teljesül a következő feltétel: Ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ a $\mathcal{D}$ végesen generált részstruktúrái, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ és $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$ egy beágyazás, akkor létezik egy olyan $g : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}$ beágyazás, amely kiterjeszti az f -t.

Az 1.11. Lemma 2. pontjában látjuk majd, hogy egy megszámlálható struktúra akkor és csak akkor ultrahomogén, ha gyengén homogén. A gyengén homogén struktúrák vizsgálata technikai szempontból egyszerűbb, ezért vezettük be őket. Végül megjegyezzük, hogy megszámlálhatónál nagyobb struktúrák esetében az ultrahomogenitás és a gyenge homogenitás fogalma nem esik egybe.

1.9. Állítás. Ha $\mathcal{D}$ ultrahomogén, akkor $\mathcal{D}$ gyengén homogén is.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}$ és $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$ beágyazás. Világos, hogy f izomorfizmus $\mathcal{A}$ és $f(\mathcal{A})$ között. Mivel $\mathcal{D}$ ultrahomogén, van olyan $g \in \text{Aut}(\mathcal{D})$, mely kiterjeszti f -et. Azonban ekkor $g|_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}$ egy, az f -et kiterjesztő beágyazás. Ezért $\mathcal{D}$ valóban gyengén homogén. $\square$

1.10. Lemma (7.1.3 Lemma [3]-ban). Legyenek $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ megszámlálható L -típusú struktúrák. Tegyük fel, hogy $\text{Age}(\mathcal{C}) \subseteq \text{Age}(\mathcal{D})$, és $\mathcal{D}$ gyengén homogén. Ekkor $\mathcal{C}$ beágyazható $\mathcal{D}$ -be, sőt, $\mathcal{C}$ tetszőleges végesen generált részstruktúrájának tetszőleges $\mathcal{D}$ -be történő beágyazása kiterjeszthető $\mathcal{C}$ -nek egy $\mathcal{D}$ -be történő beágyazására.

Bizonyítás. ([3]-ban a 7.1.3 Lemmához tartozó bizonyítás alapján.)

Legyen $\mathcal{A}_0$ a $\mathcal{C}$ egy tetszőleges végesen generált részstruktúrája, és legyen $f_0 : \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{D}$ egy beágyazás. A bizonyítás célja egy olyan $f_\omega : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ beágyazás konstruálása, ami kiterjeszti f_0 -t.

Mivel $\mathcal{C}$ megszámlálható, ezért $\mathcal{C} = \bigcup_{n < \omega} \mathcal{A}_n$, azaz megadható végesen generált részstruktúrák növény uniójaként, kezdve $\mathcal{A}_0$ -val. Ezután n -re vonatkozó rekurzióval definiáljuk beágyazások egy $f_n : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{D}$ növekvő láncát. Az első f_0 beágyazás adott.

Tegyük fel, hogy f_n -t már definiáltuk. Mivel $\text{Age}(\mathcal{D})$ tartalmazza $\text{Age}(\mathcal{C})$ -t, ezért létezik egy olyan $g : \mathcal{A}_{n+1} \rightarrow \mathcal{B}$ izomorfizmus, ahol $\mathcal{B}$ a $\mathcal{D}$ egy részstruktúrája.

Ekkor $f_n g^{-1}$ beágyazza $g(\mathcal{A}_n)$ -t $\mathcal{D}$ -be, és a gyenge homogenitás miatt ez a beágyazás kiterjed egy $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}$ beágyazásra. Legyen $f_{n+1} : \mathcal{A}_{n+1} \rightarrow \mathcal{D}$, $f_{n+1} = hg$. Ekkor $f_n \subseteq f_{n+1}$. Ez az f_n leképezések egy láncát definiálja. Legyen $f_\omega = \bigcup_{n < \omega} f_n$, ez lesz a keresett beágyazás. $\square$

1.11. Lemma (7.1.4 Lemma [3]-ban).

1. Tegyük fel, hogy $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ olyan L -típusú struktúrák, melyekre $\text{Age}(\mathcal{C}) = \text{Age}(\mathcal{D})$ teljesül. Továbbá tegyük fel, hogy $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ megszámlálható és mindkettő gyengén homogén. Ekkor $\mathcal{C}$ izomorf $\mathcal{D}$ -vel. Sőt, ha $\mathcal{A}$ egy végesen generált részstruktúrája $\mathcal{C}$ -nek és $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$ egy beágyazás, akkor f kiterjeszthető egy $\mathcal{C}$ -ből $\mathcal{D}$ -be képező izomorfizmussá.
2. Egy megszámlálható $\mathcal{D}$ struktúra akkor és csak akkor ultrahomogén (és így Fraïssé-limesze $\text{Age}(\mathcal{D})$ -nek), ha gyengén homogén is.

Bizonyítás. ([3]-ban a 7.1.4 Lemmához tartozó bizonyítás alapján.)

1. $\mathcal{C}$ is, $\mathcal{D}$ is előállítható végesen generált részstruktúráik növény uniójaként, legyenek $\mathcal{C} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{C}_n$ és $\mathcal{D} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{D}_n$ ilyen előállítások.

Feltehetjük, hogy $\mathcal{C}_0 = \mathcal{A}_0$. Rekurzióval meg fogjuk adni véges parciális izomorfizmusok egy $(f_n : n \in \omega)$ növény sorozatát úgy, hogy minden $n \in \omega$ -ra teljesül majd, hogy:

- (a) $\mathcal{C}_n \subseteq \text{Dom}(f_n)$,
- (b) $\mathcal{D}_n \subseteq \text{Ran}(f_{n+1})$.

Legyen f_0 az állítás 1. pontjában megadott f . Ha f_n adott már, akkor legyen m olyan nagy, hogy $\mathcal{D}_n, \text{Ran}(f_n)$ részstruktúrája $\mathcal{D}_m$ -nek. Az 1.10. Lemma bizonyításához hasonlóan $\mathcal{C}$ gyenge homogenitása miatt f_n^{-1} kiterjeszthető egy $g : \mathcal{D}_m \rightarrow \mathcal{C}$ beágyazássá.

Mivel $\mathcal{C}_{n+1}$ és $\text{Ran}(g)$ véges, ezért van olyan $k \in \omega$, hogy $\mathcal{C}_k$ -nak $\mathcal{C}_{n+1}$ és $\text{Ran}(g)$ is részstruktúrája. Az előzőekhez hasonlóan, most D gyenge homogenitását használva g^{-1} kiterjeszthető egy $f_{n+1} : \mathcal{C}_k \rightarrow \mathcal{D}$ beágyazássá. Ezzel az $\langle f_n, n \in \omega \rangle$ láncot teljesen felépítettük úgy, hogy (a),(b) végig érvényben maradt.

A keresett izomorfizmus $\bigcup_{n \in \omega} f_n$ lesz.

2. Az 1.9. Állítás alapján az ultrahomogén struktúrák gyengén homogének is. A most igazolt 1. pontból úgy következik a másik irány, hogy $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ -t vesszük.

□

Az 1.11. Lemmával azt is beláttuk, hogy izomorfia erejéig a Fraïssé-limesz egyértelmű. Most már rátérhetünk az 1.7. Tétel bizonyítására, illetve a bizonyítást előkészítő lemmára.

1.12. Lemma. Tegyük fel, hogy K -ra teljesülnek a HEP, JEP és AP tulajdonságok. Tegyük fel továbbá, hogy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{D} \in K$, és $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$ beágyazás. Ekkor van olyan $\mathcal{D}' \in K$, hogy $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'$, és $g : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}'$ beágyazás, ami kiterjeszti f -et.

Bizonyítás. Vegyük fel kétszer a $\mathcal{D}$ struktúrát, azaz legyen $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}$. Legyen $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}_1$ beágyazás és $id : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}_2$ az $\mathcal{A}$ identitása.

Az amalgamációs tulajdonság miatt létezik egy $\mathcal{D}' \in K$, illetve léteznek $k : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}'$, $h : \mathcal{D}_2 \rightarrow \mathcal{D}'$ függvények úgy, hogy $id \circ h = f \circ k$. $\mathcal{D}'$ -t alkalmas izomorf másolatával helyettesítve feltehetjük, hogy k a $\mathcal{D}_1$ halmaz identitásfüggvénye. Ekkor $id \circ h = f \circ id$ is teljesül.

Legyen $g = h|_{\mathcal{B}}$. Ekkor g kiterjeszti f -et.

□

Az 1.7 Tétel és bizonyítása. Ha K véges struktúrák egy olyan megszámlálható osztálya, amelyre teljesülnek a HEP, JEP és AP tulajdonságok, akkor K -nak létezik Fraïssé-limesze, mely az 1.11. Lemma bizonyítása utáni megjegyzés szerint izomorfia erejéig egyértelmű.

Bizonyítás. Cél egy olyan $\mathcal{D}$ ultrahomogén struktúra konstruálása, amire $\text{Age}(\mathcal{D}) = K$. Ehhez $\mathcal{D}$ -t véges struktúrák láncaként építjük fel.

1. lépés: Konstrukció.

Felsoroljuk K elemeit: $K = \{\mathcal{E}_n \in \omega\}$. Rekurzióval megadunk egy $\langle \mathcal{D}_n : n \in \omega \rangle$ sorozatot úgy, hogy:

1. $\mathcal{D}_n \in K$,
2. Ha $m < n$, akkor $\mathcal{E}_m \subseteq \mathcal{D}_n$,
3. Ha $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}_n$, és $f : \mathcal{A} \rightarrow D_n$ beágyazás, akkor van $g : \mathcal{B} \rightarrow D_{n+1}$ beágyazás úgy, hogy g kiterjeszti f -et.

$\mathcal{D}_0$ legyen tetszőleges. Ha $\mathcal{D}_n$ megvan, akkor a JEP tulajdonság miatt létezik olyan $\mathcal{D}'_n$, amibe $\mathcal{D}_n$ és $\mathcal{E}_n$ beágyazható.

Az 1.12. Lemma ismételt alkalmazásával tudunk találni olyan $\mathcal{D}_{n+1} \in K$ -t, hogy minden $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}'_n$ struktúrára és $f : \mathcal{A} \rightarrow D'_n$ beágyazásra létezik $g : \mathcal{B} \rightarrow D_{n+1}$ beágyazás úgy, hogy g kiterjeszti f -et. Ezzel a $\mathcal{D}_n$ sorozatot teljesen felépítettük.

Legyen $\mathcal{D} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{D}_n$.

2. lépés: Gyenge homogenitás. Az 1.11. Lemma 2. pontja miatt az ultrahomogenitás ellenőrzéséhez elég azt belátni, hogy $\mathcal{D}$ gyengén homogén.

$\mathcal{D}$ gyenge homogenitásának belátásához vegyük $\mathcal{D}$ -nek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ véges részstruktúráit úgy, hogy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, továbbá legyen $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$ beágyazás.

Mivel $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ végesek, létezik olyan n , hogy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}_n$, illetve $\mathcal{D}_n$ tartalmazza $\mathcal{A}$ képét is.

Ekkor az első lépésben megadott konstrukció 3. tulajdonsága miatt létezik olyan $g : \mathcal{B} \rightarrow D_{n+1}$ beágyazás, ami kiterjeszti f -et, tehát $\mathcal{D} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{D}_n$ tényleg gyengén homogén.

□

A teljesség kedvéért igazoljuk még, hogy véges struktúrák végtelen láncával "nem lehet kikonvergálni" véges struktúrák előre adott halmazaiból.

1.13. Lemma (7.1.6 Lemma [3]-ban). Legyen J végesen generált L -típusú struktúrák halmaza és $(\mathcal{D}_i : i < \alpha)$ L -típusú struktúrákból álló lánc. Ha minden $i < \alpha$ esetén $\text{Age}(\mathcal{D}_i) \subseteq J$, akkor $\text{Age}(\bigcup_{i < \alpha} \mathcal{D}_i) \subseteq J$. Ha minden $\mathcal{D}_i$ -re $\text{Age}(\mathcal{D}_i) = J$, akkor $\text{Age}(\bigcup_{i < \alpha} \mathcal{D}_i) = J$.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy minden $i < \alpha$ -ra $\text{Age}(\mathcal{D}_i) \subseteq J$. Legyen $\mathcal{A} \in \text{Age}(\bigcup_{i < \alpha} \mathcal{D}_i)$ tetszőleges. $\text{Age}(\bigcup_{i < \alpha} \mathcal{D}_i) \subseteq J$ -hez elég megmutatni, hogy $\mathcal{A} \in J$.

Mivel $\mathcal{A}$ végesen generált, és $(\mathcal{D}_i, i < \alpha)$ egy lánc, ezért van olyan $i < \alpha$, melyre teljesül, hogy $\mathcal{A}$ részstruktúrája $\mathcal{D}_i$ -nek, vagyis $\mathcal{A} \in \text{Age}(\mathcal{D}_i)$. Ekkor $\mathcal{A} \in J$ is teljesül.

Következőnek tegyük fel, hogy minden $i < \alpha$ -ra $\text{Age}(\mathcal{D}_i) = J$. Ekkor:

- $J = \text{Age}(\mathcal{D}_0) \subseteq \text{Age}(\bigcup_{i < \alpha} \mathcal{D}_i)$,
- az előző bekezdés miatt $\text{Age}(\bigcup_{i < \alpha} \mathcal{D}_i) \subseteq J$.

Ezért $\text{Age}(\bigcup_{i < \alpha} \mathcal{D}_i) = J$ valóban teljesül.

□

2. Automorfizmusok metrikus terei

Ebben a fejezetben megszámlálható struktúrák automorfizmus-csoportjain megadható metrikákat (távolságfüggvényeket) fogunk vizsgálni. Látjuk majd, hogy több, eltérő metrika is megadható, de ezekben mindig ugyanazok a halmazok lesznek nyíltak (azaz a metrikák által meghatározott topológiák ugyanazok lesznek).

A 3., 4. és az 5. fejezetekben látjuk majd, hogy az ebben a fejezetben bevezetett és megvizsgált metrikus terek hogyan segítenek annak megértésében, hogy egyes (végtelen) ultrahomogén struktúrák miként építhetők fel véges részstruktúráikból.

2.1. Definíció. Ha f véges parciális izomorfizmus, akkor legyen

$$N_f := \{g \in \text{Aut}(\mathcal{A}) : f \subseteq g\}.$$

Azaz N_f az összes olyan g automorfizmusból áll, ami kiterjeszti f -et.

2.2. Állítás. $\mathcal{A}$ ultrahomogén akkor és csak akkor, ha tetszőleges f -re N_f nem üres.

Bizonyítás.

$\Rightarrow$ Ha $\mathcal{A}$ ultrahomogén és veszünk egy f véges parciális izomorfizmust, az ultrahomogenitás miatt ki tudjuk azt terjeszteni egy automorfizmussá. Ezért az N_f nem lesz üres.

$\Leftarrow$ Ha tetszőleges f véges parciális izomorfizmusra $N_f \neq \emptyset$, akkor az pont azt jelenti, hogy mindegyik esetben f -et legalább egy automorfizmus kiterjeszti, tehát $\mathcal{A}$ ultrahomogén.

□

2.3. Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ megszámlálható struktúra. Automorfizmusok metrikus terei alatt olyan metrikus tereket értünk, melyeknek a pontjai az automorfizmusok. A metrika a következő: legyen $\{a_n : n \in \omega\}$ az A egy felsorolása. Ha $f \neq g$ automorfizmusai $\mathcal{A}$ -nak, akkor legyen $\Delta(f, g) = \min\{n \in \omega : f(a_n) \neq g(a_n)\}$, illetve f és g távolsága legyen $\varrho(f, g) = \frac{1}{\Delta(f, g)}$.

Azaz kettő automorfizmus távolságát úgy adjuk meg, hogy az elemeknek egy rögzített sorrendjében vesszük a legelső olyan elemnek az indexét, amire alkalmazva a

vizsgált két automorfizmust, eltérő képeket kapunk, majd vesszük ennek az indexnek a reciprokát. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez valóban egy metrika, sőt ultrametrika lesz: ha f, g, h automorfizmusai $\mathcal{A}$ -nak, akkor $\varrho(f, h) \leq \max\{\varrho(f, g), \varrho(g, h)\}$.

Adódik, hogy két automorfizmus annál közelebb van egymáshoz, minél hosszabb kezdőszeleten hatnak ugyanúgy. Bár a konkrét távolság függ A elemeinek felsorolásától, az nem függ az elemek sorrendjétől, hogy egy ilyen metrikus térben mik lesznek a nyílt halmazok. Megjegyezzük, hogy metrikus térben minden nyílt halmaz előállítható nyílt gömbök uniójaként.

2.4. Állítás. Az előbbi metrikus terekben tetszőleges f -re N_f nyílt, ahol f véges parciális izomorfizmus. Az N_f alakú halmazokat elemi nyílt halmazoknak nevezzük.

Bizonyítás. Nyilvánvaló. □

2.5. Állítás. Automorfizmusok metrikus terében a nyílt halmazok mindig elemi nyílt halmazok uniói. Másképpen, ha $u \subseteq \text{Aut}(\mathcal{A})$ nyílt, akkor van véges parciális izomorfizmusoknak egy olyan F halmaza, melyre

$$u = \bigcup_{f \in F} N_f.$$

Bizonyítás. Vesszük az automorfizmusoknak egy metrikus terét.

Tekintsük a g automorfizmust, és legyen $n > 0, n \in \omega$. Jelöljük G -vel a g középpontú, $\frac{1}{n}$ sugarú gömböt. Ekkor g -t megszorítva $\{a_i : i \leq n\}$ -re, egy parciális izomorfizmust kapunk, és az összes olyan automorfizmus lesz g -hez $\frac{1}{n}$ -nél közelebb, ami ezt a megszorítást kiterjeszti, azaz ha f -fel jelöljük g -nek az első n elemre vett megszorítását, akkor $N_f = G$ teljesül.

Mivel u nyílt, minden $h \in u$ -hoz van egy olyan G_h nyílt gömb, hogy $h \in G_h \subseteq u$. Az előzőek szerint mindegyik G_h gömb N_{f_h} alakú valamilyen f_h véges parciális izomorfizmusra. Legyen $F = \{f_h : h \in u\}$. Ekkor $u = \bigcup_{f \in F} N_f$, ahogy állítottuk.

Abban az esetben sem változik a nyílt halmazok rendszere, ha másképpen soroljuk fel az elemeket, mivel minden esetben minden nyílt halmazt úgy kapunk meg, hogy az adott felsorolás szerint az összes automorfizmust megszorítjuk az összes kezdőszeletre, majd ezeknek vesszük az unióit. □

2.6. Lemma. Ha $\mathcal{A}$ megszámlálható struktúra, akkor $\text{Aut}(\mathcal{A})$ zárt részhalmaza A összes permutációinak metrikus tereiben.

Bizonyítás. Rögzítsünk $\text{Sym}(A)$ -n (A összes permutációinak halmazán) egy, a 2.3 Definíció szerinti metrikát, és legyen $\mathcal{A}$ tetszőleges megszámlálható struktúra. Azt kell belátni, hogy $\text{Sym}(A) \setminus \text{Aut}(\mathcal{A})$ nyílt halmaz, azaz minden pontja belső pont.

Legyen tehát $f \in \text{Sym}(A) \setminus \text{Aut}(\mathcal{A})$ tetszőleges. Ekkor f nem automorfizmusa $\mathcal{A}$ -nak, ezért $\mathcal{A}$ nyelvében van egy (mondjuk n -változós) R relációszimbólum, és vannak $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ elemek úgy, hogy

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &\models R(a_0, \dots, a_{n-1}), \quad \text{de} \\ \mathcal{A} &\not\models R(f(a_0), \dots, f(a_{n-1})).\end{aligned}$$

Legyen $g = f|_{\{a_0, \dots, a_{n-1}\}}$. Ekkor minden $h \in N_g$ -re

$$\begin{aligned}h(a_0) &= g(a_0) = f(a_0), \dots, \\ h(a_{n-1}) &= g(a_{n-1}) = f(a_{n-1}),\end{aligned}$$

ezért $\mathcal{A} \not\models R(h(a_0), \dots, h(a_{n-1}))$.

Tehát az $a_0, \dots, a_{n-1}$ elemek mutatják, hogy N_g egyetlen eleme sem automorfizmusa $\mathcal{A}$ -nak.

Azt kapjuk, hogy $f \in N_g$ és N_g olyan nyílt halmaz, melyre $N_g \subseteq \text{Sym}(A) \setminus \text{Aut}(\mathcal{A})$, azaz $\text{Sym}(A) \setminus \text{Aut}(\mathcal{A})$ minden pontja belső pont, ezért $\text{Sym}(A) \setminus \text{Aut}(\mathcal{A})$ valóban nyílt. $\square$

A teljesség kedvéért megmutatjuk, hogy a 2.6. Lemma alábbi megfordítása is igaz.

2.7. Tétel. Ha A megszámlálható halmaz, és G zárt részcsoportha $\text{Sym}(A)$ (A összes permutációinak) metrikus tereiben, akkor van olyan $\mathcal{A}$ struktúra (melynek A az alaphalmaza), hogy $\text{Aut}(\mathcal{A}) = G$.

Bizonyítás. Legyen $F = \{R \subseteq {}^n A : n \in \omega, \quad R \text{ pályája } G\text{-nek}\}$, és legyen $\mathcal{A}$ az a struktúra, melynek A az alaphalmaza, és $\mathcal{A}$ alaprelációi pontosan F elemei.

Ekkor egyrészt $G \subseteq \text{Aut}(\mathcal{A})$, hiszen G minden eleme megőrzi F mindegyik elemét. A bizonyítás befejezéséhez ezért elég $\text{Aut}(\mathcal{A}) \subseteq G$ -t ellenőrizni. Ehhez, ellentmondást keresve, tegyük fel, hogy van olyan $f \in \text{Aut}(\mathcal{A})$, melyre $f \notin G$.

Mivel G zárt, f belső pontja G komplementumának, ezért van olyan g véges injektív függvény, hogy az N_g elemi nyílt halmazra $f \in N_g$ és $N_g \cap G = \emptyset$. Az utóbbi feltétel miatt $\text{Dom}(g)$ és $\text{Ran}(g)$ G -nek eltérő pályáin vannak. Ugyanakkor $g \subseteq f$, azaz $f(\text{Dom}(g)) = \text{Ran}(g)$, továbbá f megőrzi G pályáit (mert automorfizmusa $\mathcal{A}$ -nak). Ezek szerint $\text{Dom}(g)$ és $\text{Ran}(g)$ G -nek ugyanazon a pályáján van. Ez az ellentmondás mutatja, hogy $\text{Aut}(\mathcal{A}) \subseteq G$. $\square$

2.8. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ megszámlálható struktúra. Ekkor $\text{Aut}(\mathcal{A})$ (bármely, a 2.3. Definíció szerinti metrikával) teljes metrikus tér, azaz minden Cauchy-sorozat konvergens benne.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a vizsgált ϱ metrikát A elemeinek az $\{a_n : n \in \omega\}$ felsorolásából kaptuk.

Továbbá tegyük fel, hogy $(f_n : n \in \omega)$ az $\mathcal{A}$ automorfizmusainak egy Cauchy-sorozata.

Ekkor minden $n \in \omega$ -hoz van olyan K_n szám, hogy ha $i, j > K_n$, akkor f_i és f_j távolsága kisebb, mint $\frac{1}{n}$, azaz $f_i|_{\{a_0, \dots, a_n\}} = f_j|_{\{a_0, \dots, a_n\}}$. Speciálisan, ha $i, j > K_n$, akkor $f_i(a_n) = f_j(a_n)$. Ezért minden $n \in \omega$ -hoz van olyan $b_n \in A$, melyre teljesül, hogy minden $i > K_n$ -re $f_i(a_n) = b_n$.

Legyen $g : A \rightarrow A$, $g(a_n) = b_n$. Egyrészt az előző bekezdés végén tárgyaltak miatt $(f_n : n \in \omega)$ pontonként konvergál g -hez, ezért a ϱ metrika szerint is konvergál g -hez. Másrészt $g \in \text{Aut}(\mathcal{A})$, mert a 2.6. Lemma miatt $\text{Aut}(\mathcal{A})$ zárt, ezért tartalmazza az $\langle f_n : n \in \omega \rangle$ sorozat összes torlódási pontját. $\square$

3. Hrushovski Tételkör

Legyen $\mathcal{A}$ megszámlálható, ultrahomogén struktúra. Ebben a fejezetben $Aut(\mathcal{A})$ és $Age(\mathcal{A})$ néhány érdekes, tisztán véges kombinatorikus tulajdonságával foglalkozunk. A fejezet fő eredménye a 3.4. Tétel bizonyításának rekonstrukciója. A fejezetcímet megmagyarázó definícióval kezdjük.

3.1. Definíció (Hrushovski-tulajdonság). Legyen K véges struktúráknak egy osztálya. A K osztály rendelkezik a Hrushovski tulajdonsággal, ha a következő igaz: minden $\mathcal{A} \in K$ -ra van egy $\mathcal{B} \in K$ úgy, hogy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, és $\mathcal{A}$ parciális izomorfizmusai kiterjednek $\mathcal{B}$ automorfizmusaivá.

A következőkben azt vizsgáljuk, hogy ha K -ra teljesülnek a HEP, JEP és AP tulajdonságok, akkor K Fraïssé-limeszének milyen tulajdonsága lesz ekvivalens azzal, hogy K -ra a Hrushovski-tulajdonság is teljesül. A választ a 3.4. Tételben fogjuk megadni.

A pályák definíciójának megismétlésével kezdjük.

3.2. Definíció. Legyen $G \leq Sym(A)$ és $a \in A$. Ekkor a pályája G szerint a következő módon definiálható: $O_G(a) = \{b : \exists g \in G : g(a) = b\} = \{g(a) : g \in G\}$.

3.3. Definíció. Véges jellegű automorfizmusok:

$$Aut_n^{Fin}(\mathcal{A}) = \{\bar{f} \in {}^n Aut(\mathcal{A}) : \forall a \in A : O_{\langle \bar{f} \rangle}(a) \text{ véges}\}.$$

3.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ ultrahomogén. Az alábbi két állítás ekvivalens lesz ekkor:*

1. *Minden $n \in \omega$ -ra $Aut_n^{Fin}(\mathcal{A})$ sűrű $Aut(\mathcal{A})^n$ -ben.*
2. *$Age(\mathcal{A})$ -ra teljesül a Hrushovski-tulajdonság.*

Bizonyítás.

$1 \Rightarrow 2$: Tegyük fel, hogy az 1. pont teljesül. Vesszünk egy $\mathcal{A}_0 \in Age(\mathcal{A})$ struktúrát, és legyenek $p_1, \dots, p_n$ az $\mathcal{A}_0$ összes parciális izomorfizmusai. Az 1. pont miatt a véges jellegű automorfizmusok sűrűn vannak, ezért létezik egy olyan $(g_1, \dots, g_n) \in Aut_n^{Fin}(\mathcal{A})$, amely kiterjeszti az összes p_i -t. Legyen

$$A_1 = A_0 \cup \bigcup_{a \in Dom(p)} O_{\langle g_1 \dots g_n \rangle}(a).$$

Ezek a pályák végesek, mert $\langle g_1 \dots g_n \rangle$ véges jellegű, így A_1 is véges.

Végül legyen $\mathcal{A}_1$ az A_1 által feszített részstruktúra $\mathcal{A}$ -ban, és $f_i = g_i|_{A_1}$ minden $i = 1, \dots, n$ -re. Ekkor mindegyik f_i automorfizmusa lesz $\mathcal{A}_1$ -nek, mert mindegyik g_i -t a $\langle g_1 \dots g_n \rangle$ csoport bizonyos pályáinak uniójára szorítottuk meg.

$2 \Rightarrow 1$: Azt szeretnénk belátni, hogy minden $n \in \omega$ -ra $Aut_n^{Fin}(\mathcal{A})$ sűrű. Legyenek $p_1, \dots, p_n$ véges parciális izomorfizmusok $\mathcal{A}$ -n. Legyen

$$A_0 = \bigcup_{i=1}^n (Dom(p_i) \cup Ran(p_i)).$$

Mivel p véges, ezért A_0 is véges lesz.

Legyen $\mathcal{A}_0$ az A_0 által feszített részstruktúra, így $\mathcal{A}_0 \in Age(\mathcal{A})$. Mivel minden p_i parciális izomorfizmusa $\mathcal{A}_0$ -nak, a 2. pont miatt létezik $\mathcal{A}_1 \in Age(\mathcal{A})$ úgy, hogy $\mathcal{A}_0$ része $\mathcal{A}_1$ -nek, és léteznek olyan $f_{1,1}, \dots, f_{n,1} \in Aut(\mathcal{A}_1)$ automorfizmusok, hogy minden $i \leq n$ -re $f_{i,1}$ kiterjeszti p_i -t.

Soroljuk fel A elemeit: $A = \{a_k : k \in \omega\}$. Rekurzívan építünk egy

$$((\mathcal{A}_m, f_{1,m}, \dots, f_{n,m}) : m \in \omega)$$

sorozatot.

Ha $\langle \mathcal{A}_m, f_{1,m}, \dots, f_{n,m} \rangle$ adott már, akkor legyen $\mathcal{B}$ az $\mathcal{A}$ -nak $A_m \cup \{a_m\}$ által feszített részstruktúrája. $\mathcal{B}$ -re alkalmazva a 2. pontot azt kapjuk, hogy van olyan $\mathcal{A}_{m+1} \in Age(\mathcal{A})$ és $f_{1,m+1}, \dots, f_{n,m+1} \in Aut(\mathcal{A})$, hogy $\mathcal{B}$ (és így $\mathcal{A}_m$) részstruktúrája $\mathcal{A}_{m+1}$ -nek, és mindegyik $f_{i,m+1}$ kiterjeszti $f_{i,m}$ -t. Ezzel az $((\mathcal{A}_m, f_{1,m}, \dots, f_{n,m}) : m \in \omega)$ sorozatot teljesen felépítettük. Ekkor a következők teljesülnek:

- (a) $\mathcal{A}_m \leq \mathcal{A}_{m+1}$, minden $f_{i,m+1}$ kiterjeszti $f_{i,m}$ -t, és $\mathcal{A}_m \in Age(\mathcal{A})$,
- (b) $f_{i,m} \in Aut(\mathcal{A}_m)$ minden i -re,
- (c) minden $k < m$ -re $a_k \in A_m$.

Végül legyen $f_{i,\infty} = \bigcup_{m \in \omega} f_{i,m}$, ahol $i = 1, \dots, n$. Ekkor (b) és (c) miatt mindegyik f_i automorfizmusa lesz $\mathcal{A}$ -nak, és f_i kiterjeszti p_i -t (a) miatt.

□

Az 5. fejezetben megadunk majd példákat olyan ultrahomogén struktúrákra, melyekre a 3.4. Tétel ekvivalens feltételei teljesülnek. A legfontosabb ilyen példa a Rado-gráf (megszámlálható véletlen gráf) lesz, ezzel a 5. fejezetben részletesebben is fogunk foglalkozni.

A teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy az alábbi struktúaosztályok Fraïssé-limeszeire is teljesülnek a 3.4. Tétel ekvivalens feltételei:

- Az összes véges gráfokból álló osztály,
- az összes véges háromszögmentes gráfokból álló osztály,
- adott $n \in \omega$ -ra az összes véges n -uniform hipergráfokból álló osztály.

További példákkal kapcsolatban az 5. fejezetre utalunk.

4. Gyengén generikus automorfizmusok

Ebben a fejezetben elégséges feltételt adunk a 3.4. Tétel 1. pontjának teljesülésére. Ennek a fejezetnek a főeredményei a 4.4. és 4.6. Tételek bizonyításainak rekonstrukciója.

4.1. Definíció. $\bar{f} \in {}^n\text{Aut}(\mathcal{A})$ gyengén generikus, ha

1. Minden $a \in A$ -ra $O_{\langle \bar{f} \rangle}(a)$ véges (azaz $\bar{f} \in \text{Aut}_n^{\text{Fin}}(\mathcal{A})$), és
2. $\bar{f}$ konjugátosztálya sűrű (azaz, abban az esetben, ha $\bar{f} = \langle f_0, f_1, \dots, f_n \rangle$ akkor $\{\langle g^{-1}f_0g, g^{-1}f_1g, \dots, g^{-1}f_{n-1}g \rangle : g \in \text{Aut}(A)\}$ sűrű ${}^n\text{Aut}(\mathcal{A})$ -ben).

4.2. Állítás. Legyen $n \in \omega$ tetszőleges. Ha van gyengén generikus automorfizmusoknak egy n -hosszú rendszere (azaz létezik $\bar{f} \in {}^n\text{Aut}(\mathcal{A})$ gyengén generikus), akkor $\text{Aut}_n^{\text{Fin}}(\mathcal{A})$ sűrű ${}^n\text{Aut}(\mathcal{A})$ -ben.

Bizonyítás. ([7]-beli 4.3 Lemmához tartozó bizonyítás alapján.)

Először azt mutatjuk meg, hogy $\text{Aut}_n^{\text{Fin}}(\mathcal{A})$ zárt konjugálásra. Ehhez legyen $\bar{f} = \langle f_0, \dots, f_{n-1} \rangle \in \text{Aut}_n^{\text{Fin}}(\mathcal{A})$, és legyen $g \in \text{Aut}(\mathcal{A})$ tetszőleges. Ekkor minden $i < n$ -re és $a \in A$ -ra

$$g^{-1}(f_i(a)) = g^{-1}f_i g^{-1}(a),$$

ezért g izomorfizmus az $(A, f_0, \dots, f_{n-1})$ és $(A, g^{-1}f_0g, \dots, g^{-1}f_{n-1}g)$ struktúrák között. Emiatt $\langle g^{-1}f_0g, \dots, g^{-1}f_{n-1}g \rangle = g^{-1}\bar{f}g \in \text{Aut}_n^{\text{Fin}}(\mathcal{A})$ is teljesül.

Legyen $\langle f_0, f_1, \dots, f_{n-1} \rangle \in \text{Aut}(\mathcal{A})$ gyengén generikus. A gyengén generikus automorfizmusok definíciója 1. pontja alapján ekkor $\langle f_0, f_1, \dots, f_{n-1} \rangle \in \text{Aut}_n^{\text{Fin}}(\mathcal{A})$. A bizonyítás első bekezdése szerint $\text{Aut}_n^{\text{Fin}}(\mathcal{A})$ zárt konjugálásra, tehát tartalmazza $\langle f_0, f_1, \dots, f_{n-1} \rangle$ konjugátosztályát, így a 4.1. Definíció 2. pontja miatt $\text{Aut}_n^{\text{Fin}}(\mathcal{A})$ sűrű is. □

Megjegyezzük, hogy az előző állításnál több is igaz. Adott $a \in A$ -ra legyen $T_n(a) = \{\bar{f} \in {}^n\text{Aut}(\mathcal{A}) : O_{\langle \bar{f} \rangle}(a) \text{ véges}\}$. Figyeljük meg, hogy $T_n(a)$ nyílt részhalmaza ${}^n\text{Aut}(\mathcal{A})$ -nak a következők miatt: ha $\bar{f} = \langle f_0, \dots, f_{n-1} \rangle \in T_n(a)$, akkor a $g_0 = f_0|_{O_{\bar{f}}(a)}, \dots, g_{n-1} = f_{n-1}|_{O_{\bar{f}}(a)}$ választással $\bar{f} \in N_{g_0} \times \dots \times N_{g_{n-1}} \subseteq T_n(a)$. Ezért $T_n(a)$ tetszőleges $\bar{f}$ pontja belső pontja $T_n(a)$ -nak. Továbbá $\text{Aut}_n^{\text{Fin}}(\mathcal{A}) = \bigcap_{a \in A} T_n(a)$, ezért $\text{Aut}_n^{\text{Fin}}(\mathcal{A})$ előáll ${}^n\text{Aut}(\mathcal{A})$ megszámlálható sok nyílt részhalmazának metszeteként.

A 2.8. Tétel szerint az automorfizmusok metrikus terei teljesek, ezért alkalmazható rájuk Baire kategória-tétele. Mivel $Aut_n^{Fin}(\mathcal{A})$ G_δ -halmaz (azaz megszámlálható sok nyílt halmaz metszete), ezért ha van gyengén generikus automorfizmus-sorozat ${}^nAut(\mathcal{A})$ -ban, akkor $Aut_n^{Fin}(\mathcal{A})$ nemcsak, hogy sűrű, hanem 2. kategóriájú is (azaz komplementuma lefedhető megszámlálható sok sehol sem sűrű halmazzal).

A fejezet további eredményeinek igazolásához szükségünk lesz a következő technikai előkészületre.

4.3. Állítás. Legyen f parciális izomorfizmus, $g \in Aut(\mathcal{A})$. Ekkor

$$g^{-1}fg = \{\langle g^{-1}(a), g^{-1}(b) \rangle : \langle a, b \rangle \in f\} = g^{-1}[f].$$

Azaz, egy parciális izomorfizmuson a g -vel történő konjugálás úgy hat, mintha g^{-1} -t koordinátánként alkalmaznánk a parciális izomorfizmusnak megfelelő 2-változós relációra.

Bizonyítás. Legyen f parciális izomorfizmus, $g \in Aut(\mathcal{A})$, A az alaphalmaz. Ekkor a második lépésben az $a = g^{-1}(c)$ helyettesítést alkalmazva, ahol $c \in A$:

$$\begin{aligned} g^{-1}fg &= \{\langle a, g^{-1}fg(a) \rangle : a \in A\} = \\ &= \{\langle g^{-1}(c), g^{-1}fgg^{-1}(c) \rangle : c \in A\} = \\ &= \{\langle g^{-1}(c), g^{-1}f(c) \rangle : c \in A\} = g^{-1}[f]. \end{aligned}$$

□

Most már rátérhetünk a fejezet egyik fő eredményére.

4.4. Tétel (2.6 Tétel [6]-ban). *Legyen $\mathcal{A}$ megszámlálható ultrahomogén struktúra. Az alábbi kettő állítás ekvivalens egymással:*

1. *Létezik n -hosszú $\bar{f} \in {}^nAut(\mathcal{A})$, melynek konjugáltosztálya sűrű.*
2. *Minden $h_0^0, h_0^1, \dots, h_{n-1}^0, h_{n-1}^1$ parciális izomorfizmushoz létezik olyan g automorfizmus, hogy $h_0^0 \cup g[h_0^1], \dots, h_{n-1}^0 \cup g[h_{n-1}^1]$ mindegyike parciális izomorfizmus.*

Bizonyítás. ([6]-ban a 2.6 Tételhez tartozó bizonyítás alapján.)

1 $\Rightarrow$ 2: Legyenek $h_0 = \langle h_0^0, \dots, h_{n-1}^0 \rangle$ és $h_1 = \langle h_0^1, \dots, h_{n-1}^1 \rangle$ az $\mathcal{A}$ véges parciális izomorfizmusai. Mivel $\bar{f} = \langle f_0, \dots, f_{n-1} \rangle$ gyengén generikus, létezik $g_0, g_1 \in \text{Aut}(\mathcal{A})$ úgy, hogy minden $i < n$ és $j < 2$ esetén $g_j^{-1} f_i g_j \in N_{h_i^j}$, azaz $h_i^j \subseteq g_j^{-1} f_i g_j$ amiből következik $g_j h_i^j g_j^{-1} \subseteq f_i$. Legyen $g = g_0^{-1} \circ g_1$. A 4.3. Állítás alapján

$$g_j^{-1} f_i g_j = g_j^{-1} [f_i] \quad \text{és} \quad g_j h_i^j g_j^{-1} = g_j [h_i^j],$$

ezért minden $i < n$ esetén $g[h_i^1] = (g_0^{-1} \circ g_1)[h_i^1] \subseteq g_0^{-1} [f_i]$.

Azaz $h_i^0 \cup g[h_i^1] \subseteq g_0^{-1} [f_i] = g_0^{-1} f_i g_0 \in \text{Aut}(\mathcal{A})$.

Vagyis minden $i < n$ esetén $h_i^0 \cup g[h_i^1]$ is az $\mathcal{A}$ egy véges parciális izomorfizmusa, azaz g teljesíti a 2. pontot.

2 $\Rightarrow$ 1: $\bar{f}$ -et parciális izomorfizmusok láncainak uniójával fogjuk felépíteni.

Ehhez először is rögzítjük n -t, és A elemeinek egy felsorolását: $A = \{a_m : m \in \omega\}$.

Továbbá legyen $\{\bar{p}_m : m \in \omega\}$ olyan, hogy $\bar{p}_m = \langle p_{0,m}, \dots, p_{n-1,m} \rangle$ véges parciális izomorfizmus sorozat úgy, hogy $\{N_{p_{0,m}} \times \dots \times N_{p_{n-1,m}} : m \in \omega\}$ felsorolja ${}^n \text{Aut}(\mathcal{A})$ összes elemi nyílt halmazát.

Legyenek $f_{0,0} = \dots = f_{n-1,0} = \emptyset$ (azaz a sehol sem értelmezett függvények).

Ha $f_{0,m}, \dots, f_{n-1,m}$ adott már, akkor $f_{0,m+1}, \dots, f_{n-1,m+1}$ -ket az alábbi lépésekkel állítjuk elő:

- (a) A 2. pont miatt van olyan g automorfizmus, hogy minden $i < n$ esetén $g[p_{i,m}] \cup f_{i,m}$ parciális izomorfizmus. Legyen $f'_{i,m} = g[p_{i,m}] \cup f_{i,m}$.
- (b) $\mathcal{A}$ ultrahomogenitása (precízebben, az ultrahomogenitással ekvivalens gyenge homogenitás) miatt létezik olyan $f''_{i,m}$ parciális izomorfizmus, ami kiterjeszti $f'_{i,m}$ -et úgy, hogy $a_m \in \text{Dom}(f''_{i,m})$ és $a_m \in \text{Ran}(f''_{i,m})$.

Legyen $f_{i,m+1} = f''_{i,m}$. Ezzel a $\langle \langle f_{0,m}, \dots, f_{n-1,m} \rangle : m \in \omega \rangle$ sorozatot teljesen felépítettük.

Utolsó lépésként legyen $f_i = \bigcup_{m \in \omega} f_{i,m}$ minden i -re.

Mivel parciális izomorfizmusok uniói parciális izomorfizmusok, ezért minden i -re f_i is parciális izomorfizmus lesz. Sőt, a (b) pont miatt $\text{Ran}(f_i) = \text{Dom}(f_i) = A$,

így a kapott f_i -k automorfizmusok is. Továbbá, az (a) pont alapján teljesül, hogy $\bar{f} = \langle f_0, \dots, f_{n-1} \rangle$ konjugáltosztálya sűrű. Ezzel beláttuk, hogy ezek az f_i -k eleget tesznek az 1. pontnak.

□

4.5. Megjegyzés. Legyen K véges struktúrák egy olyan osztálya, melyre teljesülnek a HEP, JEP és AP tulajdonságok. Továbbá legyen $\mathcal{A}$ a K osztály (1.7. Tétel miatt létező) Fraïssé-limesze, és legyen

$$K_p = \{(\mathcal{B}, f) : \mathcal{B} \in K, \text{Dom}(f), \text{Ran}(f) \subseteq \mathcal{B}, \quad f \text{ parciális izomorfizmusa } \mathcal{B}\text{-nek}\}.$$

Könnyű meggondolni, hogy a 4.4. Tétel 2. pontja az $n = 1$ speciális esetben ekvivalens azzal, hogy K_p rendelkezik a JEP tulajdonsággal. Ezért a 4.4. Tételt kiegészíthetjük azzal, hogy a következő 2 állítás ekvivalens:

1. Van olyan $f \in \text{Aut}(\mathcal{A})$, melynek konjugáltosztálya sűrű,
2. K_p rendelkezik a JEP tulajdonsággal.

A részletekkel kapcsolatban a [4]-beli 1.1 Tételre utalunk, de ezeket a részleteket itt nem idézzük fel, mert a fenti 4.4. Tétel általánosabb (a 4.4. Tételben n tetszőleges lehet).

A 4.4. Tételhez hasonlóan jellemezhető gyengén generikus automorfizmusok létezése is. Következő célunk ennek bemutatása.

4.6. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ megszámlálható ultrahomogén struktúra. Ekkor a következő kettő állítás ekvivalens egymással:*

1. *Létezik n -hosszú $\bar{f} \in \text{Aut}(\mathcal{A})$, mely gyengén generikus.*
2. (a) *$\text{Aut}_n^{\text{Fin}}(\mathcal{A})$ sűrű ${}^n \text{Aut}(\mathcal{A})$ -ban, és*
 (b) *minden $h_0^0, h_0^1, \dots, h_{n-1}^0, h_{n-1}^1$ parciális izomorfizmushoz létezik olyan g automorfizmus, hogy $h_0^0 \cup g[h_0^1], \dots, h_{n-1}^0 \cup g[h_{n-1}^1]$ mindegyike parciális izomorfizmus.*

Bizonyítás. Rögzítsük $n \in \omega$ értékét.

1 $\Rightarrow$ 2: A 4.2. Állítás szerint 1.-ből következik 2.(a). Továbbá, a 4.1. Definíció értelmében a gyengén generikus $\bar{f}$ konjugáltosztálya sűrű. Ezért a 4.4. Tétel miatt 2.(b) is teljesül.

2 $\Rightarrow$ 1: Ennek igazolása a 4.4. Tétel bizonyításához hasonló. Ugyanúgy, mint a 4.4. Tétel bizonyításában, $\bar{f}$ -et parciális izomorfizmusok láncainak unióiként építhetjük fel. A 4.4. Tétel bizonyításához képest azt az extra feltételt is garantálnunk kell, hogy minden $a \in A$ -ra $O_{\langle \bar{f} \rangle}(a)$ véges maradjon. Ezt a 2.(a) feltétellel tudjuk biztosítani. Részletesebben, ugyanúgy, mint a 4.4. Tétel 2 $\Rightarrow$ 1 irányának bizonyításában, rögzítsük $n \in \omega$ -t. Legyen $A = \{a_m : m \in \omega\}$ az A elemeinek egy felsorolása, és legyen $\{\bar{p}_m : m \in \omega\}$ olyan, hogy $\{N_{p_0,m} \times \dots \times N_{p_{n-1},m} : m \in \omega\}$ felsorolja ${}^n \text{Aut}(\mathcal{A})$ összes elemi nyílt halmazát.

Legyen $f_{0,0} = \dots = f_{n-1,0} = \emptyset$. Ha $f_{0,m}, \dots, f_{n-1,m}$ adott már, akkor legyen $f'_{i,m}$ ugyanaz, ami a 4.4. Tétel bizonyításának (a) pontjában szerepel. A 4.4. Tétel bizonyításának (b) pontjában $f''_{i,m}$ -et $\mathcal{A}$ ultrahomogenitását használva kaptunk. Ehelyett most a 2.(a) pontot alkalmazva találunk olyan $\bar{h} = \langle h_0, \dots, h_{n-1} \rangle \in \text{Aut}_n^{Fin}(\mathcal{A})$ -t, hogy minden $i < n$ -re $f'_{i,m} \subseteq h_i$.

Legyen $D = \bigcup_{i < n} (\text{Dom}(f'_{i,m}) \cup \text{Ran}(f'_{i,m})) \cup \{a\}$, és legyen $R = \bigcup_{b \in D} O_{\langle \bar{h} \rangle}(b)$.

Ezek után

(b') minden $i < n$ -re legyen $f_{i,m+1} = h_i|_R$.

Mivel $\bar{h} \in \text{Aut}_n^{Fin}(\mathcal{A})$, ezért R véges, és mivel R a $\langle \bar{h} \rangle$ bizonyos pályáinak az uniója, ezért mindegyik h_i automorfizmusa az $(\mathcal{A}$ -ban) R által feszített részstruktúrának.

Végül minden $i < n$ -re legyen $f_i = \bigcup_{m \in \omega} f_{i,m}$. Ekkor (b') miatt $\text{Dom}(f_i) = \text{Ran}(f_i) = A$, ezért $f_i \in \text{Aut}(\mathcal{A})$. Továbbá, ugyanúgy, mint a 4.4. Tétel bizonyításában, $\bar{f}$ konjugáltosztálya sűrű lesz.

Végül megmutatjuk, hogy minden $a \in A$ -ra $O_{\langle \bar{f} \rangle}(a)$ véges. Ez a következők miatt van így: ha $a \in A$, akkor van olyan $m \in \omega$, hogy $a = a_m$. A konstrukciónk (b') pontja szerint $O_{\langle \bar{f} \rangle}(a_m) = O_{\langle \bar{h} \rangle}(a_m)$. Azonban $\bar{h} \in \text{Aut}_n^{Fin}(\mathcal{A})$, ezért $O_{\langle \bar{h} \rangle}(a_m)$ véges.

□

5. A Rado-gráf

A 3. és 4. fejezetekben általában vizsgáltuk az ultrahomogén struktúrákat. Ismeretes (illetve könnyen ellenőrizhető), hogy a következő véges struktúraosztályok rendelkeznek a HEP, JEP és AP tulajdonságokkal:

- Az összes véges gráfokból álló K_G osztály,
- az összes véges, háromszögmentes gráfokból álló K_3 osztály,
- adott n -re az összes olyan véges gráfokból álló K_n osztály, melynek nincs n -csúcsú teljes részgráfja,
- az összes véges L -típusú struktúrákból álló K_L osztály, ahol az L hasonlósági típusban véges sok (akárhány-változós) relációszimbólum van,
- Adott $d \in \omega$ -ra az összes véges d -uniform hipergráfokból álló osztály.

(Az első pontban megadott K_G osztályról alább, az 5.5. Állításban ellenőrizzük is, hogy rendelkezik a HEP, JEP és AP tulajdonságokkal).

Az 1.7. Tétel szerint a fenti struktúraosztályok mindegyikének van Fraïssé-limesze. Ebben a fejezetben az első pontban megadott K_G Fraïssé-limeszét fogjuk megvizsgálni, illetve erre alkalmazzuk majd a 3. és 4. fejezetekben igazolt eredményeket.

Következő célunk Hrushovski tételének (a 5.4. Tétel) igazolása, mely szerint K_G rendelkezik a Hrushovski-tulajdonsággal. Ennek a Tételnek sok bizonyítása ismert, mi egy rövid, Herwingtól és Lascartól származó kombinatorikus bizonyítást fogunk rekonstruálni. Ehhez néhány előkészítő lépésre lesz szükségünk.

5.1. Definíció. Legyen X véges halmaz, és legyen $n \in \omega$. Ekkor az (X, n) -hez tartozó $L(X, n)$ Lascar-gráf az a gráf, melynek csúcshalmaza $V = [X]^n = \{a \subseteq X : |a| = n\}$ az X n -elemű részhalmazai, és minden $a, b \in V$ -re $L(X, n)$ -ben pontosan akkor van él a és b között, ha $a \neq b$ és $a \cap b \neq \emptyset$.

5.2. Definíció. Az $L(X, n)$ Lascar-gráf egy $H = (V, E)$ részgráfja tiszta részgráf, ha

- minden $x \in X$ -re $|\{a \in V : x \in a\}| \leq 2$, és
- minden $a \neq b \in V$ -re $|a \cap b| \leq 1$.

5.3. Lemma (4.3 Lemma [2]-ben). Tetszőleges véges $G = (V, E)$ gráfhoz van olyan véges X halmaz és $n \in \omega$, hogy G izomorf $L(X, n)$ egy tiszta részgráfiával.

Bizonyítás. Legyen n a G csúcsai fokszámának maximuma, de legalább 2. Legyen X olyan véges halmaz, hogy $E \subseteq X$, és $|X| \geq n|V|$. Azt állítjuk, hogy G izomorf $L(X, n)$ egy tiszta részgráfiával.

Legyen $f : V \rightarrow E$, $f(a) = \{e \in E : a \in e\}$. Világos, hogy n és a hozzá képest elegendően nagy X választása miatt minden $a \in V$ -re $|f(a)| \leq n$ és van olyan $h : V \rightarrow [X]^n$ (ahol $[X]^n$ az X összes n -elemű részhalmazát jelöli), melyre minden $a \neq b \in V$ esetén teljesülnek:

1. $f(a) \subseteq h(a)$,
2. $h(a) - f(a) \subseteq X - E$,
3. $(h(a) - f(a)) \cap (h(b) - f(b)) = \emptyset$.

Ekkor az alábbiak miatt h beágyazza G -t $L(X, n)$ -be. A 3. pont alapján h injektív. Továbbá legyen $a \neq b \in V$ tetszőleges csúcspárja G -nek.

Ha $\{a, b\}$ éle G -nek, akkor $f(a) \cap f(b) \in \{a, b\}$, ezért az 1. pont miatt $h(a) \cap h(b) \neq \emptyset$, így $(h(a), h(b))$ éle $L(X, n)$ -nek.

Ha $\{a, b\}$ nem éle G -nek, akkor $f(a) \cap f(b) = \emptyset$, és ezért a 3. pont miatt $h(a) \cap h(b) = \emptyset$, tehát $(h(a), h(b))$ nem éle $L(X, n)$ -nek sem.

Végül megmutatjuk, hogy h értékkészlete $L(X, n)$ egy tiszta részgráfiát feszíti. Tetszőleges $x \in X$ -re, ha $x = \{a, b\} \in E$, akkor $\{c \in V : \{a, b\} \in h(c)\} \subseteq \{a, b\}$, illetve, ha $x \in X - E$, akkor $\{c \in V : x \in h(c)\}$ a 3. pont miatt legfeljebb 1-elemű. Ezért x -et h értékkészletének legfeljebb 2 eleme tartalmazhatja.

Továbbá, ha $a \neq b \in V$, akkor $h(a) \cap h(b) \subseteq \{\{a, b\}\}$, ezért $h(a) \cap h(b)$ legfeljebb 1-elemű. Tehát G h szerinti képe valóban tiszta részgráfja $L(X, n)$ -nek. $\square$

5.4. Tétel (Hrushovski tétele). Az összes véges gráfból álló K_G osztályra teljesül a Hrushovski tulajdonság.

Bizonyítás. ([2]-ben a 4.4 Lemmához tartozó bizonyítás alapján.) Legyen $G = (V, E)$ tetszőleges véges gráf. Az előző 5.3. Lemma szerint van olyan véges X halmaz és $n \in \omega$, melyre G izomorf $L(X, n)$ egy tiszta részgráfiával. Ezért feltehető: G tiszta részgráfja $L(X, n)$ -nek.

Legyen f a G egy parciális izomorfizmusa. Célunk f -et kiterjeszteni $L(X, n)$ egy automorfizmusává. Mivel $L(X, n)$ tiszta részgráfjainak részgráfjai is tiszta részgráfjai $L(X, n)$ -nek, ezért $\text{Dom}(f)$ és $\text{Ran}(f)$ is tiszta részgráfjai $L(X, n)$ -nek.

Most megadjuk az X halmaz egy α permutációját. Ha $x \in X$ és van olyan $a \neq b \in V$, hogy $x \in a \cap b$, akkor $\{a, b\} \in E$, ezért $\{f(a), f(b)\} \in E$, ezért $f(a) \cap f(b)$ 1-elemű. Ez az egyetlen elem legyen $\alpha(x)$. Ez jól definiált, mert G tisztasága miatt nincs olyan másik $a' \neq b' \in V$, melyre $x \in a' \cap b'$ teljesülne.

Ezután úgy terjesszük ki α -t, hogy minden $a \in V$ -re α bijekció legyen az

$$\begin{aligned} \{x \in a : (\forall b \in V - \{a\}) : x \notin b\}, \quad \text{és} \\ \{x \in f(a) : (\forall b \in V - \{a\}) : x \notin f(b)\} \end{aligned}$$

halmazok között.

Végül terjesszük ki α -t az X egy permutációjává, és legyen $\alpha^* : L(X, n) \rightarrow L(X, n)$, $\alpha^*(a) = \{\alpha(x) : x \in a\}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy α^* egy, az f -et kiterjesztő automorfizmusa $L(X, n)$ -nek. $\square$

Megjegyezzük, hogy az 5. fejezet elején felsorolt struktúraosztályok mindegyike rendelkezik a Hrushovski-tulajdonsággal.

5.5. Állítás. K_G -re teljesülnek a HEP, JEP és AP tulajdonságok.

Bizonyítás. A HEP tulajdonság nyilvánvaló, hiszen véges gráfok részstruktúrái is véges gráfok.

A JEP tulajdonság belátásához tegyük fel, hogy $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2) \in K_G$. G_1 -et és G_2 -t alkalmas izomorf másolataikra cserélve feltehető, hogy csúcshalmazaik diszjunktak: $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Legyen $H = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ az a gráf, melynek csúcshalmaza $V_1 \cup V_2$ és élhalmaza $E_1 \cup E_2$. Világos, hogy $H \in K_G$, és hogy V_1 illetve V_2 identitásfüggvénye G_1 -nek illetve G_2 -nek H -ba való beleágyazása. Ezért a JEP tulajdonság valóban teljesül K_G -re.

Az AP tulajdonság igazolásához tegyük fel, hogy $G_0 = (V_0, E_0), G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2) \in K_G$ és $f : G_0 \rightarrow G_1, g : G_0 \rightarrow G_2$ beágyazások. Az előző bekezdéshez hasonlóan G_0 -t, G_1 -et, G_2 -t alkalmas izomorf másolataikra cserélve feltehető, hogy $V_1 \cap V_2 = V_0$, és f illetve g a megfelelő identitásfüggvények. Mint előbb, H most is

legyen a $H = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ gráf. Könnyű meggondolni, hogy H a G_0, G_1, G_2 keresett K_G -beli amalgiája (az $id_{V_1} : G_1 \rightarrow H$, illetve $id_{V_2} : G_2 \rightarrow H$ beágyazásokkal). $\square$

Az 5.5. Állítás szerint a K_G osztály kielégíti az 1.7. Tétel feltételeit, ezért létezik a Fraïssé-limesze.

5.6. Definíció. Az összes véges gráfokból álló K_G osztály (az 1.7. Tétel és az 5.5. Állítás miatt létező) Fraïssé-limeszét Rado-gráfnak nevezzük, és G_R -el jelöljük.

Most a 3. és 4. fejezetek eredményeit felhasználva belátjuk a Rado-gráf néhány érdekes tulajdonságát.

5.7. Tétel. *A Rado-gráf automorfizmuscsoportjában a véges jellegű utomorfizmusok halmaza sűrű. Precízebben, minden $n \in \omega$ -ra $Aut_n^{Fin}(G_R)$ sűrű $Aut(G_R)^n$ -ben.*

Bizonyítás. Az 5.4. Tétel miatt K_G -re teljesül a Hrushovski-tulajdonság, ezért a 3.4. Tétel miatt minden $n \in \omega$ -ra $Aut_n^{Fin}(G_R)$ sűrű $Aut(G_R)^n$ -ben. $\square$

A következő tétel szerint véges jellegű automorfizmusok egy sűrű halmazát egyetlen konjugáltosztállyal is elő lehet állítani.

5.8. Tétel. *Tetszőleges $n \in \omega$ -ra $Aut(G_R)^n$ -ben van gyengén generikus $\bar{f} = \langle f_0, \dots, f_{n-1} \rangle$ elem.*

Bizonyítás. Azt fogjuk megmutatni, hogy a G_R Rado-gráfra teljesül a 4.4. Tétel 2. pontja. Az 5.7. Tétel miatt $Aut_n^{Fin}(G_R)$ minden n -re sűrű $Aut(G_R)^n$ -ben. Ezért elég megmutatni a következőt:

Ha $n \in \omega$ és $h_0^0, h_0^1, \dots, h_{n-1}^0, h_{n-1}^1$ véges parciális izomorfizmusai G_R -nek, akkor G_R -nek van olyan g automorfizmusa, hogy

$$h_0^0 \cup g[h_0^1], \dots, h_{n-1}^0 \cup g[h_{n-1}^1]$$

mindegyike parciális izomorfizmusa G_R -nek.

A konstrukció azon az észrevételen alapul, hogy ha k^0, k^1 olyan parciális izomorfizmusai G_R -nek, hogy sem $Dom(k^0)$ és $Dom(k^1)$ sem $Ran(k^0)$ és $Ran(k^1)$ csúcsai között nem futnak élek, akkor $k^0 \cup k^1$ is parciális izomorfizmusa G_R -nek.

Legyen G_0 az a véges részgráfja G_R -nek, melynek alaphalmaza:

$$\bigcup_{i < n} (\text{Dom}(h_i^0) \cup \text{Ran}(h_i^0)).$$

Hasonlóan, legyen G_1 az a véges részgráfja G_R -nek, melynek alaphalmaza:

$$\bigcup_{i < n} (\text{Dom}(h_i^1) \cup \text{Ran}(h_i^1)).$$

Legyen H a G_0 és G_1 gráfok diszjunkt uniója. Ekkor $H \in K_G = \text{Age}(G_R)$ miatt H beágyazható G_R -be.

Figyeljük meg, hogy G_0 és G_1 is beágyazható H -ba, és H -ban G_0 képeinek egyetlen csúcsából sem megy el G_1 képeinek egyetlen csúcsába se. G_R ultrahomogenitása miatt feltehető, hogy G_0 részgráfja H -nak.

Szintén G_R ultrahomogenitása miatt van olyan $g \in \text{Aut}(G_R)$, mely G_1 -et H -nak a G_1 -el izomorf részgrádjába viszi. Azonban, ekkor

$$h_0^0 \cup g[h_0^1], \dots, h_{n-1}^0 \cup g[h_{n-1}^1]$$

mindegyike parciális izomorfizmusa H -nak (és így G_R -nek is), mert H -ban G_0 (képe) és G_1 képe között nincsenek élek. Ezzel beláttuk, hogy

$$h_0^0 \cup g[h_0^1], \dots, h_{n-1}^0 \cup g[h_{n-1}^1]$$

mindegyike parciális izomorfizmusa G_R -nek, ezért a 4.6. Tétel miatt készen vagyunk.

□

Megjegyezzük továbbá, hogy az 5.8. Tétel több módon is élesíthető. Az egyik ilyen irány a 4.2. Állítás utáni megjegyzésen alapul: az 5.8. Tételben szereplő gyengén generikus $\langle f_0, \dots, f_{n-1} \rangle$ konjugáltosztálya nemcsak sűrű, hanem 2. kategóriájú is. A másik erősítési lehetőséggel kapcsolatban a 6. fejezetre utalunk.

6. A koherens Hrushovski-tulajdonság

Az 5.7. Tételben láttuk, hogy a Rado-gráf automorfizmus-csoportjában a véges jelle-
gű automorfizmusok halmaza sűrű. Precízebben: minden $n \in \omega$ -ra $Aut_n^{Fin}(G_R)$ sűrű
 $Aut(G_R)^n$ -ben. Ez azt jelenti, hogy $Aut(G_R)^n$ minden elemi nyílt részhalmazában van
olyan $\bar{f} = \langle f_0, \dots, f_{n-1} \rangle$, hogy minden $a \in A$ -ra $O_{\langle f_0, \dots, f_{n-1} \rangle}(a)$ véges, azaz

$$\forall a \in A : |O_{\langle f_0, \dots, f_{n-1} \rangle}(a)| < \omega.$$

Ennél valójában több is igaz: $Aut(G_R)^n$ minden elemi nyílt halmazában olyan $\bar{f} = \langle f_0, \dots, f_{n-1} \rangle$ is van, hogy az $\bar{f}$ szerinti pályák mérete egy közös határ alatt maradnak, azaz $\forall a \in A : |O_{\langle f_0, \dots, f_{n-1} \rangle}(a)| < \omega$ így élesíthető:

(*) van olyan $k \in \omega$, hogy minden $a \in A$ -ra: $|O_{\langle f_0, \dots, f_{n-1} \rangle}(a)| < k$.

Ezt [1]-ben úgy látták be, hogy igazolják: $Aut(G_R)$ -nek van olyan sűrű H részcsop-
ortja, melynek végesen generált részcsoporthai végesek maradnak (azaz H lokálisan
véges).

Megjegyezzük, hogy a sűrű, lokálisan véges részcsoporth létezése a Hrushovski-tulaj-
donság egy erősebb, "koherens" változatával áll kapcsolatban. A részletekkel kapcsola-
latban [8]-ra utalunk.

A szakdolgozat lezárásaként ebből a vizsgálati irányból annyit mutatunk be, hogy
megadjuk a (*) feltétel egy ekvivalens alakját.

6.1. Állítás. Ha $\bar{f} \in {}^n Aut(\mathcal{A})$, akkor ekvivalensek a következők:

1. $\langle \bar{f} \rangle$ véges.
2. Létezik olyan N szám, hogy minden $a \in A$ esetén $|O_{\langle \bar{f} \rangle}(a)| \leq N$.

Bizonyítás. ([8]-beli 2.3 Megjegyzés alapján.)

$1 \Rightarrow 2$: Legyen N a generált csoport mérete: $N = |\langle \bar{f} \rangle|$.

Mivel tetszőleges $a \in A$ -ra $O_{\langle \bar{f} \rangle}(a) = \{f(a) : g \in \langle \bar{f} \rangle\}$, és mivel véges sok
csoportelem van, ezért a -t csak véges sok (legfeljebb N darab) helyre tudjuk
vinni.

$2 \Rightarrow 1$: Feltesszük, hogy a pályák mérete közös korlát alatt marad.

Legyen $X \subseteq A$ pályák uniója, és $\varphi : \langle \bar{f} \rangle \rightarrow \text{Sym}(X)$ a következő függvény: a csoport minden g elemét megszorítjuk X -re, azaz: $\varphi(g) = g|_X$. Ekkor φ egy csoport-homomorfizmus lesz.

Ha egy elegendően nagy, de véges X -et veszünk, akkor ez a homomorfizmus egy beágyazás lesz. Hogy tudjuk úgy választani az X -et, hogy az tényleg egy beágyazás legyen? A pályákon definiálunk egy ekvivalenciarelációt: két pálya akkor ekvivalens, ha az általuk feszített részstruktúrák izomorfak, és a pályákon $\bar{f}$ pontonként ugyanúgy hat.

Részletesebben, ha X és Y pályák, akkor X és Y ekvivalens, ha a $\langle \mathcal{B}, g|_X \rangle_{g \in \langle \bar{f} \rangle}$ és $\langle \mathcal{C}, g|_Y \rangle_{g \in \langle \bar{f} \rangle}$ struktúrák izomorfak, ahol $\mathcal{B}$ illetve $\mathcal{C}$ az $\mathcal{A}$ struktúra X által, illetve Y által feszített részstruktúrái.

Ha minden pálya legfeljebb N elemű, akkor csak véges sok ekvivalenciaosztály van, mert egy N elemű struktúra csak véges sokféle lehet izomorfia erejéig, és ezen egy csoport szintén csak véges sokféle módon hathat. X -et válasszuk úgy, hogy az előbbi ekvivalenciarelációnak egy reprezentáns rendszere unióját vesszük.

Ebben az esetben φ nem csak egy homomorfizmus lesz, hanem beágyazás is. Ekkor a generált csoportot egy véges halmaz permutációnak csoportjába ágyaztuk be, tehát a generált csoport véges.

□

Hivatkozások

- [1] Bhatthacharjee, M. and Macpherson, D., *A locally finite dense group acting on the random graph*, Forum Math. Vol. 17, No. 3, pp 513–517 (2005).
- [2] Herwig, B. and Lascar, D., *Extending partial automorphisms and the profinite topology on free groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), No-5, pp 1985-2021, (2000).
- [3] Hodges, W., *Model Theory*, Oxford, Oxford University Press, vol. 42, (1993).
- [4] Kechris, A. and Rosendal, C., *Turbulence, amalgamation, and generic automorphisms of homogeneous structures*, Proc. Lond. Math. Soc., vol. (3) 94 (2007), No. 2, pp 302-350, (2007).
- [5] Macpherson, D., *A survey of homogeneous structures*, Discrete Mathematics, 311 pp 1599–1634, (2011).
- [6] Sági, G., *The profinite topology of free groups and weakly generic tuples of automorphisms*, Mathematical Logic Quarterly, vol. 67, No. 4, pp 432-444, (2021).
- [7] Sági, G., *Automorphism invariant measures and weakly generic automorphisms*, Mathematical Logic Quarterly, vol. 68, No. 4, pp 458-478, (2022).
- [8] Sági, G., *On dense, locally finite subgroups of the automorphism group of certain homogeneous structures*, Mathematical Logic Quarterly, vol. 70, No. 2, pp 162-172, (2024).

Nyilatkozat

Alulírott *Rigó Petra* nyilatkozom, hogy szakdolgozatom elkészítése során MI alapú eszközöket nem alkalmaztam.