

EÖTVÖS LÓRÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Ramsey-problémák körök mentén

Németh-Verbényi Ciprián



Témavezető: Nagy Zoltán Lóránt

Számítógéptudományi tanszék, Matematika Intézet

Budapest, 2025

Köszönetnyilvánítás

Köszönetet mondok témavezetőmnek, Nagy Zoltán Lórántnak, kinek szakmai iránymutatása, valamint irántam való türelme és bátorítása nélkül nem jöhetett volna létre ez a dolgozat.

Köszönet illeti feleségemet, családomat és jótevőimet.

Gratias ago Tibi, Domine, qui ex nihilo mundum vocasti ad esse, omnia in sapientia fecisti.

Dán 2,20-23

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Alapok	2
2.1. Definíciók és alapfogalmak	3
2.2. Alapvető Ramsey tételek	5
3. Kör-Ramsey-számok	10
3.1. $C(3, n)$	11
3.2. $C(4, n)$, $C(5, n)$ és $C(6, 6)$	21
3.3. $C(n, m)$	22
4. Kitekintés további gráfokra	31
4.1. Burr-Erdős sejtés	32
Nyilatkozat	37

1. Bevezetés

Vacsoravendégséget szervezünk hat ember számára. Megérkeznek mindannyian a helyszínre, de már ez a találkozás előtt biztos állíthatjuk, hogy az általunk összeválogatott társaságból ki tudunk választani három embert úgy, hogy ők mind a hárman kölcsönösen ismerik egymást, vagy épp úgy, hogy mindhárman teljesen idegenek egymás számára.

Ezt az állítást nem csak azért fogalmazhatjuk meg, mert rendkívül ügyes módon válogatjuk meg a társaságunkat, hanem egy általános érvényű matematikai igazság húzódik meg mögötte, amit ebben az egyszerű esetben úgy is megfogalmazhatnánk, hogy a $(3, 3)$ Ramsey-szám nem nagyobb, mint hat.

Frank Plumpton Ramsey brit filozófus, közgazdász és matematikus 1928-ban publikálta "On a problem of a Formal Logic" című dolgozatát, mely probléma a '30-as évektől kezdve gráfelméleti köntöst is kapott Erdős Pál és Szekeres György közreműködésének köszönhetően.

Ebben a dolgozatban szeretnénk megismerkedni a Ramsey-típusú problémák alapjaival, amikor két színnel színezett éleken vizsgáljuk klikkeknek a jelenlétét, de az alapproblémákon túllépve a lehetséges általánosítási irányokon belül részletesebben tárgyaljuk majd, hogy mi történik, amikor klikkek helyett egyszínű körök, vagy más egyszerű struktúrájú gráfok létezésére szeretnénk garanciát kapni tetszőleges élszínezés mellett.

2. Alapok

Emberek közötti ismertséget könnyen reprezentálhatunk gráfokkal. Minden egyes ember megfelelhet a gráf egy csúcsának. Amennyiben két ember ismeri egymást, a gráfhoz vegyük hozzá az őket reprezentáló két csúcsot összekötő élt.

Itt jegyezzük meg, hogy (a mi leegyszerűsített modellünkben) két ember között két féle kapcsolat lehetséges: vagy ismerik egymást, vagy pedig nem ismerik egymást (mivel az egyirányú ismertségeket kizárjuk). Ennek megfelelően egy másik fajta reprezentációval is dolgozhatunk.

Ha n embernek az ismertségi gráfját szeretnénk elkészíteni, akkor tegyük ezt a következőképpen: Vegyünk egy n csúcsú teljes gráfot (klikket), és színezzük annak éleit két féle színnel. Késsel, amennyiben a két csúcsa által reprezentált ember ismeri egymást, pirossal pedig akkor, ha nem ismerik egymást.

Ekkor a bevezetőben hallott állítást megfogalmazhatjuk így:

2.0.1. állítás. *Egy 6 csúcsú teljes gráfban (ahol minden csúcs között van él) tetszőleges (piros és kék színnel való) élszínezés esetén találunk piros vagy kék háromszöget.*

Ennek az állításnak a bizonyításában a Dirichlet-féle skatulyaelv lesz segítségünkre:

Bizonyítás. Válasszuk ki az egyik csúcsot a gráfból. Ebből 5 él indul. A skatulyaelv szerint, ha két színnel színezzük ezt az öt élt, akkor lesz olyan szín, amellyel legalább három élt színeztünk ki.

Szimmetriaokokból feltehetjük, hogy ez a szín a kék.

Most tekintsünk három olyan csúcsot, amelybe a kitüntetett csúcsunkból kék él fut.

Ha megvizsgáljuk az ezek közötti élek színét, láthatjuk, hogy az nem lehet kék, mert akkor megjelenne egy kék háromszög ezen két csúcs, illetve az első körben kitüntetett csúcsunk által kifeszítve.

Azonban, ha mind a három élünket pirossal színezzük (mivel késsel nem lehet), akkor piros háromszög jelenik meg az élszínezésünkben. $\square$

Vajon ugyanezt K_5 -ben is megtehetnénk?

Jól látható, hogy a skatulyaelvből nem következik, hogy egy csúcs lefogjon három azonos színű élt, hiszen itt egy-egy csúcsnak csak 4 szomszédja van, ezért egy csúcsból indulóan csak annyit tudunk biztosan, hogy lesz két él, amely ugyanolyan színű.

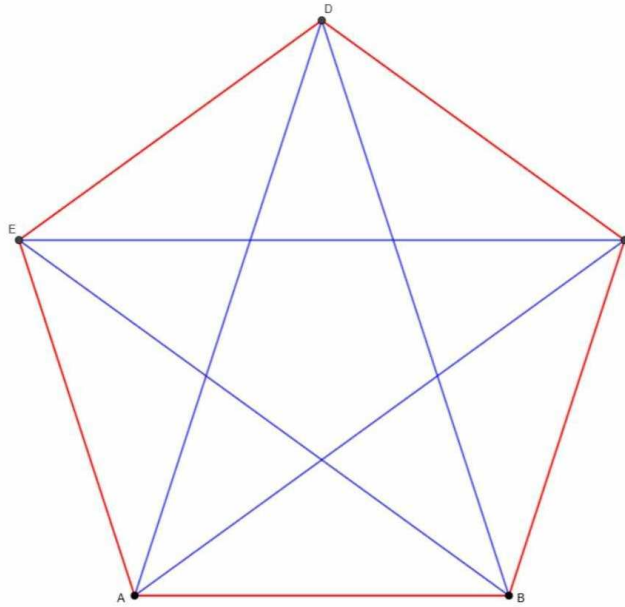
2.0.2. állítás. *A K_5 élszínezhető olyan módon két színnel (pirossal vagy késsel), hogy ne legyen benne se kék, se piros háromszög.*

Bizonyítás. Az előző bizonyításban látottak alapján tudjuk, hogy ha lenne olyan csúcsunk, amiből három ugyanolyan színű él indul ki, akkor szükségszerűen megjelenne egyszínű (vagy

szakszerűbb kifejezéssel élve: monokromatikus) háromszög. Emiatt minden csúcsból két-két piros és kék élnek kell futnia.

Az első csúcsból induló élek színezésekor szimmetria és a gráfok izomorfája miatt mindegy, hogy pontosan melyik két él lesz piros, illetve kék.

Ezt követően egy választásunk van, hogy hogyan színezzük a gráfot, onnantól kezdve minden él a helyére kell, hogy kerüljön, így megkapjuk a következő színezést, amiben valóban nincs se kék, se piros háromszög:



□

2.1. Definíciók és alapfogalmak

A bevezető két állításban már láttuk, hogy gráfeszközökkel lehet jól értelmezni ezt a problémakört, és alkalmas bizonyításokat adni a megfogalmazott állításokhoz.

Emiatt szeretnénk precízebben meghatározni ezeket a gráfelméleti fogalmakat.

2.1.1. definíció. Legyen $V \neq \emptyset$ alaphalmaz, $E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$ V kételemű részhalmazainak a részhalmaza.

Ekkor azt mondjuk, hogy $G = (V, E)$ (irányítatlan) egyszerű gráf, ahol V a csúcsok, E pedig az élek halmaza.

2.1.2. megjegyzés. E elemeire pedig a következő egyszerű jelöléssel hivatkozhatunk:

Amennyiben $u, v \in V$, $uv = vu = \{u, v\} \in E$.

2.1.3. definíció. $G_1 = (V_1, E_1)$ és $G_2 = (V_2, E_2)$ gráfok izomorfak, amennyiben van olyan $f : V_1 \rightarrow V_2$ bijekció, amire teljesül, hogy $uv \in E_1 \iff f(u)f(v) \in E_2$.

2.1.4. definíció. Teljes gráfnak vagy klikknek nevezzük azt a gráfot, ahol minden csúcspár él.
 $G = (V, E)$ ahol $E = \{\{u, v\} \mid \forall u, v \in V, u \neq v\}$
 Jel: K_k , ahol $k = |V|$

2.1.5. definíció. $G = (V, E)$ gráf komplementerének hívjuk a $\overline{G} = (V, \overline{E})$ gráfot, ahol $\overline{E} = \{\{u, v\} \mid \forall u, v \in V, u \neq v\} \setminus E$.

2.1.6. definíció. $G' = (V', E')$ gráfot $G = (V, E)$ részgráfjának nevezzük, amennyiben $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$, továbbá $\forall e \in E' : e \cap V' = e$ (vagyis minden él a részgráfban két V' -beli csúcs között fut, azaz (V', E') pár valóban gráf).

2.1.7. *megjegyzés.* Gyakran, amikor a gráf egy részgráfjának csúcshalmazára hivatkozunk, akkor V' helyett, kontextusba illően csupán G' -t írunk.

2.1.8. definíció. $G = (V, E)$ gráf m -élszínezésének nevezünk egy $c : E \longrightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ függvényt.

2.1.9. *megjegyzés.* $m = 2$ vagy 3 esetén hagyományosan az élszínező függvény a {piros, kék}, illetve {piros, kék, zöld} halmazokba képez.

Ilyen esetben hivatkozhatunk úgy egy élre, hogy az piros, kék vagy zöld.

2.1.10. definíció. Ha van egy élszínezésünk, monokromatikus (azaz azonos színű) élek halmazának nevezzük az élek azon részhalmazait, amelyre igaz, hogy minden él ugyanolyan színű. Az összes piros, kék, illetve i -edik színt tartalmazó élhalmazokat E_p, E_k, E_i -vel jelöljük.

2.1.11. definíció. Ennek megfelelően tudunk beszélni monokromatikus részgráfról is: $G' = (V', E')$ monokromatikus részgráf, amennyiben részgráf és E' monokromatikus élhalmaz.

Definiálhatjuk továbbá speciális osztályait a gráfoknak, többek között köröket, utakat és fákat.

2.1.12. definíció. $G = (V, E)$ gráfot útnak nevezzük, ha van $v_1 v_2 v_3 \dots v_n$ permutációja a csúcsoknak, hogy $v_i v_j \in E \iff j = i \pm 1, 1 \leq i, j \leq n$.

Jel: P_n (amennyiben az út n csúcsból $n - 1$ élből áll).

Az út hosszát ilyenkor az őt alkotó élek száma határozza meg.

Beszélünk azonban két csúcs közötti utakról is:

$v_1 v_2 v_3 \dots v_k$ sorozata a csúcsoknak út v_1 és v_k között, ha $i \neq j$ esetén $v_i \neq v_j$, és $\forall i \leq k - 1 : v_i v_{i+1} \in E$.

2.1.13. definíció. $G = (V, E)$ gráfot körnek nevezzük, ha bármely (egyetlen) élét elvéve utat alkot.

Jel: $C_{|V|}$

$(v_1, v_2, v_3, \dots, v_k, v_{k+1})$ csúcsok sorozatával hivatkozhatunk k hosszú körökre, amennyiben $v_1 v_2 v_3 \dots v_k$ út, $v_{k+1} = v_1$, és $v_k v_1 \in E$.

$k = 3$ esetén háromszögről, $k = 4$ esetén négyszögről, egyébként pedig k -körről beszélhetünk.

2.1.14. *megjegyzés.* Gyakran egy k csúcsú körre tényleg úgy hivatkozunk, hogy a csúcsok indexelését sorba rendezzük olyan módon, hogy $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_k, v_1)$ kört alkosson.

Ilyenkor mondhatjuk azt, hogy az indexeket $\mathbb{Z}_k$ -belinek tekintjük, ahol hagyományosan $\mathbb{Z}_k = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ a k maradékosztályok additív csoportját jelöli, azaz az összeadást k -val való maradékos összeadásnak tekintjük, de 0-t rendre helyettesíthetjük k -val a jobban olvashatóság kedvéért.

2.1.15. definíció. $G = (V, E)$ gráfot fának nevezzük, amennyiben összefüggő, és nincs benne kör.

Egy $n = |V|$ csúcsú fát T_n -el jelölünk, de fontos megjegyeznünk, hogy ezek nem feltétlenül izomorfak.

2.1.16. definíció. Azt mondjuk, hogy $G = (V, E)$ páros gráf, ha létezik olyan V_1, V_2 partíciója V -nek, hogy minden él egy V_1 -beli és egy V_2 -beli csúcsot köt össze, azaz $\forall e \in E : |e \cap V_1| = |e \cap V_2| = 1$.

Ekkor $G = (V_1, V_2, E)$ -ként is hivatkozhatunk erre a gráfra.

2.1.17. definíció. $G = (V_1, V_2, E)$ páros gráf teljes, ha $\forall u \in V_1 \forall v \in V_2 : uv \in E$.

$|V_1| = n$ és $|V_2| = m$ esetén a teljes páros gráfot $K_{n,m}$ -el jelöljük.

2.1.18. definíció. A gráf egy csúcsának fokának nevezzük azt, hogy mennyi él illeszkedik az adott csúcsra.

Jel: $d(v) = |\{e \in E \mid v \in e\}|$

2.1.19. definíció. Egy csúcs színezett foka az a szám, hogy hány adott színű él illeszkedik a csúcsra.

Jel: $d_p(v), d_k(v), d_i(v)$

2.2. Alapvető Ramsey tételek

Ahogy a bevezetőben láthattuk 6 csúcsú az a legkisebb teljes gráf, ahol bármely 2-élszínezésében találunk egy piros vagy kék színű részgráfban háromszöget.

Felvetődik a kérdés: Hogyan tudjuk ezt a feladatot általánosítani?

Az alapfeladatban háromszögről beszéltünk, de a háromszög valójában egy három csúcsú teljes gráf (azaz K_3).

Tehát azt szeretnénk tudni, hogy létezik-e bármely $k \geq 3$ természetes számhoz egy olyan n , hogy K_n tetszőleges 2-élszínezésében van vagy piros vagy kék rész K_k gráf.

2.2.1. állítás. Ha egy adott $k \geq 3$ -hoz létezik a fenti feltételnek megfelelő n szám, akkor létezik egy legkisebb ilyen n_0 , hogy $\forall m \geq n_0$ -ra is teljesül a feltétel, de $\forall m < n_0$ -ra van olyan 2-élszínezés az m méretű klikkben, hogy nincs se piros, se kék K_k részgráf azon színezés mellett.

2.2.2. definíció. Amennyiben létezik ilyen n_0 szám, azt a k -adik Ramsey-számnak nevezzük.
Jel: $R(k) = n_0$

Ezzel az alapfeladat általánosításának első lépését megtettük, de nagyon gyorsan, és nagyon természetesen fedezhetünk fel további általánosításait a problémának, emiatt is hivatkozhatunk Ramsey-problémakörként mindezekre a problémákra:

- Mi történik akkor, ha nem csak két színnel színeznénk a teljes gráfot, hanem r db színnel?
- Lehet-e, hogy nem mindenképp ugyanakkora méretű klikkeket szeretnénk találni valamilyik színű részgráfból, hanem a megfelelő színekhez más más méretű részklikk létezését vizsgálánánk?
- Vizsgálhatunk-e mást, mint klikkek jelenlétét, például köröket – ami dolgozatunkban nagyobb szerepet is kap majd –, vagy esetleg utakat, fákat, vagy egyéb struktúrális szempontok alapján csoportosítható gráfokat?
- Halmazelméleti oldalról hogyan közelíthetjük meg mindezt?

Ezek mind olyan kérdések, amelyek természetesen bontakoztak ki, előbb a '30-as években, aztán a '70-es években, de még a mai napig is születnek újabb eredmények (vö. Erdős-Burr sejtés igazolása)

2.2.3. definíció. Ramsey-szám:

$R(k, l)$: A legkisebb klikk mérete, amelynek bármely 2-élszínezésében található piros k méretű klikk, vagy kék l méretű klikk.

$R(k_1, k_2, \dots, k_m)$: A legkisebb klikk mérete, amelynek bármely $(m \geq 2)$ m -élszínezéshez létezik olyan i , hogy van benne k_i méretű i színű klikk.

Ezt a két definíciót tekintjük a klasszikus eseteknek, ezért mielőtt tovább lépnénk a különböző általánosításokra, tekintsünk rá arra, hogy milyen eredmények születtek ezen Ramsey-számok kapcsán.

Ramsey tétele, akiről az egész problémakör a nevét kapta, mindössze ennyit mond ki:

2.2.4. tétel (Ramsey, 1928). $R(k_1, k_2, \dots, k_m)$ véges.

Ő eredetileg magát a kérdést nem is gráfelméleti alapon, hanem inkább halmazelméleti-logikai struktúrákkal közelítette meg. Itt arról, hogy mi a pontos határ, azt nem mondjuk ki, de az biztos, hogy van határ. Amolyan általánosított skatulyaelvként is tekinthetünk rá.

A '30-as években, amikor Erdős Pálék elkezdtek foglalkozni a kérdéssel egy geometriai-kombinatorika feladat miatt, akkor adta magát, hogy gráfon keresztül vizsgálják a problémát, és így meg tudtak határozni egy jól definiálható felső korlátot:

2.2.5. tétel (Erdős-Szekeres, 1935 [1]). $R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{l-1}$

Mindez azért működhet, mert a Ramsey-számok a binomiális együtthatókhoz hasonló tulajdonsággal rendelkeznek:

2.2.6. lemma. $R(k, l) \leq R(k-1, l) + R(k, l-1) - 1$

Természetesen látható, hogy ez nem éles, már elég kicsi eseteknél, rögtön az $R(3, 4)$ -nél elveszti az élességét a felső becslés.

Becsülhetjük azonban még durvábban is, exponenciális módon, cserébe így jobban tudunk beszélni a Ramsey-szám aszimptotikájáról. Kihaszználva, hogy a Pascal-háromszög n . sorának összege 2^n , könnyen megkapható a következő felső határ a diagonális (azaz $k = l$) esetben, szintén Erdős és Szekeres nyomában:

2.2.7. tétel. $R(k, k) = R(k) < 4^k$

2.2.8. *megjegyzés.* Konstans szorzóval könnyedén lehet még farigcsálni ezen a becslésen, de ennél erősebb javításokat is sikerült elérni az évek folyamán.

Az exponenciális határ alapját azonban egészen a múlt évig nem sikerült 4-ről lecsökkenteni. Egy 2023-as cikk (preprint)[3] szerzői Campos, Griffith, Morris és Sahasrabudhe azonban azt állítják, hogy létezik olyan pozitív konstans ($\geq \frac{1}{128}$), amivel ez csökkenthető, azaz elég nagy k esetén:

$$\exists \varepsilon \geq \frac{1}{128} > 0, \quad R(k) < (4 - \varepsilon)^k$$

2.2.9. *megjegyzés.* Ezt az aszimptotikus becslést még nagyobb mértékben sikerült javítani egy évvel később, 2024-ben, de ez az eredmény sem jelent meg még folyóiratban:

$$R(k) < 3 \cdot 8^{k+o(k)} [4]$$

Ezek a felső határok akkor is érdekesek lennének számunkra, ha minden (k, l) párra ismernénk R értékét, mivel egy jól definiálható függvénnyel becsüljük, de a valóságban még ennél is hasznosabb, ugyanis 2-élszínezés esetében a mai napig bezárólag mindössze kilenc $3 \leq k \leq l$ esetén tudjuk R pontos értékét.

Az alábbi táblázatban láthatóak azok a Ramsey számok félkövérrel szedve, amelyek pontosan meg vannak határozva, a többi értékhez pedig a jelenleg közismert legjobb (vagy közel legjobb) alsó-felső határok kerültek, a teljesség igénye nélkül.[5]

$k \setminus l$	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	14	18	23	28	36	40-42
4		18	25	36-41	49-61	56-84	73-115	92-149
5			43-49	58-87	80-143	101-216	126-316	144-442
6				102-165	113-298	132-495	169-780	179-1171
7					205-540	...		

Ahogy láthatjuk, többek között már $R(5)$ meghatározása is nehézséget okoz. Ehhez kapcsolódik Erdős Pál egy híres mondása:

„Képzeljük el, hogy az embernél sokkal hatalmasabb idegen faj landol a Földön, és az $R(5, 5)$ értékét követelik, vagy elpusztítják a bolygót. Ebben az esetben hadra kéne fogunk minden számítógépet és matematikust, hogy megtaláljuk az értéket. De tegyük fel, hogy ehelyett az $R(6, 6)$ értékére kíváncsiak; ebben az esetben minden erőnkkel meg kéne próbálnunk legyőzni őket.”¹

Mindez azért van, mert már önmagában az, hogy eldöntsük egy n csúcsú gráfról, hogy van-e benne k méretű klikk, az NP-teljes feladat, ami azt jelenti – anélkül, hogy mélyebben belemennénk a számítástudomány tételeibe és definícióiba –, hogy amennyiben ismernénk rá polinom idejű (azaz gyorsan futó) algoritmust, ami megoldja ezt a feladatot, akkor számos másik bonyolult feladathoz is találhatnánk olyan algoritmust, ami szintén ilyen gyorsan futna. Ez önmagában nem jelenti azt, hogy lehetetlen ilyen algoritmust találni, de az elmúlt jó pár évtizedben nem sikerült ez soha senkinek, és amennyiben sikerülne, az magával hordozná azt, hogy összeomlik rengeteg olyan rendszer, ami a titkosításoknál használja ki pont azt, hogy vannak olyan bonyolult feladatok, amik algoritmikusan belátható időn belül nem megoldhatóak (legalábbis jelen állás szerint).

Emiatt válik valóban érdekes kérdéssé számunkra, hogyha nem tudjuk meghatározni a pontos értékeket, akkor milyen általános érvényű határokat mondhatunk, felülről, valamint alulról?

2.2.10. tétel (Erdős, 1947 [2]). $R(k) > 2^{\frac{k}{2}}$

Erdős ezt a tételt az eredeti bizonyításában még nem az általa kidolgozott "véletlen módszerrel" bizonyította, de később ez is elterjedt megoldása lett ennek a feladatnak, ami ebben az esetben azt jelenti, hogy egy véletlenszerűen 2-élszínezett $2^{\frac{k}{2}}$ méretű klikkben pozitív a valószínűsége, hogy találunk piros vagy kék K_k -t.

Fontos megjegyeznünk, hogy nem csak az $R(k)$ számokra – amelyeket hívhatunk diagonális Ramsey-számoknak is – sikerült ilyenfajta korlátokat meghatározni, hanem a diagonálison kívül eső $R(k, l)$ számokra is, olyan módon, hogy k -t rögzítettnek tekintjük, l -el pedig tartunk a végtelenbe.

2.2.11. tétel (Shearer, 1991 [7] / Bohman-Keevash, 2020 [9] / Fiz Pontiveros-Griffiths-Morris, 2021 [10]).

$$\left(\frac{1}{4} - o(1)\right) \frac{l^2}{\log(l)} \leq R(3, l) \leq (1 + o(1)) \frac{l^2}{\log(l)}$$

2.2.12. tétel (Li-Rousseau-Zang, 2001 [8] / Mattheus-Verstraete, 2024 [11]).

$$c \cdot \frac{l^3}{\log^4(l)} \leq R(4, l) \leq (1 + o(1)) \frac{l^3}{\log^2(l)},$$

ahol c alkalmas pozitív konstans.

¹Ezt az idézetet fellelhetjük többek között ebben a tudományos ismeretterjesztő könyvben:
Bruce Schechter: Agyam nyitva áll! Erdős Pál matematikai utazásai

2.2.13. *megjegyzés.* $R(4, l)$ alsó becslésére Erdős Pál 1990-ben fogalmazta meg azt a sejtést, hogy van olyan c_1, c_2 konstans, hogy $R(4, l) > c_1 \frac{l^3}{\log^{c_2}(l)}$, aminek bizonyításáért 250\$-os díjat ajánlott fel. Ezt sikerült Mattheusnak és Verstraetenek belátniuk $c_2 = 4$ -re 2024-ben.

2.2.14. tétel (Ajtai-Komlós-Szemerédi, 1980[6] / Bohman-Keevash, 2020). *Ha k rögzített, $l \geq k$, akkor*

$$c_1(k) \frac{l^{\frac{k+1}{2}}}{(\log(l))^{\frac{k+1}{2} - \frac{1}{k-2}}} \leq R(k, l) \leq c_2(k) \frac{l^{k-1}}{(\log(l))^{k-2}}$$

3. Kör-Ramsey-számok

A Ramsey tétel hagyományos problémafelvetése teljes gráfokról szólt, azonban természetesen adódott a kérdés, hogy klikkek helyett tekinthetünk-e más gráfokat, például köröket.

3.0.1. definíció. Kör-Ramsey-szám:

$C(k, l)$: A legkisebb klikk mérete, amelynek bármely 2-élszínezésében található piros k hosszú kör, vagy kék l hosszú kör.

Lenne lehetőségünk a sima Ramsey-számokhoz hasonlóan több színre is vizsgálni a kör-Ramsey-számokat, de ebben a dolgozatban két színre szorítkozunk.

3.0.2. állítás. $C(k, l) = C(l, k)$

Mivel $C(k, l)$ szimmetrikus, gyakran könnyebb úgy hivatkozni rá, hogy a kisebbik index szerepel az első helyen.

Mi történik akkor, ha megvizsgáljuk $C(k, l)$ értékeit?

3.0.3. állítás. $C(3, 3) = R(3, 3) = 6$, hiszen $C_3 \cong K_3$

3.0.4. állítás. $C(k, l) \leq R(k, l)$

Az is teljesen világos, hogy $C(k, l)$ nem lehet nagyobb $R(k, l)$ -nél, hiszen egy k méretű teljes gráf mindig tartalmaz k hosszú kört.

Továbbá ebben a dolgozatban látni fogjuk, hogy a kör-Ramsey-számok sokkal egzaktabbul meghatározhatóak, de ehhez alulról kell kezdenünk az építkezést.

3.0.5. állítás. $C(4, 4) = 6$

Bizonyítás. $R(3, 3) > 5$ bizonyításához adott gráfszínezés megadható $C(4, 4) > 5$ belátásához is tanúnak.

Tekintsünk tehát egy hat csúcsú gráfot. Azt szeretnénk megmutatni, hogy ebben lesz minden színezés esetén vagy piros vagy kék 4-kör.

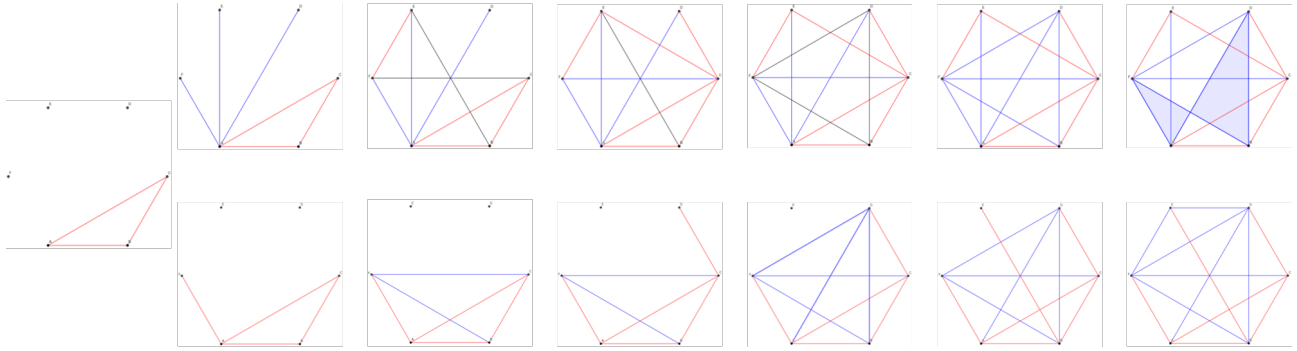
Mivel $C(3, 3) = 6$, biztosak lehetünk benne, hogy van minden élszínezésben piros vagy kék háromszög.

Szimmetria miatt feltehetjük, hogy piros színű háromszög (ABC) van az élszínezésünkben.

Két esetet vizsgáljunk meg:

1. A, B, C közül van olyan csúcs, aminek kék foka 3.
2. A, B, C csúcsok mindegyikének piros kifoka legalább három.

Az alábbi ábrán a két sorban e két esetet vizsgáltam végig, ahol az első opciót leszámítva minden egyes él megszínezése „kényszerített módon” történt, azaz ha valamely élet más színűre színeztük volna, akkor valamely feltétellel idő előtt ellentmondásba kerültünk volna:



A bizonyítás teljes végiggondolását innen az olvasóra bízunk, de látható, hogy mindkét esetben eljutottunk egy olyan élig, amelynek a nem pirosra-színezhetősége egy kék C_4 megjelenését eredményezte a színezésünkben, $C(4, 4) \leq 6$ valóban teljesül. $\square$

3.1. $C(3, n)$

Általánosabb képlet gyártásához vizsgáljuk meg előbb azt az esetet, ha C függvény egyik változóját lerögzítjük. Mit mondhatunk el $C(3, \cdot)$ -ről?

3.1.1. tétel (Chartrand-Schuster, 1971 [12]). $C(3, n) = 2n - 1$, ha $n \geq 4$

Bizonyítás. 1. lépés: $C(3, n) > 2n - 2$

Olyan színezést keresünk, amiben nincs piros háromszög, se kék C_n .

Ehhez vegyünk egy piros élekből álló $K_{n-1, n-1}$ -et, ennek a komplementerét pedig színezzük kékkel.

Látható, hogy ekkor valóban nincs piros háromszögünk a színezésben, mert egy páros gráf élei csak páros hosszú kört tudnak alkotni.

A kék él pedig két független K_{n-1} -et alkotnak ebben a színezésben, amiben valóban nincs n hosszú kör.

2. lépés: $C(3, n) \leq 2n - 1$

Ezt teljes indukcióval fogjuk belátni:

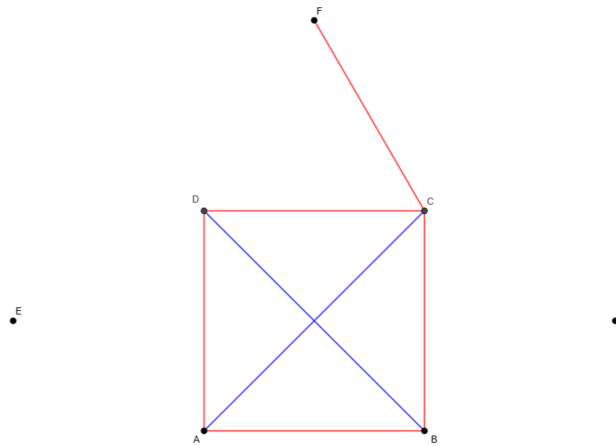
Először is látnunk kell, hogy $C(3, 4) \leq 7$

Próbáljunk meg kiszínezni egy 7 csúcsú teljes gráf éleit úgy, hogy ne legyen benne se piros háromszög, se kék négyszög. Mivel $C(4, 4) = 6$, és 7 csúcsú gráfot akarunk kiszínezni kék négyszög-mentesen, emiatt biztosak lehetünk abban, hogy lesz egy piros négyszög a színezésünkben. Tegyük fel, hogy A, B, C, D csúcsok feszítik ezt a négyszetet, olyan módon, hogy $AB, BC, CD, DA \in E_p$. Ekkor AC és $BD \in E_k$, különben ezen négy csúcs által alkotott részgráfban is lenne piros háromszög. Most tekintsünk egy A, B, C, D -től különböző csúcsokat.

Ekkor azt állítjuk, hogy ezek egyikéből mennie kell piros élnek az A, B, C, D csúcsok egyikébe, ha el szeretnénk kerülni, hogy kék négyszöget találjunk a színezésben:

Indirekt tegyük fel, hogy mégis, hogy $\{E, F, G\}$ és $\{A, B, C, D\}$ csúcshalmazok között futó minden él kék, azaz egy kéken színezett $K_{3,4}$ -et alkotnak, aminek $K_{2,2}$ része, ami pedig izomorf egy C_4 -el.

Tehát valóban szükséges, hogy ezen élek között legyen olyan is, ami pirossal van színezve. Szimmetria miatt tekinthetjük úgy, hogy az FC él piros, ahogy az alábbi ábrán is mutatjuk.



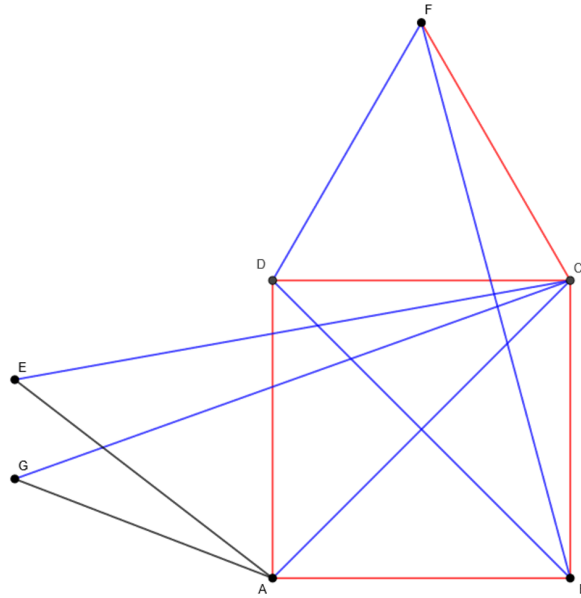
Ekkor triviálisan adódik, hogy DF és BF éleket kékkel kell színeznünk, hiszen ha pirosak lennének, akkor sorra DFC illetve BFC piros háromszög lenne.

Ha most tekintjük továbbá C csúcs színezett fokszámát, láthatjuk, hogy $d_p(C) = 3$.

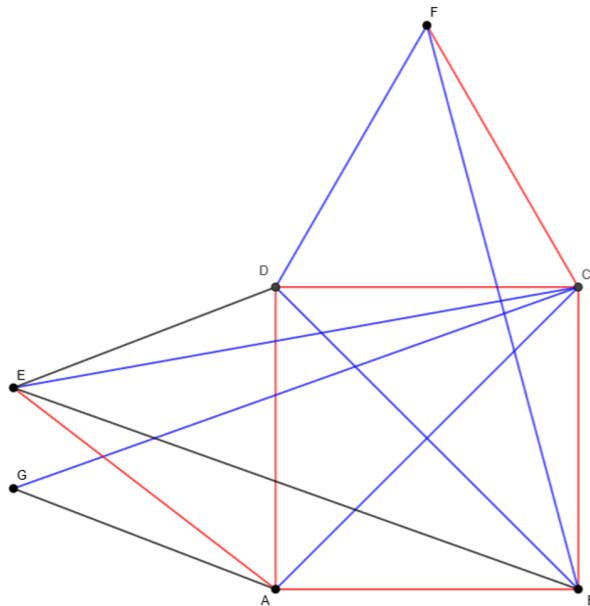
Vajon C -ből mehet még ki piros él?

Azt állítjuk, hogy nem mehet, mivel ha bármely v csúcsra $d_p(v) \geq 4$, akkor biztosan találunk ennek a csúcsnak, illetve a négy piros éllel hozzá tartozó szomszédjából alkotott részgráfban egy piros háromszöget vagy kék négyszöget. Hiszen, ha e négy szomszéd között futna egyetlen piros él, akkor máris találunk piros háromszöget, ellenkező esetben pedig egy kék 4-es klikket találunk, ami tartalmaz négy hosszú kört is.

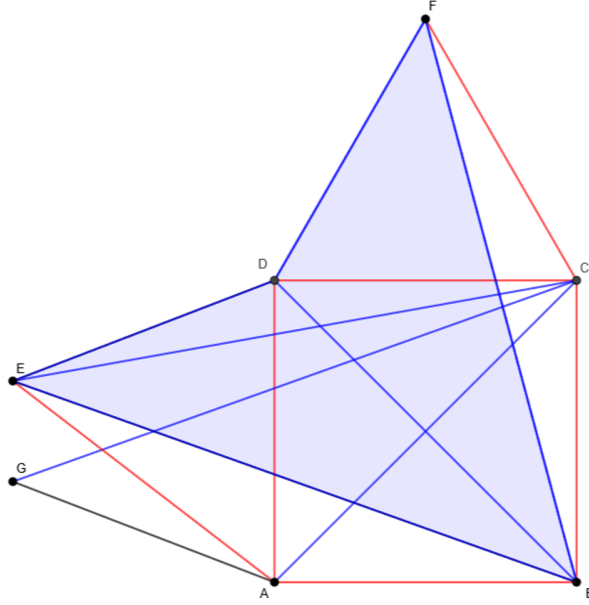
Tehát a C -ből induló összes eddig még nem színezett élt kékkel kell színeznünk.



Most tekintsük az E és G csúcsokat a gráfban, illetve a belőlünk A -ba futó éleket.
 Ha mindkét él kék lenne, akkor a $CEAG$ kör teljesen kék lenne, tehát az egyik él az EA és GA közül biztosan piros. (Szimmetria miatt mondhatjuk azt, hogy ez az él az EA .)



Ekkor azonban az AE , AD , AB élek piros volta miatt, hogy elkerüljük a piros háromszöget EB és ED éleket is kézzel kellene színeznünk.



Viszont ebben az esetben $BFDE$ négyszög válna kéké, ami azt jelenti, hogy egy 7 csúcsú teljes gráf élei tetszőleges színezésében elő kell, hogy forduljon piros C_3 vagy kék C_4 .

Ezzel az indukció alaplépését, hogy $C(3, 4) \leq 7$ beláttuk.

Ekkor tételezzük fel, hogy $n = 4..k$ -ig igaz, hogy $C(3, n) \leq 2n - 1$.

Vizsgáljuk $n = k + 1$ esetét:

Tekintsük ekkor a $2k + 1$ méretű gráfot, és vegyük egy olyan színezését, amiben nincs piros C_3 . Mivel $C(3, k) \leq 2k - 1$, és feltettük, hogy a színezésben nincs kék háromszög, emiatt kell, hogy legyen kék C_k .

Ekkor a csúcsok halmazát két partícióra oszthatjuk: az első halmazban legyenek azok a csúcsok, amelyek benne vannak az általunk kiválasztott egy konkrét k méretű kék körben. Jelöljük ezt a halmazt V_k -val, és ennek elemeit $v_1, v_2, \dots, v_k$ -val, ráadásul olyan módon, hogy $\forall i \in \mathbb{Z}_k : v_i v_{i+1} \in E_k$, a másik halmazt pedig jelöljük U_{k+1} -el, elemeit pedig $u_1, u_2, \dots, u_{k+1}$ -el.

(0.1) Ha U_{k+1} halmaz egy csúcsából menne két kék él a kék k -körünk két szomszédos csúcsába is, akkor rögtön találnánk egy kéken színezett $k + 1$ hosszú kört.

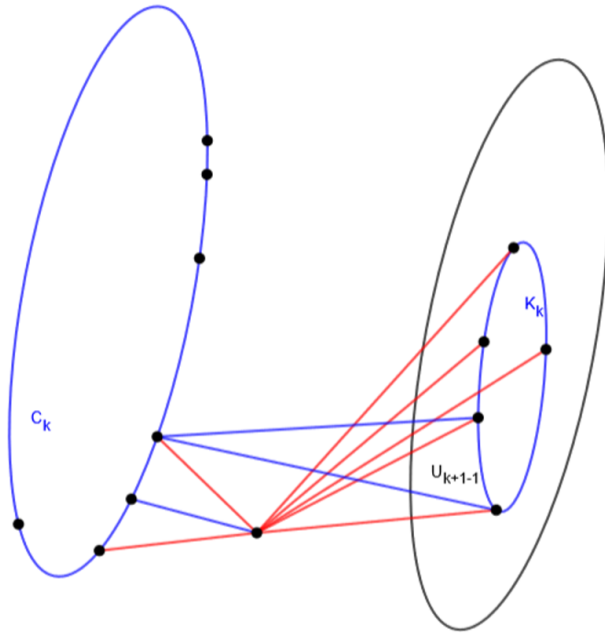
(0.2) Könnyen látható, hogy V_k és U_{k+1} között kell, hogy legyen kék él, hiszen ha nem lenne, akkor az U_{k+1} halmazon belüli éleket mind kékkel kellene színezni, hiszen egy ottani piros él mindkét csúcsa piros éllel lenne hozzákötve bármely V_k -beli csúcshoz, ami egy piros háromszöget adna a színezésünkben. Ekkor azonban az U_{k+1} -en belüli élek színezése egy $k + 1$ méretű kék klikket adna, ami tartalmaz $k + 1$ hosszú két kört is.

(0.3) Ekkor választhatunk egy ilyen kék élet, ami V_k és U_{k+1} halmazok között van. Ennek két végpontját jelöljük v_l -el és u_i -vel az őket tartalmazó partícióknak megfelelően.

(0.4) $u_i v_{l-1}$ és $u_i v_{l+1}$ éleket ekkor pirossal kell színeznünk (B) miatt.

(0.5) Az $U_{k+1} \setminus \{u_i\}$ halmazt jelöljük U_{k+1-1} -el.

(0.6) u_i és U_{k+1-1} között kell, hogy legyen kék él, ahogy indirekt módon az alábbi ábra is mutatja számunkra:

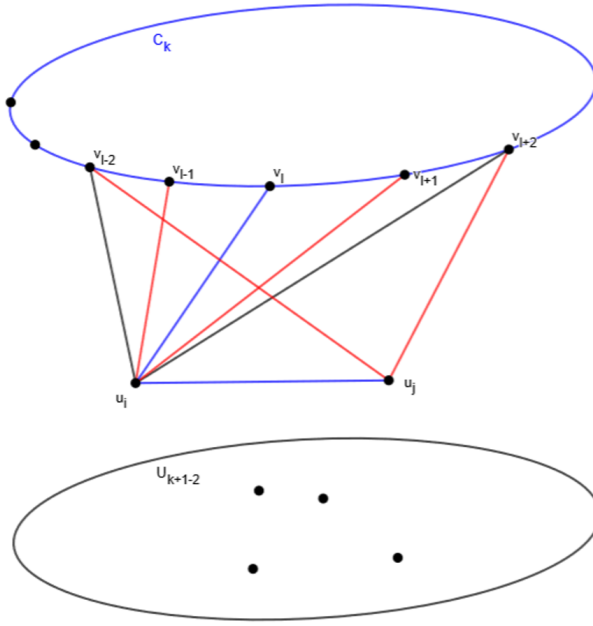


Legyen az egyik ilyen kék él $u_i u_j$, a továbbiakban pedig jelöljük az $U_{k+1} \setminus \{u_i, u_j\}$ halmazt U_{k+1-2} -vel.

Ekkor az $u_j v_{l-2}$ és az $u_j v_{l+2}$ éleknek pirosnak kell lenniük, különben a k hosszú kék körben le-cserélhető lenne a kettő hosszú $v_{l\pm 2} v_{l\pm 1} v_l$ út a három hosszú $v_{l\pm 2} u_j u_i v_l$ kék útra, így megjelenne egy C_{k+1} a színezésünkben.

(0.7) Most tekintsük az $u_i v_{l-2}$ és az $u_i v_{l+2}$ éleket.

$k = 4$ esetén megeshet ugyan, hogy $v_{l-2} = v_{l+2}$, de ez nem okoz gondot a bizonyításban.



Ezen a ponton a bizonyításban meg kell vizsgálnunk két esetet:

Első esetben feltételezzük, hogy e két él között van kékkel színezett a jó színezésben, második esetben pedig azt tesszük fel, hogy egyikük sem kékkel van színezve, azaz mindketten pirosak. Amennyiben arra jutunk, hogy mindkét esetben szükséges, hogy piros háromszög hiányában előforduljon kék $k + 1$ kör, teljesül az indukciós lépés és a tételt beláttuk.

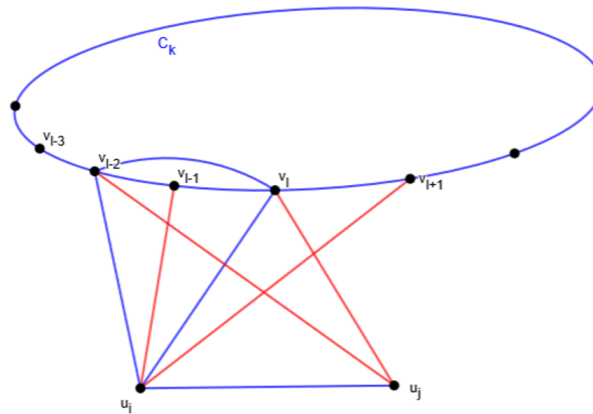
(1) Tekintsük tehát az első esetet:

(1.1) Szimmetria miatt tetszőlegesen feltehetjük, hogy az $u_i v_{l-2}$ él kék.

(1.2) Ez a kék él sok élnek a színezését determinálja, de fókuszáljunk az $u_j v_l$ élre.

Ennek pirosnak kell lennie, különben $v_{l-2} u_i u_j v_l$ -el egy kettő hosszú kék szakaszt lehetne áthidálni három hosszan a kék körből, ami $k + 1$ hosszúra bővítené a kék kört.

(1.3) Ekkor azonban a $v_{l-2} v_l$ élnek kell kéknek lennie, lévén, hogy mindketten pirosan elérhetőek u_j -ből.



(1.4) $u_j v_{l+1}$ él is piros kell, hogy legyen, különben $v_{l-2} v_l u_i u_j v_{l+1}$ -vel tudnánk növelni eggyel a

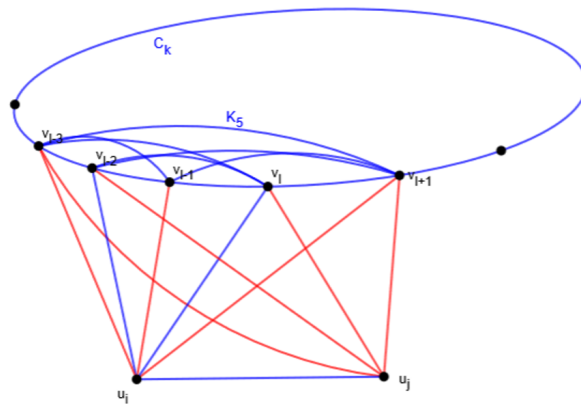
kék kör hosszát.

(1.5) Ugyanez igaz a $u_j v_{l-3}$ élre is.

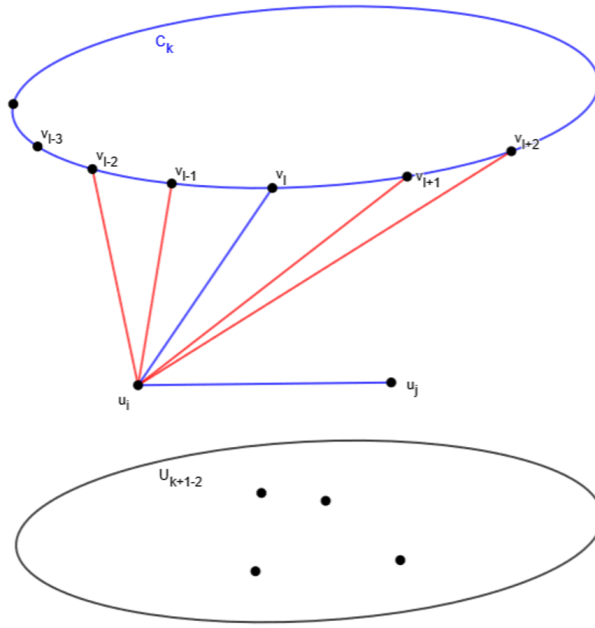
(1.6) Ekkor látható, hogy $k = 4$ esetén, amikor $v_{l+1} = v_{l-3}$ ($u_i, v_l, v_{l+1}, v_{l-1}, v_{l-2}, u_i$) alkot $k + 1$ hosszú kék kört.

(1.7) $k > 4$ esetén a $v_{l-3}, v_{l-2}, v_l, v_{l+1}$ csúcsok közötti élek színezése kék K_4 -et alkot. Továbbá mind a négy csúcs a v_{l-1} csúcsból is kéken látszódik (v_{l-2}, v_l a körön belüli él miatt, v_{l-3}, v_{l+1} pedig az u_i és v_{l-1} -el alkotott háromszög miatt).

(1.8) Ez az öt (a körben megszakítás nélkül egymást követő) csúcs így kék K_5 -öt alkot, amelyek közül kettőnek is (v_{l-2} és v_l -nek) kék szomszédja az u_i , azaz ilyen módon is találunk kék C_{k+1} -et a színezésben (például v_{l-3} -ból érkezve a kört $v_{l-2} u_i v_l v_{l-1} v_{l+1} v_{l+2} \dots v_{l-4}$ sorrendben).

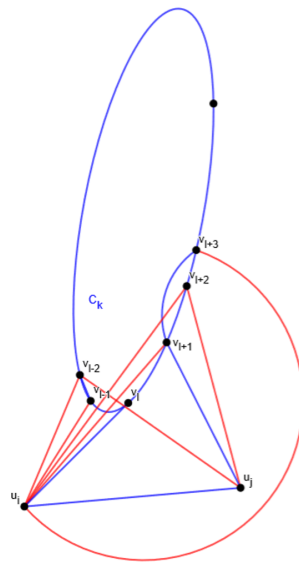


(2) Ezzel áttérhetünk a második eset tárgyalására, amikor $u_i v_{l-2}$ és $u_i v_{l+2}$ él is pirosra van színezve.

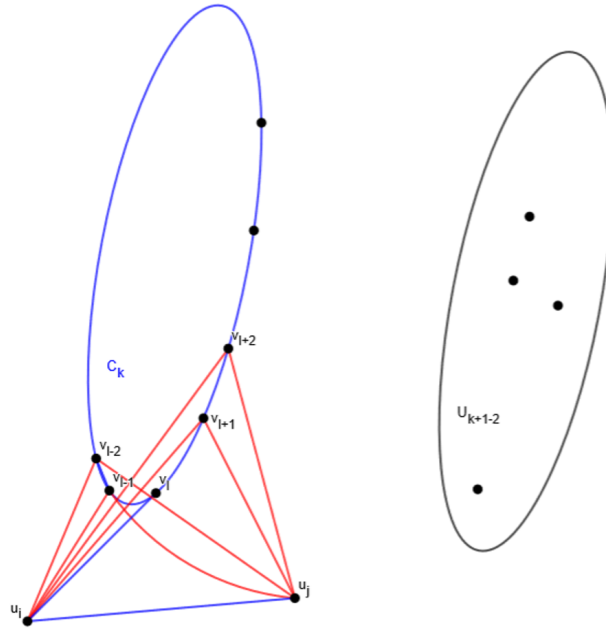


(2.1) Ebben az esetben mind $u_j v_{l-1}$ és $u_j v_{l+1}$ éleknek is pirosaknak kell lenniük, hiszen ha egyik ezek közül (szimmetria miatt feltehetjük, hogy az $u_j v_{l+1}$ él) kék lenne, akkor $(v_{l+1} u_j u_i v_{l+3})$ áthidalás miatt $v_{l+3} u_i$ piros kell, hogy legyen. Emiatt azonban a $v_{l+3} v_{l+1}$ élnek kéknek kell lennie, hisz u_i -ből nézve mindkét csúcs piros.

Ekkor a három hosszú kék $v_l \dots v_{l-3}$ szakaszt tudjuk lecserélni a négy hosszú $v_l u_i u_j v_{l-1} v_{l-3}$ szakaszra, hogy megtaláljuk a $k+1$ hosszú kék körünket.

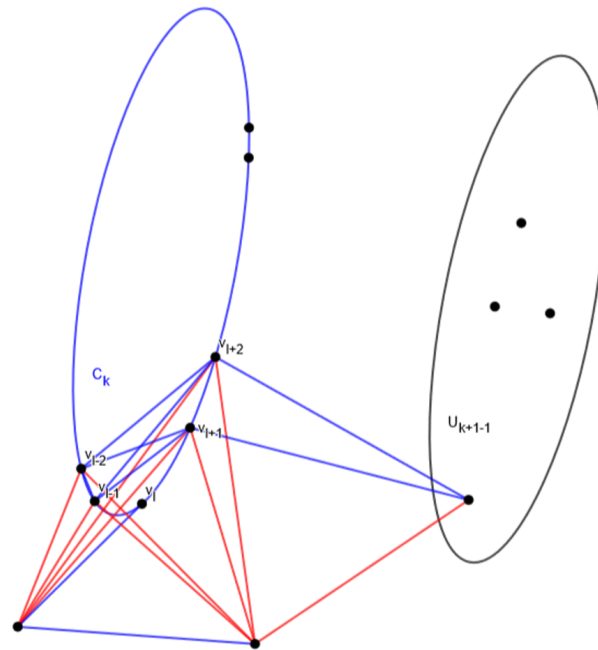


Tehát a következő színezésben kell tovább kutakodnunk:

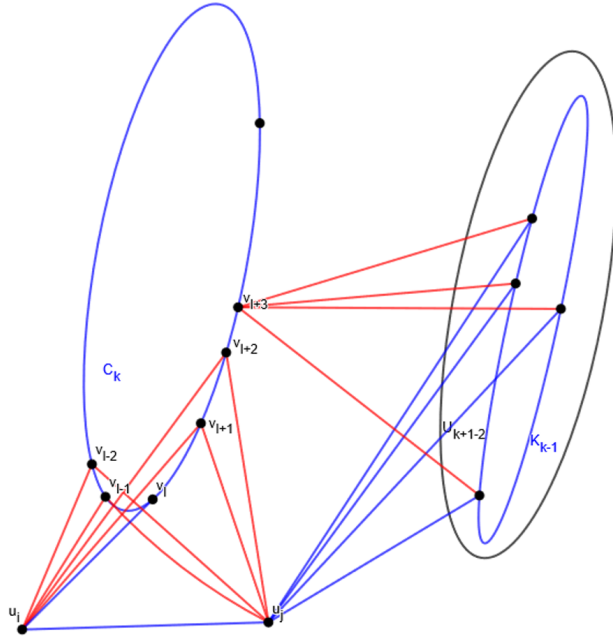


Most tekintsük az u_j és az U_{k+1-2} halmaz csúcsai között futó éleket.

Ezek közül nem lehet ebben az esetben egy sem piros, mert ha lenne, akkor a v_{l+1} és v_{l+2} csúcsoknak lenne közös kék szomszédjuk, ami, mint korábban láttuk, szintén nem megengedett színezés.

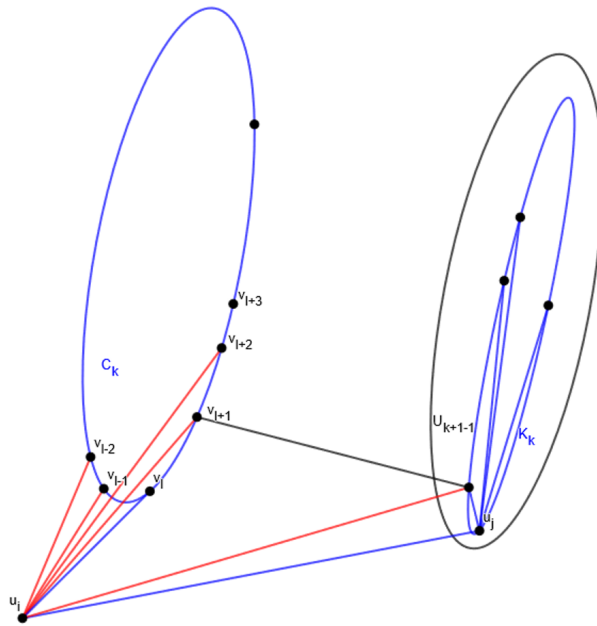


Ebből az következik, hogy minden él u_j és az U_{k+1-2} halmaz csúcsai között kék, továbbá minden él v_{l+3} és az U_{k+1-2} halmaz csúcsai között piros. Ennek következtében azonban az U_{k+1-2} beli csúcsok között futó élek egy kék klikket kell, hogy alkossanak.



Ha hozzávesszük újra az U_{k+1-2} halmazhoz az u_j csúcsot, akkor egy k méretű kék klikket alkotnak.

Ha u_i -ből menne bármely U_{k+1-2} beli csúcshoz kék él, akkor ezeken az éleken egy $k+1$ méretű kék kört is be tudnánk járni. Azonban, ha piros él megy ezekbe a csúcsokba, akkor szintén ellentmondásra jutunk: tekintve egy ilyen u csúcs és a v_{l+1} csúcs között futó élt. Ha ez piros lenne, akkor u_i -vel kiegészítve piros háromszöget kapunk. Ha azonban kék, akkor lenne egy kék út u -ból u_j -be v_{l+1}, v_l, u_i -n keresztül, de mivel ezen két csúcs egy k méretű klikkben is benne van, ezért egy másik, $k-3$ hosszú az előzőtől diszjunkt utat is találhatunk, így a kettő együtt alkot egy kék C_{k+1} -et.



Ezzel beláttuk, hogy a második eset színezése esetén is találunk piros C_3 hiányában kék C_{k+1} -et,

így teljesül az indukciós feltevésünk, hogy:

$$C(3, n) \leq 2n - 1$$

Továbbá ahogy a bizonyítás első lépésében beláttuk:

$$C(3, n) > 2(n - 1)$$

Emiatt valóban igaz a tétel:

$$C(3, n) = 2n - 1$$

□

3.1.2. megjegyzés. Az imént látott bizonyításra Chartrand-Schuster kicsit más utat mutat, amit cikkükben csupán vázlatosan tártak az olvasó elé. Az általam bemutatott bizonyítás az ő vázlatukat követve teljes körűen lefed mindent, de kevesebb vizsgálandó esettel dolgozik.

3.2. $C(4, n)$, $C(5, n)$ és $C(6, 6)$

Chartrand és Schuster 1969-es cikkükben[12] azonban nem csak $C(3, n)$ értékét, hanem $C(4, n)$, $C(5, n)$, valamint $C(6, 6)$ értékét is meghatározták. Ezeket szeretnénk szemlézni, hogy egy picit általánosabb tétel bizonyításához is eljuthassunk az ő eredményeik felhasználásával:

$$\mathbf{3.2.1. \ tétel.} \quad C(4, n) = \begin{cases} 6, & \text{ha } n = 4 \\ 7, & \text{ha } n = 5 \\ n + 1, & \text{ha } n \geq 6 \end{cases}$$

$$\mathbf{3.2.2. \ tétel.} \quad C(5, n) = 2n - 1, \text{ ha } n \geq 5$$

Emeljük ki, hogy itt nem csupán egy felső korlátot sikerült megadniuk a szerzőknek, hanem pontosan tudták meghatározni ezeket a kör-Ramsey-számokat, ami az eredeti Ramsey-számokhoz képest nagy változás.

Az általuk ekkor ismertett kör-Ramsey-szám még a $C(6, 6)$ volt, ami későbbiekben majd segítségünkre lesz:

$$\mathbf{3.2.3. \ állítás.} \quad C(6, 6) = 8$$

Az akkori állás szerint a diagonális kör-Ramsey-számok felső becslésére is voltak eredmények, melyek szintén lineáris nagyságrendben mozogtak, de pár éven belül Faudree és Schelp minden esetet lefedő képletet találtak $C(n, m)$ -re, mellyel a következő pontban foglalkozunk.

3.3. $C(n, m)$

3.3.1. tétel (Faudree-Schelp, 1973 [13]). n és m paritása szerint nézzük a következő eseteket:

(A) Ha $3 \leq 2k + 1 \leq m$, $(2k + 1, m) \neq (3, 3)$, akkor $C(2k + 1, m) = 2m - 1$

(B) Ha $4 \leq 2k \leq 2l$, $(2k, 2l) \neq (4, 4)$, akkor $C(2k, 2l) = 2l + k - 1$

(C) Ha $4 \leq 2k < 2l + 1$, akkor $C(2k, 2l + 1) = \begin{cases} (2l + 1) + k - 1, & \text{ha } 2l + 1 \geq \frac{3}{2}2k \\ 2 \cdot 2k - 1 & \text{különben} \end{cases}$

Bizonyítás. Ebben a dolgozatban az (A) esetet szeretnénk belátni Faudree-Schelp cikkének mentén, (B) és (C) bizonyítását nem ismertetjük. Ehhez több lemmát és segédtelet hívunk segítségül:

3.3.2. definíció. Legyen $G = (V, E)$ gráf, $A \subseteq V, u \in V$, ekkor u A -beli szomszédainak számát $d_A(u)$ -val jelöljük.

3.3.3. definíció. Azt mondjuk, hogy $u \in V \setminus A$ dominálja A -t, ha $d_A(u) \geq \frac{|A|}{2}$, illetve szigorúan dominálja A -t, ha ez szigorú egyenlőtlenséggel teljesül.

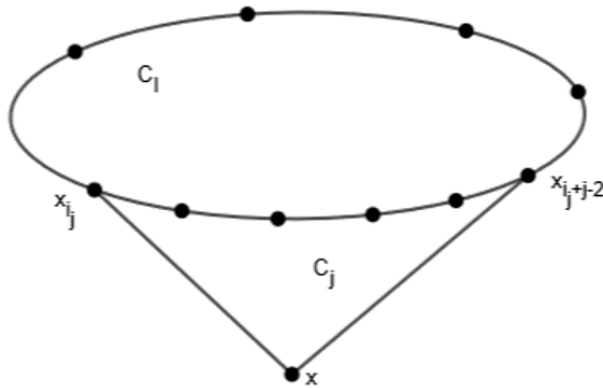
Élszínezett gráfban tudunk beszélni arról, hogy egy csúcs piros-dominál, kék-dominál, illetve szigorúan piros- vagy kék-dominál egy csúcshalmazt, amennyiben az adott színű monokromatikus részgráfban dominálja, vagy szigorúan dominálja a csúcshalmazt.

3.3.4. lemma. Ha van l hosszú kör egy $G = (V, E)$ gráfban (C_l) , valamint egy $x \in V \setminus C_l$, amely szigorúan dominálja C_l -t, akkor G -ben van $\forall j : 3 \leq j \leq l + 1$ j hosszú kör.

Bizonyítás (3.3.4. lemma). Tekintsük x -et, amely szigorúan domináns $C_l = (x_1, x_2, \dots, x_l, x_1)$ -re.

Ekkor $\forall j \in \{3, 4, \dots, l + 1\}$ esetén skatulyaelv miatt $\exists i_j \in \mathbb{Z}_l$, hogy $xx_{i_j} \in E$ és $xx_{i_j+j-2} \in E$.

Ekkor $(x, x_{i_j}, x_{i_j+1} \dots x_{i_j+j-2}, x)$ egy j hosszú kör.



□

3.3.5. lemma. Ha egy $G = (V, E)$ gráfban van két diszjunkt l és m hosszú kör
 $(C_l = (x_1, x_2, \dots, x_l, x_1))$ és $C_m = (y_1, y_2, \dots, y_m, y_1))$, valamint két csúcs $x, y \in V \setminus (C_l \cup C_m)$,
hogy x, y dominálja C_l -t és C_m -et, továbbá x C_l -dominanciája szigorú, akkor van G -ben
 $3, 4, \dots, (l + m + 1)$ hosszú kör is.

Bizonyítás. Az előző lemma miatt tudjuk, mivel x szigorúan dominálja C_l -t, hogy van $3, 4, \dots, l + 1$ hosszú kör a gráfban.

Ekkor elég $5 \leq l + 2 \leq j \leq l + m + 1$ -re belátni, hogy van C_j G -ben.

$\forall j \geq 5 \quad \exists r, s \in \mathbb{Z} \quad 0 \leq r \leq l - 1, \quad 1 \leq s \leq m : j = r + s + 4$

Mivel x domináns C_m -re, $I_m = \{i \in \mathbb{Z}_m \mid xy_i \in E\}$ halmaz legalább $\frac{m}{2}$ elemű.

Legyen $I_m \oplus s := \{i + s \bmod m \mid i \in I_m\}$, és hasonlóan $I_m \oplus (s - 1) := \{i + s - 1 \bmod m \mid i \in I_m\}$.

Ekkor $|I_m| = |I_m \oplus s| = |I_m \oplus (s - 1)| \geq \frac{m}{2}$, sőt $|(I_m \oplus s) \cup (I_m \oplus (s - 1))| > \frac{m}{2}$.

Továbbá y dominálja C_m -et, ami miatt $\exists i' \in (I_m \oplus s) \cup (I_m \oplus (s - 1))$, hogy $yy_{i'} \in E$.

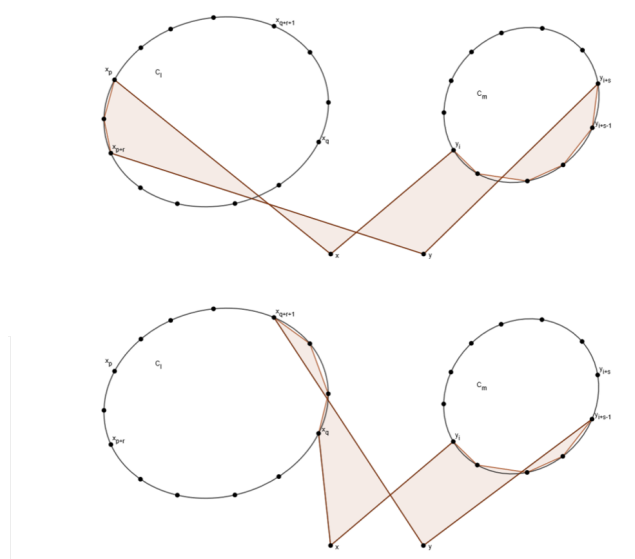
Tehát $\exists i \in \mathbb{Z}_m$, hogy $xy_i \in E$, továbbá $yy_{i+s} \in E \vee yy_{i+s-1} \in E$.

Hasonló módon, de x szigorú dominanciáját C_l -re is figyelembe véve látható, hogy $\exists p, q \in \mathbb{Z}_l$,
hogy $\{xx_p, yx_{p+r}\} \subset E$, továbbá $\{xx_q, yx_{q+r+1}\} \subset E$.

Ekkor attól függően, hogy $yy_{i+s} \in E$, vagy $yy_{i+s-1} \in E$, de mindkét esetben mutatunk egy j hosszú kört.

Ha $yy_{i+s} \in E$, akkor $(x, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+r}, y, y_{i+s}, y_{i+s-1}, \dots, y_{i+1}, y_i, x) \cong C_j$,

különben $(x, x_q, x_{q+1}, \dots, x_{q+r+1}, y, y_{i+s-1}, y_{i+s-2}, \dots, y_{i+1}, y_i, x) \cong C_j$.



□

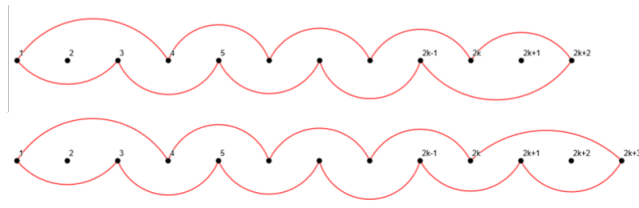
3.3.6. lemma. Ha egy teljes gráf adott 2-élszínezésében van kék C_l részgráf, és nincs benne piros színű C_r részgráf tetszőleges $4 \leq r \leq m \leq l$ esetén, akkor a színezés mellett találunk kék C_m -et, vagy C_{m+1} -et.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $m = l - 2$ esetén nincs se kék C_{l-1} se kék C_{l-2} .

Ha C_l csúcsait a megszokott módon jelöljük ($C_l = (x_1, x_2, \dots, x_l, x_1)$), akkor $\forall i \in \mathbb{Z}_l$ -re

$x_i x_{i+2}, x_i x_{i+3} \in E_p$.

Ekkor azonban, ha $r = 2k$, akkor $(x_1, x_3, x_5, \dots, x_{2k-1}, x_{2k+2}, x_{2k}, x_{2k-2}, \dots, x_4, x_1)$, illetve $r = 2k + 1$ esetén $(x_1, x_3, x_5, \dots, x_{2k+1}, x_{2k+3}, x_{2k}, x_{2k-2}, x_{2k-4}, \dots, x_4, x_1)$ lesz r hosszú piros kör, amellyel ellentmondásra jutottunk.



Tehát szükséges, hogy legyen kék C_{l-1} vagy C_{l-2} a klikkben.

Ezt követően (a kék kör méretének megfelelően) $l' = l - 1 \vee l - 2$ -re és $m' = l' - 2$ -re folytassuk ezt a gondolatmenetet, amíg $m' \geq r$, így ezt a lemmát is beláttuk. $\square$

3.3.7. lemma. *Ha egy teljes gráf adott 2-élszínezésében van kék $C_{m+1} = (x_1, x_2, \dots, x_{m+1})$ részgráf, de nincs kék C_m benne, és valamely r ($5 \leq r \leq m, m \geq 7$) esetén nincs piros C_r , akkor*

$$(i) |\{i \in \mathbb{Z}_{m+1} \mid x_i x_{i+3} \in E_k\}| \geq \frac{m+1}{2}$$

(ii) *Ha m páros, akkor $\forall x \in V \setminus C_{m+1}$ -re x szigorúan dominálja C_{m+1} -et (mint csúcshalmazt) a klikk piros részgráfjában.*

(iii) *Ha m páratlan, akkor $\forall x \in V \setminus C_{m+1}$ -re x dominálja $C_{m+1} = \{x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}\}$ -et (mint csúcshalmazt) a klikk piros részgráfjában, valamint szigorúan dominálja vagy $V_1 = \{x_1, x_3, \dots, x_{m-2}, x_m\}$ -et vagy $V_2 = \{x_2, x_4, \dots, x_{m-1}, x_{m+1}\}$ -et (szintén) a piros részgráfban.*

(iv) *$\forall x, y \in V \setminus C_{m+1}, xy \in E_k \implies x$ és y közül csak az egyik lehet szigorúan domináns V_1 -re (vagy V_2 -re) a kék részgráfban.*

Bizonyítás.

(i) Mivel nincs C_m a kék részgráfban, emiatt $\forall i \in \mathbb{Z}_{m+1} \quad x_i x_{i+2} \in E_p$.

Amennyiben $r < m$, akkor $\forall i \in \mathbb{Z}_{m+1}, x_i x_{i+3} \in E_p \implies x_{i+r-2} x_{i+r+1} \in E_k$, különben ezzel a két éllel együtt megjelenne egy r hosszú piros kör, amit feltettünk, hogy nincs a színezésben.

Páros r esetén

$$(x_i, x_{i+2}, x_{i+4}, \dots, x_{i+r-2}, x_{i+r+1}, x_{i+r-1}, x_{i+r-3}, \dots, x_{i+5}, x_{i+3}, x_i),$$

páratlan r esetén pedig

$$(x_i, x_{i+2}, x_{i+4}, \dots, x_{i+r-1}, x_{i+r+1}, x_{i+r-2}, x_{i+r-4}, \dots, x_{i+5}, x_{i+3}, x_i)$$

alkotna piros r -kört.

Emiatt azonban a valóban legalább minden második 3-indextávolságú csúcs között futó élnek kéknek kell lennie.

Tekintsük most azt az esetet, amikor $r = m$.

Megint, az előbbihez hasonló módon két 3-indextávolságú csúcs között futó élről szeretnénk megmutatni, hogy nem lehetnek egyszerre pirosak.

Tekintsük tehát $I_{3,p} = \{i \in \mathbb{Z}_{m+1} \mid x_i x_{i+3} \in E_p\}$ halmazt. Azt állítjuk, hogy nem lehet, hogy egyszerre i' és $i' + 2 \in I_{3,p}$.

Ha ez teljesülne, akkor a lemma (i) állítását beláttuk.

Tehát indirekt tegyük fel, hogy mégis van i , hogy $x_i x_{i+3}$ és $x_{i+2} x_{i+5} \in E_p$.

Ekkor attól függően, hogy $r = m$ páros vagy páratlan, de mindkét esetben megmutathatjuk, hogy van r hosszú piros kör a színezésben.

Páros r esetén

$$(x_i, x_{i+3}, x_{i+1}, x_{i-1}, \dots, x_{i+6}, x_{i+4}, x_{i+2}, x_{i+5}, x_{i+7} \dots x_{i-2}, x_i)$$

egy $r + 1$ hosszú piros kört alkot. Mivel feltettük, hogy nincs r hosszú piros kör, ezért $x_{i-1} x_{i+3}$ és $x_{i+4} x_{i+8}$ kék színű élek kellenek, hogy legyenek. Így azonban $x_{i+1} x_{i-2}$ -nek piros élnak kell lennie, különben $(x_{i+1}, x_{i-2}, x_{i-3}, x_{i-4}, \dots, x_{i+3}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ m hosszú kék kört alkotna (hisz egyedül x_2 marad ki). Hasonlóan $x_{i+3} x_{i+6}$ is piros kell legyen.

Így azonban megkapjuk

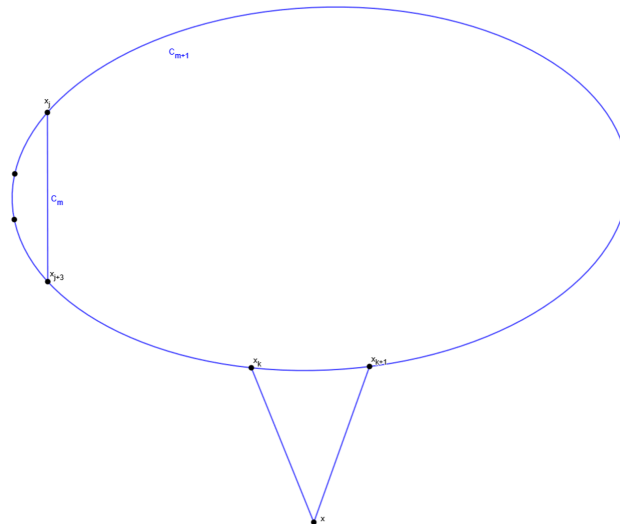
$$(x_{i+2}, x_{i+5}, x_{i+7}, \dots, x_{i-4}, x_{i-2}, x_{i+1}, x_{i-1}, x_{i-3}, \dots, x_{i+6}, x_{i+3}, x_i, x_{i+2})$$

r hosszú piros kört.

Páratlan r esetén hasonló gondolatmenettel jutunk ellentmondásra, így a 3-indextávolságú élek legalább fele valóban kék kell, hogy legyen.

(ii) és (iii) Ehhez lényegében azt kell látnunk, hogy nem lehetséges, hogy bármely két C_{m+1} -beli szomszédos csúcsokat bármely $x \in V \setminus C_{m+1}$ -el összekötő két él egyszerre kék legyen.

Márpedig a lemma (i) állítása következményeképp $\forall k \in \mathbb{Z}_{m+1} \quad \exists j \in \mathbb{Z}_{m+1} \setminus \{k, k-1, k-2\}$, hogy $x_j x_{j+3} \in E_k$, így amennyiben egyszerre xx_k és $xx_{k+1} \in E_k$ kékek lennének, akkor megjelenne egy kék C_m a színezésben.



Így valóban teljesül, hogy $2 \nmid m+1$ esetén x szigorúan piros-dominálja, illetve $2 \mid m+1$ esetén piros-dominálja C_{m+1} -et. Továbbá V_1 vagy V_2 közül az egyiket szigorúan piros-dominálja, mivel ha az egyik halmazba x -ből vezetne $k < \frac{m+1}{2}$ db kék él, akkor a másikba kell, hogy menjen legalább $k+1$ piros, és $k+1$, illetve $\frac{m+1}{2} - k$ közül az egyiknek biztosan szigorúan nagyobbak kell lennie, mint $\frac{m+1}{2}$ fele.

Hátramaradt a (iv) állítás bizonyítása:

Ha $xy \in E_k$ és x, y szigorúan kék-dominálja V_1 -et, akkor skatulyaelv miatt $\exists i \in \mathbb{Z}_{m+1} : xx_i, yx_{i+4} \in E_k$, így pedig $(x, y, x_{i+4}, x_{i+5}, \dots, x_{i-1}, x_i, x)$ kék C_m -et alkotna. $\square$

3.3.8. lemma. *Ha egy K_n teljes gráf adott 2-élszínezésében van kék C_{m+1} ($m \geq 7$), de nincs benne kék C_m , akkor van benne piros r hosszú kör, ahol $5 \leq r \leq m$, feltéve, hogy*

(i) m páros, és $n \geq m+2$, vagy

(ii) m páratlan, és $n \geq \max\{m+2, 2r-1\}$

Bizonyítás.

(i) Tekintsük az esetet, amikor m páros, és tegyük fel indirekt módon, hogy nincs piros r -kör semely $5 \leq r \leq m$ -re. Ekkor kék C_m hiánya miatt azonban kell, hogy legyen piros C_{m+1} . Ha $n \geq m+2$, akkor van $x \in V \setminus C_{m+1}$. Ekkor az előző (3.3.7.) lemma miatt x szigorúan domináns C_{m+1} -re a piros részgráfban. Így azonban teljesülnek a (3.3.4.) lemma feltételei $l = m+1$ -re: „Ha van l hosszú kör egy $G = (V, E)$ gráfban (C_l) , valamint egy $x \in V \setminus C_l$, amely szigorúan dominálja C_l -t, akkor G -ben van $\forall j : 3 \leq j \leq l+1$ j hosszú kör.”

Így kell, hogy legyen a piros részgráfban $3 \leq r \leq m+2$ hosszú kör is, de ez ellentmond a mostani feltevésünknek, így ezt az esetet kipipálhatjuk.

(ii) Most vizsgáljuk a páratlan m esetét.

Ekkor kék C_m hiánya azt jelenti, hogy van két $\frac{m+1}{2}$ hosszú piros kör az előző lemmában meghatározott V_1 és V_2 csúcsokon. Jelöljük tehát a következőképpen a $C_1 = (x_1, x_3, \dots, x_m, x_1)$ és $C_2 = (x_2, x_4, \dots, x_{m+1}, x_2)$ piros köröket.

Ekkor az előző (3.3.7) lemma (iii) állítása miatt $\forall x \in V \setminus C_{m+1}$ szigorúan piros-dominálja V_1 -et, vagy V_2 -t.

Így tekinthetjük az $m+1$ -körön kívüli csúcsoknak tekintsük részhalmazait a következőképpen: $R_i := \{x \in V \setminus C_{m+1} \mid x \text{ szigorúan piros-dominálja } V_i\text{-t, de nem piros-dominálja } V_{3-i}\text{-t}\}$ (ahol $i \in \{1, 2\}$)

$S := \{x \in V \setminus C_{m+1} \mid x \text{ piros-dominálja mind } V_1\text{-et, mind } V_2\text{-t}\}$

Ekkor R_1, R_2, S valóban $V \setminus C_{m+1}$ egy partícióját alkotják.

Mivel az R_i beli csúcsok nem piros-dominálják V_{3-i} -t, ezért az R_i beli csúcsok szigorúan kék-dominálják V_{3-i} -t, így az előző (3.3.7.) lemma (iv) állítása miatt $\forall x, y \in R_i : xy \in E_p$, hiszen ha egy ilyen xy él nem piros lenne, hanem kék, és mindkettő szigorúan kék-domináns V_{3-i} -re ellentmondást eredményezne.

Tekintsük most az S halmazt.

Ha S -nek lenne legalább két eleme, akkor a (3.3.5.) lemmát $C_l := C_1, C_m := C_2$ -re, valamint $x, y \in S \subseteq V \setminus (C_1 \cup C_2)$ -re alkalmazva a kék részgráfban azt kapnánk, hogy van $3 \leq j \leq \frac{m+1}{2} + \frac{m+1}{2} + 1 = m + 2$, így m hosszú kék kör is, így $|S| \leq 1$

Tekintsük azokat az $5 \leq r$ -eket, amelyre teljesül az $n \geq 2r - 1$ feltétel.

Ekkor

$$|R_1| + |R_2| + 1 \geq |R_1| + |R_2| + |S| \geq 2r - 1 - (m + 1)$$

$$\Downarrow$$

$$|R_1| + |R_2| \geq 2r - (m + 1) - 2$$

Ebből pedig az következik, hogy valamely $i \in \{1, 2\}$ -re

$$|R_i| \geq r - \frac{m+1}{2} - 1$$

Amennyiben $r \leq \frac{m+1}{2} + 1$, a (3.3.4.) lemma alkalmazásával a piros részgráfban $l = \frac{m+1}{2}$ esetre, valamint tetszőleges $V \setminus C_{m+1}$ -beli csúcs jelenléte mellett (hiszen (3.3.7) lemmának (iii) állítása szerint egy ilyen csúcs szigorúan piros-dominálja az $\frac{m+1}{2}$ méretű V_1 -et vagy V_2 -t) azt kapjuk, hogy a színezésben van $3 \leq j \leq \frac{m+1}{2} + 1$ hosszú (így r hosszú) piros kör is.

Így feltehetjük azt is, hogy $r > \frac{m+1}{2} + 1$

Jelöljük el r^* -al $r - \frac{m+1}{2} - 1 \geq 1$ -et.

Amennyiben $i = 1$ vagy 2 -re $|R_i| \geq r^* + 1 \geq 2$, akkor mivel tetszőleges $y_1, y_2 \in R_i$ szigorúan piros-dominálja V_i -t, ezért skatulyaelv miatt van j index, hogy $x_j \in V_i$, és $y_1 x_j, y_2 x_{j+2} \in E_p$. Így azonban összeilleszthető a C_i -ben x_{j+2} és x_j között haladó $\frac{m+1}{2}$, valamint az R_i -ben y_1 és y_2 között haladó $r^* + 1 = r - \frac{m+1}{2}$ csúcsú piros út, amelyek összeillesztésével piros r -kört kapnánk.

Így sem R_1 sem R_2 mérete nem lehet nagyobb r^* -nál.

Ha S üres lenne, akkor azonban az $R_1 \cup R_2 = V \setminus C_{m+1}$ mérete nem haladná meg $2r - 1 - (m + 1)$ -et, így feltehetjük, hogy $|S| = 1$, sőt $|R_1| = |R_2| = r^* = r - \frac{m+1}{2} - 1$. Továbbá S egyetlen csúcsára, s -re szimmetria miatt feltehetjük, hogy szigorúan piros-dominálja V_1 -et.

R_1 csúcsait jelöljük ekkor $y_1, y_2, \dots, y_{r^*}$ -al.

Vizsgáljuk meg azt az esetet, ha R_1 és V_2 között van piros él (szimmetria miatt jelölhetjük valamely j index mellett $y_1 x_{2j}$ -el).

Mivel s piros-domináns V_2 -re, van közöttük piros él, így alkalmas l választásával $s x_{2(j+l)} \in E_p$.

Továbbá tetszőleges $k : 0 \leq k \leq \frac{m+1}{2} - 1$ és $u : 1 \leq u \leq r^*$ -hoz van olyan $i : 0 \leq i \leq$ index skatulyaelv miatt, hogy $s x_{2i+1}$ és $y_u x_{2(i+k)+1} \in E_p$, hiszen y_u és s szigorúan dominálja V_1 -et.

Így egyik oldalról s csúcs felől, másik oldalról R_1 csúcsaival össze tudjuk kötni piros élekkel a C_1 és C_2 körök egy-egy $k + 1$ és $l + 1$ hosszú piros láncát, hogy

$$(s, x_{2i+1}, x_{2(i+1)+1}, \dots, x_{2(i+k)+1}, y_u, y_{u-1}, \dots, y_1, x_{2j}, x_{2(j+1)}, \dots, x_{2(j+l)}, s)$$

egy $1 + (k + 1) + u + (l + 1)$ hosszú piros kört alkot.

Mivel k és u tetszőleges megválasztható, r pedig nagyobb, mint $\frac{m+1}{2} + 1$, l függvényében tudjuk

úgy választani őket, hogy $1 + (k + 1) + u + (l + 1) := r$. Így amennyiben R_1 és V_2 között lenne piros él, az élszínezésben lenne piros r -kör is.

Emiatt feltehetjük, hogy R_1 és V_2 között az összes él kékre van színezve.

Ekkor azonban lévén, hogy R_1 összes csúcsa piros-domináns C_{m+1} -re minden R_1 és V_1 közötti élnek pirosnak kell lennie.

Mivel s szigorúan piros-dominálja V_1 -et, van olyan i index skatulyaelv miatt, hogy sx_{2i-1} és $sx_{2i+1} \in E_p$, ami azt eredményezi, hogy $(s, x_{2i+1}, x_{2(i+1)+1}, \dots, x_{2i-1}, s)$ egy $\frac{m+1}{2} + 1$ hosszú piros kört alkot.

Ha ehhez hozzávesszük, hogy R_1 egy $r^* = r - \frac{m+1}{2} - 1$ méretű piros részklikket alkot, akkor C_1 s -el kibővített körét x_{2i+1} és x_{2i+3} között tudjuk tovább bővíteni R_1 csúcsaival $\frac{m+1}{2} + 1 + r^* = r$ hosszú piros körré, így az indirekt bizonyításunkban immár teljes az ellentmondás, ezzel a lemmát beláttuk. $\square$

3.3.9. segédteétel (Bondy, 1969 [14]). Ha $G = (V, E)$ gráfban $|V| = n$, valamint $|E| \geq \frac{n^2+1}{4}$, akkor G -ben található l hosszú kör, minden $3 \leq l \leq \frac{n+3}{2}$ esetén.

Ennek a segédteételnek segítségével (melyet itt nem bizonyítunk) tudjuk belátni a következő lemmát:

3.3.10. lemma. Egy $2m - 1$ csúcsú teljes gráf egy 2-élszínezésében ha $(m - 1)^2$ kék- és $m(m - 1)$ piros él van, továbbá ha van olyan $3 \leq r \leq m$, hogy nincs a piros részgráfban r hosszú kör, akkor kell, hogy legyen m hosszú kör a kék részgráfban.

Bizonyítás. Tekintsük a gráf egy tetszőleges csúcsát $v \in V$ -t, majd e v nélküli $2m - 2$ méretű részklikket (ugyanazzal az élszínezéssel). Ebben a részgráfban továbbra sincs r hosszú piros kör.

Ekkor az előbbi segédteételünk miatt, ha a $(2m - 2)$ csúcsú részgráfunknak lenne legalább $\frac{(2m-2)^2+1}{4} = (m - 1)^2 + \frac{1}{4}$ piros éle, akkor lenne benne $3 \leq l \leq m \leq \frac{2m+2+3}{2}$ (így r) hosszú piros kör is. Emiatt a részgráfban legfeljebb $(m - 1)^2$ piros él lehet, ami azt indukálja, hogy a testzőleges $v \in V$ -re $d_p(v)$ -nek pedig legalább $m - 1$ -nek kell lennie, hiszen az eredeti gráfban $(m - 1)^2 + m - 1$ piros él van.

Továbbá legalább m db csúcsnak a piros-foka nem is haldhatja meg $m - 1$ -et, különben az összegük meghaladná a piros élek számának kétszeresét: $\sum_{v \in V} d_p(v) \geq (m - 1)(m - 1) + m \cdot m = 2m(m - 1) + 1 > 2|E_p|$.

Tekintsünk m ilyen csúcsot. Mehet-e közöttük piros él?

Indirekt tegyük fel, hogy van két csúcs v_1, v_2 , hogy $d_p(v_1) = d_p(v_2) = m - 1$ és $v_1 v_2 \in E_p$.

Tekintsük az e két csúcs, valamint ezek által lefogott élek elhagyásával kapott részgráfot.

Ebben továbbra sincs r méretű piros kör, így a kapott $2m - 3$ csúcsú részgráfban kevesebb, mint $\frac{(2m-3)^2+1}{4} = m^2 - 3m + 2 + \frac{1}{2}$ piros él lehet csupán.

Azonban így az eredeti gráfunkban ezeken túl mindössze a v_1 és v_2 által lefogott, szitával összeszámolt $2(m - 1) - 1$ piros él lenne, de a kettő összesen legfeljebb $m(m - 1) - 1$ élet adna

ki, ami szembe megy az eredeti feltételeinkkel, tehát azt kapjuk, hogy nincs így v_1, v_2 , hogy a köztük menő él is piros legyen.

Ekkor azonban kapunk ebből az m db $m - 1$ piros-fokú csúcsból egy kék klikket, amiben természetesen található m hosszú kék kör is, ezzel bizonyítottuk a lemmát. $\square$

3.3.11. *segéd-tétel* (Erdős-Gallai, 1959). [15] Amennyiben valamely $l \geq 3$ esetén $|E| \geq \frac{(l-1)(n-1)+1}{2}$ egy G gráfban (ahol n a szokásos módon a csúcsok számát jelöli), akkor a gráfban van legalább l hosszú kör.

Mindezekkel a lemmákkal és segéd-tételekkel felfegyverkezve most már rátérhetünk a (3.3.1) tétel (A) állításának bizonyítására.

Ehhez egy kicsit erősebb dolgot szeretnénk kimondani és belátni:

3.3.12. *tétel*. Ha $m \geq r \geq 3$, feltéve, hogy $(m, r) \neq (3, 3)$, akkor $C(m, r) \leq 2m - 1$

Bizonyítás. Tekintsük az $m \geq r \geq 6$ esetet, hiszen korábban már $r \leq 5$ -re Chartrand és Schuster cikke alapján láttuk, hogy ez igaz. Szintén az ő eredményük, hogy $C(6, 6) = 8$, emiatt még azt is feltehetjük, hogy $m \geq 7$.

Indirekt módon tegyük fel, hogy van olyan 2-élszínezése egy $2m - 1$ csúcsú klikknek, hogy nincs se kék m -kör, se piros r kör benne.

Ekkor a (3.3.9.) segéd-tételt alkalmazva, ha a gráfban kevesebb, mint $\frac{(2m-1)^2+1}{4} = m(m-1) + \frac{1}{2}$ piros él lehet, különben lenne benne $\frac{2m-1+3}{2} = m + 1$ -ig tetszőleges méretű piros kör, így piros C_r is.

Ha pont $m(m-1)$ piros él lenne, akkor teljesülnének az előző (3.3.10.) lemmának a feltételei, ami miatt kellene, hogy legyen m hosszú kék kör a színezésben, így ellentmondásra jutunk.

Tehát kevesebb, mint $m(m-1)$ piros él lehet csak egy jó színezésben, ami viszont azt jelenti, hogy több, mint $(m-1)^2$ kék él van a $2m - 1$ méretű klikkünkben.

Ekkor azonban használhatjuk Erdős és Gallai eredményét a (3.3.11.) segéd-tételből, $l = m \geq 3$ esetén a kék részgráfra, hiszen $(m-1)^2 + 1 \geq \frac{(m-1)(2m-1-1)+1}{2} = (m-1)^2 + \frac{1}{2}$, ami azt eredményezi, hogy a gráfban van legalább m hosszú kék kör. Szeretnénk azonban azt hinni az indirekt feltétel mellett kitartva, hogy kék C_m nincs benne, hanem csupán annál nagyobb, l méretű kék kör.

Ebben az esetben a segítségünkre siet a (3.3.6)-os lemma, amely azt mondja ki, ha egy klikk 2-élszínezésében van kék C_l , és nincs benne piros C_r , akkor tetszőleges $4 \leq r \leq k \leq l$ esetén van az élszínezésben kék C_k , vagy kék C_{k+1} . $k = m$ alkalmas választásával azt kapjuk, hogy a most vizsgált élszínezésben kell, hogy legyen kék C_{m+1}

Így teljesülnek a (3.3.8.) lemma feltételei mind páros, mind páratlan m esetén, hiszen $m \geq 7$ -et feltettük, van a színezésben kék C_{m+1} , de nincs kék C_m , továbbá $n = 2m - 1 \geq \max\{m + 2, 2r - 1\}$, így kell, hogy legyen $5 \leq r \leq m$ méretű piros kör, amivel ellentmondásra jutunk, így a tétel bizonyítást nyert. $\square$

Amennyiben r páratlan, a $2m - 1$ csúcs szigorú felső határ is lesz, hiszen $2m - 2$ méretű klikk esetén tekintsük azt a 2-élszínezést (amit már korábban $C(3, n)$ -nél is láttunk), hogy egy

$K_{m-1,m-1}$ teljes páros részgráfot pirosra, az összes többi élt pedig kékre színezzük, akkor abban nem lehet páratlan piros kör, és nincs $m - 1$ -nél nagyobb kék-összefüggő részgráf, azaz

$$C(2k + 1, m) = 2m - 1$$

□

4. Kitekintés további gráfokra

A kör-Ramsey-számokat megvizsgálva láthattuk, hogy azoknak a hagyományos értelemben vett Ramsey-számokkal szemben pontosan ismerhetjük az értékeit.

Azonban a Ramsey-számok definícióját ki tudjuk még jobban terjeszteni:

4.0.1. definíció. $R(G_1, G_2, \dots, G_m)$ legyen az a szám, amely csúcsú teljes gráf tetszőleges m -élszínezéséhez található olyan i hogy az i . színű részgráfnak van G_i -vel izomorf részgráfja.

Például vehetjük tetszőleges k csúcsú fa, és egy l csúcsú klikk Ramsey számát:

4.0.2. tétel (Chvátal, 1977 [16]). $R(T_k, K_l) = (k - 1)(l - 1) + 1$

Bizonyítás. Ennek bizonyítása viszonylag egyszerűen történik: Egy k méretű fa jelenlétét biztosítja egy k méretű összefüggő részgráf is. Emiatt adódik az ötlet, hogy $k - 1$ -es piros-összefüggő csoportokat. Itt behúzhatunk minden élet pirossal, hiszen így még mindig nem kapunk nagyobb méretű piros fát, továbbá vehetünk összesen $l - 1$ ilyen diszjunkt csúcshalmazt. Ha az összes többi élet kékkel színezzük, akkor egy olyan gráfszínezést adtunk meg a $(k - 1)(l - 1)$ méretű teljes gráfon, amelyben nincs se k méretű piros fa, sem l méretű kék klikk. Ezzel az alsó határt meg is találtuk.

Az a lépés vár még ránk, hogy belássuk, egy $(k - 1)(l - 1) + 1$ csúcsú gráfban minden színezés esetén vagy van kék T_k vagy piros K_l .

Tegyük fel, hogy nincs kék T_k egy adott színezésben. Ez azt jelenti, hogy egy kék-összefüggő csúcshalmaz legfeljebb $k - 1$ méretű lehet. Így skatulyaelv miatt a csúcsokat legalább l diszjunkt (maximum $k - 1$ méretű) kék-összefüggő halmazba tudjuk rendezni, úgy, hogy ezek között csak piros él mehet.

Ha minden csoportból kiválasztunk egy-egy csúcsot, akkor az ezek által alkotott részgráf egy piros klikk lesz, amely legalább l méretű. $\square$

4.0.3. megjegyzés. Bár ez a bizonyításból egyenes módon nem következik, de ugyanezt az alsó- és felső határt kapjuk, ha T_k -t P_k -ra, vagyis egy k hosszú útra cseréljük.[19]

Sőt, Bondy és Erdős megmutatták, hogy l -hez viszonyítva elég nagy k -ra, nevezetesen $k \geq l^2$ esetén k méretű körre és l méretű klikkre is ugyanez marad a Ramsey-szám:

4.0.4. tétel (Bondy-Erdős, 1973 [17]). $R(C_k, K_l) = (k - 1)(l - 1) + 1$, ha $k \geq l^2 - 2$

Azonban Faudree és Schelp sejtése szerint ez jóval több (k, l) párra igaz. Elég csupán azt megkövetelnünk, hogy $k \geq l \geq 3$, továbbá $(k, l) \neq (3, 3)$:

4.0.5. sejtés (Faudree-Schelp, 1978 [18]). $R(C_k, K_l) = (k - 1)(l - 1) + 1$, ha $k \geq l \geq 3$, de $(k, l) \neq (3, 3)$

4.0.6. megjegyzés. Ez a sejtés $3 \leq k \leq 7$ -re igazolt is.[19]

4.1. Burr-Erdős sejtés

Felmerül a kérdés, hogy tetszőleges „egyszerű struktúrájú” gráfok esetében mit mondhatunk az általánosított Ramsey számokról.

Ahhoz, hogy ezt a problémát meg tudjuk fogni, szükségünk van egy olyan tulajdonságra, amellyel ki tudjuk fejezni azt, hogy egy gráf „egyszerű struktúrájú”. Könnyen felvetődik a lehetőség, hogy egy gráf csúcsainak maximális fokszámát nézzük. Ha a körökre gondolunk, akkor ott minden fokszám 2. Utak esetében szintén a legnagyobb fokszám 2, azonban fáknál ez már elromlik, mert ott egészen $n - 1$ -ig terjedhet egy csúcs fokszáma.

Ezt a tulajdonságot azért mégiscsak érdemes megvizsgálni. Jelöljük $\Delta(G)$ -vel egy gráf maximális csúcsszámát. Mit mondhatunk ekkor $R(G) = R(G, G)$ -ről $\Delta(G)$ függvényében?

Ha tekintjük azokat a gráfokat, melyek csúcsainak maximális fokszáma 2, akkor a következő állítást láthatjuk be viszonylag könnyedén:

4.1.1. állítás. *Egy n csúcsú G gráf esetén ha $\Delta(G) = 2$, akkor $R(G) \leq 3n$*

Bizonyítás. $\Delta(G) = 2$ azt jelenti, hogy G összefüggő komponensei csak utak vagy körök lehetnek.

Faudree és Schelp eredményeit (3.3.1. tétel) figyelembe véve használhatjuk a

$C(n, m) \leq 2 \max\{n, m\}$ felső becslést $C(n, m)$ -re.

Továbbá belátható, hogy $R(P_n, P_m) \leq R(P_n, C_m) \leq C(n, m)$, hiszen egy C_n magába foglal n hosszú utat is.

Amennyiben G összefüggő, akkor emiatt $R(G) \leq 2n \leq 3n$.

G összefüggő komponenseinek számára alkalmazzunk most teljes indukciót:

Két komponens esetén (ahol az egyik n , a másik pedig m csúcsból áll) tekintsük a $3(n + m)$ csúcsú teljes gráf tetszőleges 2-élszínezését.

Itt biztosan találunk n hosszú piros vagy kék kört (és egyben utat is).

A maradék $2n + 3m$ csúcsból alkotott teljes részgráfban szükséges, hogy legyen m hosszú piros vagy kék kör, amely független az előzőtől. Amennyiben a két kör ugyanolyan színű, akkor meg is volnánk, hisz G egy példánya megtalálható lenne az adott színű részgráfban.

Amennyiben ez a két kör különböző színű, például a C_n kék, C_m pedig piros, akkor a maradék $2n + 2m$ csúcson, kihasználva, hogy $2n + 2m \geq C(n, m)$, találunk piros C_n -t vagy kék C_m -et.

Az indukciós lépésben tegyük fel, hogy a legfeljebb k komponensből álló gráfokra igaz az állításunk.

Most tekintsünk egy $k+1$ komponensből álló gráfot, ahol a komponensek mérete $n_1, n_2, \dots, n_{k+1}$

Ugyanúgy indulunk, mint $k = 2$ esetében. Tudjuk, hogy a $3(\sum_{i=1}^{k+1} n_i)$ csúcsú teljes gráf színezésében találunk monokromatikus C_{n_1} -et. Ezt tekinthetjük tetszés szerint kéknek.

A maradék $2n_1 + 3(\sum_{i=2}^{k+1} n_i)$ csúcson találunk egy ettől független kék vagy piros C_{n_2} -t, majd a maradék csúcsokon ezektől független monokromatikus C_{n_3} -at, és ezt folytatva $k+1$ -ig kapunk egymástól páronként független piros vagy kék C_{n_i} -t.

Ha ezek mind azonos színűek, akkor megvolnánk. Ha nem, akkor válasszunk két indexet (p, r) , amelyekhez tartozó körök különböző színűek. A $k + 1$ körtől továbbra is maradt $2(\sum_{i=1}^{k+1} n_i) \geq C(n_p, n_r) = C(n_r, n_p)$ független csúcs, ami azt jelenti, hogy valamelyikből (legyen p) mind piros, mind kék, egymástól független példány is található a $3(\sum_{i=1}^{k+1} n_i)$ csúcsú teljes gráf színezésében.

Ekkor tekintsük G -nek a maradék k komponensből álló részgráfját, G' -t. Az indukciós feltevés miatt azonban a kék és piros C_{n_p} -től független maradék $3|G'| + n_p$ csúcson vett piros-kék színezésben biztosan lesz egyszínű példánya G' -nek, ehhez pedig csak a megfelelő színű C_{n_p} -t kell hozzávenni, hogy megkapjuk G -t a színezésben. $\square$

Mi történik azonban akkor, ha megemeljük a maximális fokszámot? Erre adtak választ Chvátal és szerzőtársai:

4.1.2. tétel (Chvátal-Rödl-Szemerédi-Trotter, 1983 [20]). $\forall d \in \mathbb{N}^+ \exists c_d \in \mathbb{R}$ csak a d -től függő konstans, hogy $\forall G = (V, E)$ egyszerű gráf esetén, ha $\Delta(G) = d, n = |V|$, akkor $R(G) \leq c_d n$

Ez azt jelenti, hogy a maximálisan d fokszámmal rendelkező gráfok Ramsey-száma a csúcsszám függvényében lineáris, ellentétben például a teljes gráfokkal, ahol a csúcsok számának függvényében exponenciálisan nő a Ramsey-szám, mint azt a 2.2.7. és 2.2.10. tételekben tárgyaltuk.

4.1.3. megjegyzés. A négy szerző, Chvátal, Rödl, Szemerédi és Trotter egy gyengébb változatát látták be Stefan Burr és Erdős Pál nevezetes sejtésének, ami a gráfoknak egy bővebb családjára mondta ki, hogy azok Ramsey-száma lineáris.

Ahogy fentebb említettük, például a fák esetén, melyek jól érzékelhetően egy „egyszerű” struktúrájú gráfnak számítanak, a maximális fokszám nem jó mérője az ő „egyszerűségüknek”. Emiatt definiáljuk a következő fogalmat:

4.1.4. definíció. Egy $G = (V, E)$ egyszerű gráf d -degenerált, ha G összes részgráfjában van legalább egy csúcs, melynek fokszáma legfeljebb d .

A definíció alapján például a fák és utak is 1-degeneráltak, a körök 2-degeneráltak, míg K_k $k - 1$ -degeneráltak számítanak (így utóbbiakat nem is soroljuk az „egyszerű struktúrájú” gráfok közé).

4.1.5. sejtés (Burr-Erdős, 1973 [21] [22]). $\forall d \in \mathbb{N}^+ \exists c_d \in \mathbb{R}$ csak a d -től függő konstans, hogy $\forall G = (V, E)$ egyszerű gráf esetén, ha G d -degenerált, akkor $R(G) \leq c_d n$

Ennek a sejtésnek a bizonyításához tették meg az első nagy lépést Chvátal és társai, és az elmúlt évtizedekben születtek kisebb-nagyobb eredmények a sejtés megoldására, míg 2017-ben Choongbum Lee előállt a következő tétel bizonyításával:

4.1.6. tétel (Choongbum Lee, 2017 [23]). $\exists c \in \mathbb{R}$, hogy $\forall d, r \in \mathbb{N}^+$ -ra, tetszőleges d -generált, és r -színezhető $G = (V, E)$ gráf esetén, melynek csúcsainak száma legalább $2^{d^{2^{2^c r}}}$, $R(G) \leq 2^{d^{2^{2^c r}}} |V|$

4.1.7. *megjegyzés.* Egy d -degenerált gráf csúcsai színezhetőek $d + 1$ színnel, így a Lee által adott formula segítségével találhatunk minden d -hez alkalmas, csak a d -tól függő konstansot (pozitív c esetén r helyére $d + 1$ -et, negatív c esetén 1 -et helyettesítve), mely teljesíti Burr és Erdős sejtését.

4.1.8. *megjegyzés.* Lee cikkének végén megemlíti, hogy Burr és Erdős sejtését lehet általánosítani $R(G_1, G_2)$ -re, ahol a G_1, G_2 gráfok degeneráltsága helyett egy ahhoz kapcsolódó fogalom, a gráfok arboricitása függvényében marad lineáris a két gráf csúcsainak együttesen vett számát tekintve. Ennek bizonyítása még várat magára. [23]

Irodalomjegyzék

- [1] Erdős, P., & Szekeres, G. (1935). A combinatorial problem in geometry. *Compositio mathematica*, 2, 463-470. http://www.numdam.org/item/CM_1935__2__463_0.pdf
- [2] Erdős, P. (1947). Some remarks on the theory of graphs. <https://community.ams.org/journals/bull/1947-53-04/S0002-9904-1947-08785-1/S0002-9904-1947-08785-1.pdf>
- [3] Campos, M., Griffiths, S., Morris, R., & Sahasrabudhe, J. (2023). An exponential improvement for diagonal Ramsey. arXiv preprint arXiv:2303.09521. <https://arxiv.org/pdf/2303.09521.pdf>
- [4] Gupta, P., Ndiaye, N., Norin, S., & Wei, L. (2024). Optimizing the CGMS upper bound on Ramsey numbers. arXiv preprint arXiv:2407.19026. <https://arxiv.org/abs/2407.19026#>
- [5] Belmonte, R., Hegghernes, P., van't Hof, P., Rafiey, A., & Saei, R. (2014). Graph classes and Ramsey numbers. *Discrete applied mathematics*, 173, 16-27. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X14001528>
- [6] Ajtai, M., Komlós, J., & Szemerédi, E. (1980). A note on Ramsey numbers. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 29(3), 354-360. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0097316580900308>
- [7] Shearer, J. B. (1991). A note on the independence number of triangle-free graphs, II. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 53(2), 300-307.
- [8] Li, Y., Rousseau, C. C., & Zang, W. (2001). Asymptotic upper bounds for Ramsey functions. *Graphs and Combinatorics*, 17, 123-128.
- [9] Bohman, T., & Keevash, P. (2021). Dynamic concentration of the triangle-free process. *Random Structures & Algorithms*, 58(2), 221-293.
- [10] Fiz Pontiveros, G., Griffiths, S., & Morris, R. (2020). The triangle-free process and the Ramsey number $R(3, k)$ (Vol. 263, No. 1274). American mathematical society.
- [11] Mattheus, S., & Verstraëte, J. (2024). The asymptotics of $r(4, t)$. *Annals of Mathematics*, 199(2), 919-941. <https://arxiv.org/abs/2306.04007>
- [12] Chartrand, G., & Schuster, S. (1971). On the existence of specified cycles in complementary graphs. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 77(6), 995-998. <https://www.ams.org/journals/bull/1971-77-06/S0002-9904-1971-12832-X/S0002-9904-1971-12832-X.pdf>
- [13] Faudree, R. J., & Schelp, R. H. (1974). All Ramsey numbers for cycles in graphs. *Discrete Mathematics*, 8(4), 313-329. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0012365X74901514>
- [14] Bondy, J. A. (1971). Large cycles in graphs. *Discrete Mathematics*, 1(2), 121-132.
- [15] Erős, P. & Gallai, T. (1959). On maximal paths and circuits of graphs. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, 10, 337-356. https://users.renyi.hu/~p_erdos/1959-10.pdf
- [16] Chvátal, V. (1977). Tree-complete graph Ramsey numbers. *Journal of Graph Theory*, 1(1), 93-93.

- [17] Bondy, J. A., & Erdős, P. (1973). Ramsey numbers for cycles in graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 14(1), 46-54.
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S009589567380005X>
- [18] Faudree, R. J., & Schelp, R. H. (1978). Some problems in Ramsey theory. In *Theory and Applications of Graphs: Proceedings, Michigan May 11–15, 1976* (pp. 500-515). Springer Berlin Heidelberg.
- [19] Radziszowski, S. P. (2011). Ramsey numbers involving cycles. *Ramsey Theory: Yesterday, Today, and Tomorrow*, 41-62. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-0-8176-8092-3_3
- [20] Chvatál, C., Rödl, V., Szemerédi, E., & Trotter Jr, W. T. (1983). The Ramsey number of a graph with bounded maximum degree. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 34(3), 239-243. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0095895683900370?via%3Dihub>
- [21] Burr, S. A., & Erdős, P. (1975). Colloq. Math. Soc. János Bolyai. In *Infinite and Finite Sets* (Colloq., Keszthely, 1973; dedicated to P. Erdős on his 60th birthday), Vol. I (Vol. 10, pp. 215-240). Amsterdam: North-Holland.
- [22] Chung, F. R. K. (1997). Open problems of Paul Erdos in graph theory. *Journal of graph theory*, 25(1), 3-36. https://mathweb.ucsd.edu/~fan/wp/ramsey_survey.pdf
- [23] Lee, C. (2017). Ramsey numbers of degenerate graphs. *Annals of Mathematics*, 185(3), 791-829.
<https://projecteuclid.org/journals/annals-of-mathematics/volume-185/issue-3/Ramsey-numbers-of-degenerate-graphs/10.4007/annals.2017.185.3.2.short>
<https://arxiv.org/pdf/1505.04773>

Nyilatkozat

Alulírott Németh-Verbényi Ciprián nyilatkozom, hogy szakdolgozatom elkészítése során az alábbi feladat elvégzésére a megadott MI alapú eszközt alkalmaztam:

Writefull - Nyelvhelyesség ellenőrzése a teljes dolgozatban.

Ezen túl más MI alapú eszközt nem használtam.