

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Temesvári Ádám
Matematika BSc

RUNGE–KUTTA-MÓDSZEREK
RÖGZÍTETT RÁCSON VALÓ
STABILITÁSA

Szakdolgozat

Témavezető: Dr. Havasi Ágnes

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék



Budapest, 2025

Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt szeretném megköszönni témavezetőmnek, Dr. Havasi Ágnesnek, hogy elvállalta a szakdolgozatom vezetését, és megismertetett a választott témával. Köszönöm az egy éven át tartó töretlen támogatását, a hosszú órákba nyúló konzultációkat és az alapos visszajelzéseket.

Hálás vagyok a családomnak, különösen édesanyámnak, a sokéves kitartó biztatásért és támogatásért. Végül, de nem utolsósorban, köszönöm a barátaimnak a lelkesítést – még akkor is, ha gyakran egy szavamat sem értették.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	4
1. Runge–Kutta-módszerek	5
1.1. Általános alak	5
1.2. Butcher-tabló	7
1.3. Konzisztencia és konvergencia	8
1.4. Példa Runge–Kutta-módszerekre	8
1.4.1. Az explicit Euler-módszer	9
1.4.2. Az implicit Euler-módszer	9
1.4.3. Az implicit középponti módszer	9
1.4.4. A θ -módszer	10
1.4.5. Az α -módszer	12
1.4.6. Az RK3 és RK4 módszerek	14
2. Rögzített rácson való stabilitás	16
2.1. Merev feladatok	16
2.1.1. Egy népszerű példa	17
2.1.2. Elektromos áramkörök	17
2.1.3. Kémiai reakciók	19
2.2. Abszolút stabilitás	21
2.3. Explicit módszerek abszolút stabilitása	28
2.4. Implicit módszerek abszolút stabilitása	31
2.4.1. Padé-approximációk	33
3. Gyakorlati alkalmazások	36
3.1. Harmonikus rezgőmozgás	36
3.2. A Prothero–Robinson-egyenlet	39
3.3. Lánggömb	41
3.4. Példa egy újabb stabilitási fogalomhoz	43
3.5. Konklúzió	47
Összefoglalás, kitekintés	48

Bevezetés

Világunkban számos, ha nem minden esemény, folyamat, legyen az mozgás, reakció, járványterjedés, leírható a matematika nyelvén, gyakran differenciálegyenletek segítségével. Ideális esetben ezek a feladatok analitikusan megoldhatók. Azonban ez sokszor nem lehetséges, ekkor numerikus módszereket kell alkalmazni a megoldás meghatározásához. Azonban nem minden differenciálegyenletet lehet könnyen megoldani numerikus módszerekkel, az ún. *merev feladatok* híresek arról, hogy bizonyos megoldók nem adnak jó közelítést a feladatok megoldásaira. A szakdolgozatban ennek matematikai hátterére fókuszálunk, a *rögzített rácson való stabilitás* témakörét járjuk körbe.

A szakdolgozat első fejezetében bevezetjük a Runge–Kutta-módszereket, amelyek a numerikus módszerek egy családját alkotják. Defináljuk egy módszer rendjének a fogalmát, amely segítségével karakterizálni tudjuk a módszerek hatékonyságát. Ezt követően bemutatunk és elemzünk néhány – a gyakorlatban és a szakdolgozat fejezeteiben – gyakran használt Runge–Kutta-módszert.

A második fejezetben számos példa segítségével bemutatjuk a merev feladatokat, rendszereket és az őket jellemző tulajdonságokat. Levezetjük a Dahlquist-féle lineáris tesztegyenletet, definiáljuk az *abszolút stabilitás* és *A-stabilitás* fogalmát. Két alfejezetben külön-külön megvizsgáljuk az explicit és implicit módszerek előnyeit és hátrányait abszolút stabilitási tulajdonságaik alapján. Ezután a Padé-approximációk bevezetésével általánosítva adjuk meg az A-stabilitás teljesülésének kritériumát: felírunk az A-stabilitás teljesülésére egy ekvivalens állítást, amellyel meghatározzuk az A-stabil módszerek csoportját.

A harmadik fejezetben gyakorlati példákon keresztül, Python-kódban implementált merev feladatokon tanulmányozzuk az elméleti eredményeket. Közelebbről megvizsgáljuk az egyes módszerek abszolút stabilitási tulajdonságait, és kiértékeljük a módszereket a futtatási eredményeik alapján. A fejezet – és a szakdolgozat – végére karakterizáljuk azokat a módszereket, amelyek hatékonyan működnek a merev feladatokon, és jó stabilitási tulajdonsággal rendelkeznek.

1. Runge–Kutta-módszerek

Adott az alábbi közönséges differenciálegyenlet (KDE) kezdetiérték-feladata, amit szeretnénk megoldani.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & y: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

$$(1.2)$$

Gyakran ezeket az egyenleteket nem tudjuk analitikusan megoldani. Ilyenkor numerikus módszerek segítségével igyekszünk megtalálni az (1.1) megoldását. Az ilyen numerikus módszerek egy csoportja az egy lépéses módszerek családja. Ezekből többféle van, ebben a szakdolgozatban a Runge–Kutta (RK)-módszerekkel fogunk dolgozni. De honnan jönnek ezek a módszerek, és miért tudják jól közelíteni a differenciálegyenletek megoldását?

1.1. Általános alak

Az alábbiakban levezetjük az (1.1)-(1.2) feladat megoldására alkalmazható Runge–Kutta típusú módszert [1]. Tekintsük az (1.1) egyenletet.

Integráljuk az (1.1) egyenletet t szerint t_n és t_{n+1} között.

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt$$

Az egyenlet bal oldalán a Newton–Leibniz szabályt alkalmazzuk, a jobb oldalon pedig a $t = t_n + s$ helyettesítéssel áttérünk a $[0, \tau]$ intervallumra, amivel az

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_0^\tau f(t_n + s, y(t_n + s)) ds$$

összefüggést kapjuk.

Az $s = \xi\tau$ helyettesítéssel áttérünk a $[0, 1]$ intervallumra.

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \tau \int_0^1 f(t_n + \xi\tau, y(t_n + \xi\tau)) d\xi$$

Az integrandust helyettesítsük egy s darab alappontra illesztett Lagrange-féle interpolációs polinommal,

$$f(t_n + \xi\tau, y(t_n + \xi\tau)) = g(\xi) \approx \sum_{i=1}^s g(c_i) l_i(\xi)$$

ahol $l_i(\xi)$ a c_i alapponthoz tartozó Lagrange-féle interpolációs alappolinom.

Az interpolációs polinommal megkapjuk a következő közelítést.

$$y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + \tau \int_0^1 \sum_{i=1}^s g(c_i) l_i(\xi) d\xi = y(t_n) + \tau \sum_{i=1}^s g(c_i) \int_0^1 l_i(\xi) d\xi$$

Vezessük be a

$$b_i = \int_0^1 l_i(\xi) d\xi$$

jelölést a kapott súlyokra.

A b_i súlyokat és c_i interpolációs alappontokat behelyettesítve az

$$y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + \tau \sum_{i=1}^s b_i f(t_n + c_i \tau, y(t_n + c_i \tau))$$

közelítéshez jutunk.

A $t_n + c_i \tau$ időpontokban nem ismerjük az y pontos megoldást, ezért újból alkalmazzuk az előző interpolációs közelítést.

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_n + c_i \tau} y'(t) dt &= \int_{t_n}^{t_n + c_i \tau} f(t, y(t)) dt \\ y(t_n + c_i \tau) &= y(t_n) + \tau \int_0^{c_i} f(t_n + \xi \tau, y(t_n + \xi \tau)) d\xi \end{aligned}$$

Az integrandusra újbóli Lagrange-interpolációval

$$f(t_n + \xi \tau, y(t_n + \xi \tau)) = g(\xi) \approx \sum_{j=1}^s g(c_j) l_j(\xi)$$

megkapjuk a következő becslést az $y(t_n + c_i \tau)$ értékekre.

$$y(t_n + c_i \tau) \approx y(t_n) + \tau \sum_{j=1}^s g(c_j) \int_0^{c_i} l_j(\xi) d\xi$$

Legyen

$$a_{ij} = \int_0^{c_i} l_j(\xi) d\xi$$

Mindezt visszaírva megkapjuk az alábbi közelítést az $y(t_n + c_i \tau)$ értékekre.

$$y(t_n + c_i \tau) \approx y(t_n) + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_n + c_j \tau, y(t_n + c_j \tau)) \quad i = 1, \dots, s$$

A fenti levezetéssel a következő módszerhez jutottunk:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \tau \sum_{i=1}^s b_i f(t_n + c_i \tau, Y_i) \\ Y_i = y_n + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_n + c_j \tau, Y_j) \end{cases} \quad i = 1, \dots, s \quad (1.3)$$

ahol y_{n+1} az $y(t_{n+1})$ numerikus közelítése, Y_i pedig az $y(t_n + c_i \tau)$ érték közelítése. Az (1.3) képletben tetszőleges a_{ij} , b_i és $c_i \in [0, 1]$ számokat beírva az alábbi általános módszerhez jutunk.

1.1. Definíció. Adott $s \in \mathbb{N}$, $b_i, a_{ij} \in \mathbb{R}$ és $c_i \in [0, 1]$ értékekre az (1.3) egy s -lépcsős egy lépéses Runge–Kutta-módszert definiál.

1.2. Megjegyzés. *Tetszőleges (egylépéses) Runge–Kutta-módszer felírható az alábbi alakban:*

$$y_{n+1} = y_n + \tau \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

(1.4)

ahol

$$k_i = f(t_n + c_i \tau, y_n + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j) \quad i = 1, \dots, s$$

Látható, hogy az 1.2 megjegyzésben szereplő alak könnyen átvihető az (1.3) szerinti alakba az alábbi helyettesítéssel:

$$Y_i = y_n + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j \quad i = 1, \dots, s$$

Tehát a két képlet ugyanazt a módszert definiálja.

Ha minden $j \geq i$ indexre $a_{ij} = 0$, akkor a Runge–Kutta-módszert *explicitnek* nevezzük. Ebben az esetben az összes k_i érték explicit módon kiszámolható a $k_1, \dots, k_{i-1}$ értékekből. Ha $j > i$ indexre $a_{ij} = 0$ és valamely i indexre $a_{ii} \neq 0$, akkor a k_i értékeket az alábbi egyenletekből lehet megkapni:

$$k_i = f(t_n + c_i \tau, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j + \tau a_{ii} k_i)$$

Ilyenkor a k_i értékeket s darab implicit egyenletből kell meghatározni, általában közelítő módszerekkel, például Newton-iterációval. Az implicit módszerek effajta speciális eseteit *diagonálisan implicitnek* szokás hívni. Ha a módszer nem explicit és nem diagonálisan implicit, akkor *implicit*. Ekkor a k_i értékeket egyszerre kell meghatározni az s darab egyenletből álló rendszerből.

Az explicit módszereket könnyebb implementálni, mint az impliciteteket. Viszont az implicit módszerek általában jobb stabilitási tulajdonsággal rendelkeznek, ami hasznossá teszi őket merev rendszerek megoldására. Ha explicit módszereket akarunk alkalmazni merev rendszerekre, akkor az a gyakorlatban a lépésközre súlyos, gyakran teljesíthetetlen feltételeket jelent.

1.2. Butcher-tabló

Egy egylépéses Runge–Kutta-módszert gyakran a Butcher-tablójával szoktunk megadni, amelyet megkapunk, ha a $c_1, \dots, c_s$ és $b_1, \dots, b_s$ értékeket egy $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^s$ és $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^s$ vektorba pakoljuk, az a_{ij} értékeket pedig egy $A \in \mathbb{R}^{s \times s}$ mátrixban rendezzük el. Ekkor egy s -lépcsős egylépéses Runge–Kutta-módszer Butcher-tablója a következő:

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & A \\ \hline & \mathbf{b}^\top \end{array} = \begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \dots & b_s \end{array}$$

1. táblázat. Butcher-tabló

A táblázat felső részében minden sor egy $f(t, y(t))$ értéket tárol, az utolsó sorból pedig leolvasható, hogy ezeknek az értékeknek mekkora a súlya az y_{n+1} érték kiszámításakor. A táblázattal azt is könnyen el lehet dönteni, hogy egy módszer explicit vagy implicit-e. Ha csak a főátló alatt található nemnulla érték, akkor explicit, különben implicit módszerről van szó.

1.3. Konzisztencia és konvergencia

Numerikus módszerek pontosságát többféle mutató alapján lehet jellemezni. A legkézenfekvőbb a numerikus módszerrel kapott megoldás eltérése a pontos megoldástól. Ennek jellemzésére kétféle hibafogalmat vezetünk be, a lokálisat és globálisat. Az előbbi a pontos megoldásból egy időlépés alatt keletkezett hibát méri, az utóbbi pedig a t időpontig felgyülemlett hibát.

1.3. Definíció. Egy egylépéses módszer lokális hibáján a $t_n + \tau = t_{n+1}$ pontban az

$$\varepsilon^{lok}(t_n + \tau) = y(t_n + \tau) - [y(t_n) + \tau\Phi(f, \tau, t, y(t))]$$

különbséget értjük, ahol Φ az RK-módszer növekményi függvénye:

$$y_{n+1} = y_n + \tau\Phi(f, \tau, t, y(t))$$

1.4. Definíció. Egy egylépéses módszer globális hibája a t_n pontban:

$$\varepsilon(t_n) = y(t_n) - y_n$$

A lokális hiba nem más, mint a t_{n+1} pontban a pontos érték és a t_n időpillanatban a pontos megoldásból, $y(t_n)$ értékből indított y_{n+1} numerikus közelítés különbsége. A globális hiba a t_{n+1} időpontig felgyülemlett numerikus hiba.

1.5. Definíció. Egy egylépéses numerikus módszer

- a) konzisztens a $t \geq 0$ pontban, ha $|\varepsilon^{lok}(t + \tau)| \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0$;
- b) p -ed rendben konzisztens t -ben, ha $\exists C \geq 0$, hogy $|\varepsilon^{lok}(t + \tau)| \leq C\tau^{p+1}$;
- c) konvergens t -ben, ha $|\varepsilon(t)| \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0$;
- d) p -ed rendben konvergens t -ben, ha $\exists \tilde{c} \geq 0$, hogy $|\varepsilon(t)| \leq \tilde{c}\tau^p$.

Minél magasabb rendben konzisztens, illetve konvergens egy numerikus megoldó, annál jobban fogja közelíteni a megoldást. A valóságban a τ nem csökken, csak ha mi módosítjuk. A konzisztencia és konvergencia rendje arra ad jó mutatót, hogy a lokális, illetve globális hiba hányadára csökken, ha a τ lépésközt csökkentjük.

1.4. Példa Runge–Kutta-módszerekre

Ebben a fejezetben bemutatunk néhány egylépéses módszert, amelyeket a dolgozatban részletesen fogunk elemezni.

1.4.1. Az explicit Euler-módszer

Az egyik legegyszerűbb és legkézenfekvőbb módszer az explicit Euler (EE) módszer, melynek általános alakja a következő:

$$y_{n+1} = y_n + \tau f(t_n, y_n) \quad (1.5)$$

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

2. táblázat. Az explicit Euler-módszer Butcher-tablója

A módszer nem csinál mást, mint veszi a (t_n, y_n) pontban a megoldásgörbe deriváltját, vagyis az $f(t_n, y_n)$ meredekséget, és ezzel lép τ távolságot az y_{n+1} értékbe. Egyszerűsége és explicitisége miatt ez a legelterjedtebb módszer, viszont az egyenletek pontos megoldását többnyire túlságosan lassan közelíti. Az f jobb oldali függvény megfelelő simasága esetén elsőrendben konzisztens és konvergens. A gyakorlatban tételek bizonyításaiban szokták használni, valós alkalmazásokban azonban célszerű pontosabb módszereket alkalmazni.

1.4.2. Az implicit Euler-módszer

Az implicit Euler (IE) módszer hasonlít az EE módszerhez, de annyiban eltér tőle, hogy az y_n pontból nem az $f(t_n, y_n)$ meredekséggel lép előre, hanem a t_{n+1} időbeli $f(t_{n+1}, y_{n+1})$ meredekséggel. Általános képlete:

$$y_{n+1} = y_n + \tau f(t_{n+1}, y_{n+1}) \quad (1.6)$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

3. táblázat. Az implicit Euler-módszer Butcher-tablója

Implicitisége látszik abból, hogy az egyenlet mindkét oldalán megjelenik az y_{n+1} érték. Ugyan ezt iterációs módszerrel megtalálni plusz számításokat igényel, a módszer jó stabilitási tulajdonságai hasznosnak bizonyulnak merev rendszerek megoldásánál. Ez a módszer is elsőrendben konzisztens és konvergens.

1.4.3. Az implicit középponti módszer

Az implicit középponti módszert egy kvadratúra, a középponti formula indukálja, miszerint

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t) dt \approx (t_{n+1} - t_n) f(t_{n+\frac{1}{2}}) = \tau f(t_{n+\frac{1}{2}})$$

ahol $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{\tau}{2}$ a $[t_n, t_{n+1}]$ intervallum középpontja. A módszert az

$$y_{n+1} = y_n + \tau f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2} y_{n+1}\right) \quad (1.7)$$

képlet definiálja. Az (1.7) módszer Butcher-tablója:

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1

4. táblázat. Az implicit középponti módszer Butcher-tablója

A módszer érdekessége, hogy ugyan csak $s = 1$ lépcsős, a konzisztencia és konvergencia másodrendű. Ez abból következik, hogy az (1.7) módszer az ún. Gauss–Legendre-módszerek családjába tartozik, amelyek a Runge–Kutta-módszerekben belül az implicit módszerek egy speciális csoportja. Az ilyen módszerek úgy vannak megkonstruálva a Gauss–Legendre kvadraturák segítségével, hogy s lépcső esetén a módszerek rendje $2s$ legyen. Ugyan ez elméletben jól hangzik, azonban a gyakorlatban a módszerek implicitisége miatt az y_{n+1} érték kiértékelése csak jelentős számítási költség mellett lehetséges, ami miatt a gyakorlatban kevés helyen alkalmazzák az ilyen módszereket.

1.4.4. A θ -módszer

A θ -módszer az első két módszert egyesíti, egyszerre lép előre az EE és IE módszerrel. Általános képlete:

$$y_{n+1} = y_n + \tau [(1 - \theta)f(t_n, y_n) + \theta f(t_{n+1}, y_{n+1})], \quad \theta \in [0, 1] \quad (1.8)$$

Megfigyelhető, hogy $\theta = 0$ választás esetén a módszer visszaadja az EE, míg $\theta = 1$ esetén az IE módszert. $\theta = 0$ esetén explicit, $\theta \in (0, 1]$ értékek esetén implicit a módszer. Gyakori választás még a $\theta = \frac{1}{2}$, amivel az

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\tau}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})] \quad (1.9)$$

implicit trapéz módszert kapjuk. A módszer a trapézformulának nevezett kvadraturára épül, miszerint:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t) dt \approx \frac{\tau}{2} (f(t_n) + f(t_{n+1}))$$

Az (1.8) módszer Butcher-tablója:

0	0	0
1	$1 - \theta$	θ
	$1 - \theta$	θ

5. táblázat. A θ -módszer Butcher-tablója

Első ránézésre nem látszik, hogy ez valóban az (1.8) módszert definiálja, de a következő levezetéssel megmutatjuk, hogy átvihető a kívánt alakba.

Vegyük először a k_i súlyokat,

$$k_1 = f(t_n, y_n) \quad (1.10a)$$

$$k_2 = f\left(t_{n+1}, y_n + \tau((1 - \theta)k_1 + \theta k_2)\right) \quad (1.10b)$$

majd y_{n+1} értékét.

$$y_{n+1} = y_n + \tau((1 - \theta)k_1 + \theta k_2) \quad (1.10c)$$

Átrendezve (1.10c)-t:

$$y_{n+1} - y_n = \tau((1 - \theta)k_1 + \theta k_2) \quad (1.10d)$$

(1.10d) jobb oldala szerepel (1.10b)-ben az f függvény argumentumában, ahova behelyettesítjük az (1.10d) bal oldalát.

$$k_2 = f(t_{n+1}, y_n + (y_{n+1} - y_n)) = f(t_{n+1}, y_{n+1}) \quad (1.10e)$$

(1.10a)-t és (1.10e)-t visszaírva (1.10c)-be megkapjuk az (1.8) alakot.

Mit tudunk mondani a módszer konzisztenciarendjéről? A módszerünk általános képlete tartalmazza a θ paramétert, ezért várható, hogy a módszer rendje függ majd θ megválasztásától.

1.6. Tétel. Az (1.8) módszer $\theta = \frac{1}{2}$ esetén másodrendben konzisztens, különben elsőrendben.

Bizonyítás. Feltesszük, hogy $y \in C^3(I)$, $I = [t_0, T]$. Megmutatjuk, hogy ha $\theta = \frac{1}{2}$, akkor létezik olyan $C \geq 0$ konstans, amely mellett $|\varepsilon^{\text{lok}}(t + \tau)| \leq C\tau^3$.

Az (1.8) módszer növekményi függvénye

$$\Phi(f, \tau, t, y(t)) = (1 - \theta)f(t_n, y(t_n)) + \theta f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

Ebből az 1.3 definíció alapján:

$$\varepsilon^{\text{lok}}(t_n + \tau) = y(t_n + \tau) - [y(t_n) + \tau((1 - \theta)f(t_n, y(t_n)) + \theta f(t_{n+1}, y(t_{n+1})))]$$

Tudjuk, hogy $f(t_n, y(t_n)) = y'(t_n)$ és $f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) = y'(t_{n+1})$, így a lokális hiba átírható az

$$\varepsilon^{\text{lok}}(t_n + \tau) = y(t_n + \tau) - [y(t_n) + \tau((1 - \theta)y'(t_n) + \theta y'(t_{n+1}))]$$

alakba. Fejtsük Taylor-sorba az $y(t)$ megoldást a $t = t_n$ pont körül:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \tau y'(t_n) + \frac{\tau^2}{2} y''(t_n) + \frac{\tau^3}{6} y'''(\xi_1) \quad \xi_1 \in (t_n, t_{n+1})$$

majd $y'(t_{n+1})$ -et is $t = t_n$ pont körül.

$$y'(t_{n+1}) = y'(t_n) + \tau y''(t_n) + \frac{\tau^2}{2} y'''(\xi_2) \quad \xi_2 \in (t_n, t_{n+1})$$

Mindezt visszaírva:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\text{lok}}(t_n + \tau) &= \left[y(t_n) + \tau y'(t_n) + \frac{\tau^2}{2} y''(t_n) + \frac{\tau^3}{6} y'''(\xi_1) \right] - y(t_n) \\ &\quad - \tau \left[(1 - \theta)y'(t_n) + \theta \left(y'(t_n) + \tau y''(t_n) + \frac{\tau^2}{2} y'''(\xi_2) \right) \right] \\ \varepsilon^{\text{lok}}(t_n + \tau) &= \tau y'(t_n) + \frac{\tau^2}{2} y''(t_n) + \frac{\tau^3}{6} y'''(\xi_1) - \tau \left[y'(t_n) + \theta \tau y''(t_n) + \theta \frac{\tau^2}{2} y'''(\xi_2) \right] \\ &= \left(\frac{1}{2} - \theta \right) \tau^2 y''(t_n) + \left(\frac{y'''(\xi_1)}{6} - \theta \frac{y'''(\xi_2)}{2} \right) \tau^3 \end{aligned}$$

Látható, hogy kizárólag $\theta = \frac{1}{2}$ esetén esik ki a τ^2 -es tag, így csak ebben az esetben lehet a módszer másodrendű, különben elsőrendű lesz. Ekkor:

$$\varepsilon^{\text{lok}}(t_n + \tau) = \left(\frac{y'''(\xi_1)}{6} - \frac{y'''(\xi_2)}{4} \right) \tau^3 = (2y'''(\xi_1) - 3y'''(\xi_2)) \frac{\tau^3}{12}$$

$$|\varepsilon^{\text{lok}}(t_n + \tau)| = |2y'''(\xi_1) - 3y'''(\xi_2)| \frac{\tau^3}{12}$$

Az abszolútértéket felülről becsüljük a háromszög-egyenlőtlenséggel,

$$|\varepsilon^{\text{lok}}(t_n + \tau)| \leq (2|y'''(\xi_1)| + 3|y'''(\xi_2)|) \frac{\tau^3}{12}$$

y''' értékeit pedig a $\max_{\xi \in [t_n, t_{n+1}]} |y'''(\xi)|$ értékkel.

$$|\varepsilon^{\text{lok}}(t_n + \tau)| \leq \frac{5}{12} \max_{\xi \in [t_n, t_{n+1}]} |y'''(\xi)| \tau^3$$

$C = \frac{5}{12} \max_{\xi \in [t_n, t_{n+1}]} |y'''(\xi)|$, tehát a θ -módszer másodrendű $\theta = \frac{1}{2}$ esetén. ■

1.4.5. Az α -módszer

J. C. Butcher 2003-as könyvében a másodrendű Runge–Kutta-módszerek egy csoportját egy paraméteres képlettel vezeti be, amit ismét egy kvadratúra ihletett.

$$\int_0^1 f(t) dt \approx \left(1 - \frac{1}{2\alpha} \right) f(0) + \frac{1}{2\alpha} f(\alpha)$$

Könnyen megmutatható, hogy ez a kvadratúra másodrendű tetszőleges $\alpha \in (0, 1]$ érték esetén, azaz a nullad- és elsőfokú polinomokat pontosan integrálja ki, viszont van olyan másodfokú polinom, amelyet már nem.

Az α -módszer általános képlete a következő:

$$y_{n+1} = y_n + \tau \left[\left(1 - \frac{1}{2\alpha} \right) f(t_n, y_n) + \frac{1}{2\alpha} f(t_n + \alpha\tau, y_n + \alpha\tau f(t_n, y_n)) \right] \quad (1.11)$$

Az (1.11) képletet átírjuk a k_i súlyok bevezetésével egy olvashatóbb alakra, így megkapjuk a következő képletet, amelynek segítségével a módszer Butcher-tablója is leolvasható.

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f(t_n + \alpha\tau, y_n + \alpha\tau k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + \tau \left[\left(1 - \frac{1}{2\alpha} \right) k_1 + \frac{1}{2\alpha} k_2 \right] \end{aligned}$$

0	0	0
α	α	0
	$1 - \frac{1}{2\alpha}$	$\frac{1}{2\alpha}$

6. táblázat. Az α -módszer Butcher-tablója

Tetszőleges $\alpha \neq 0$ esetén a módszer explicit, hiszen az őt leíró Butcher-tablóban csak a mátrix főátlója alatt található nem nulla érték.

1.7. Tétel. Az (1.11) módszer tetszőleges $\alpha \neq 0$ esetén másodrendben konzisztens.

Bizonyítás. Süli-Mayers: An Introduction to Numerical Analysis (2003) [2] könyv 326-327. oldalán megtalálható a levezetés. Ott általánosabb képletből indulnak ki, miszerint

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f(t_n + \alpha\tau, y_n + \beta\tau k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + \tau(ak_1 + bk_2) \end{aligned}$$

A levezetés során a könyvben a rendet az ún. csonkítási hibával (truncation error) számolják ki, amely ekvivalens az általunk definiált lokális hibával. A bizonyítás végén a másodrendű konzisztenciára az alábbi feltételek adódnak:

$$\beta = \alpha, \quad a = 1 - \frac{1}{2\alpha}, \quad b = \frac{1}{2\alpha}, \quad \alpha \neq 0$$

Ezekkel a feltételekkel éppen azt kapjuk meg, hogy az (1.11) módszer másodrendben konzisztens. ■

Gyakori választás az α paraméterre az $\alpha = \frac{1}{2}$. Ekkor az explicit középponti módszert kapjuk meg, amit az

$$y_{n+1} = y_n + \tau f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2} f(t_n, y_n)\right) \quad (1.12)$$

képlet definiál. Az (1.12) módszer Butcher-tablója:

0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	0	1

7. táblázat. Az explicit középponti módszer Butcher-tablója

A módszer onnan kapta a nevét, hogy a $[t_n, t_{n+1}]$ intervallum középpontjánál a $t = t_n + \frac{\tau}{2}$ pillanatbeli $f(t_n + \frac{\tau}{2}, y(t_n + \frac{\tau}{2}))$ meredekséget közelíti numerikusan, majd ezzel lép τ távolságot az y_{n+1} értékbe.

Az $\alpha = 1$ választással a Heun-módszert kapjuk, amelyet az

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{n+1} &= y_n + \tau f(t_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{\tau}{2} (f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})) \end{aligned} \quad (1.13)$$

képlet definiál. A módszert szokták még javított Euler vagy explicit trapéz módszernek is hívni. A szakdolgozatban javított Euler-módszerként fogunk rá hivatkozni. Az (1.13) Butcher-tablója:

0	0	0
1	1	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

8. táblázat. A javított Euler-módszer Butcher-tablója

A módszer az y_n értékből tesz egy EE lépést, ez lesz az $\tilde{y}_{n+1}$ érték. Ennek segítségével közelíti a módszer a $t = t_{n+1}$ pontban az $y'(t_{n+1}) = f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$ meredekséget az $f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})$ értékkel. Végül a módszer átlagolja a $t = t_n$ és $t = t_{n+1}$ pontban kiértékelt közelítő meredekségeket, amellyel τ távolságot lép az y_{n+1} értékbe.

A Ralston-módszer is beletartozik az α -módszerek körébe, amelyet az $\alpha = \frac{2}{3}$ választással kapunk meg. A módszert a

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{2}{3}\tau, y_n + \frac{2}{3}\tau k_1\right) \\ y_{n+1} &= y_n + \tau \left(\frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_2 \right) \end{aligned} \quad (1.14)$$

képlet definiálja. Érdekessége a módszernek, hogy minimalizálja a csonkítási hibát. Az (1.14) Butcher-tablója:

0	0	0
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

9. táblázat. A Ralston-módszer Butcher-tablója

1.4.6. Az RK3 és RK4 módszerek

Az RK3 és RK4 megjelölés egy-egy konkrét harmad- illetve negyedrendű Runge–Kutta-módszert takar. Amennyiben egy KDE-t ilyen rend tulajdonsággal rendelkező módszerrel szeretnénk megoldani, érdemes ezeket választani, explicitségüknek hála könnyű implementálni őket. Emiatt a legnépszerűbb választások közé tartoznak a gyakorlatban.

Az RK3 módszert a

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f(t_n + \tau, y_n + \tau(2k_2 - k_1)) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{\tau}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \end{aligned} \quad (1.15)$$

képlet definiálja, és ennek alapján a módszer Butcher-tablója a következő:

0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
1	-1	2	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

10. táblázat. Az RK3 módszer Butcher-tablója

Nem meglepő módon ezt a módszert is vissza lehet vezetni egy kvadraturára, mégpedig a Simpson-módszerre. A kvadraturát az

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t) dt \approx \frac{\tau}{6} \left[f(t_n) + 4f\left(\frac{t_n + t_{n+1}}{2}\right) + f(t_{n+1}) \right]$$

képlet írja le.

A negyedrendű RK4 módszert az alábbi képlet definiálja:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(t_n + \tau, y_n + \tau k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{\tau}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \tag{1.16}$$

(1.16) Butcher-tablója:

0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
1	0	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

11. táblázat. Az RK4 módszer Butcher-tablója

Ugyan négy darab $f(t, y(t))$ érték kiértékelése időigényes, de a módszer negyedrendű tulajdonsága lehetővé teszi, hogy a lépésközre lazább feltételeket szabva is pontos közelítő megoldásokat kapjunk.

Itt megemlítünk két fontos tételt egy explicit RK-módszer rendje és lépcsőszáma közötti kapcsolatról [3].

1.8. Tétel. *Ha egy explicit s -lépcsős Runge–Kutta-módszer rendje p , akkor $s \geq p$.*

1.9. Tétel. *Ha egy explicit s -lépcsős Runge–Kutta-módszer rendje $p \geq 5$, akkor $s > p$.*

Az előbbi tételek és [4], [5] segítségével felírható a következő táblázat, amely szemlélteti, hogy adott p rend eléréséhez mi az a minimális s lépcsőszám, amellyel a rendfeltétel teljesíthető.

p	1	2	3	4	5	6	7	8
$\min s$	1	2	3	4	6	7	9	11

12. táblázat. Az explicit RK-módszerek rendje és lépcsőszáma közötti kapcsolata

Az 1.8, 1.9 tételek alapján az explicit Runge–Kutta-módszerekben belül a negyedrendű módszerek a legmagasabb rendűek, amelyek teljesítik s lépcső és p -ed rend mellett, hogy $s = p$. Ez a tulajdonság hozzájárul az RK4 módszer népszerűségéhez, továbbá jelzi, hogy ennél több lépcsővel rendelkező explicit módszer használata miatt kevésbé előnyös.

2. Rögzített rácson való stabilitás

Amikor numerikusan oldunk meg egy differenciálegyenletet, elvárjuk a kapott közelítő megoldástól, hogy a pontos megoldást jól közelítse, azaz grafikusan ábrázolva a pontos megoldásgörbe környezetében mozogjon. Az eddigiekben bemutatott konzisztencia és konvergencia csak azt biztosította, hogy kellően kis lépésközzel számolva a numerikus megoldás tetszőlegesen közel kerül a pontos megoldáshoz. A gyakorlatban azonban a τ lépésköz nem csökkenthető tetszőlegesen kicsire, ezért fontos elvárás, hogy a numerikus megoldás valamilyen (nem irreálisan kicsi) rögzített lépésköz mellett is rendelkezzen a pontos megoldás bizonyos kvalitatív tulajdonságaival. Egy kvalitatív tulajdonság például a nemnegativitás-megőrzés olyan feladatokban, ahol a pontos megoldás garantáltan csak nemnegatív értékeket vehet fel, ha a kezdeti érték nemnegatív. (Például ha az ismeretlen függvények valamilyen kémiai anyagok koncentrációját írják le.) Ilyenkor nem elegendő, hogy az adott τ lépésközzel számolva kicsi legyen az eltérés a pontos megoldástól, hanem az is elvárható, hogy a numerikus megoldás végig nemnegatív maradjon. Egy másik kvalitatív tulajdonság a pontos megoldás korlátossága bizonyos modellfeladatokban, miközben az idővel a végtelenhez tartunk. Ekkor a numerikus megoldástól is elvárjuk, hogy az időben előre felé haladva korlátos maradjon, lehetőleg tetszőleges τ lépésközzel, vagy legalábbis kellően kis lépésközzel számolva. Ezt hívjuk rögzített rácson való stabilitásnak.

2.1. Merev feladatok

*...1960 körül a dolgok teljesen megváltoztak, és mindenki ráébredt, hogy a világ tele van merev rendszerekkel.
(G. Dahlquist, Aiken 1985)*

A merev rendszerek olyan közönséges differenciálegyenlet-rendszerek, amelyekre az explicit numerikus módszerek nem működnek hatékonyan. Ebben a fejezetben bemutatunk néhányat, és megvizsgáljuk a rájuk jellemző tulajdonságokat [6] segítségével.

2.1.1. Egy népszerű példa

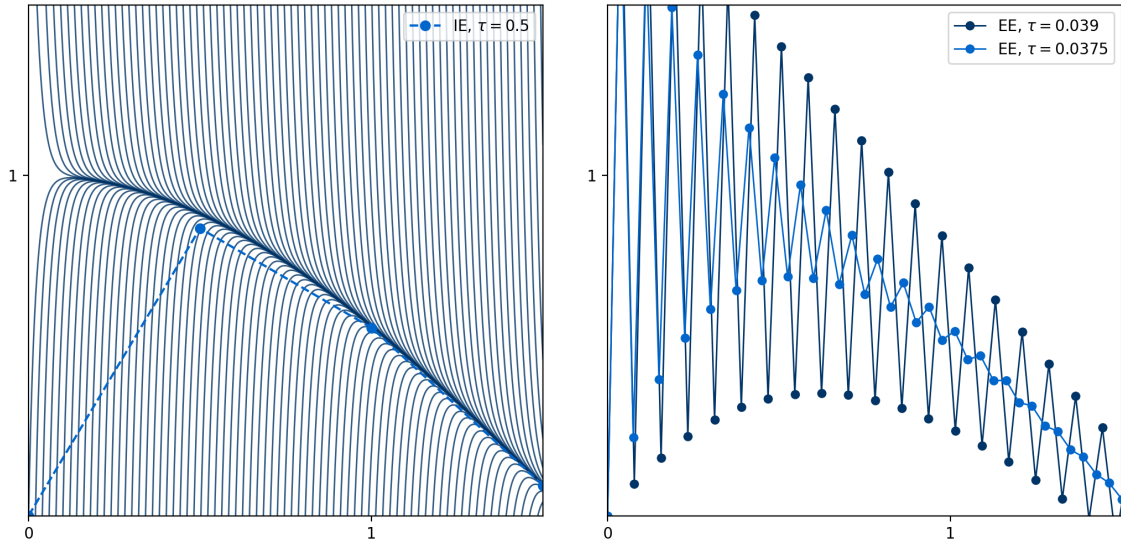
Egy népszerű példa merev feladatára az

$$x'(t) = -50(x(t) - \cos t) \quad (2.1)$$

differenciálegyenlet megfelelő kezdeti feltétel mellett. A (2.1) egyenlet általános megoldása:

$$x(t) = c_1 e^{-50t} + \frac{2500}{2501} \cos t + \frac{50}{2501} \sin t, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

Amennyiben ábrázoljuk a megoldásokat különböző kezdeti feltételek mellett, láthatóvá válik, hogy mitől lesz ez egy merev feladat.



1. ábra. A (2.1) megoldásgörbéi, $x(0) = 0$ 2. ábra. A (2.1) megoldása EE módszerrel, $x(0) = 0$ kezdeti értékből IE módszerrel megoldva

A rendszert a $t = 0$ pont környékén egy meredek „átmeneti fázis” jellemzi, amelyen túljutva a megoldások az $f(t) = \cos t$ függvény környezetébe tartanak. Jól látszik, hogy az EE módszer még jelentősen kicsi lépésközzel sem képes jó közelítő megoldást adni, oszcillál a megoldás körül, ezzel szemben az IE módszer az átmeneti fázist gond nélkül kezeli, stabil megoldást ad nagyobb lépésköz mellett is. Nem minden megoldásgörbe rendelkezik ilyen átmeneti fázissal, ilyen például az $x(0) = \frac{2500}{2501}$ kezdeti értékből indított megoldás is.

2.1.2. Elektromos áramkörök

Merev rendszerek az elektromos áramkörökben is megjelennek. Az egyik legegyszerűbb áramkört leíró nemlineáris differenciálegyenlet-rendszer nem más, mint Van der Pol egyenlete:

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) & x(0) &= 2 \\ y'(t) &= \mu(1 - x^2(t))y(t) - x(t) & y(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Az egyenlet az alábbi, α paraméterrel rendelkező másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletből vezethető le.

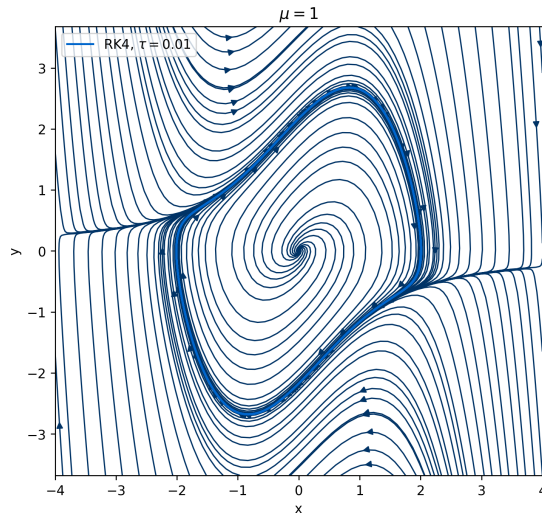
$$z''(t) + \alpha z'(t) + z(t) = 0$$

A megoldás stabil, ha $\alpha > 0$, és instabil, ha $\alpha < 0$. Az α paramétert időfüggővé tesszük úgy, hogy kicsi $z(t)$ értékekre negatív, nagy $z(t)$ értékekre pedig pozitív legyen. Ezt az $\alpha = \mu(z^2(t) - 1)$ választással érhetjük el, ahol μ tetszőleges pozitív paraméter. Így az előző egyenlet átírható a

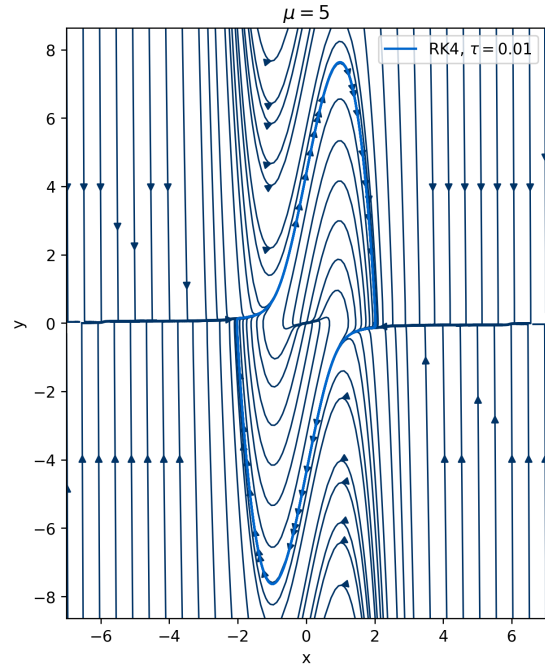
$$z''(t) + \mu(z^2(t) - 1)z'(t) + z(t) = 0$$

egyenletbe. Rendszerben felírva átviteli elvvel megkapjuk a (2.2) alakot.

A rendszernek létezik egy stabil periodikus megoldása. Ez a megoldás a határciklus, amelyhez konvergál a többi megoldás, lásd a 3-4. ábrán. Mérsékelt μ választása mellett a rendszer gond nélkül kiintegrálható, de jelentősen nagyobb, például $\mu = 200$ esetén már gyanítható, hogy a rendszer merev lesz.



3. ábra. A Van der Pol egyenlet fázistere, (2.2) RK4 megoldása

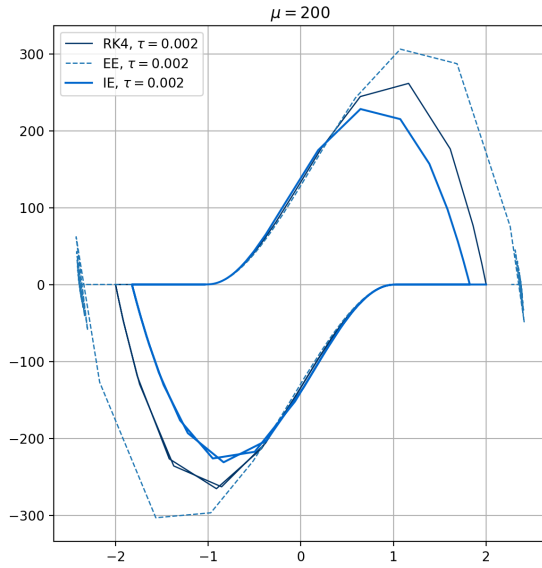


4. ábra. A Van der Pol egyenlet fázistere megnövelt μ mellett

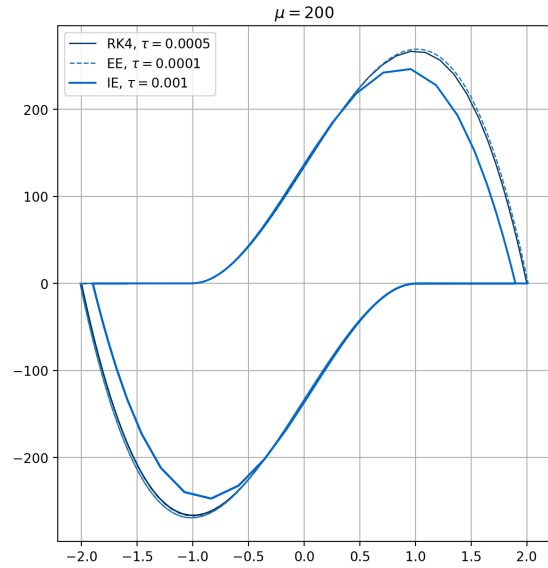
A $\mu = 200$ paraméter választás mellett megoldottuk numerikusan a (2.2) feladatot az EE, RK4 és IE módszerekkel. Azonos, de jelentősen kicsi, $\tau = 0.002$ lépésköz mellett az EE módszer oszcilláló tulajdonságot mutat, ami nem szerencsés a megoldás szempontjából, az IE és RK4 elfogadható közelítést ad.

A megoldásból látható, hogy az elsőrendben pontos EE módszer csak kellően kis τ mellett követi jól a pontos megoldást, míg a negyedrendű RK4 módszernél nagyobb τ lépésköz is választható. Ugyanakkor az EE módszerhez hasonlóan elsőrendű IE módszer még az RK4 módszer lépésközénél nagyobb τ lépésköz mellett is jó közelítést ad. Ez jelzi, hogy az IE módszer rendelkezik egy olyan kvalitatív tulajdonsággal,

amely alacsony pontossági rendje ellenére alkalmassá teszi ennek a feladatnak a megoldására.



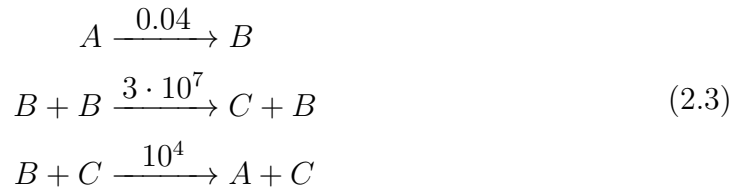
5. ábra. A (2.2) megoldása azonos τ mellett



6. ábra. A (2.2) megoldása korrigált τ lépésközök mellett

2.1.3. Kémiai reakciók

Egy közismert példa kémiai reakcióra a numerikus módszerek körében Robertson modellje, amely három anyagfajta között végbemenő kémiai átalakulásokat ír le.



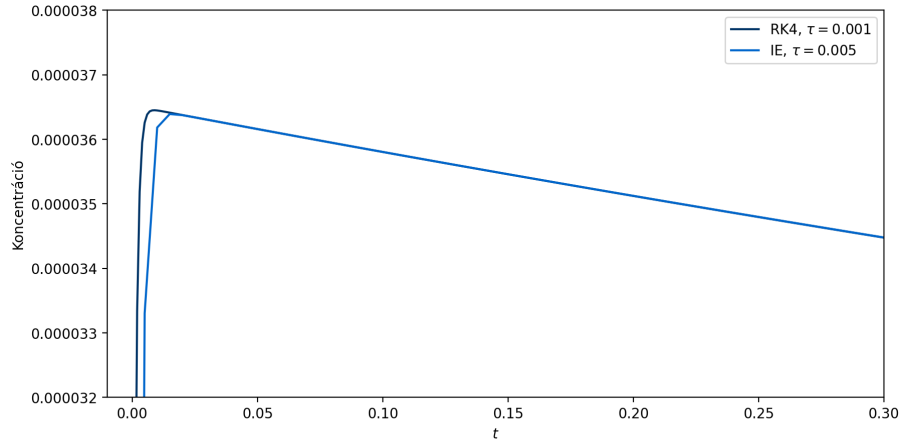
A reakció három részre bontható, mindhárom különböző sebességgel megy végbe. Merev rendszerekben gyakori, hogy egy komponens jelentősen gyorsabban cseng le a többinél. Pontos numerikus megoldást ezért nehezebb találni, mert egy komponenst ugyan jól modellezhet a választott numerikus módszer, de a többit esetleg nem képes megfelelően leírni. A (2.3) szerinti átalakulások során bekövetkező koncentrációváltozásokat az

$$\begin{aligned} x'(t) &= -0.04x(t) + 10^4 y(t)z(t) & x(0) &= 1 \\ y'(t) &= 0.04x(t) - 10^4 y(t)z(t) - 3 \cdot 10^7 y^2(t) & y(0) &= 0 \\ z'(t) &= 3 \cdot 10^7 y^2(t) & z(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

KDE rendszer írja le, ahol $x(t)$, $y(t)$ és $z(t)$ az A , B és C anyag koncentrációját jelölik az idő függvényében.

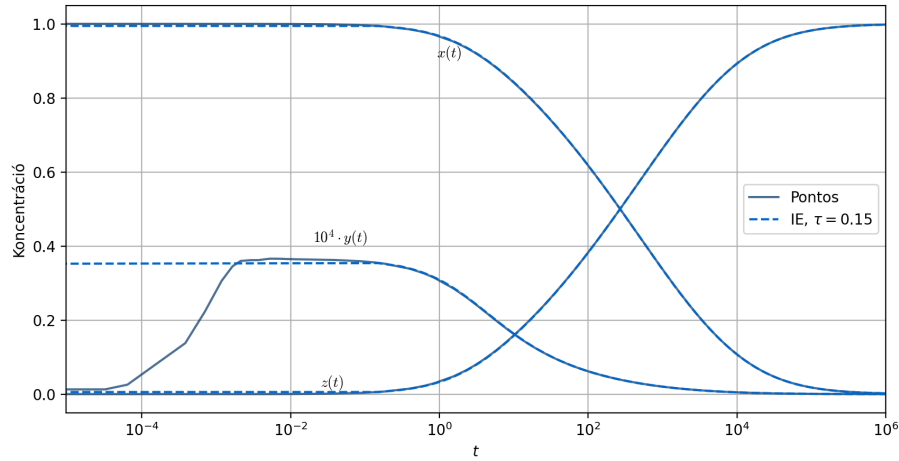
A feladat megoldásának nehézsége abból adódik, hogy az elején rövid idő alatt megugrik a B anyag mennyisége 0-ról 0.000037 köré, amely után a reakció lassú lecsengésbe vált át. Emiatt itt csak olyan numerikus megoldók jöhetnek szóba, amelyek jól közelítik a kezdeti ugrást, de kellően nagy lépésközzel is használható megoldást adnak, hogy hosszabb intervallumon is megoldhassuk a feladatot.

Numerikusan megoldva a feladatot azt tapasztaljuk, hogy az RK4 módszer csak $\tau = 0.001$, vagy ennél kisebb lépésköz mellett képes megoldani a feladatot az elején, utána ilyen kicsi lépésközzel is kinő a végtelenbe az általa adott megoldás. Ezzel szemben az IE módszer nagyobb, $\tau = 0.005$ lépésközzel is képes jól követni a kezdeti átmeneti fázist.



7. ábra. A (2.4) rendszer $y(t)$ komponensének megoldása a kezdeti fázisban

Amennyiben hosszabb intervallumon, $T = 10^6$ időpontig szeretnénk kiintegrálni a feladatot, az IE módszer már $\tau = 0.15$ mellett is szépen megoldja azt. A kezdeti átmeneti fázisnál pontatlan, de utána szépen a pontos megoldás mentén halad a numerikus megoldás. (A 8. ábrán az $y(t)$ értékeket 10^4 -nel szoroztuk, hogy a másik két komponenssel együtt látszódjon a megoldás.)



8. ábra. A (2.4) rendszer megoldása IE módszerrel $\tau = 0.15$ mellett

2.2. Abszolút stabilitás

Ahogy a fejezet elején is szerepelt, azt a kvalitatív tulajdonságot szeretnénk vizsgálni, hogy a numerikus módszer korlátos megoldást ad, amennyiben a pontos megoldás korlátos [7, 8]. Tekintsük az állandó együtthatós, elsőrendű lineáris differenciálegyenlet-rendszerek általános alakját:

$$\begin{cases} x'_1(t) = m_{11}x_1(t) + \dots + m_{1d}x_d(t) \\ x'_2(t) = m_{21}x_1(t) + \dots + m_{2d}x_d(t) \\ \vdots \\ x'_d(t) = m_{d1}x_1(t) + \dots + m_{dd}x_d(t) \end{cases}$$

Egy $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$ mátrixban elhelyezve az egyenletrendszerben szereplő együtthatókat, felírható a következő alak:

$$x'(t) = Mx(t) \quad x: I \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad M \in \mathbb{R}^{d \times d} \quad (2.5)$$

Tegyük fel, hogy az M mátrixnak minden λ_i sajátértéke különböző, ekkor létezik olyan Q nonsinguláris mátrix, amely mellett

$$Q^{-1}MQ = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

egy diagonális mátrix, M sajátértékeivel a főátlóban. Alkalmazzuk a Runge–Kutta-módszerek általános lépését a (2.5) egyenletre. Ekkor

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \sum_{i=1}^s b_i k_i \\ k_i &= M \left(x_n + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j \right) \quad i = 1, \dots, s \end{aligned} \quad (2.7)$$

Vezessük be az

$$x_n = Qy_n, \quad k_i = Ql_i, \quad i = 1, \dots, s$$

helyettesítéseket. Írjuk be ezeket a (2.7) egyenletbe.

$$\begin{aligned} Qy_{n+1} &= Qy_n + \sum_{i=1}^s b_i Ql_i = Q \left(y_n + \sum_{i=1}^s b_i l_i \right) \\ Ql_i &= M \left(Qy_n + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} Ql_j \right) = MQ \left(y_n + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} l_j \right) \quad i = 1, \dots, s \end{aligned}$$

Beszorozva az összes egyenletet Q^{-1} mátrixszal balról, és felhasználva a (2.6) azonosságot, megkapjuk az

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \sum_{i=1}^s b_i l_i \\ y_i &= \Lambda \left(y_n + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} l_j \right) \quad i = 1, \dots, s \end{aligned}$$

alakot, amely éppen azt az eredményt adja, mintha a Runge–Kutta-módszert az

$$y'(t) = \Lambda y(t)$$

egyenletre alkalmaztuk volna. Ezzel a levezetéssel megmutattuk, hogy ezt a kvalitatív tulajdonságot elég csak skaláris lineáris differenciálegyenleten vizsgálni.

2.1. Definíció. Az

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) & \lambda \in \mathbb{C} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

kezdetiérték-feladatot Dahlquist-féle lineáris tesztfeladatnak hívjuk.

Közismert, hogy a (2.8) feladat megoldása $y(t) = e^{\lambda t}$. Ez a megoldás pontosan akkor lesz korlátos, ha $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$. Emiatt a numerikus megoldóktól is csak abban az esetben szeretnénk elvárni a korlátos megoldást, ha $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$.

Amennyiben egy Runge–Kutta-módszert alkalmazunk a (2.8) feladatra, a numerikus megoldás felírható az

$$y_{n+1} = R(\tau\lambda)y_n \quad (2.9)$$

alakba. Itt az $R: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ egy polinom vagy racionális törtfüggvény valós együtthatókkal a módszertől függően. Vezessük be a $z = \tau\lambda$ változót.

2.2. Definíció. Az $R(z)$, $z \in \mathbb{C}$ függvényt a Runge–Kutta-módszer stabilitási függvényének nevezzük.

A (2.9) képlet alapján a (2.8) megoldása pontosan akkor lesz korlátos, ha az

$$|R(z)| \leq 1.$$

egyenlőtlenség teljesül.

2.3. Definíció. A Runge–Kutta-módszert abszolút stabilnak nevezzük a $z = \tau\lambda \in \mathbb{C}$ pontban, ha $|R(z)| \leq 1$.

Vegyük például az EE módszert. Általános lépése alapján

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)$$

Most $f(t, y) = \lambda y$, tehát a numerikus módszert a Dahlquist-féle lineáris tesztfeladatra alkalmazva az

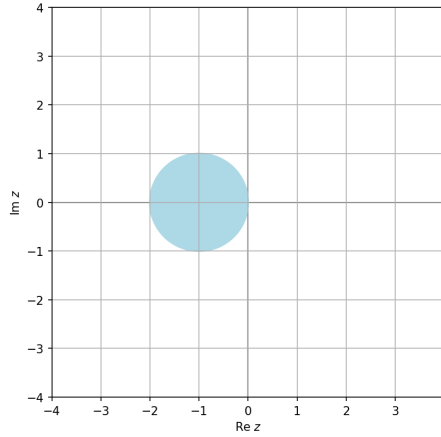
$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \tau\lambda y_n \\ y_{n+1} &= (1 + \tau\lambda)y_n \end{aligned}$$

numerikus megoldást kapjuk. Ezek alapján $R(z) = 1 + z$. Ebből az

$$|1 + z| \leq 1$$

egyenlőtlenség következik az abszolút stabilitási pontokra, amelyet a $z = -1$ középpontú, $r = 1$ sugarú zárt körlap pontjai teljesítenek.

2.4. Definíció. Az $\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \leq 1\}$ halmazt a Runge–Kutta-módszer stabilitási régiójának nevezzük az $R(z)$ stabilitási függvény mellett.



9. ábra. Az EE módszer stabilitási régiója

Mit árul el nekünk ez a stabilitási régió? Számos dolgot. Megmutatja nekünk, hogy mennyire szabad a τ lépésköz választása, milyen λ paraméter mellett tudjuk megoldani a tesztegyenletet úgy, hogy a kapott numerikus megoldás korlátos legyen.

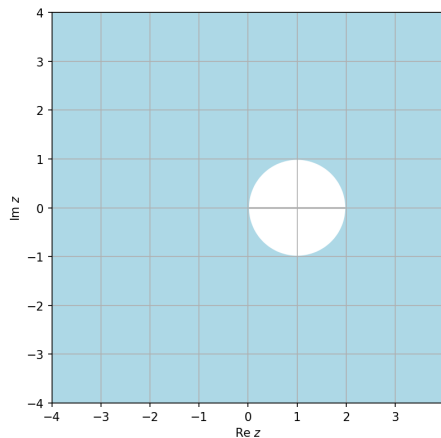
Az előző alfejezetben több példán is láttuk, hogy az IE módszer jól kezeli a merev feladatokat, de milyen jól és mekkora lépésköz mellett teljesít jól a (2.8) tesztegyenleten? Általános lépése alapján:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \tau \lambda y_{n+1} \\ (1 - \tau \lambda) y_{n+1} &= y_n \\ y_{n+1} &= \frac{1}{1 - \tau \lambda} y_n \end{aligned}$$

Tehát az IE módszer stabilitási függvénye

$$R(z) = \frac{1}{1 - z}$$

Megoldva az $\left| \frac{1}{1-z} \right| \leq 1$ egyenlőtlenséget, megkapjuk, hogy azon pontokban abszolút stabil az IE módszer, amelyek egy, vagy annál nagyobb távolságra vannak a $z = 1$ ponttól.



10. ábra. Az IE módszer stabilitási régiója

Az IE módszer stabilitási régiója megmutatja nekünk, hogy tetszőleges negatív valós résszel rendelkező λ komplex számra a Dahlquist-féle lineáris tesztegyszerűségben a numerikus megoldás korlátos lesz tetszőleges τ lépésköz választása mellett. Ez olyan kvalitatív tulajdonsága a numerikus megoldóknak, amelyre bevezetjük a következő definíciót.

2.5. Definíció. Az $R(z)$ stabilitási függvényű Runge–Kutta-módszert *A-stabilnak* nevezzük, ha $|R(z)| \leq 1 \ \forall z \in \mathbb{C}^-$ esetén, ahol $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0\}$ a komplex számsík bal félsíkja.

2.6. Következmény. Az implicit Euler-módszer *A-stabil*.

Az EE és az IE módszerek általánosítása volt a θ -módszer, amelyet az (1.8) egyenlet definiált. Előbbiekben láttuk, hogy $\theta = 0$ esetén nem, de $\theta = 1$ választás esetén már A-stabil a módszer. Mely θ választás esetén lesz még a módszer A-stabil? A módszer általános lépése alapján:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \tau \left((1 - \theta)\lambda y_n + \theta\lambda y_{n+1} \right) \\ (1 - \theta\tau\lambda)y_{n+1} &= \left(1 + (1 - \theta)\tau\lambda \right) y_n \\ y_{n+1} &= \frac{1 + (1 - \theta)\tau\lambda}{1 - \theta\tau\lambda} y_n \end{aligned}$$

Innen látható, hogy a θ -módszer stabilitási függvénye:

$$R(z) = \frac{1 + (1 - \theta)z}{1 - \theta z}$$

2.7. Tétel. A θ -módszer *A-stabil* $\theta \geq \frac{1}{2}$ esetén.

Bizonyítás. A módszer A-stabil, ha $|R(z)| \leq 1 \ \forall z \in \mathbb{C}^-$. Ez a feltétel az

$$\left| \frac{1 + (1 - \theta)z}{1 - \theta z} \right| \leq 1 \tag{2.10}$$

egyenlőtlenséget adja. Ha $z = 0$, $|R(0)| = 1$, emiatt a 0 pontban abszolút stabil a módszer. Emiatt a következő levezetésben csak a $z \neq 0$ pontokat tekintjük, oszthatunk majd $|z|$ értékkel.

Átrendezve a (2.10) egyenlőtlenséget, megkapjuk, hogy

$$|1 + (1 - \theta)z| \leq |1 - \theta z|$$

Bontsuk fel a z komplex számot valós és képzetes részre, $z = a + bi$, majd írjuk vissza az előző egyenlőtlenségbe.

$$|1 + (1 - \theta)(a + bi)| \leq |1 - \theta(a + bi)|$$

Rendezzük az abszolútértéken belüli tagokat valós és komplex rész szerint, ez alapján:

$$|1 + (1 - \theta)a + (1 - \theta)bi| \leq |1 - \theta a - \theta bi|$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalán egy-egy komplex szám hossza áll, emiatt a feladat ekvivalens azzal az alakkal, ahol a hossz négyzetükre írjuk fel az egyenlőtlenséget. Így a belátandó egyenlőtlenség átírható az

$$\left(1 + (1 - \theta)a\right)^2 + \left((1 - \theta)b\right)^2 \leq (1 - \theta a)^2 + (\theta b)^2$$

alakba. A négyzetre emeléseket elvégezve ebből az

$$1 + 2(1 - \theta)a + (1 - \theta)^2 a^2 + (1 - \theta)^2 b^2 \leq 1 - 2\theta a + \theta^2 a^2 + \theta^2 b^2$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Egyszerűsítés után:

$$\begin{aligned} 2a + a^2 - 2\theta a^2 + b^2 - 2\theta b^2 &\leq 0 \\ (1 - 2\theta)a^2 + 2a + (1 - 2\theta)b^2 &\leq 0 \\ (1 - 2\theta)(a^2 + b^2) + 2a &\leq 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Rendezzük a (2.11) egyenlőtlenséget a θ paraméterre. Mivel $a^2 + b^2 = |z|^2 \neq 0$, a θ értékre az

$$\frac{1}{2} + \frac{a}{|z|^2} \leq \theta$$

egyenlőtlenség adódik. Az egyenlőtlenségnek $a = 0$ érték mellett is teljesülnie kell, emiatt a θ -módszer pontosan akkor lesz A-stabil, ha

$$\theta \geq \frac{1}{2}$$

■

2.8. Következmény. *Az implicit középponti módszer A-stabil.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy a módszer stabilitási függvénye megegyezik a $\theta = \frac{1}{2}$ módszer stabilitási függvényével.

A módszer (1.7) képletét az (2.8) tetsztfeladatra alkalmazva megkapjuk, hogy

$$y_{n+1} = y_n + \tau\lambda \left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2} \right)$$

Vagyis

$$\left(1 - \frac{\tau\lambda}{2}\right) y_{n+1} = \left(1 + \frac{\tau\lambda}{2}\right) y_n$$

Az egyenletet y_{n+1} változóra rendezve megkapjuk, hogy

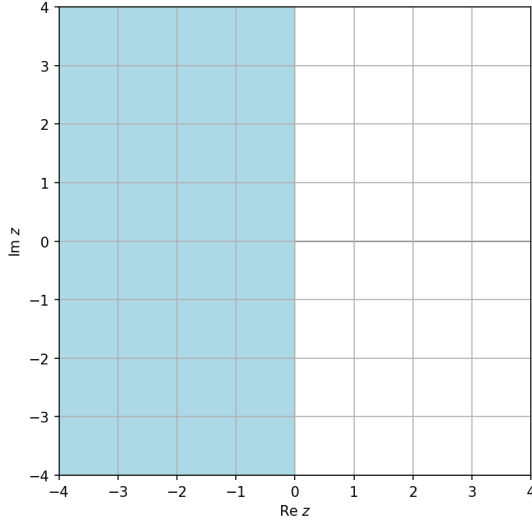
$$y_{n+1} = \frac{1 + \frac{\tau\lambda}{2}}{1 - \frac{\tau\lambda}{2}} y_n$$

Ennek alapján az (1.7) stabilitási függvénye

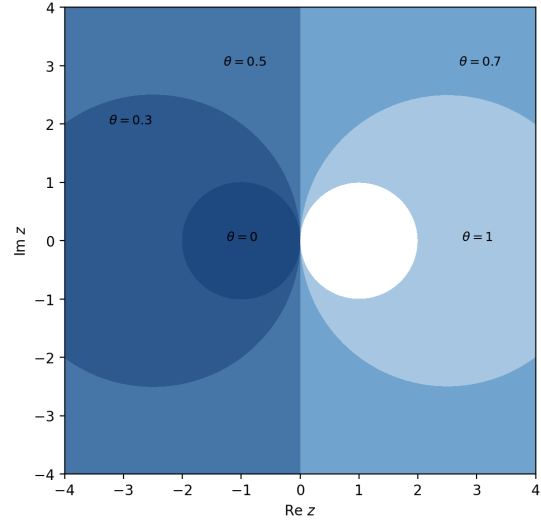
$$R(z) = \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}}$$

Ez éppen a θ -módszerek stabilitási függvénye $\theta = \frac{1}{2}$ mellett, amelyről a 2.7 tétel alapján tudjuk, hogy A-stabil. Emiatt az implicit középponti módszer is A-stabil.

■



11. ábra. A trapéz módszer stabilitási tartománya



12. ábra. A θ -módszer stabilitási tartománya különböző θ értékekre

A 2.7 tétel alapján, ha A-stabil módszert szeretnénk a θ -módszerekből kiválasztani, de a magasabb rend is szempont, akkor $\theta = \frac{1}{2}$ választással az (1.9) implicit trapéz módszer lesz a választásunk. Érdekessége a módszernek, hogy a stabilitási tartománya éppen a negatív komplex félsík. Ez ugyan jól hangozhat, viszont későbbi fejezetben példával megvizsgálva látjuk majd, hogy nem mindig előnyös ez a tulajdonság.

Az eddigiekben a stabilitási függvényt könnyedén fel tudtuk írni, ez főleg az alacsony lépcsőszámoknak volt köszönhető. Amennyiben viszont növeljük a lépcsőszámot, a stabilitási függvény meghatározása is komplikáltabb lesz. Ennek kiküszöbölésére a következő tétel ad egy általános képletet a stabilitási függvényre a módszer Butcher-táblója segítségével.

2.9. Tétel. Egy Runge–Kutta-módszer stabilitási függvényét az

$$R(z) = \frac{\det(I - zA + zeb^T)}{\det(I - zA)} \quad (2.12)$$

képlet adja meg, ahol $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^s$ vektor, A és b pedig a módszer Butcher-táblója szerinti mátrix, illetve vektor.

Bizonyítás. A bizonyítás a [8] 3.4.1 tétel bizonyítását követi.

Alkalmazva a Runge–Kutta-módszer (1.3) alakját a tesztegyenletre, megkapjuk az

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \tau\lambda \sum_{i=1}^s b_i Y_i \\ Y_i &= y_n + \tau\lambda \sum_{j=1}^s a_{ij} Y_j \end{aligned} \quad (2.13)$$

összefüggést. Írjuk át a (2.13) alakot egy lineáris egyenletrendszerbe.

$$\begin{pmatrix} 1 - \tau\lambda a_{11} & -\tau\lambda a_{12} & \cdots & -\tau\lambda a_{1s} & 0 \\ -\tau\lambda a_{21} & 1 - \tau\lambda a_{22} & \cdots & -\tau\lambda a_{2s} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\tau\lambda a_{s1} & -\tau\lambda a_{s2} & \cdots & 1 - \tau\lambda a_{ss} & 0 \\ -\tau\lambda b_1 & -\tau\lambda b_2 & \cdots & -\tau\lambda b_s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_s \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ y_n \\ \vdots \\ y_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Oldjuk meg a (2.14) egyenletet az y_{n+1} ismeretlenre a Cramer-szabály segítségével. Ekkor az y_{n+1} értékét két mátrix determinánsának hányadosával fejezzük ki. A nevezőben szereplő érték:

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \tau\lambda a_{11} & -\tau\lambda a_{12} & \cdots & -\tau\lambda a_{1s} & 0 \\ -\tau\lambda a_{21} & 1 - \tau\lambda a_{22} & \cdots & -\tau\lambda a_{2s} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\tau\lambda a_{s1} & -\tau\lambda a_{s2} & \cdots & 1 - \tau\lambda a_{ss} & 0 \\ -\tau\lambda b_1 & -\tau\lambda b_2 & \cdots & -\tau\lambda b_s & 1 \end{pmatrix}$$

A kifejtési tétel segítségével fejtsük ki a determinánst az utolsó oszlop szerint. Ekkor csak egy aldetermináns szerepel nem 0 együtthatóval, így a determináns az

$$1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 - \tau\lambda a_{11} & -\tau\lambda a_{12} & \cdots & -\tau\lambda a_{1s} \\ -\tau\lambda a_{21} & 1 - \tau\lambda a_{22} & \cdots & -\tau\lambda a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\tau\lambda a_{s1} & -\tau\lambda a_{s2} & \cdots & 1 - \tau\lambda a_{ss} \end{pmatrix} = \det(I - zA) \quad (2.15)$$

értékkel egyenlő. A számlálóban szereplő determináns a következő:

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \tau\lambda a_{11} & -\tau\lambda a_{12} & \cdots & -\tau\lambda a_{1s} & y_n \\ -\tau\lambda a_{21} & 1 - \tau\lambda a_{22} & \cdots & -\tau\lambda a_{2s} & y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\tau\lambda a_{s1} & -\tau\lambda a_{s2} & \cdots & 1 - \tau\lambda a_{ss} & y_n \\ -\tau\lambda b_1 & -\tau\lambda b_2 & \cdots & -\tau\lambda b_s & y_n \end{pmatrix}$$

Vonjuk ki a determináns utolsó sorát az első s sorból. Ez nem változtat a determináns értékén, de hasonló alakra vezet, mint a nevezőben lévő determináns:

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \tau\lambda a_{11} + \tau\lambda b_1 & -\tau\lambda a_{12} + \tau\lambda b_2 & \cdots & -\tau\lambda a_{1s} + \tau\lambda b_s & 0 \\ -\tau\lambda a_{21} + \tau\lambda b_1 & 1 - \tau\lambda a_{22} + \tau\lambda b_2 & \cdots & -\tau\lambda a_{2s} + \tau\lambda b_s & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\tau\lambda a_{s1} + \tau\lambda b_1 & -\tau\lambda a_{s2} + \tau\lambda b_2 & \cdots & 1 - \tau\lambda a_{ss} + \tau\lambda b_s & 0 \\ -\tau\lambda b_1 & -\tau\lambda b_2 & \cdots & -\tau\lambda b_s & y_n \end{pmatrix}$$

Ismét a kifejtési tétel segítségével az utolsó oszlop szerint kifejtve a determinánst, az csak egy nem 0 együtthatójú aldeterminánssra esik szét,

$$y_n \cdot \det \begin{pmatrix} 1 - \tau\lambda a_{11} + \tau\lambda b_1 & -\tau\lambda a_{12} + \tau\lambda b_2 & \cdots & -\tau\lambda a_{1s} + \tau\lambda b_s \\ -\tau\lambda a_{21} + \tau\lambda b_1 & 1 - \tau\lambda a_{22} + \tau\lambda b_2 & \cdots & -\tau\lambda a_{2s} + \tau\lambda b_s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\tau\lambda a_{s1} + \tau\lambda b_1 & -\tau\lambda a_{s2} + \tau\lambda b_2 & \cdots & 1 - \tau\lambda a_{ss} + \tau\lambda b_s \end{pmatrix}$$

amelynek értéke

$$y_n \det(I - zA + zeb^\top) \quad (2.16)$$

Kifejezve az y_{n+1} változót a (2.16) és (2.15) hányadosával az

$$y_{n+1} = \frac{\det(I - zA + zeb^\top)}{\det(I - zA)} y_n$$

összefüggést nyerjük, amelyből leolvasható a 2.9 tételben szereplő $R(z)$ stabilitási függvény. ■

2.3. Explicit módszerek abszolút stabilitása

Miután bevezettük az abszolút stabilitás fogalmát, vizsgáljuk meg, hogy ez a konstrukció miképp karakterizálható az explicit módszereken. A legérdekesebb és legfontosabb tulajdonság, amely a 2.9 tételből következik, a 2.10 következmény, amely egy erős állítást fogalmaz meg az explicit módszerek A-stabilitásáról.

2.10. Következmény. *Explicit Runge–Kutta-módszer nem lehet A-stabil.*

Bizonyítás. Elég megmutatnunk, hogy egy explicit Runge–Kutta-módszer stabilitási régiója mindig korlátos, emiatt nem tartalmazhatja a komplex sík negatív félsíkját.

Tekintsük a 2.9 tételben szereplő képletet a stabilitási függvényre. Amennyiben a módszer explicit, az $(I - zA)$ egy alsó háromszögmátrix, 1 értékekkel a főátlóban, emiatt $\det(I - zA) = 1$. Ekkor $R(z) = \det(I - zA + zeb^\top)$, amely egy legalább elsőfokú polinom. Minden ilyen polinomra igaz, hogy $|z| \rightarrow \infty$ esetén

$$|R(z)| \rightarrow \infty$$

Ekkor az $|R(z)| \leq 1$ egyenlőtlenség csak korlátos tartományon teljesül, ami ellentmond az A-stabilitás feltételének. ■

A 2.10 következmény miatt A-stabil módszereket csak implicit módszerek között fogunk találni.

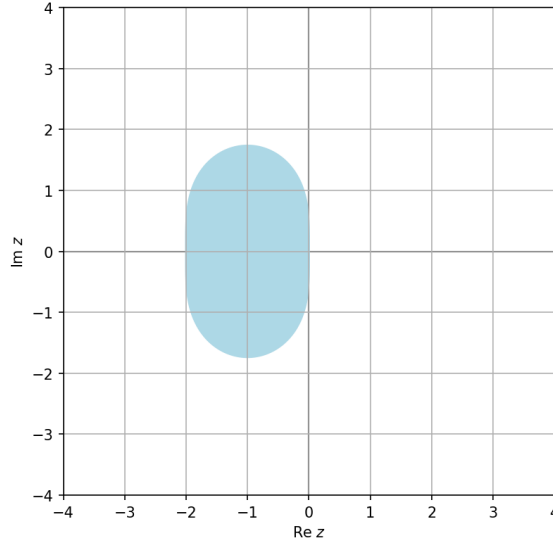
A másodrendű módszerek közül az α -módszereket vezettük be az (1.11) képlettel. Vajon tudunk-e olyan α értéket választani, amellyel maximalizálni tudjuk az α -módszerek stabilitási régiójának területét? A (2.12) képlet alapján

$$R_\alpha(z) = \det \begin{pmatrix} 1 + \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right)z & \frac{1}{2\alpha}z \\ \left(1 - \frac{1}{2\alpha} - \alpha\right)z & 1 + \frac{1}{2\alpha}z \end{pmatrix}$$

A determinánst kiértékelve megkapjuk, hogy

$$R_\alpha(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2$$

azaz a stabilitási függvény és ezzel a stabilitási régió is független az α paraméter megválasztásától. Ezt a jelenséget a következő állítás magyarázza meg.



13. ábra. Az α -módszerek stabilitási régiója

2.11. Állítás. *Ha az explicit Runge–Kutta-módszer p -ed rendű, akkor stabilitási függvénye*

$$R(z) = 1 + \frac{z^1}{1!} + \cdots + \frac{z^p}{p!} + \mathcal{O}(z^{p+1}) \quad (2.17)$$

alakú, és az $\mathcal{O}(z^{p+1})$ tag a módszertől függ.

Bizonyítás. A t_n időpontban az $y(t_n) = y_n$ kezdeti feltételből indítva, a lineáris tesztegyenlet pontos megoldását az $e^{\tau\lambda}y_n$ képlet adja meg. Mivel $y_{n+1} = R(\tau\lambda)y_n$, a rend definíciójából következik, hogy egy p -ed rendű módszerre

$$e^z - R(z) = \mathcal{O}(\tau^{p+1}) = \mathcal{O}(z^{p+1})$$

vagyis a módszer p -ed rendben közelíti a pontos megoldást. A Taylor-sor egyértelműsége miatt $R(z)$ első p tagjának meg kell egyeznie e^z Taylor-sorának első p tagjával. Ezzel teljesül az állításban szereplő képlet. ■

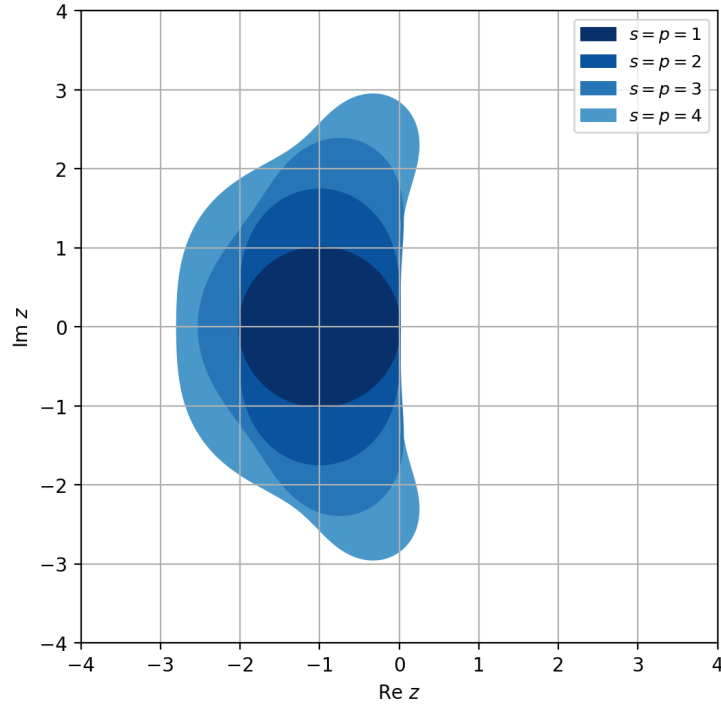
2.12. Következmény. *Az $s = p$ -ed rendű explicit Runge–Kutta-módszerek stabilitási függvénye*

$$R(z) = 1 + \frac{z^1}{1!} + \cdots + \frac{z^p}{p!}$$

alakú.

A 2.11 állítás és 2.12 következmény segítségével fel tudjuk írni magasabb rendű explicit módszerek stabilitási függvényét anélkül, hogy a (2.12) képletet használnánk. Ilyen például az RK3 ($s = p = 3$) és az RK4 ($s = p = 4$) módszer is.

$$R(z) = \begin{cases} 1 + z & s = p = 1 \\ 1 + z + \frac{z^2}{2} & s = p = 2 \\ 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} & s = p = 3 \\ 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} & s = p = 4 \end{cases}$$



14. ábra. Az $s = p$ rendű explicit Runge–Kutta-módszerek stabilitási tartományai

Magasabb, $p \geq 5$ rend esetében az 1.9 tétel alapján $s > p$, amely miatt a stabilitási függvény meghatározásához nem elég a 2.11 állítás, a stabilitási függvényt ki kell számolni, például a (2.12) képlet segítségével. Tekintsük a [3] (236a) RK5 módszert és a Nyström-módszert, melyek egyformán ötödrendű, hatlépcsős módszerek, és az alábbi Butcher-tablókkal definiálhatók.

0	0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{16}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$	0	0
1	$-\frac{3}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{6}{7}$	$-\frac{12}{7}$	$\frac{8}{7}$	0
	$\frac{7}{90}$	0	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$

13. táblázat. Az RK5 módszer Butcher-tablója

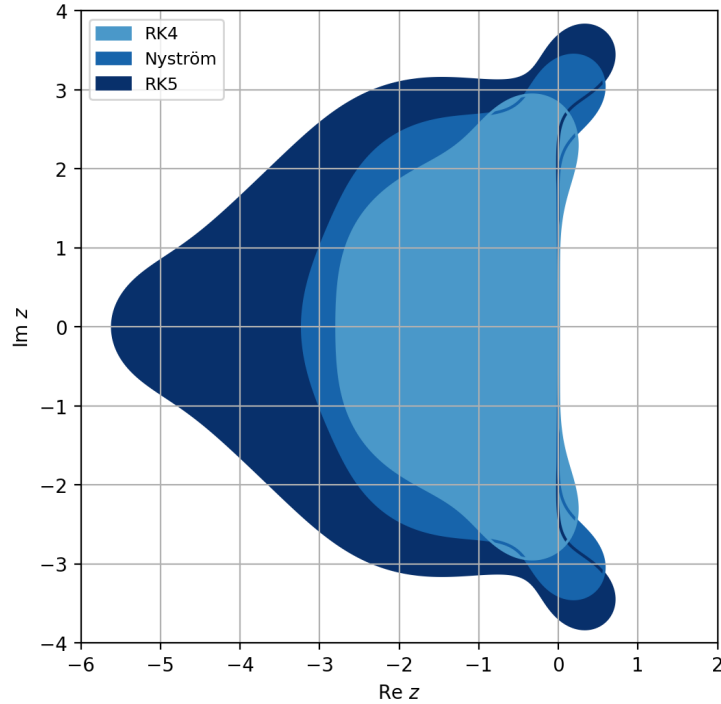
0	0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0
$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$	0	0	0	0
1	$\frac{1}{4}$	-3	$\frac{15}{4}$	0	0	0
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{10}{9}$	$-\frac{50}{81}$	$\frac{8}{81}$	0	0
$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{75}$	0	0
	$\frac{23}{192}$	0	$\frac{125}{192}$	0	$-\frac{27}{64}$	$\frac{125}{192}$

14. táblázat. A Nyström-módszer Butcher-tablója

A 2.11 állítás alapján mindkét módszer stabilitási függvénye

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + Cz^6$$

alakú. Kiszámolva a stabilitási függvényeket, megkapjuk, hogy az RK5 módszer C értéke $\frac{1}{1280}$, míg a Nyström-módszernél $C = 0$. Emiatt a stabilitási régiójuk nem egyezik meg.



15. ábra. Az RK5 és a Nyström-módszer stabilitási régiója az RK4 módszerrel együtt

Vegyük észre, hogy a rend emelésével az explicit Runge–Kutta-módszerek stabilitási régiója is növekedett. Magasabb rendű explicit módszereknél tehát nagyobb τ választható, a numerikus megoldók így is képesek korlátos megoldást adni a tesztfeladatra. A 2.10 következmény miatt viszont továbbra is szükség lesz nagy $|\lambda|$ esetén hozzá megfelelő elég kicsi τ lépésközzre, hogy a $\tau\lambda$ értéket tartalmazza a módszer stabilitási régiója.

2.4. Implicit módszerek abszolút stabilitása

Az előző fejezetben számos példával és tétellel szemléltetve láttuk, hogy az A-stabilitást explicit módszerrel nem lehet teljesíteni, nagyobb stabilitási régió eléréséhez csak magas lépcsőszámú módszerek jöhetnek szóba, amelyek feleslegesen növelik a számítási igényt amellet, hogy stabilitási régióik korlátosak maradnak.

Ezzel szemben az implicit módszereknél nincs az 1.8 tételhez hasonló kikötés, a $p > s$ rend elérése lehetséges. Az implicit $s < p$ rendű módszerek egy családja például a Radau-módszerek (Radau IA ill. Radau IIA) [3]. Ezek a numerikus megoldók oly módon vannak megkonstruálva, hogy s lépcső mellett a módszerek $p = 2s - 1$ renddel rendelkezzenek.

0	1
	1

Radau IA, $s = 1$

1	1
	1

Radau IIA, $s = 1$

0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Radau IA, $s = 2$

$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{12}$
1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Radau IIA, $s = 2$

0	$\frac{1}{9}$	$\frac{-1-\sqrt{6}}{18}$	$\frac{-1+\sqrt{6}}{18}$
$\frac{6-\sqrt{6}}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{88+7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{88-43\sqrt{6}}{360}$
$\frac{6+\sqrt{6}}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{88+43\sqrt{6}}{360}$	$\frac{88-7\sqrt{6}}{360}$
	$\frac{1}{9}$	$\frac{16+\sqrt{6}}{36}$	$\frac{16-\sqrt{6}}{36}$

Radau IA, $s = 3$

$\frac{4-\sqrt{6}}{10}$	$\frac{88-7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{296-169\sqrt{6}}{1800}$	$\frac{-2+3\sqrt{6}}{225}$
$\frac{4+\sqrt{6}}{10}$	$\frac{296+169\sqrt{6}}{1800}$	$\frac{88+7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{-2-3\sqrt{6}}{225}$
1	$\frac{16-\sqrt{6}}{36}$	$\frac{16+\sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$
	$\frac{16-\sqrt{6}}{36}$	$\frac{16+\sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$

Radau IIA, $s = 3$

15. táblázat. A Radau IA és Radau IIA módszerek Butcher-tablói

Vegyük észre, hogy $s = 1$ lépcsőszám esetén a Radau IIA módszer éppen az implicit Euler-módszer. Ezek a módszerek jó stabilitási tulajdonsággal rendelkeznek, ahogy azt majd a későbbiekben is látni fogjuk, így alkalmas numerikus megoldók merev feladatokra.

A másik magas rendű módszercsalád a Gauss–Legendre-módszerek [3], amelyek már az (1.7) módszernél említésre kerültek. A módszerek s lépcső mellett $p = 2s$ rendet érnek el, ezzel maximalizálva azt. Ezek a módszerek is jó stabilitási tulajdonsággal rendelkeznek, $s = 1$ esetén már láttuk a 2.8 következménynél, hogy a módszer A-stabil.

$\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$
$\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\sqrt{3}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Gauss–Legendre, $s = 2$

$\frac{5-\sqrt{15}}{10}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{80-24\sqrt{15}}{360}$	$\frac{50-12\sqrt{15}}{360}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{50+15\sqrt{15}}{360}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{50-15\sqrt{15}}{360}$
$\frac{5+\sqrt{15}}{10}$	$\frac{50+12\sqrt{15}}{360}$	$\frac{80+24\sqrt{15}}{360}$	$\frac{5}{36}$
	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$

Gauss–Legendre, $s = 3$

16. táblázat. Gauss–Legendre-módszerek Butcher-tablói

A fentebb bevezetett módszerek stabilitási vizsgálatát a korábbiakhoz hasonlóan, egyesével levezethetnénk: először a (2.9) segítségével meghatároznánk a stabilitási függvényeket, majd meghatároznánk az $|R(z)| \leq 1$ egyenlőtlenség feltételeit. Ezzel szemben viszont most egy általánosabb irányba megyünk el, amely csoportszerűen adja majd meg a stabilitási függvényeket és az A-stabilitási tulajdonságokat.

2.4.1. Padé-approximációk

Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy adott függvény, amelyet szeretnénk közelíteni. Amennyiben f analitikus a $z = 0$ pontban és $f(0) \neq 0$, bizonyos $l, m \in \mathbb{N}$ értékek mellett lehetséges az f függvényt racionális törtfüggvénnyel, azaz

$$f(z) \approx \frac{N_l(z)}{D_m(z)}$$

alakban közelíteni, ahol $N_l(z)$ l -ed fokú, $D_m(z)$ pedig m -ed fokú polinom. Emellett a közelítés hibája $\mathcal{O}(z^{l+m+1})$. Amennyiben létezik a fentebb definiált közelítése az f függvénynek, akkor az $\frac{N_l(z)}{D_m(z)}$ hányadost az f függvény (l, m) Padé-approximációjának nevezzük [3]. A gyakorlatban a $D_m(z)$ függvényt a $D_m(0) = 1$ feltétel mellett szokás megadni, hiszen így eggyel kevesebb együtthatót kell meghatározni a nevezőben.

Nem minden függvénynek létezik bizonyos l, m választás mellett az (l, m) közelítése. Például az $f(z) = \sin z$ függvénynek az $(1, 1)$ Padé-approximációja nem létezik, mivel az

$$\frac{az + b}{cz + 1} = z$$

egyenletnek csak $c = 0$ esetén van megoldása, amellyel a függvény $(1, 0)$ közelítését kapjuk.

2.13. Megjegyzés. Ha $m = 0$, akkor $f(l, m)$ Padé-approximációja f $z = 0$ pontbeli Taylor-sorának l -edik részletösszege.

2.14. Megjegyzés. Ha $l = 0$, akkor $f(l, m)$ Padé-approximációja $\frac{1}{f(z)}$ közelítése.

A következőkben az $f(z) = e^z$ függvényt fogjuk ily módon közelíteni. Mivel tetszőleges skalár beszorzással módosítható N_l és D_m értéke úgy, hogy a közelítő függvény értéke nem módosul, az $N_l(z), D_m(z)$ függvényeket normalizáljuk: feltesszük, hogy $N_l(0) = D_m(0) = 1$. Az exponenciális függvénynek minden $l, m \in \mathbb{N}$ értékre létezik Padé-approximációja. Ezeket a közelítéseket egy táblázatba szokás rendezni, melyet az f függvény Padé-táblájának hívnak.

2.15. Példa. Mi az e^z függvény $(2, 1)$ Padé-approximációja?

A definíció alapján

$$\frac{az^2 + bz + c}{dz + e}$$

alakban kell keresnünk a közelítést. A normálás miatt tudjuk, hogy $c = e = 1$, így az

$$\frac{az^2 + bz + 1}{dz + 1}$$

képletet kapjuk. Ezen törtfüggvénynek az e^z függvény Taylor-sorának $l + m = 2 + 1 = 3$ kitevőjű tagjáig kell megegyeznie, vagyis fenn kell állnia az

$$\frac{az^2 + bz + 1}{dz + 1} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \mathcal{O}(z^4).$$

egyenlőségnek. Felszorozva a $dz + 1$ nevezővel és rendezve, az

$$az^2 + bz + 1 = 1 + (d + 1)z + \left(d + \frac{1}{2}\right)z^2 + \left(\frac{d}{2} + \frac{1}{6}\right)z^3 + \mathcal{O}(z^4)$$

összefüggést nyerjük. A levezetésnél $\mathcal{O}(z^4)$ hibával számolunk, emiatt a z^4 -es tag elhagyható. Az a , b , d együtthatókra felírva a

$$\frac{d}{2} + \frac{1}{6} = 0, \quad a = d + \frac{1}{2}, \quad b = d + 1$$

egyenleteket, az együtthatókra az

$$a = \frac{1}{6}, \quad b = \frac{2}{3}, \quad d = -\frac{1}{3}$$

értékeket kapjuk. Ez alapján az e^z $(2, 1)$ Padé-approximációja a következő:

$$\frac{1 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{6}z^2}{1 - \frac{1}{3}z}$$

Az e^z függvény (l, m) Padé-approximációjára érvényes az alábbi képlet, (lásd [3] 352A tétel), nem kell egyesével kiszámolni a fenti levezetéshez hasonlóan a függvényeket.

2.16. Tétel. *Az e^z exponenciális függvény (l, m) Padé-approximációját az*

$$\frac{N_l(z)}{D_m(z)} = \frac{\sum_{i=0}^l \frac{l!}{(l-i)!} \frac{(l+m-i)!}{(l+m)!} \frac{z^i}{i!}}{\sum_{i=0}^m \frac{m!}{(m-i)!} \frac{(l+m-i)!}{(l+m)!} \frac{(-z)^i}{i!}}$$

képlet adja.

$l \backslash m$	0	1	2	3	...
0	1	$1 + z$	$1 + z + \frac{z^2}{2}$	$1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}$	...
1	$\frac{1}{1-z}$	$\frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}}$	$\frac{1 + \frac{2z}{3} + \frac{z^2}{6}}{1 - \frac{z}{3}}$	$\frac{1 + \frac{3z}{4} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{24}}{1 - \frac{z}{4}}$	...
2	$\frac{1}{1 - z + \frac{z^2}{2}}$	$\frac{1 + \frac{z}{3}}{1 - \frac{2z}{3} + \frac{z^2}{6}}$	$\frac{1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12}}{1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12}}$	$\frac{1 + \frac{3z}{5} + \frac{3z^2}{20} + \frac{z^3}{60}}{1 - \frac{2z}{5} + \frac{z^2}{20}}$	...
3	$\frac{1}{1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6}}$	$\frac{1 + \frac{z}{4}}{1 - \frac{3z}{4} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{24}}$	$\frac{1 + \frac{2z}{5} + \frac{z^2}{20}}{1 - \frac{3z}{5} + \frac{3z^2}{20} - \frac{z^3}{60}}$	$\frac{1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{10} + \frac{z^3}{120}}{1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{10} - \frac{z^3}{120}}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

17. táblázat. Az e^z függvény Padé-táblája

A továbbiakban a könnyebb megfogalmazhatóság kedvéért bevezetjük egy tetszőleges racionális törtfüggvény A-stabilitásának a fogalmát.

2.17. Definíció. Az $R: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $R(z) = \frac{N_l(z)}{D_m(z)}$ racionális törtfüggvény A -stabil, ha $|R(z)| \leq 1 \ \forall z \in \mathbb{C}^-$ esetén, ahol $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z \leq 0\}$ a komplex számsík bal félsíkja.

Könnyen látható a 2.10 következmény bizonyítása alapján, hogy a 17. táblázatban az $l > m$ cellákban lévő függvények nem lehetnek A -stabilak. Ezeknek a függvényeknek a számlálója magasabb fokú, mint a nevezőjük, emiatt $|z| \rightarrow +\infty$ esetén $|R(z)| \rightarrow +\infty$, vagyis a függvények stabilitási régiója korlátos, és így nem lehetnek A -stabilak.

Mi a helyzet a többi függvénnyel? Meg tudunk adni olyan módszereket, amelyek stabilitási függvényei az $m \leq l$ régióban vannak? A válasz igen, magyarázatot pedig a következő két lemma szolgáltatja [8].

2.18. Lemma. Az s -lépcsős Gauss–Legendre-módszer stabilitási függvényét az exponenciális függvény (s, s) Padé-approximációja adja meg.

2.19. Lemma. Az s -lépcsős Radau IA és Radau IIA módszerek stabilitási függvényét az exponenciális függvény $(s - 1, s)$ Padé-approximációja adja meg.

Az előző érvelés ezeknek a módszereknek a stabilitási függvényeit nem zárta ki az A -stabilitásból. Arra a kérdésre, hogy ezek a módszerek A -stabilak-e, a következő fontos tétel ad választ [8].

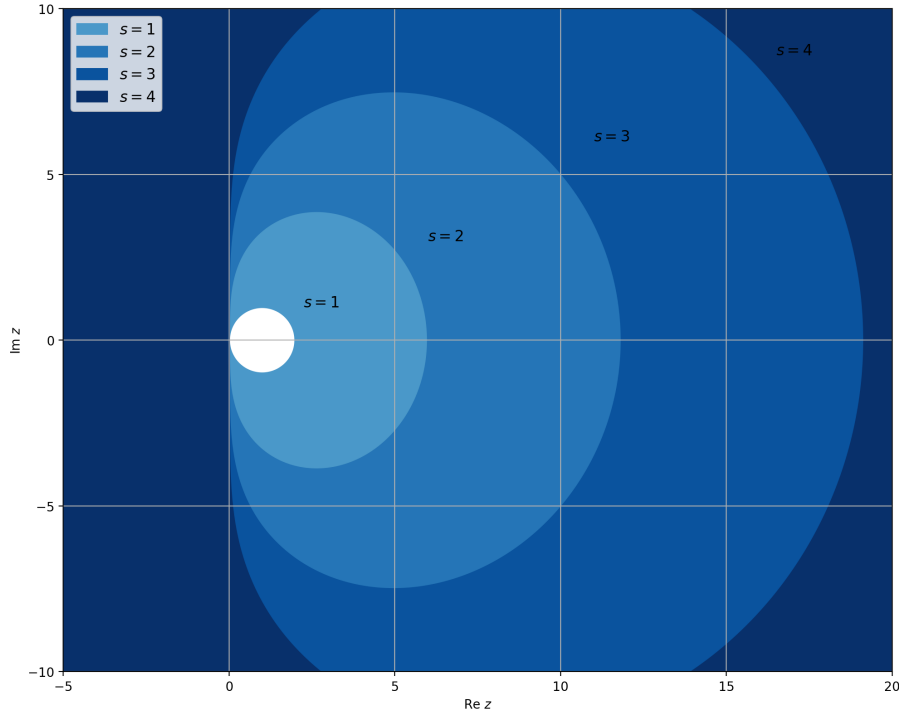
2.20. Tétel. Az exponenciális függvény tetszőleges $R(z) = \frac{N_l(z)}{D_m(z)}$ Padé-approximációja akkor és csak akkor A -stabil, ha

$$m - 2 \leq l \leq m.$$

2.21. Következmény. A Gauss–Legendre-módszerek és a Radau IA, IIA módszerek A -stabilak.

A 2.21 következmény alapján a Gauss–Legendre és Radau módszerek jól működnek a lineáris tesztegyszerűen, és ahogy a későbbiekben látni fogjuk, merev feladatokon is jobban teljesítenek más módszerekhez képest.

A Gauss–Legendre-módszerek stabilitási régiói megegyeznek, $S_{GL} = \mathbb{C}^-$, vagyis a stabilitási régió éppen a negatív komplex félsík, amely a 11. ábrán már látható volt. Ezzel szemben a Radau-módszerek stabilitási régiói nem esnek egybe. Korábban már láttuk $s = 1$ lépcsőre a $(0, 1)$ Padé-approximáció stabilitási régióját, ez az IE módszer stabilitási régiójával esett egybe. A 2.19 lemma alapján az $s = 1$ lépcsős Radau-módszereknek is a 10. ábrán látható régió a stabilitási tartományuk.



16. ábra. A Radau IA és IIA módszerek stabilitási régiói $s = 1, 2, 3, 4$ lépcsőszám mellett

A 16. ábrán jól látható az IE módszer stabilitási régiója, továbbá az is, hogy az s lépcsőszám – és ezzel a rend – emelésével a Radau-módszerek instabilitási régiója növekszik. Ez alapján ha az A-stabilitás mellett kisebb instabilitási régióval rendelkező Radau módszert szeretnénk használni, akkor alacsonyabb lépcsőszámút érdemes választani, viszont ha elég az A-stabilitás, akkor nyugodtan választhatunk magasabb lépcsőszámú módszert, amely egyben magasabb rendű is.

3. Gyakorlati alkalmazások

Ebben a fejezetben a korábban bemutatott elméleti eredményeket vizsgáljuk meg gyakorlati példákon, Pythonban írt kódok segítségével [12]. A példák segítségével közelebbről is megvizsgáljuk, hogy a stabilitási tulajdonságok miképp befolyásolják a numerikus megoldásokat. Összehasonlítjuk az explicit és implicit módszereket, sőt az implicit módszereket más implicit módszerekkel. Arra a kérdésre keressük a következőkben a választ, hogy egy – a mi esetünkben merev – differenciálegyenletet érdemes-e különböző numerikus módszerekkel is megoldani, vagy az egyes módszerek közelítőleg ugyanazt a numerikus megoldást adják. A 2.1 alfejezetben már láttuk, hogy merev feladatoknál érdemes implicit módszereket választani.

3.1. Harmonikus rezgőmozgás

Talán a legismertebb példa differenciálegyenletre a harmonikus rezgőmozgást leíró

$$x''(t) = -\omega^2 x(t) \quad (3.1)$$

másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet, $\omega > 0$ paraméter és $t \in [0, T]$, ahol $T \in \mathbb{R}^+$. Közismert, hogy az egyenlet megoldása $x(0) = \omega$, $x'(0) = 0$ kezdeti érték mellett az

$$x(t) = \omega \cos(\omega t)$$

függvény. Gyakran a (3.1) feladatot az átviteli elv segítségével az

$$\begin{aligned} x'(t) &= v(t) \\ v'(t) &= -\omega^2 x(t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

alakban írjuk fel. A következőkben mi ezzel az alakkal foglalkozunk. A rendszer együtthatómátrixa az

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix, melynek sajátértékei $\lambda_{1,2} = \pm \omega i$. A (3.2) rendszer megoldása az $x(0) = \omega$, $v(0) = 0$ kezdeti érték mellett

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \cos \omega t \\ -\omega^2 \sin \omega t \end{pmatrix}$$

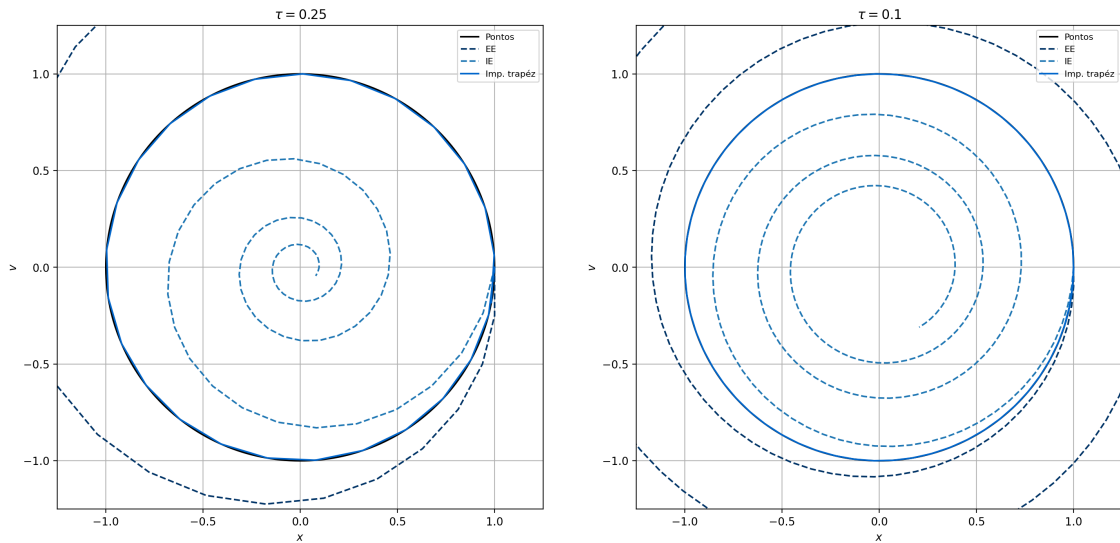
Fontos megjegyezni, hogy a megoldások periodikusak. Eszerint elég lenne csak egy periódusra közel pontosan kiszámolni a megoldást, a többi intervallumon pedig a $\frac{2\pi}{\omega}$ periódus segítségével megadni a megoldás értékét a t időpontban.

A számítógépes szimulációban $\omega = 1$ paraméterválasztás mellett dolgoztunk, ekkor a rendszer fázisterében az $x(0) = 1$, $v(0) = 0$ kezdeti értékből induló megoldás az $r = 1$ sugarú, origó középpontú körön fut, a megoldást az

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

függvény adja.

Felmerül a kérdés, hogy ha a megoldás ilyen szép, ráadásul periodikus, akkor miért szerepel ebben a fejezetben? Ahogy az alábbi ábrákon is látható, a periodikusság több numerikus módszernek kihívást jelent, nem tudják kezelni az oszcillációt.



(a) $\tau = 0.25$ lépésköz

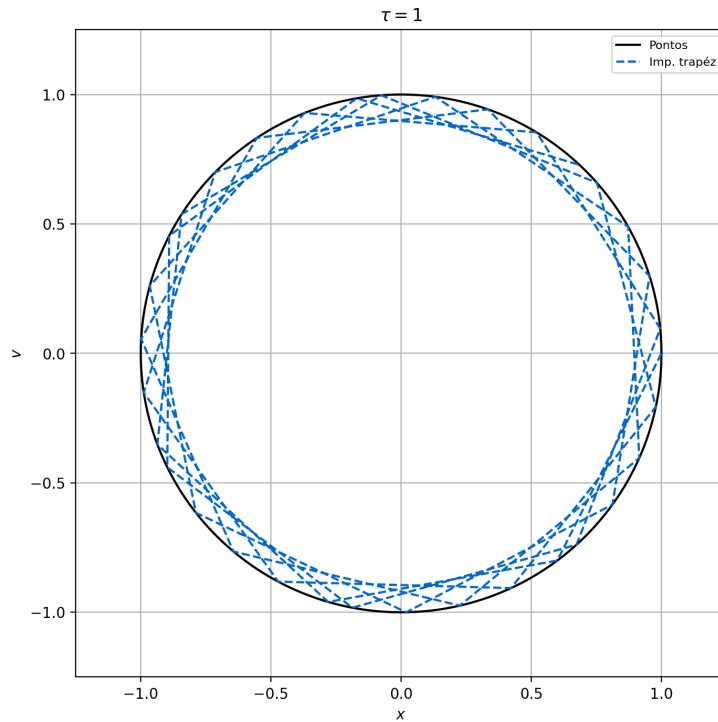
(b) $\tau = 0.1$ lépésköz

17. ábra. A (3.2) rendszer megoldása $x(0) = 1$, $v(0) = 0$ kezdeti értékből indítva EE, IE és implicit trapéz módszerrel megoldva, különböző τ lépésközökkel

Az 17a-17b. ábrákon jól látható, hogy az EE módszer megoldása az idő haladtával távolodik a pontos megoldástól. Meglepő módon ezt a viselkedést az IE módszer megoldása is követi annak ellenére, hogy a módszer A-stabil. Ellentmondásos lehet, hogy miért nem jó a korábban bemutatott numerikus megoldók közül az egyik legstabilabb módszer a feladatra. A problémát éppen az okozza, hogy az IE módszer túl stabil, emiatt konvergál az origóba a kapott közelítés, amely rossz numerikus megoldást eredményez.

Ezzel szemben az implicit trapéz módszer, amely éppen a minimális területtel rendelkezik az A-stabilitás teljesítéséhez, gond nélkül kezeli a feladatot. A $\tau = 0.25$ lépésköz mellett nagyon közel marad a pontos megoldáshoz. Ahogy a 18. ábrán is látható, ezt a pozitív tulajdonságát nagyobb, akár $\tau = 1$ lépésköz mellett is megtartja.

A jelenség magyarázatát a rendszert leíró A mátrix sajátértékeiben kell keresni. Minden $\omega > 0$, így $\omega = 1$ mellett is A sajátértékei a képzetes tengelyen helyezkednek el. Tetszőleges τ esetén a $\tau\lambda_{1,2}$ értékek az explicit Euler-módszer instabilitási régiójába esnek, megmagyarázva a divergálást, míg az implicit Euler-módszernél a stabilitási régió belsejében találhatók, emiatt az abszolút stabilitás miatt az origóhoz konvergál a megoldás. Az implicit trapéz módszernél viszont a $\tau\lambda_{1,2}$ értékek éppen a módszer stabilitási régiójának határán helyezkednek el, emiatt az általa adott megoldás a pontos megoldás környékén marad.



18. ábra. A (3.2) rendszer megoldása $x(0) = 1$, $v(0) = 0$ kezdeti értékből indítva, implicit trapéz módszerrel, $\tau = 1$ lépésköz mellett

Úgy tűnhet ebből a példából, hogy azok a módszerek, melyek stabilitási régiói éppen a negatív komplex félsíkkal egyeznek meg, mindig jó választásnak bizonyulnak. Azonban ez nem így van, későbbi példában látni fogjuk, hogy ez a tulajdonság, ami ennél a példánál jó megoldást eredményezett, más feladaton elfogadhatatlan numerikus közelítést ad.

3.2. A Prothero–Robinson-egyenlet

A Prothero–Robinson-egyenlet volt az első feladat, ahol a numerikus megoldások között a *rendcsökkenés* jelenséget észlelték [10]. Merev feladatoknál, ha a feladat L Lipschitz-konstansa túl nagy, az elméletileg igazolt rendnél alacsonyabb rendű közelítést figyelhetünk meg.

A szóban forgó differenciálegyenlet alakja

$$y'(t) = \lambda(y(t) - \varphi(t)) + \varphi'(t) \quad (3.4)$$

ahol $\lambda \in \mathbb{C}$ konstans, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pedig egy folytonosan differenciálható függvény a megoldási intervallumon.

3.1. Állítás. A (3.4) egyenlet megoldása az $y(t_0) = \varphi(t_0)$ kezdeti érték mellett $y(t) = \varphi(t)$.

Bizonyítás. Tekintsük a (3.4) egyenletet. Bontsuk fel az egyenlőség jobb oldalán lévő zárójelet, majd a $\lambda y(t)$ tagot vigyük át a bal oldalra.

$$y'(t) - \lambda y(t) = \varphi'(t) - \lambda \varphi(t)$$

Szorozzuk be mindkét oldalt az $e^{-\lambda t}$ taggal.

$$y'(t)e^{-\lambda t} - \lambda y(t)e^{-\lambda t} = \varphi'(t)e^{-\lambda t} - \lambda \varphi(t)e^{-\lambda t}$$

Vegyük észre, hogy mindkét oldalon $(f \cdot g)'$ deriválási alak szerepel, amely a

$$\frac{d}{dt}(y(t)e^{-\lambda t}) = \frac{d}{dt}(\varphi(t)e^{-\lambda t})$$

alakra hozható. Integráljuk ki mindkét oldalt t szerint.

$$\int \frac{d}{dt}(y(t)e^{-\lambda t}) dt = \int \frac{d}{dt}(\varphi(t)e^{-\lambda t}) dt$$

$$y(t)e^{-\lambda t} = \varphi(t)e^{-\lambda t} + C$$

Vigyük át a bal oldalra a $\varphi(t)e^{-\lambda t}$ tagot, majd alakítsuk át szorzattá.

$$e^{-\lambda t}(y(t) - \varphi(t)) = C$$

Az $y(t_0) = \varphi(t_0)$ kezdeti értéket felhasználva, a $t = t_0$ időpontban a bal oldal kinullázódik, emiatt $C = 0$. De ekkor az

$$e^{-\lambda t}(y(t) - \varphi(t)) = 0$$

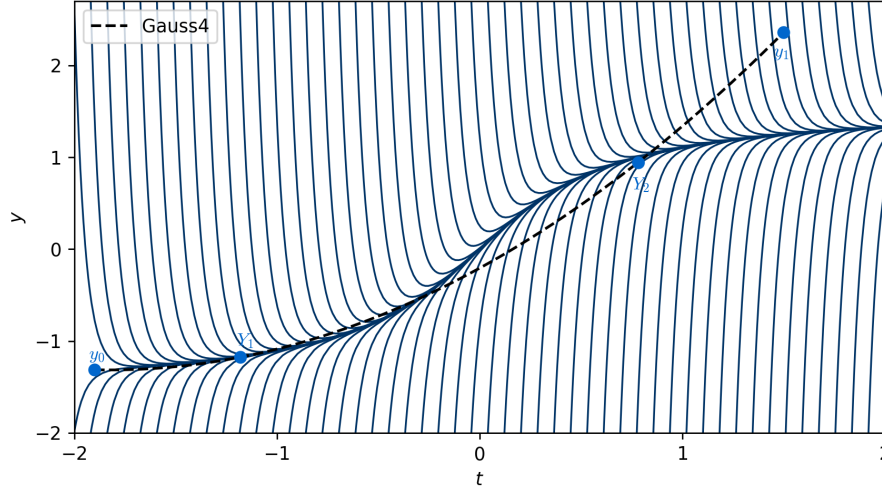
egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $y(t) = \varphi(t)$, amivel beláttuk az állítást. ■

Természetesen úgy is megmutathattuk volna $\varphi(t)$ -ről, hogy megoldás, ha csak behelyettesítjük a (3.4) egyenletbe és ellenőrizzük az egyenlőség teljesülését. De mi a fentebbi levezetéssel azt is igazoltuk, hogy nincs más megoldás.

A továbbiakban a [10] cikkben látható példát reprodukáljuk és vizsgáljuk, ekkor $\varphi(t) = \arctan 2t$, $\lambda = -20$. Az $\arctan 2t$ szép sima függvény, ezért az $y(t_0) =$

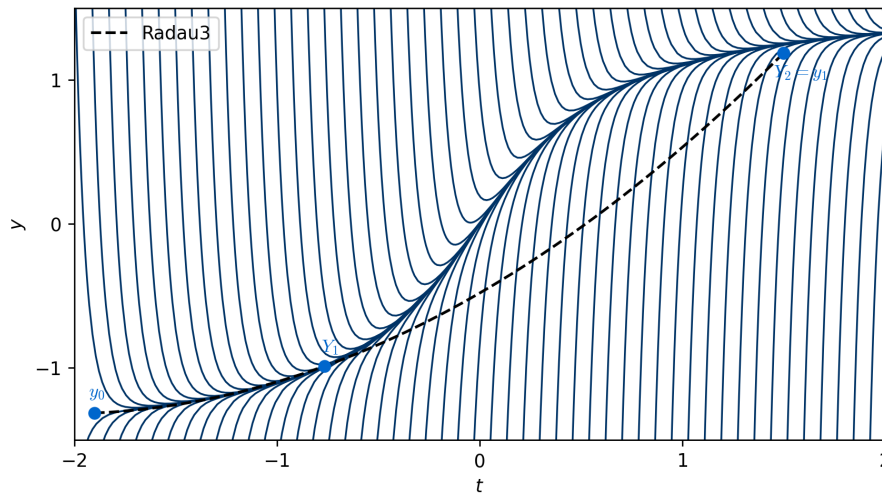
$\varphi(t_0)$ kezdeti értékből indított numerikus megoldásoktól is el szeretnénk várni ezt a tulajdonságot. Azonban a környező megoldások $Re \lambda \ll 0$ esetén gyors átmeneti fázissal rendelkeznek $\varphi(t)$ felé. Ezek az átmeneti fázisok jól láthatóak a 19-20. ábrákon.

Két módszert fogunk alaposabban megvizsgálni: az $s = 2$ lépcsős, negyedrendű Gauss–Legendre (Gauss4) módszert és az $s = 2$, harmadrendű Radau IIA (Radau3) módszert.



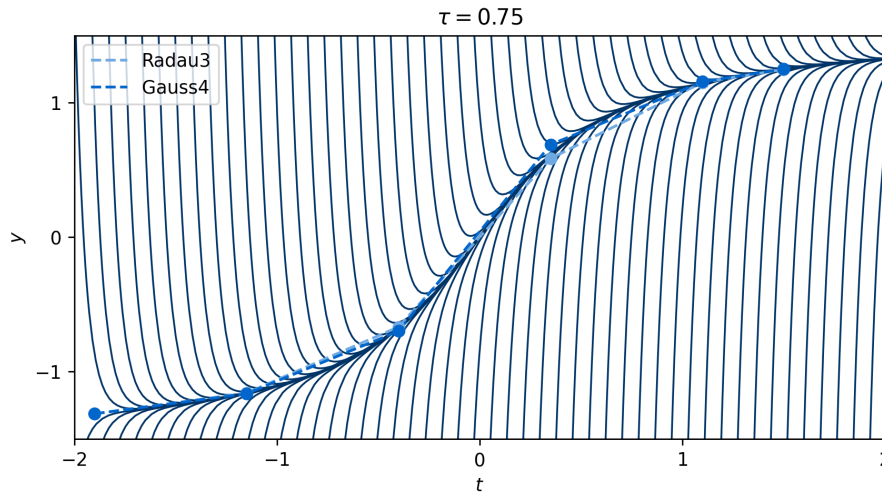
19. ábra. A (3.4) egyenlet megoldása Gauss4 módszerrel, $\varphi(t) = \arctan 2t$, $\lambda = -20$ mellett, $t_0 = -1.9$ kezdeti idővel, $\tau = 3.4$ lépésközzel

A 19. ábrán látható, hogy hiába indítjuk a megoldásunkat a $\varphi(t_0)$ értékből, amiből elvárnánk, hogy a kiinduló megoldás szép legyen, a Gauss4 módszer által nyújtott numerikus közelítés hibás. Ugyan az Y_1 , Y_2 lépcsőkre kiszámolt értékek a pontos megoldás környékén vannak, a numerikus megoldó ezekkel az értékekkel csak továbbszámol, nem jegyzi fel őket. Egy lépés után az y_1 érték jelentősen meghaladja a pontos megoldás értékét, emiatt a Gauss4 módszert nem érdemes ilyen nagy lépésköz mellett erre a feladatra alkalmazni.



20. ábra. A (3.4) egyenlet megoldása Radau3 módszerrel, $\varphi(t) = \arctan 2t$, $\lambda = -20$ mellett, $t_0 = -1.9$ kezdeti idővel, $\tau = 3.4$ lépésközzel

A 20. ábrán jól látható, hogy mi a Radau3 módszer előnye a Gauss4 módszerrel szemben. A módszer nem becsüli alul vagy felül a közelítendő megoldást, az y_1 értékre a második lépcsőre kiszámolt értéket, Y_2 -t adja vissza, amely jó közelítése lesz a megoldásnak. A Radau módszer az ábrán megmutatja a $c_s = 1$ és az $a_{sj} = b_j$ feltételek fontosságát. Azokat a módszereket, melyek teljesítik ezen feltételeket, *stiffly accurate* módszereknek hívják, ezekre teljesül, hogy $y_{n+1} = Y_s$. Az ilyen megoldók egy lépésnél az utolsó lépcsőre kiszámolt értéket adják vissza. Leolvasható az $s = 2$ lépcsőszámú Radau IIA módszer Butcher-táblójából (15. táblázat), hogy a Radau3 módszer valóban ilyen tulajdonságú.



21. ábra. A (3.4) egyenlet megoldása Radau3 és Gauss4 módszerrel, $\varphi(t) = \arctan 2t$, $\lambda = -20$ mellett, $t_0 = -1.9$ kezdeti idővel, $\tau = 0.75$ lépésközzel

Természetesen megfelelően kis lépésközzel mindkét módszer jó eredményt ad. Kisebb, már $\tau = 0.75$ hosszúságú lépésközzel is szép eredményt produkál mindkét módszer, amely a 21. ábrán látható.

3.3. Lánggömb

Mikor az ember meggyújt egy gyufát, a gyufaszálon lévő vegyület meggyullad, és ennek égésével egy gyorsan növekvő lánggömb keletkezik a gyufahegy körül. A lánggömb egy kritikus szint eléréséig ég, amely után stabilizálódik a lánggömb mérete, ezt tartja fenn az égés során.

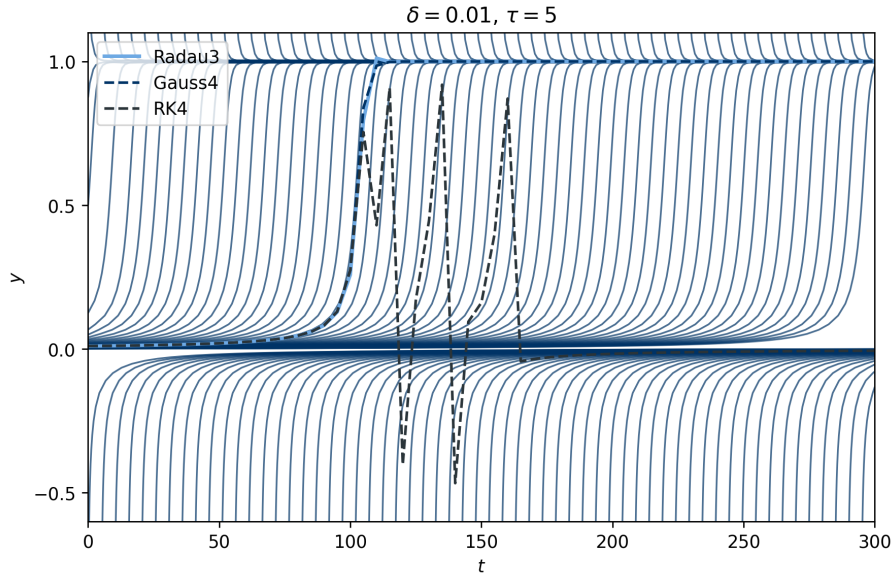
Ez a jelenség leírható az alábbi differenciálegyenlettel, ahol $y(t)$ a lánggömb sugarát jelöli a t időpontban.

$$\begin{aligned} y'(t) &= y^2(t) - y^3(t) \\ y(0) &= \delta \end{aligned} \tag{3.5}$$

Az y^2 és y^3 tagok a felszínből és térfogatból jönnek, δ egy kellően kicsi paraméter, t pedig a $[0, \frac{3}{\delta}]$ intervallumon fut [9]. A feladat megoldásaira lassú növekedés jellemző $t = \frac{1}{\delta}$ ideig, ezután egy gyors, 1-hez növekvő átmeneti fázis jellemzi a feladatot, amely után a megoldások stabilizálódnak, lásd 22. ábra. Az egyenlet kezdetben nem merev, de azzá válik ahogy a megoldás stabilizálódik az 1 környékén.

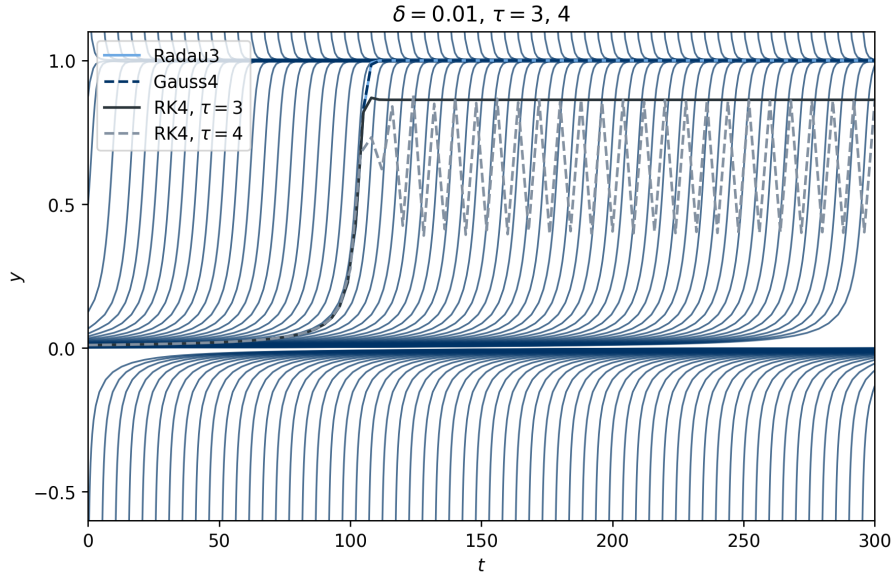
A stabilizálódás hosszú ideig eltarthat, ha δ kellően kicsi. Emiatt érdemes nagyobb τ lépésközt választani, hogy a megoldás elején történő lassú növekedésnél és az átmeneti fázist követő stabil résznél ne értékeljük ki feleslegesen sűrűn a közelítést.

Megvizsgáltuk a feladatot a Gauss4, Radau3 és az RK4 módszerekkel különböző lépésközökre. Azt gondolhatnánk, hogy az RK4 módszer hasonlóan jól fog működni, mint a két implicit módszer, hiszen az RK4 rendje megegyezik a Gauss4 módszer rendjével. De nem ezt fogjuk tapasztalni.



22. ábra. A (3.5) egyenlet megoldása $\delta = 0.01$ kezdeti értékből indítva, Radau3, Gauss4 és RK4 módszerrel megoldva, $\tau = 5$ lépésközzel

A 22. ábrán a $\tau = 5$ lépésközzel kapott megoldásokból látszódik, hogy a Radau3 és Gauss4 módszerek még ilyen nagy lépésköz mellett is szépen kezelik az átmeneti fázist, ekkora τ mellett abszolút elfogadható hibával dolgoznak. Ezzel szemben az RK4 módszer teljesen elfogadhatatlan közelítést ad. Ugyan a $[0, 100]$ intervallumon ugyanúgy szépen követi a pontos megoldást, mint a másik két módszer, az átmeneti fázis közben a módszer elromlik. A hibás lépés utáni értékek már nem elfogadhatóak, hiszen a megoldás negatív értéket is felvesz, ami azt jelentené hogy egy pillanatban a lánggömb sugara negatív. Nézzük meg, hogy csökkentett τ esetén javul-e a kapott megoldások minősége.



23. ábra. A (3.5) egyenlet megoldása $\delta = 0.01$ kezdeti értékből indítva, Radau3, Gauss4 módszerrel megoldva $\tau = 3$ lépésközzel és RK4 módszerrel megoldva, $\tau = 3, 4$ lépésközökkel

Ahogy várható volt, csökkentett lépésközökre a módszerek jobb eredményeket adnak. A Radau3 és Gauss4 módszernél a 23. ábrán szembeűnő javulás nem igazán látható, de megoldásaik simább görbét adnak. A közelítésük már szigorúan 1 alatt marad, ellentétben a 22. ábrán látottakkal, ahol a Radau3 módszer által adott közelítés egy kicsit az 1 érték fölé megy az átmeneti fázis végén.

Az RK4 módszer megoldása is javult, már nem adott negatív értéket, de a megoldása ettől függetlenül nem elfogadható. A $\tau = 4$ lépésköz mellett a megoldás az átmeneti fázis után oszcillálni kezd. A gyakorlatban ez egy olyan lánggömböt jelentene, amelynek mérete (sugara) váltakozva hol csökkenne, hol nőne. A $\tau = 3$ lépésközzel már oszcilláció sincs, az RK4 megoldása stabilizálódik, de sajnos nem a megfelelő érték körül. Emiatt az RK4 módszernek még szigorúbb lépésköz megköteket kell teljesítenie, hogy elfogadható közelítést adjon. A gyakorlatban $\tau < 2$ lépésköz már elegendő volt ahhoz, hogy az átmeneti fázist jól kezelje, és az 1 környékén stabilizálódjon.

3.4. Példa egy újabb stabilitási fogalomhoz

Tekintsük a [11]-ben található

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2x(t) + y(t) + 2 \sin t \\ y'(t) &= 998x(t) - 999y(t) + 999(\cos t - \sin t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

differenciálegyenlet-rendszert. Megmutatható, hogy a (3.6) rendszer általános megoldását az

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{-1000t} + \sin t \\ y(t) &= c_1 e^{-t} - 998c_2 e^{-1000t} + \cos t \end{aligned} \quad (3.7)$$

képlet adja. A rendszer megoldásának mindkét komponense szinte minden kezdeti érték mellett rendelkezik egy meredek átmeneti fázissal a $t = 0$ időpont környékén.

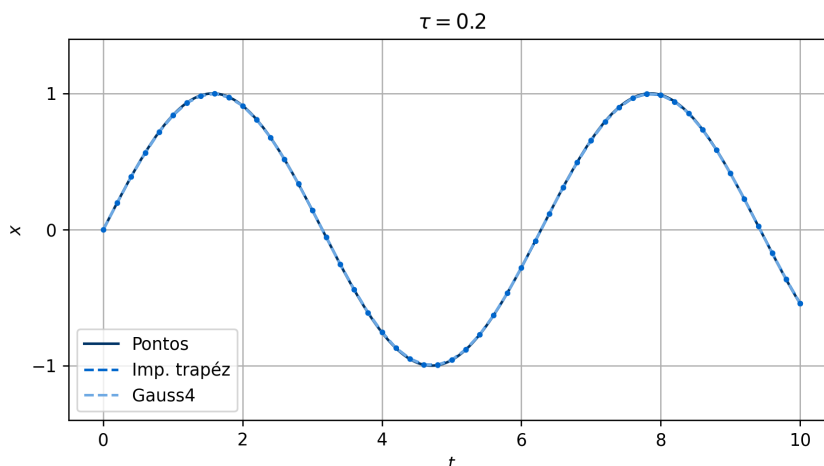
A $c_1 = 0$ és $c_2 = 0$ választásokhoz tartozó megoldás ugyan nem rendelkezik ilyen fázissal, de ennek ellenére a feladatot nem tudja megoldani az ötödrendű, adaptív lépésközű RKF45 módszer, csak nagyon kicsi, $\tau = 0.003$ hosszúságú és ennél kisebb lépésköz mellett (lásd [11], 6.1 ábra). Ez aggasztó lehet, hiszen ekkor a módszer az $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$ megoldást nem tudja jól visszaadni, ami alaptól nem okozhatna nehézséget.

A problémát a merev rendszerek szerkezetében kell keresni. Az ilyen feladatok megoldása általában két vagy több tag összegére bontható, amelyek közül egyesek gyorsan (de általában különböző sebességgel) lecsengenek, míg a többi megmarad, és különböző kezdeti feltételekből indítva is ehhez tartanak a megoldások. A (2.4) rendszernél láttunk már ilyet, ott három komponens volt, melyek a különböző anyagfajtáknak feleltek meg. A (2.1) feladatnál az e^{-50t} tag volt a gyorsan lecsengő, a $\cos t$ és $\sin t$ tagok voltak a stabil tagok. A mostani (3.6)-(3.7) példánkban a megoldás két gyorsan lecsengő taggal rendelkezik: e^{-t} és e^{-1000t} , melyek lecsengése után az $x(t)$ és $y(t)$ függvények a $\sin t$ és $\cos t$ függvényekhez tartanak.

A következőkben mi az $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ kezdeti értékből indított megoldást fogjuk közelíteni numerikusan az implicit trapéz módszerrel, a kétlépcsős negyedrendű Gauss4 és az implicit Euler-módszerrel. Ekkor a pontos megoldást az

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{999}e^{-t} + \frac{1}{999}e^{-1000t} + \sin t \\ y(t) &= -\frac{1}{999}e^{-t} - \frac{998}{999}e^{-1000t} + \cos t \end{aligned}$$

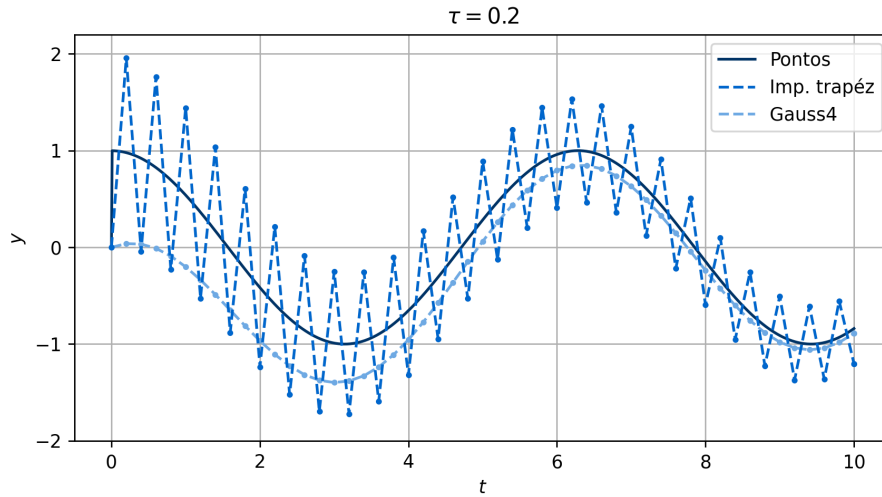
$t \geq 0$ függvények adják.



24. ábra. A (3.6) rendszer $x(t)$ komponensének megoldása a $[0, 10]$ intervallumon, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ kezdeti értékből indítva, Gauss4 és implicit trapéz módszerrel, $\tau = 0.2$ lépésközzel

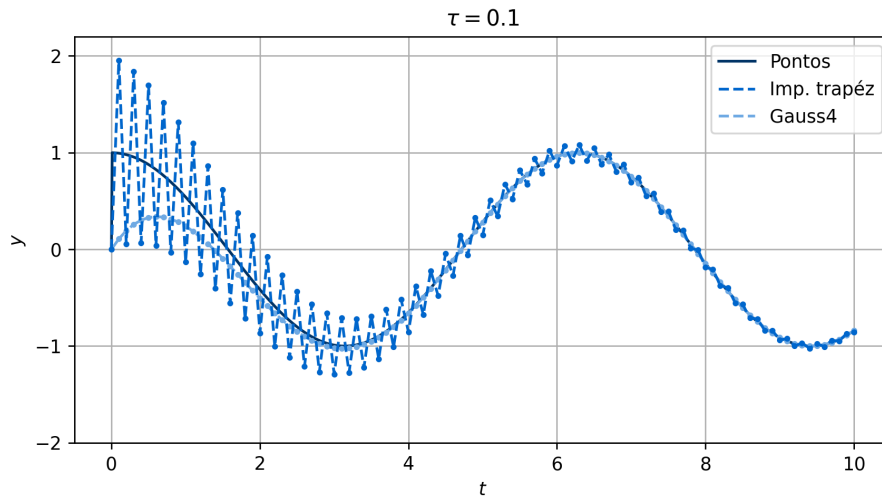
A 24. ábráról leolvasható, hogy mind az implicit trapéz, mind a Gauss4 módszer az $x(t)$ tagot jól közelíti $\tau = 0.2$ lépésköz mellett. Azonban ez az $y(t)$ közelítéséről már nem mondható el. Az implicit trapéz módszer olyan oszcillációs tulajdonságot mutat a megoldás körül, amely csak hosszabb idő alatt csillapodik annyira, hogy az $y(t)$ értékére elfogadható megoldást adjon. A 25. ábrán látható, hogy $t = 10$

időpontig is jelentős az oszcilláció, emiatt alacsonyabb τ lépésközzel kell alkalmazni a módszert, hogy ez a rossz tulajdonság hamarabb megszűnjön. A Gauss4 módszer megoldása ugyan nem oszcillál, sima megoldást ad, de a megoldási intervallum elején nagyon alulbecsüli a pontos megoldás értékét. A 25. ábráról leolvasható, hogy a Gauss4 módszernek nem kell annyi idő, mint az implicit trapéz módszernek, hogy a pontos megoldás közelébe érjen, már a $t = 5$ időpontban is elfogadhatóan közel kerül hozzá.



25. ábra. A (3.6) rendszer $y(t)$ komponensének megoldása a $[0, 10]$ intervallumon, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ kezdeti értékből indítva, Gauss4 és implicit trapéz módszerrel, $\tau = 0.2$ lépésközzel

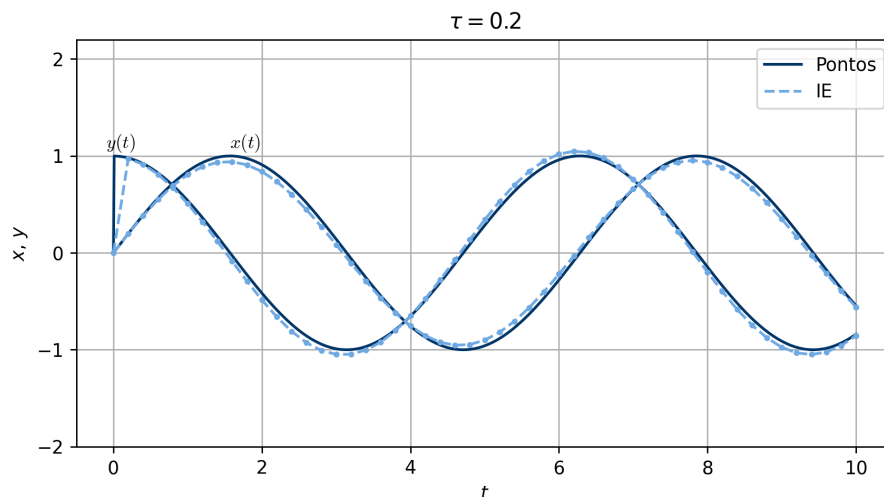
Amennyiben csökkentjük a lépésközt $\tau = 0.1$ -re, láthatóvá válik a 26. ábrán, hogy a Gauss4 és az implicit trapéz módszerek megoldásai javulnak. Az implicit trapéz módszer megoldása továbbra is oszcillál, de már $t = 5$ környékére kellően közel kerül a pontos megoldáshoz, a $t = 10$ időpontra már a Gauss4 módszer által adott közelítéssel és a pontos megoldással együtt mozog.



26. ábra. A (3.6) rendszer $y(t)$ komponensének megoldása a $[0, 10]$ intervallumon, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ kezdeti értékből indítva, Gauss4 és implicit trapéz módszerrel, $\tau = 0.1$ lépésközzel

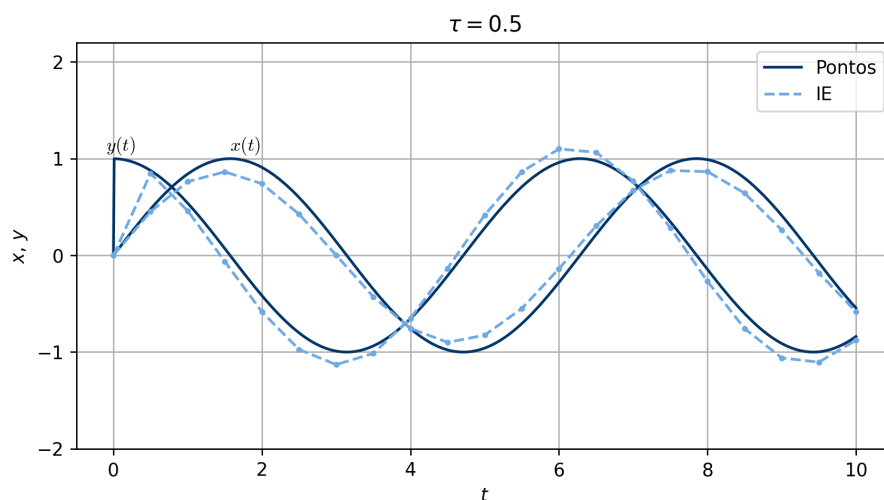
A Gauss4 módszer megoldása is sokat javul, ugyan továbbra is alulbecsüli a pontos megoldást az elején, de már csak sokkal rövidebb intervallumon, és a $t = 2$ időpontot elérve a Gauss4 közelítése a pontos megoldás egy szűk környezetébe ér.

Amennyiben a feladatot az implicit Euler-módszer segítségével oldjuk meg $\tau = 0.2$ lépésközzel, láthatjuk a 27. ábrán, hogy a módszer megoldása nem rendelkezik az implicit trapéz vagy a Gauss4 módszerek közelítéseinek hibáival. Az IE módszer $\tau = 0.2$ lépésközzel nagyon pontos megoldást ad, pontosabbat mint a másik két módszer, annak ellenére, hogy fele, illetve negyed akkora renddel bír, mint a másik kettő.



27. ábra. A (3.6) rendszer megoldása a $[0, 10]$ intervallumon, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ kezdeti értékből indítva, IE módszerrel megoldva, $\tau = 0.2$ lépésközzel

Ami még lenyűgözőbb, hogy nagyobb lépésközzel, még $\tau = 0.5$ mellett is elfogadható a módszer közelítő megoldása, ahogy a 28. ábrán látható. Ekkora lépésközzel már kevésbé mozog olyan szorosan a kapott megoldás a pontos megoldás mellett, mint az előző példában, de a korábbi megoldásokhoz képest még így is jobb eredményt produkál 2.5-szer nagyobb lépésköz mellett.



28. ábra. A (3.6) rendszer megoldása a $[0, 10]$ intervallumon, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ kezdeti értékből indítva, IE módszerrel megoldva, $\tau = 0.5$ lépésközzel

Minek köszönheti az IE módszer a jó közelítéseket? A módszer az A-stabilitás mellett teljesít még egy stabilitási tulajdonságot, miszerint minden $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \lambda < 0$ esetén a $z = \tau\lambda$ számokra $|z| \rightarrow \infty$ esetén $R(z) \rightarrow 0$, vagyis a módszer stabilitási függvényének értéke tart a 0-hoz, ahogy a z nempozitív valós résszel rendelkező komplex szám hossza tart a végtelenhez. Az A-stabilitás mellett ezt a tulajdonságot teljesítő módszereket *L-stabil* módszereknek hívjuk. Az L-stabil módszerek jobban kezelik az átmeneti fázisokat, kevesebb hibát halmoznak fel, mint más módszerek. Ezt mi az előbb láttuk is, az IE módszer L-stabilitása megmagyarázza a jelenséget.

Az L-stabilitás vonzó tulajdonság lehet ezután, de ahogy a [11] 6.18 rendszer IE módszerrel kapott numerikus megoldásán látható, (lásd [11], 6.5 ábra) a közelítés tart a 0-hoz, miközben a pontos megoldás nem cseng le. Emiatt a módszer megoldása elfogadhatatlan. Ezt a rossz tulajdonságot már a harmonikus rezgőmozgás példáján is láttuk.

3.5. Konklúzió

A gyakorlati példákból levonható első és legfontosabb tanulság az, hogy érdemes a feladatokat elemezni a numerikus megoldásuk előtt. Hasznos először rövidebb intervallumokon megoldani a problémákat, hogy látszódjanak a módszerek megoldásainak tulajdonságai, pozitívumai, hátrányai. Így nem pazarlunk el sok időt arra, hogy hosszú intervallumon oldjuk meg a feladatokat, anélkül, hogy garantálható lenne a jó közelítő megoldás. Fontos, hogy nem feltételezhetjük, hogy egy már korábbi példán jól működő numerikus módszer a következő feladaton is hasonló pontossággal fog működni. Ezt a korábbi példák jól tanúsítják. Végző soron merev feladatoknál érdemes az implicit módszerekkel próbálkozni, ahogy azt láttuk az elméleti részben, mivel csak ezek a módszerek lehetnek A-stabilak. Továbbá a dolgozatban bemutatott példák is megmutatták, hogy az explicit módszerek csak jelentősen kis τ lépésközzel adnak jó közelítést merev feladatokon.

Összefoglalás, kitekintés

A szakdolgozat első fejezetében bevezettük a Runge–Kutta-módszereket és azok konvergenciájának ill. konvergenciájának a rendjét. Elemeztük ezeket a módszereket explicitiségük és implicitiségük alapján, megállapítottuk az egyes előnyeiket és hátrányaikat. Az elméleti részben bevezettük a stabilitási függvény, abszolút stabilitás és A-stabilitás fogalmát. Megállapítottuk, hogy az explicit Euler-módszer nem, de az implicit Euler-módszer A-stabil. Megmutattuk, hogy az (1.8) θ -módszer is A-stabil $\theta \geq \frac{1}{2}$ esetén. Általános képletet adtunk a módszerek stabilitási függvényeire, amellyel explicit módon fel tudtuk írni a módszerek stabilitási függvényeit anélkül, hogy a Dahlquist-féle lineáris tesztegyenletre alkalmaztuk volna őket. A 2.10 következménnyel megállapítottuk, hogy az explicit Runge–Kutta-módszerek nem lehetnek A-stabilak, az ilyen stabilitási tulajdonságú módszereket emiatt az implicit módszerek között kerestük. A Padé-approximációk bevezetésével általánosítottuk az A-stabilitást, egy-egy módszer helyett egész módszercsaládok stabilitási tulajdonságait tudtuk meghatározni. Az exponenciális függvény Padé-táblájának segítségével meg tudtuk határozni az A-stabil függvényeket, és ennek alapján beláttuk, hogy a Gauss–Legendre és a Radau módszerek is A-stabilak. Az utolsó fejezetben több példát is mutattunk merev feladatok numerikus megoldására, és láttuk, hogy nem mindig egyértelmű, mely módszerek lesznek hatékonyak egy adott példán.

A szakdolgozatban számos kapcsolódó témakörrel nem esett szó, ilyenek például a stabilitásnak különböző esetei: *B-stabilitás*, *L-stabilitás*, *A(α)-stabilitás*, *merev-stabilitás*. Az A-stabilitás általánosítása, az AN-stabilitás is a szakdolgozat témaköréhez kapcsolódik. Ez nem más, mint az A-stabilitás olyan általánosítása, amely az időfüggő $\lambda(t)$ együtthatójú Dahlquist-féle tesztfeladathoz kötődik. A Padé-approximációkkal mi a szakdolgozatban csak a felszínt súroltuk, azonban számos olyan témakör van, amely ebből indul ki, mint például a *rendcsillagok*. Nem volt szó a többlépéses módszerekről, viszont ezekre ugyanúgy lehet definiálni az A-stabilitást. Fontos eredmény, hogy a Runge–Kutta-módszerekkel szemben, ahol nincs felső határ egy A-stabil módszer rendjére, a lineáris többlépéses módszereknél van ilyen: *Dahlquist rendtétele* kimondja, hogy egy lineáris többlépéses A-stabil módszer rendje legfeljebb 2 lehet.

Hivatkozások

- [1] Csomós Petra (2024) *Numerikus módszerek 2 előadás*
- [2] Süli, E. and Mayers, D.F. (2003) *An introduction to numerical analysis*. Cambridge, England: Cambridge University Press. Available at: <https://doi.org/10.1017/cbo9780511801181>, 326-327.
- [3] Butcher, J.C. (2008) *Numerical methods for ordinary differential equations*. Nashville, TN: John Wiley & Sons, 187, 99, 222-229, 215-222, 232-235.
- [4] Butcher, J.C. (1985) "The non-existence of ten stage eighth order explicit Runge-Kutta methods," *BIT numerical mathematics*, 25(3), pp. 521–540. Available at: <https://doi.org/10.1007/bf01935372>.
- [5] Butcher, J.C. (1965) "On the attainable order of Runge-Kutta methods," *Mathematics of computation*, 19(91), p. 408. Available at: <https://doi.org/10.2307/2003670>.
- [6] Hairer, E. and Wanner, G. (2014) *Solving ordinary differential equations II: Stiff and differential - algebraic problems*. New York, NY: Springer. 2-6.
- [7] Iserles, A. (2012) *Cambridge texts in applied mathematics: A first course in the numerical analysis of differential equations*. 2nd ed. Cambridge, England: Cambridge University Press. 53-63.
- [8] Dekker, K. (1984) *Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations*. Edited by K. Dekker and J.G. Verwer. London, England: Elsevier Science. 40-44, 72, 73.
- [9] MathWorks®: Merev feladatok, rendszerek dokumentáció
<https://www.mathworks.com/company/technical-articles/stiff-differential-equations.html>
- [10] Engquist, B. (ed.) (2015) *Encyclopedia of applied and computational mathematics*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. 1213-1216.
https://www.researchgate.net/publication/302467919_Radau_Methods
- [11] Lambert, J.D. (1991) *Numerical methods for ordinary differential systems: The initial value problem*. Chichester, England: John Wiley & Sons. 213-229.
- [12] Python-kódok a számítógépes szimulációkhoz
<https://github.com/Adiklafa/BSc-Matematika-szakdolgozat.git>

Nyilatkozat Mesterséges Intelligencia használatáról

Alulírott *Temesvári Ádám* nyilatkozom, hogy szakdolgozatom elkészítése során az alább felsorolt feladatok elvégzésére a megadott MI alapú eszközöket alkalmaztam:

Feladat	Felhasznált eszköz	Felhasználás helye	Megjegyzés
Hibakódok	ChatGPT-4o	Programkódok	Hibakódok megmagyarázása, javítás ajánlása
Numerikus módszerek	ChatGPT-4o	3. fejezet	Implicit módszerekre numerikus gyökkeresés
Latex táblázat	ChatGPT-4o	17. táblázat	Padé-tábla formázás

A felsoroltakon túl más MI alapú eszközt nem használtam.